ОБЛАСТ 3

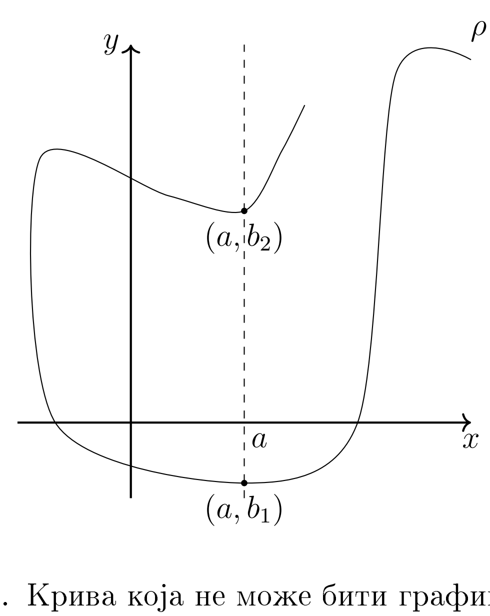
Лимеси и непрекидност функција

У овој глави ћемо дефинисати основне појмове математичке анализе, непрекидност и граничну вредност функције. Како је појам непрекидности лакше разумети посматрајући график функције прво ћемо дефинисати тај појам а затим појам граничне вредности функције. Након тога ћемо показати особине ових појмова.

1. Функције

Дефиниција 1. *Пресликавање* је тројка (f, X, Y) где су X и Y скупови а f релација из X у Y са својством да је свака тачка из скупа X у релацији f са тачно једном тачком из скупа Y. Скуп X се назива *доменом пресликавања* f док се Y назива *кодоменом пресликавања.* Домен ћемо означавати и са $\mathcal{D}(f)$. Релација f која је подскуп производа $X \times Y$ може да се види и као график пресликавања, $\mathrm{Graph}(f) := \{(x, y) \mid y = f(x),\ x \in X\}$. Често се за пресликавање користи ознака $f : X \to Y$. $\Diamond$

Као што је речено у дефиницији, свако пресликавање је релација, али не задаје свака релација неко пресликавање. То можемо видети на примеру релације ρ која је задата на Слици 1. Тачка $x = a$ је у релацији са две различите тачке, b_1 и b_2.



Слика 1. Крива која не може бити график функције

Следећом дефиницијом издвајамо пресликавања која задовољавају додатна својства.

Дефиниција 2. Кажемо да је пресликавање $f : X \to Y$ *инјекција* или „$1-1$" ако за свако $x_1, x_2 \in X$ важи импликација

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Кажемо да је пресликавање $f : X \to Y$ *сурјекција* или „НА" ако важи

$$(\forall\, y \in Y)(\exists\, x \in X)\ f(x) = y.$$

Инјективно и сурјективно пресликавање називамо *бијекцијом*. Ако је f бијективно пресликавање тада можемо да дефинишемо *инверзно* пресликавање, у ознаци

$$f^{-1} : Y \to X,$$

које је за свако $y \in Y$ дефинисано са $f^{-1}(y) := x$ где је $x \in X$ једниствен елемент за који важи $f(x) = y$. $\Diamond$

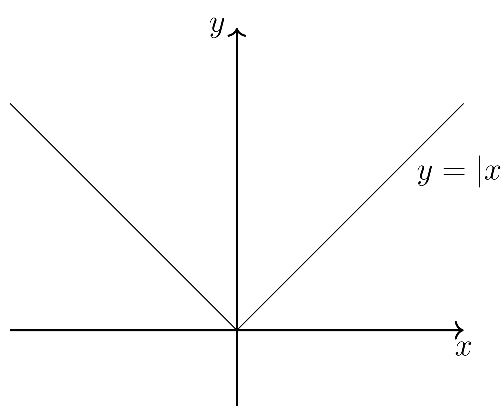
Приметимо да постојање елемента x (у дефиницији инверза) следи из чињенице да је f сурјекција а његова јединственост из чињенице да је f „$1-1$".

Функцијама ћемо називати пресликавања чији су домен и кодомен подскупови скупа реалних бројева.

Пример 3. Функција *апсолутна вредност* $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дефинисана је са (видети график на Слици 2)

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

$\sharp$



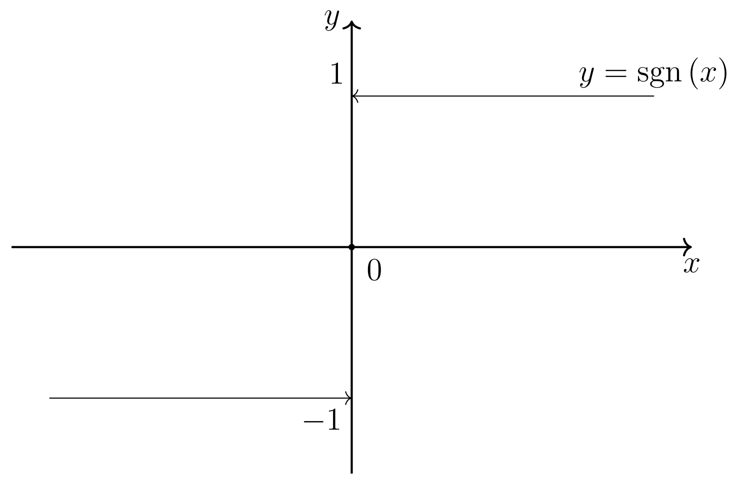
Слика 2. График функције апсолутна вредност

Пример 4. Функција *знак броја*, коју означавамо са sgn, дефинишемо на следећи начин (видети график на Слици 3)

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

$\sharp$

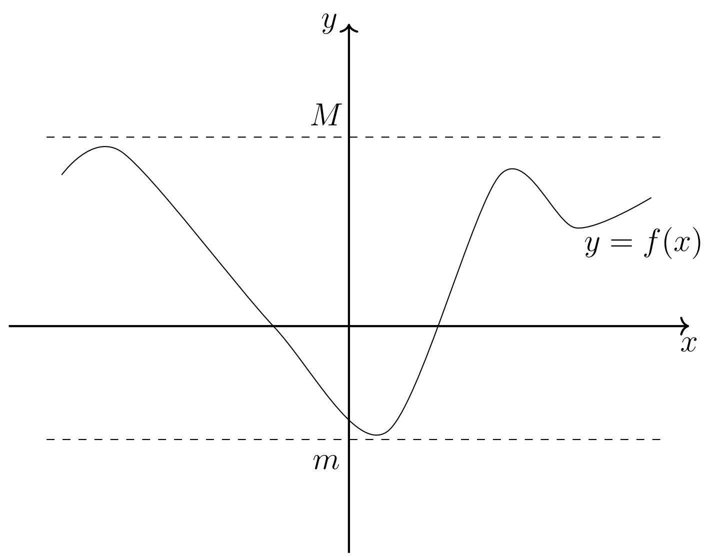
У поглављу о низовима смо дефинисали појам ограниченог низа. Видели смо да је то низ чији су елементи распоређени на ограниченом делу бројевне праве. Слично, можемо да дефинишемо појам ограничене функције чији ће график бити у некој ограниченој траци паралелној x-оси.



Слика 3. График функције знак броја

Дефиниција 5. Нека је $X = \mathcal{D}(f) \subset \mathbb{R}$. Кажемо да је функција $f : X \to \mathbb{R}$ *ограничена одозго* на скупу $A \subset X$ ако постоји $M \in \mathbb{R}$ такво да важи $f(x) \leq M$ за све $x \in A$. Функција f је *ограничена одоздо* на скупу A ако постоји $m \in \mathbb{R}$ такво да је $f(x) \geq m$ за све $x \in A$. Кажемо да је функција f *ограничена* на скупу A ако је она ограничена одозго и одоздо на скупу A. Кажемо да је функција ограничена ако је ограничена на свом домену. $\Diamond$

Пример 6. График ограничене функције налази се између две хоризонталне линије, $y = m$ и $y = M$ (то су испрекидане линије на Слици 4). Функција $f(x) = |x|$ је ограничена одоздо (једно доње ограничење је 0) док је функција $f(x) = -x^2 + 10$ ограничена одозго (једно горње ограничење је 13). $\sharp$



Слика 4. Пример ограничене функције

Дефиниција 7. *Супремум* функције $f : X \to \mathbb{R}$ на скупу $A \subset X$ је величина

$$\sup_{x\in A} f(x) := \sup\{f(x) \,|\, x \in A\}.$$

Користићемо и ознаку $\sup\limits_A f$. *Инфимум* функције на скупу A је величина

$$\inf_{x\in A} f(x) := \inf\{f(x) \,|\, x \in A\}.$$

Инфимум функције на скупу ћемо означавати и са $\inf\limits_A f$. Ако за неко $x_0 \in A$ важи $f(x_0) = \sup\limits_A f$ (односно $f(x_0) = \inf\limits_A f$) онда се $f(x_0)$ назива *максимумом* (односно *минимумом*) функције f на скупу A и означава се са $\max\limits_A f$ (односно $\min\limits_A f$). Тада кажемо да функција f достиже свој максимум (односно минимум) на скупу A. $\diamondsuit$

Пример 8. Ако је $f(x) = x^3$ и $A = (0, 5)$ тада је $\sup\limits_A f = 125$ и он се не достиже на скупу A па функција f нема максимум на скупу A. Слично, $\inf\limits_A f = 0$ и инфимум се не достиже па функција f нема минимум на скупу A. Ако је $g(x) = \frac{1}{x}$ и $B = (0, 1]$ тада је $\sup\limits_B g = +\infty$ а $\inf\limits_B g = 1 = g(1)$ па функција g на скупу B не достиже максимум а достиже минимум у тачки $x = 1$. $\sharp$

Дефиниција 9. Нека је $X = \mathcal{D}(f) \subset \mathbb{R}$. Кажемо да је функција $f : X \to \mathbb{R}$

- *растућа* ако је $f(x_1) \leq f(x_2)$ за све елементе $x_1, x_2 \in X$ за које важи $x_1 \leq x_2$,
- *опадајућа* ако је $f(x_1) \geq f(x_2)$ за све елементе $x_1, x_2 \in X$ за које важи $x_1 \leq x_2$,
- *строго растућа* ако је $f(x_1) < f(x_2)$ за све елементе $x_1, x_2 \in X$ за које важи $x_1 < x_2$,
- *строго опадајућа* ако је $f(x_1) > f(x_2)$ за све елементе $x_1, x_2 \in X$ за које важи $x_1 < x_2$.

Кажемо да је фунција f *монотона* ако је она растућа или опадајућа, док је *строго монотона* ако је строго растућа или строго опадајућа. $\diamondsuit$

Пример 10. Функција $\operatorname{sgn} x$ је растућа али није строго растућа (важи $f(-3) = f(-5)$ а $-5 < -3$). Функција $f(x) = -x$ је строго опадајућа. $\sharp$

1.1. Елементарне функције. Функције $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ облика

$$f(x) = a_0 + a_1\,x + \ldots + a_n\,x^n$$

при чему $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ називају се *полиномским функцијама* или *полиномима*. Реални бројеви $a_0, a_1, \ldots, a_n$ називају се коефицијентима полинома. Специјалан случај полинома су константне функције, $f(x) = a_0$ за свако $x \in \mathbb{R}$. Свако полином има највише n реалних нула (реална нула је реалан број x_0 за који важи $f(x_0) = 0$).

Количник два полинома дефинише *рационалну функцију*

$$R(x) = \frac{b_0 + b_1\,x + \ldots + b_n\,x^n}{a_0 + a_1\,x + \ldots + a_n\,x^n}.$$

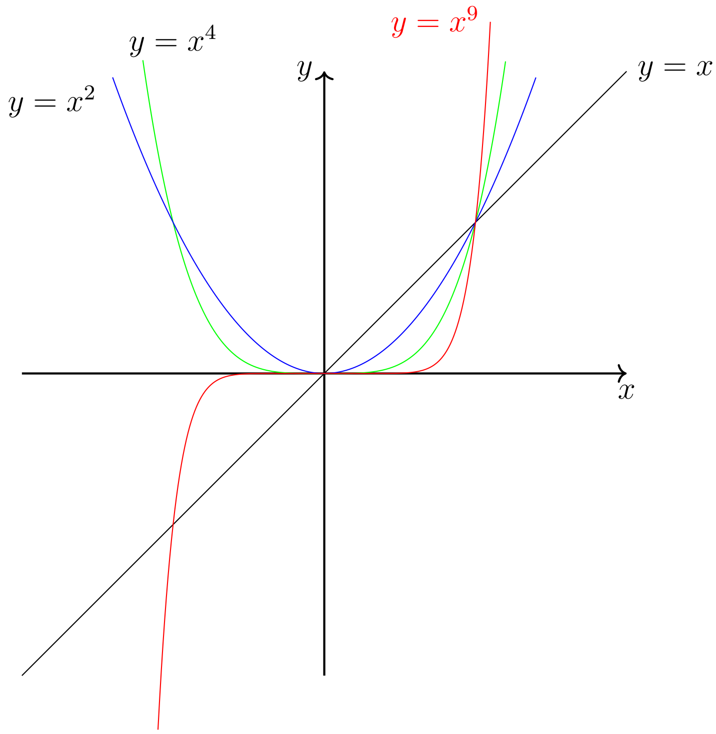
Домен рационалне функције је скуп $\{x \in \mathbb{R} \mid a_0 + a_1\,x + \ldots + a_n\,x^n \neq 0\}$. Дакле, из скупа реалних бројева искључујемо највише n елемената при одређивању домена рационалне функције.

Задатак 11. Одредити реалне нуле полинома $f(x) = x^3 + 1$ а затим одредитит домен функције $g(x) = \frac{x^5+18x-17}{x^3+1}$. ✓

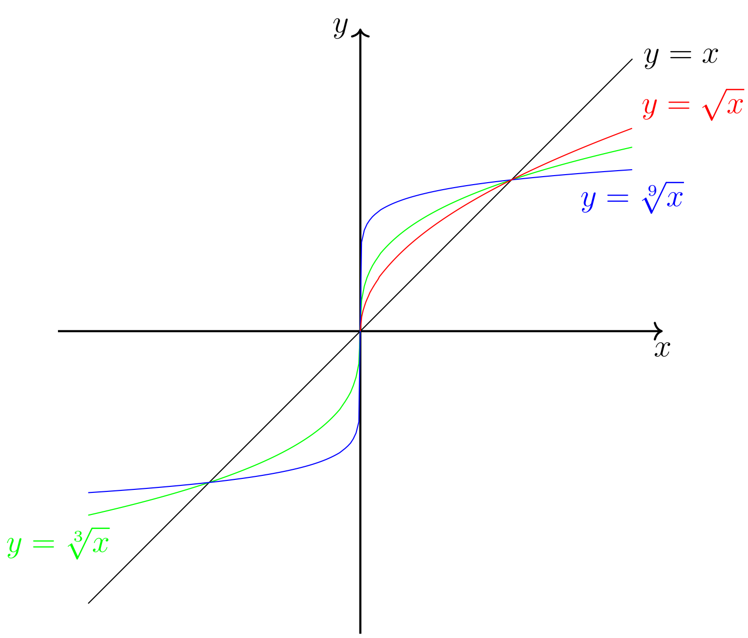
Специјалан случај полиномских функција су *степене функције*, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$ где је n фиксиран природан број. На Слици 5 приказани су графици неких степених функција. Ако је n непаран број тада је функција f „$1-1$" и „НА" па постоји њен инверз. Инверзна функција $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ назива се *кореном функцијом*. Када смо заснивали поље реалних бројева видели смо како се дефинише $\sqrt[n]{a}$ када је $a > 0$. Вредност корене функције у негативним тачкама $x < 0$ дефинише се са $\sqrt[n]{x} := -\sqrt[n]{-x}$ и $\sqrt[n]{0} := 0$. Када је степен n паран број степена функција f није „$1-1$" ($f(-1) = f(1) = 1$) и није „НА" (вредност $y = -1$ се не достиже ни у једној тачки). Ако сузимо домен и кодомен, па посматрамо пресликавање

$$g : [0, +\infty) \to [0, +\infty),\ g(x) = x^n,$$

добијамо бијективно пресликавање чији се инверз такође назива кореном функцијом. На Слици 6 приказани су графици неких корених функција.



Слика 5. Примери степених функција



Слика 6. Примери корених функција

Функција $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ дефинисана једнакошћу

$$f(x) = a^x,$$

где је $a > 0$ назива се *експоненцијалном функцијом*. Видели смо како се дефинише вредност a^x за свако $x \in \mathbb{R}$. Овако дефинисана функција је инјективна и њен инверз називамо *логаритамском функцијом* и означавамо са

$$f^{-1}(x) = \log_a x.$$

Када је основа a једнака броју e онда ћемо користити ознаку $\ln x$ или $\log x$ уместо $\log_e x$.

Синусна и косинусна фунција

$$\sin : \mathbb{R} \to [-1,1], \quad \cos : \mathbb{R} \to [-1,1],$$

припадају класи *тригонометријских функција.* Познато је да су ове функције $2\pi-$периодичне и да нису „1-1”. Сужавањем домена можемо да добијемо функције које су инјективне и њихови инверзи су *инверзне тригонометријске функције.* По договору, синусну функцију сужавамо на интервал $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ и њена инверзна функција се означава са

$$\arcsin : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Када косинусну функцију сузимо на интервал $[0,\pi]$ добијемо функцију која је „$1-1$” и „НА”, чији инверз означавамо са

$$\arccos : [-1,1] \to [0,\pi].$$

Дефиниција 12. Класа *елементарних функција* је најмања класа реалних функција реалне промењиве која садржи полиномске, корене, експоненцијалне, логаритамске, тригонометријске и инверзне тригонометријске функције и затворена је за сабирање, множење, дељење и композицију функција. ♢

Сада ћемо показати важну неједнакост између тригонометријских функција.

Тврђење 13. Важи

$$\sin\varphi \le \varphi \le \operatorname{tg}\varphi \tag{1}$$

за све $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2})$.

Доказ. Даћемо један геометријски доказ који је потпуно јасан са Слике 7. Посматрамо јединичну кружницу у равни са центром у координатном почетку и полуправу p која гради угао φ са $x-$осом. Полуправа сече кружницу у тачки B док ћемо пресек кружнице и позитивног дела x-осе означити тачком A. Тачка D се налази на $x-$оси тако да је троугао $\triangle ODB$ правоугли (прав угао је код темена D). Тачка C се налази на полуправој p тако да је $\triangle OAC$ правоугли троугао са правим углом код темена A.

Неједнакост (1) тривијално важи ако је $\varphi = 0$. Нека је $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$. Тада је

$$P_{\triangle OAB} \le P_{\angle OAB} \le P_{\triangle OAC}, \tag{2}$$

где је $P_{\triangle OAB} = \frac{\sin\varphi}{2}$ површина троугла $\triangle OAB$, $P_{\angle OAB} = \frac{\varphi}{2}$ је површина кружног исечка који одговара углу φ и $P_{\triangle OAC} = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{2}$ је површина троугла $\triangle OAC$. Множењем неједнакости (2) бројем 2 добијамо неједнакости (1) . □

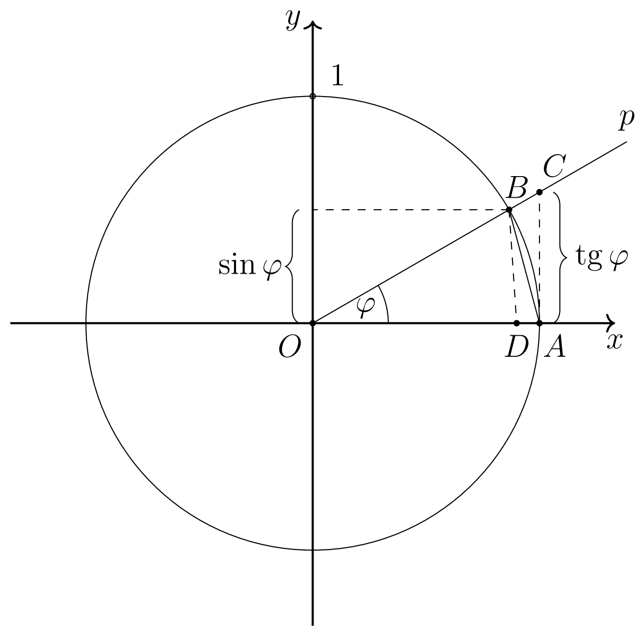
Доказ претходног тврђења нам даје следећу последицу.

Последица 14. *За свако $x \in \mathbb{R}$ важи $|\sin x| \le |x|$.*

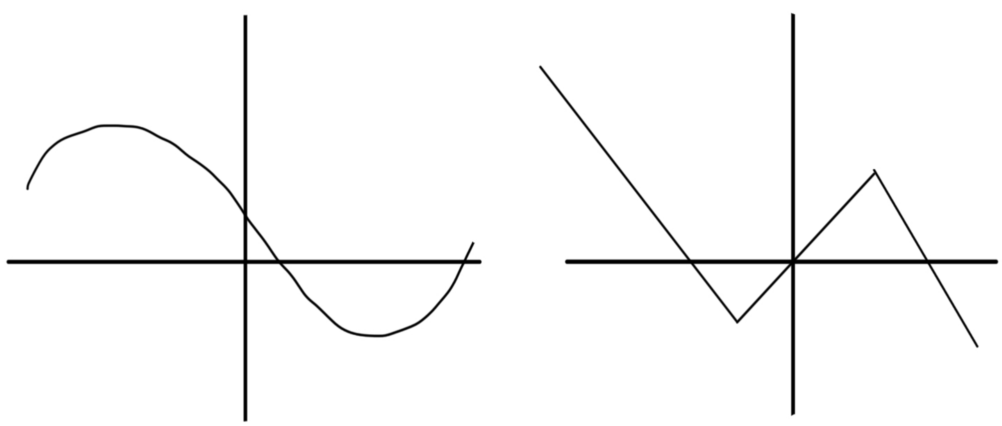
2. Основно о појму непрекидности

Појам непрекидности је најлакше исказати помоћу графика функције. Ако нам је дата *непрекидна функција* која је дефинисана на интервалу онда при цртању графика те функције не подижемо оловку са папира. График ће бити линија, крива или изломљена, која нема никаквих прекида. Ово је само интуитивна представа а мало прецизнији опис каже да је *функција непрекидна у тачки a* ако је вредност $f(x)$ произвољно близу вредности $f(a)$ кад год је аргумент x близу тачке a, било са леве било са његове десне стране. На Слици 8 видимо графике непрекидних функција. На Слици 9 видимо пример функције која није непрекидна, приметимо да се при цртању графика ове функције оловка подиже са папира у тачки $a = 5$.

Сада ћемо дати формалну дефиницију појма непрекидности у тачки.



Слика 7. Тригонометријски круг



Слика 8. Графици непрекидних функција

Дефиниција 15. Посматрамо функцију $f : A \to \mathbb{R}$ где је $A \subset \mathbb{R}$ домен функције f и нека је $a \in A$ тачка домена. Кажемо да је функција f *непрекидна у тачки* a ако и само ако важи

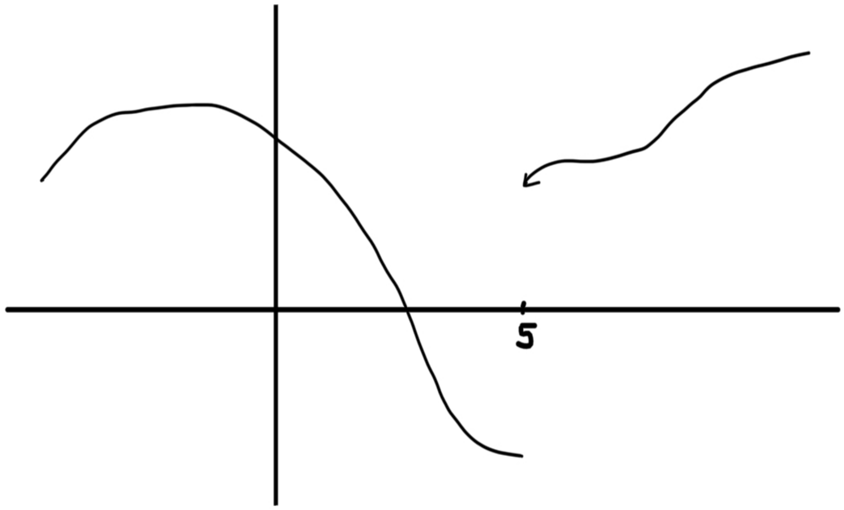
$$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, \delta > 0)(\forall\, x \in A)\ |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon. \tag{3}$$

Функција f *има прекид у тачки* a ако није непрекидна у тачки a. Кажемо да је функција *непрекидна* ако је непрекидна у свакој тачки свог домена. ♢

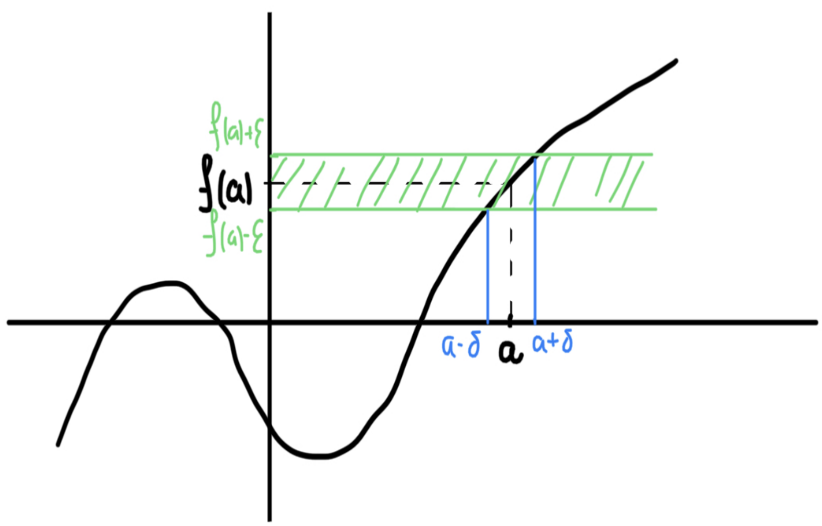
Приметимо да смо појам непрекидности дефинисали само у тачкама домена и само у тим тачкама има смисла испитивати да ли је нека функција непрекидна или прекидна.

Шта нам каже импликација (3) у Дефиницији 15? За било које $\varepsilon > 0$ можемо да нађемо δ (које може бити јако мало) тако да део графика функције који одговара тачкама из интервала $(a - \delta, a + \delta)$ упадне у $\varepsilon-$траку око вредности $f(a)$ (зелена трака на Слици 10).

Сада ћемо видети пример функције која има прекид у тачки а на овај пример ћемо се вратити и након дефиниције појма граничне вредности функције.



Слика 9. График функције која није непрекидна

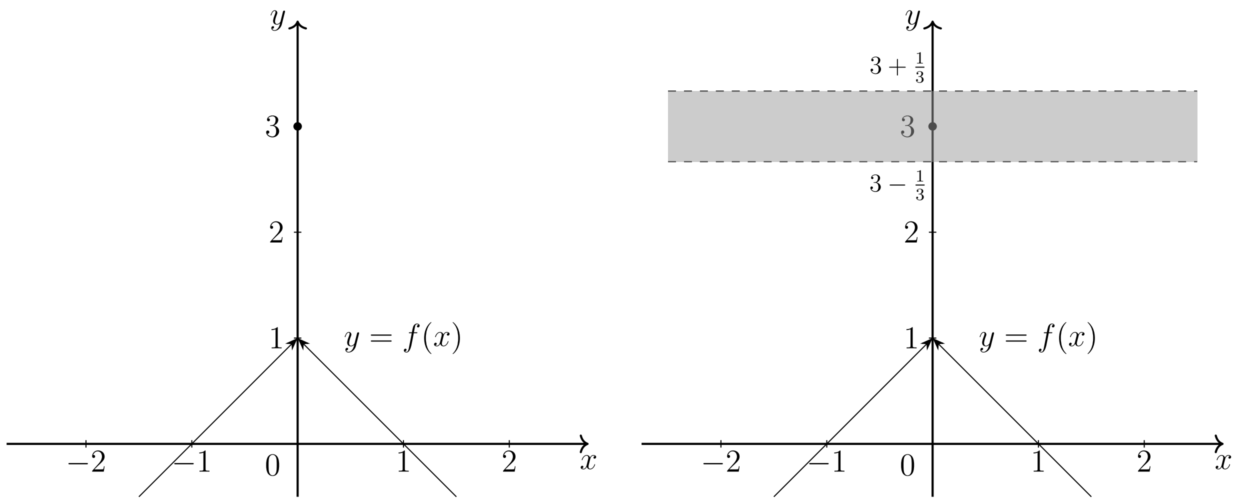


Слика 10. Графички приказ непрекидности функције у тачки

Пример 16. Дата је функција $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ на следећи начин

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x<0 \\ 1-x, & x>0 \\ 3, & x=0, \end{cases}$$

чији је график приказан на Слици 11 (слика лево). Ова функција има прекид у тачки $x = 0$ и то закључујемо на следећи начин. Узмимо да је $\varepsilon = \frac{1}{3}$ и проверимо да ли исказ (3) важи за ту вредност параметра ε. На Слици 11 (десна слика) видимо да осенчена трака око вредности $f(0) = 3$, сем тачке $(0, 3)$, не садржи ни један други део графика функције. Дакле не можемо да нађемо такво $\delta > 0$ при чему би важило (3) па закључујемо да функција има прекид у тачки $x = 0$. $\sharp$



Слика 11. Пример функције која има прекид у тачки $x = 0$

3. Гранична вредност

3.1. Дефиниција. У делу о низовима споменули смо ε-околине тачке. Сада ћемо те појмове да проширимо.

Дефиниција 17. Интервали облика $(a-\delta, a+\delta)$ (где је δ неки позитиван реалан број) називају се *околинама* или δ-околинама тачке $a \in \mathbb{R}$. Околине ћемо означавати са U_a или са $U_a(\delta)$ када желимо да истакнемо која је ширина интервала. Скупови облика $U_a \setminus \{a\}$ називају се *пробушеним околинама* тачке a. Пробушене околине означавамо са $\dot{U}_a$. Околина тачке $+\infty$ је интервал облика $(M, +\infty)$ за неко $M \in \mathbb{R}$. Пробушена околина тачке $+\infty$ је истог облика. Околина тачке $-\infty$ је интервал облика $(-\infty, C)$ за неко $C \in \mathbb{R}$. Пробушена околина тачке $-\infty$ је истог облика као и обична околина. ♢

Приметимо да је пресек две (пробушене) околине тачке $a \in \overline{\mathbb{R}}$ (пробушена) околина тачке a.

Дефиниција 18. Нека је $A \subseteq \mathbb{R}$. Кажемо да је $x \in \overline{\mathbb{R}}$ *тачка нагомилавања скупа* A ако за сваку пробушену околину тачке x важи

$$\dot{U}_x \cap A \neq \emptyset.$$

Скуп тачака нагомилавања скупа A означавамо са A'. ♢

Другим речима x је коначна тачка нагомилавања скупа A ако важи

$$(\forall\, \delta > 0)\ \left((x-\delta, x+\delta) \setminus \{x\}\right) \cap A \neq \emptyset.$$

Приметимо да само x не мора да буде елемент скупа A а дефиниција допушта да x узима вредности $+\infty$ и $-\infty$. Оно што је основна особина тачке нагомилавања јесте да се у свакој њеној околини налази бесконачно много елемената скупа A (иако, као што смо већ нагласили, она сама не мора да припада скупу A).

Задатак 19. Одредити тачке нагомилавања следећих скупова: $A_1 = (0,1)$, $A_2 = (0,1]$, $A_3 = [0,1]$, $A_4 = (0,+\infty)$, $A_5 = \{1\}$, $A_6 = \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$, $A_7 = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. ✓

Дефиниција 20. Нека је дата функција $f : A \to \mathbb{R}$ где је $A \subseteq \mathbb{R}$ и нека је $a \in \mathbb{R}$ тачка нагомилавања скупа A. Кажемо да је $L \in \mathbb{R}$ *гранична вредност* (или *лимес*) *функције* f *у тачки* a ако важи

$$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, \delta > 0)(\forall\, x \in A)\ 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon. \tag{4}$$

Тада пишемо

$$L = \lim_{x \to a} f(x).$$

$\Diamond$

Као што смо рекли тачка a, у којој тражимо лимес, не мора припадати домену функције али мора бити тачка нагомилавања домена, односно у свакој њеној околини имамо бесконачно много тачака домена. На тај начин имамо довољно тачака у којима можемо да утврдимо понашање функције колико год се приближили тачки a. Ово је битна разлика у односу на појам непрекидности. Подсетимо се да је тачка у којој испитујемо непрекидност функције била у самом домену функције док код појма лимеса не мора припадати. У случају да a припада домену функције њен лимес у тој тачки зависи само од понашања функције у пробушеној околини тачке a и не зависи од вредности функције у самој тачки a. То ћемо видети на конкретној функцији из Примера 16 за коју смо утврдили да има прекид у тачки $x = 0$ а сада ћемо видети да она има лимес и да се тај лимес разликује од $f(0)$.

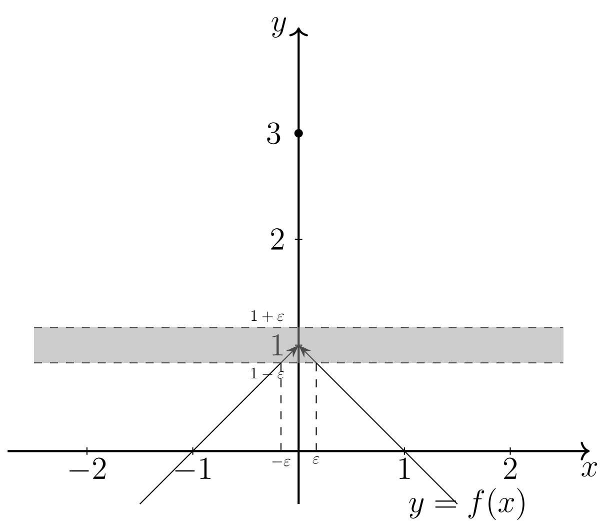
Пример 21. Дата је функција $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ на следећи начин

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 0 \\ 1-x, & x > 0 \\ 3, & x = 0. \end{cases}$$

Показаћемо да је $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$, односно да важи исказ (4) за вредност $L = 1$. За произвољно $\varepsilon > 0$ исказ (4) задовољен је за $\delta = \varepsilon$ јер у пробушеној околини $(-\varepsilon, \varepsilon) \setminus \{0\}$ важи

$$|f(x) - L| = \begin{cases} |(x+1)-1|, & -\delta < x < 0 \\ |(1-x)-1|, & 0 < x < \delta \end{cases} = |x| < \delta = \varepsilon.$$

$\sharp$



Слика 12. ε-трака око вредности $L = 1$ садржи део графика

Задатак 22. Испитати да ли функција $f(x) = x$ има лимес у тачки $a = 5$. ✓

Задатак 23. Показати да функција $f(x) = \operatorname{sgn} x$ нема лимес у тачки $a = 0$. ✓

Задатак 24. Нека је дата функција $f : A \to \mathbb{R}$ и тачка домена $a \in A$ која је уједно и тачка нагомилавања скупа A. Показати да је функција f непрекидна у тачки a ако и само ако функција f има лимес у тачки a и важи $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$. ✓

У претходној дефиницији смо допустили да гранична вредност функције узима вредности у скупу $\mathbb{R}$, односно то је био неки коначан реалан број. Дефиницију можемо да проширимо допуштајући да гранична вредност буде бесконачна.

Дефиниција 25. (**Бесконачни лимеси**) Кажемо да функција $f : A \to \mathbb{R}$ има лимес једнак вредности $+\infty$ у тачки $a \in \mathbb{R}$ која је тачка нагомилавања скупа A и пишемо $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ ако и само ако важи

$$(\forall\, M \in \mathbb{R})(\exists\, \delta > 0)(\forall\, x \in A)\; 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) > M.$$

Слично, кажемо да је гранична вредност функције f у тачки a једнака вредности $-\infty$ ако и само ако важи

$$(\forall\, C \in \mathbb{R})(\exists\, \delta > 0)(\forall\, x \in A)\; 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) < C.$$

Тада пишемо $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$. ♢

Пример 26. Посматрајмо функцију $f(x) = -\frac{1}{|x|}$. Приметимо да је домен ове функције скуп $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ и да је 0 његова тачка нагомилавања али не припада самом домену. Има смисла испитивати постојање лимеса функције у тој тачки. Остављамо за вежбу да се покаже да важи $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$. ♯

Дефиниција 27. (**Лимес у бесконачности**) Нека је дата функција $f : A \to \mathbb{R}$ при чему је $+\infty$ тачка нагомилавања скупа A. Кажемо да је $L \in \mathbb{R}$ лимес функције f у бесконачности и пишемо $L = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ако и само ако важи

$$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, M \in \mathbb{R})(\forall\, x \in A)\; x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Слично, ако је $-\infty$ тачка нагомилавања скупа A онда кажемо да функција f има граничну вредност l у $-\infty$ и пишемо $l = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ако и само ако важи

$$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, C \in \mathbb{R})(\forall\, x \in A)\; x < C \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

♢

Пример 28. Приметимо да за функцију $f(x) = \arctan x$ важи $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2}$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$. ♯

Напомена 29. Можемо да покажемо да је $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ при чему овде посматрамо лимес у бесконачности функције $f(x) = \frac{1}{x}$. Користећи овај лимес могли смо једноставније да закључимо да је $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ јер ће за свако $\varepsilon > 0$ почев од неке вредности C за све $x \geq C$ важити $|f(x)| < \varepsilon$. То значи да ће и за све природне бројеве n који су већи од C важити $\frac{1}{n} < \varepsilon$ а то је по дефиницији еквивалентно томе да је $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$.

На основу овога долазимо до следећег својства. Ако је функција f дефинисана у некој околини бесконачности и ако постоји лимес фунцкије $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$ тада ће постојати и лимес низа $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n)$ и важиће $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n) = L$. ⋄

Претходну дефиницију можемо да проширимо допуштајући да сама гранична вредност буде бесконачна а не само неки коначан реалан број. Дефинисаћемо само један појам а остале остављамо читаоцу да сами дођу до дефиниције.

Дефиниција 30. (**Бесконачан лимес у бесконачности**) Дата је функција $f : A \to \mathbb{R}$ при чему је $-\infty$ тачка нагомилавања скупа A. Кажемо да функција има граничну вредност $+\infty$ у $-\infty$ и пишемо $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ ако и само ако важи

$$(\forall\, M \in \mathbb{R})(\exists\, C \in \mathbb{R})(\forall\, x \in A)\; x < C \Rightarrow f(x) > M.$$

♢

Узимајући у обзир дефиниције обичних и пробушених околина тачака скупа $\overline{\mathbb{R}}$ претходне четири дефиниције можемо да спојимо у једну.

Дефиниција 31. Дата је функција $f : A \to \mathbb{R}$ таква да је $a \in \overline{\mathbb{R}}$ тачка нагомилавања домена A. Кажемо да је $L \in \overline{\mathbb{R}}$ гранична вредност функције f у тачки a и пишемо $L = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ ако и само ако за сваку околину U_L тачке L постоји пробушена околина $\dot{U}_a$ тачке a таква да за свако $x \in \dot{U}_a$ важи импликација

$$x \in \dot{U}_a \Rightarrow f(x) \in U_L. \tag{5}$$

$\Diamond$

Вратимо се на Задатак 23. Задатак нам каже да функција sgn нема лимес у тачки $a = 0$. Оно што можемо да закључимо посматрајући график ове функције јесте да је са леве стране тачке нула функција константна и једнака вредности -1 док је са десне стране тачке нула константно једнака 1. Различито понашање функције са леве и десне стране неке тачке мотивишу нас да дефинишимо појмове *једностраних лимеса.*

Дефиниција 32. Кажемо да је $D \in \mathbb{R}$ *десни лимес* функције f у тачки a ако важи

$$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, \delta > 0)(\forall\, x \in A)\ a < x < a + \delta \Rightarrow |f(x) - D| < \varepsilon.$$

Тада пишемо $D = \lim\limits_{x \to a+} f(x)$.

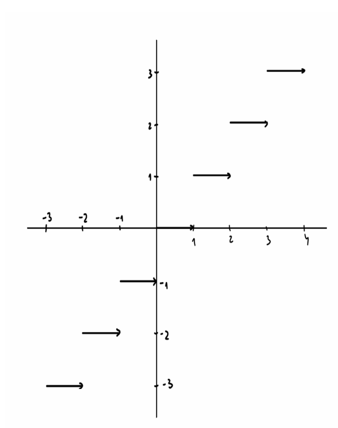
$L \in \mathbb{R}$ је *леви лимес* функције f у тачки a, и пишемо $L = \lim\limits_{x \to a-} f(x)$, ако важи

$$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, \delta > 0)(\forall\, x \in A)\ a - \delta < x < a \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

$\Diamond$

Пример 33. Једноставно закључујемо да важи $\lim\limits_{x \to 0+} \operatorname{sgn} x = 1$ и $\lim\limits_{x \to 0-} \operatorname{sgn} x = -1$. $\sharp$

Пример 34. Функција *цео део*, коју означавамо са $[x]$, за реално x једнака је најближем целом броју који се налази са леве стране броја x. График функције дат је на Слици 13. Ова функција има различит леви и десни лимес у свакој целобројној тачки. Нпр. $\lim\limits_{x \to 2+} [x] = 2$ док је $\lim\limits_{x \to 2-} [x] = 1$. У осталим тачкама реалне праве (које нису цели бројеви) функција има једнак леви и десни лимес, и то једнак вредности $[x]$. Приметимо да у тим тачкама постоји и обичан лимес функције. То следи и из следећег општијег тврђења. $\sharp$



Слика 13. График функције цео део

Тврђење 35. Нека је дата функција $f : A \to \mathbb{R}$ и $a \in \mathbb{R}$ која је тачка нагомилавања скупа A. Тада функција f има лимес у тачки a ако и само ако постоје леви и десни лимес у тој тачки и ако су они једнаки. У том случају су једнострани лимеси једнаки обичном лимесу у тачки a.

Можемо да проширимо дефиницију једностраних лимеса допуштајући да они имају бесконачне вредности.

Дефиниција 36. Кажемо да важи $\lim_{x\to a+} f(x) = -\infty$ ако и само ако је задовољено

$$(\forall\, C \in \mathbb{R})(\exists\, \delta > 0)(\forall\, x \in A)\; a < x < a + \delta \Rightarrow f(x) < C.$$

Слично

$$\lim_{x\to a+} f(x) = +\infty \Leftrightarrow (\forall\, M \in \mathbb{R})(\exists\, \delta > 0)(\forall\, x \in A)\; a < x < a + \delta \Rightarrow f(x) > M.$$

$\Diamond$

Преостале дефиниције остављамо читаоцу да сам запише.

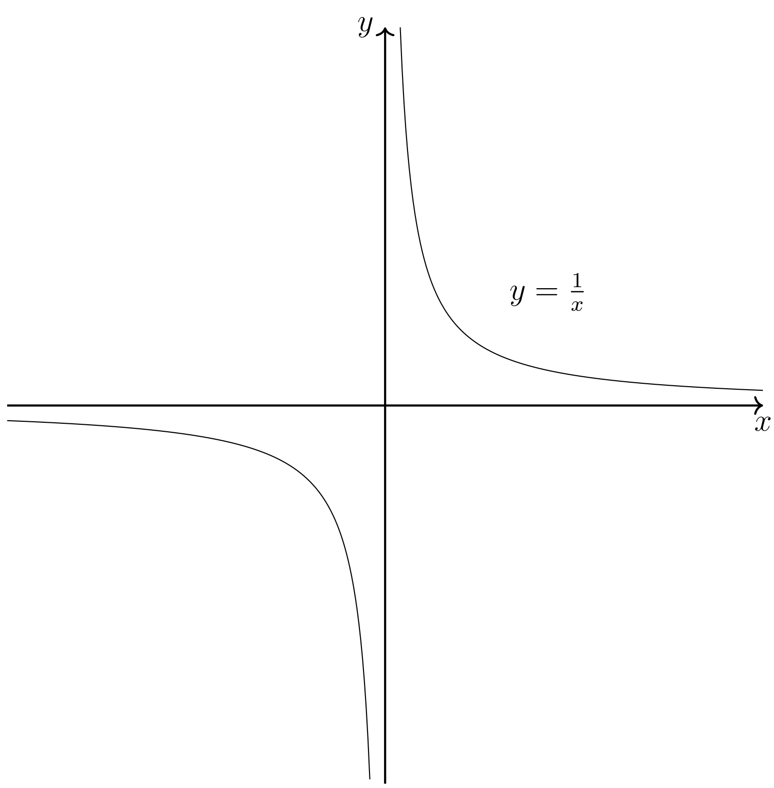
Пример 37. Посматрамо функцију $f(x) = \frac{1}{x}$ чији је график дат на Слици 14. Једноставно закључујемо да важи

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} = +\infty$$

док је

$$\lim_{x\to 0-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Из тога што су леви и десни лимеси различити можемо да закључимо да функција f нема граничну вредност у тачки 0.



Слика 14. График функције $\frac{1}{x}$

$\sharp$

3.2. Својства граничне вредности. Сада ћемо показати својства функција које имају граничну вредност у тачки нагомилавања домена. Када кажемо да функција има лимес (или граничну вредност) у некој тачки подразумеваћемо да је та тачка тачка нагомилавања домена функције. Особине које важе у некој околини тачке нагомилавања (а не обавезно на целом домену) називају се *локалним својствима* функција.

Тврђење 38. Гранична вредност функције је, ако постоји, јединствена.

Напомена 39. У тврђењу допуштамо да сама гранична вредност буде бесконачна а и да тачка у којој постоји лимес буде једнака $+\infty$ или $-\infty$. $\diamond$

Доказ. Тврђење ћемо показати у случају када функција $f : A \to \mathbb{R}$ има коначну граничну вредност у коначној тачки $a \in \mathbb{R}$ која је тачка нагомилавања скупа A. Остале случајеве (када је тачка нагомилавања бесконачна или када је лимес бесконачан остављамо читаоцу да сам покаже). Претпоставимо да неке две различите реалне вредности L_1 и L_2 задовољавају услове Дефиниције 20. На овај начин ми претпостављамо супротно од онога што каже тврђење, односно претпостављамо да гранична вредност није јединствена. Хоћемо да дођемо до контрадикције чиме показујемо да наша претпоставка није добра, односно да је исказ тврђења тачан.

Означимо растојање бројева L_1 и L_2 бројем ε, $\varepsilon = \frac{|L_1-L_2|}{3}$. Како су L_1 и L_2 различити бројеви онда је $\varepsilon > 0$.

Из чињенице да је L_1 гранична вредност функције следи да за горе одабрано ε постоји $\delta_1 > 0$ тако да за све $x \in A \cap (a-\delta_1, a+\delta_1) \setminus \{a\}$ важи

$$|f(x) - L_1| < \varepsilon. \tag{6}$$

Са друге стране и L_2 задовољава импликацију (4) па ће за неко $\delta_2 > 0$ важити да је

$$|f(x) - L_2| < \varepsilon \tag{7}$$

кад год је $x \in A$ и $0 < |x-a| < \delta_2$.

Нека је $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Сада ће

$$\dot{U}_a(\delta) := (a-\delta, a+\delta)$$

бити мања од две претходно пронађење пробушене околине тачке a. За све тачке домена x које које се налазе у $\dot{U}_a(\delta)$ важи и (6) и (7) и тиме долазимо до контрадикције јер је тада $f(x) \in (L_1-\varepsilon, L_1+\varepsilon)$ и $f(x) \in (L_2-\varepsilon, L_2+\varepsilon)$. Контрадикција следи из тога што је пресек интервала $(L_1-\varepsilon, L_1+\varepsilon)$ и $(L_2-\varepsilon, L_2+\varepsilon)$ празан за одабрану вредност параметра ε. $\square$

Тврђење 40. Функција која има коначну граничну вредност у тачки је ограничена у некој пробушеној околини те тачке.

Доказ. Посматрамо функцију $f : A \to \mathbb{R}$ која има коначан лимес L у тачки нагомилавања $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Пошто желимо да доказ покрије случај када је тачка нагомилавања коначна а и случај када је тачка нагомилавања бесконачна користићемо Дефиницију 31. Узмемо околину $U_L = (L-\frac{1}{17}, L+\frac{1}{17})$ тачке L [1]и из дефиниције закључујемо да ће постојати пробушена околина тачке a, у ознаци $\dot{U}_a$, таква да важи

$$f(x) \in U_L$$

кад год је $x \in \dot{U}_a \cap A$. Једноставно закључујемо да је $L - \frac{1}{17}$ доње ограничење функције f на скупу $\dot{U}_a \cap A$ док је $L + \frac{1}{17}$ једно њено горње ограничење на истом скупу. $\square$

Поред тога што можемо да закључимо да је функција са коначном граничном вредношћу локално ограничена можемо још боље да је проценимо локално ако знамо да је коначан лимес различит од нуле.

[1]Приметимо да је околина коначне тачке заиста овог облика, овде је битан корак да лимес буде коначан.

Тврђење 41. Нека функција $f : A \to \mathbb{R}$ има коначну граничну вредност L различиту од нуле у тачки $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Тада постоји пробушена околина тачке a таква да је функција различита од нуле у свакој тачки те пробушене околине и додатно, знак функције у тим тачкама је исти као и знак граничне вредности L.

Напомена 42. Посматрајући функције $(x-1)^2$ и $(x-1)^3$ у околини тачке $a = 1$ можемо да закључимо да теорема не може да се примени када је гранична вредност L једнака нули. $\diamond$

Доказ. Применићемо Дефиницију 31 на околину $U_L = (L - \frac{|L|}{3}, L + \frac{|L|}{3})$ која ја интервал око L ширине $\frac{2|L|}{3}$. Приметимо да је $L \neq 0$ па је $\frac{|L|}{3} > 0$. Дефиниција каже да ће постојати пробушена околина $\dot{U}_a$ таква да важи $f(x) \in U_L$ када $x \in A \cap \dot{U}_a$. Интервал U_L је одабран тако да се цео налази са исте стране нуле као и реалан број L јер када је $L > 0$ тада је $L - \frac{|L|}{3} = \frac{2L}{3} > 0$ а када је $L < 0$ тада је $L + \frac{|L|}{3} = \frac{2L}{3} < 0$. То значи да је функција различита од нуле и да је $\operatorname{sgn} f = \operatorname{sgn} L$ на $A \cap \dot{U}_a$. $\square$

Следеће тврђење нам показује како се лимеси слажу са алгебарским операцијама.

Тврђење 43. Нека су дате функције $f, g : A \to \mathbb{R}$ и нека је $a \in \overline{\mathbb{R}}$ тачка нагомилавања скупа A. Претпоставићемо да функције имају коначне граничне вредности у тачки a, $L_1 = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ и $L_2 = \lim\limits_{x \to a} g(x)$. Тада:

а) постоји лимес збира ове две функције и важи $\lim\limits_{x \to a}(f+g)(x) = L_1 + L_2$;

б) постоји лимес производа ове две функције и важи $\lim\limits_{x \to a}(f \cdot g)(x) = L_1 \cdot L_2$;

в) Ако је $L_2 \neq 0$ тада постоји лимес количника ове две функције[2] и важи $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$;

г) Ако постоји пробушена околина тачке a, у ознаци $\dot{U}_a$, таква да је $f(x) \leq g(x)$ за све $x \in \dot{U}_a$ тада је $L_1 \leq L_2$.

Доказ.

а) Нека је $\varepsilon > 0$ произвољно. Из чињенице да f и g имају граничне вредности следи да постоје пробушене околине $\dot{U}_a^f$ и U_a^g такве да важи

$$|f(x) - L_1| < \frac{\varepsilon}{2},\ x \in \dot{U}_a^f \cap A,$$

и

$$|g(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2},\ x \in \dot{U}_a^g \cap A.$$

Тада на пресеку ових пробушених околина, што је такође пробушена околина од a, $\dot{U}_a = \dot{U}_a^f \cap \dot{U}_a^g$ важи

$$|f(x) + g(x) - (L_1 + L_2)| = |(f(x) - L_1) + (g(x) - L_2)| \leq$$
$$\leq |f(x) - L_1| + |g(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Прва неједнакост следи из неједнакости троугла. Закључујемо да лимес збира функција постоји и да је једнак збиру $L_1 + L_2$. Доказ у овом облику пролази и у случају када је a нека коначна тачка а и у случају да је a бесконачна тачка.

б) Одаберимо произвољно $\varepsilon > 0$ и нађимо пробушену околину тачке a на којој је функција g ограничена. Околину ћемо означити са $\dot{U}_a^1$ и на тој околини важи $|g(x)| \leq M$ при чему је $M > 0$ константа. За овако одређену константу постоји пробушена

[2]Приметимо да из Тврђења 41 следи да је функција g различита од нуле на некој пробушеној околини тачке a па је количник f/g дефинисан на тој пробушеној околини.

околина $\dot{U}_a^2$ таква да је
$$|f(x) - L_1| < \frac{\varepsilon}{2M}$$
за све $x \in \dot{U}_a^2 \cap A$. Из чињенице да је L_2 гранична вредност функције g постојаће пробушена околина $\dot{U}_a^3$ на којој важи
$$|g(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2(|L_1| + 1)}.$$
На пресеку пробушене околине
$$\dot{U}_a = \dot{U}_a^1 \cap \dot{U}_a^2 \cap \dot{U}_a^3$$
и скупа A важи
$$\begin{aligned}|f(x)g(x) - L_1L_2| &= |f(x)g(x) - L_1g(x) + L_1g(x) - L_1L_2| \leq \\ &\leq |g(x)| \cdot |f(x) - L_1| + |L_1| \cdot |g(x) - L_2| < \\ &< M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + (|L_1| + 1)\frac{\varepsilon}{2(|L_1| + 1)} = \varepsilon.\end{aligned}$$

в) Ако количник $\frac{f}{g}$ видимо као производ $f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$ онда је довољно да покажемо да важи
$$\lim_{x \to a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{L_2} \tag{8}$$
и користећи претходно слово у тврђењу долазимо до доказа особине в). Дакле, показујемо да важи (8). Како постоји лимес функције g који је различит од нуле, $L_2 \neq 0$, онда ће постојати пробушена околина тачке a, $\dot{U}_a^1$, таква да је
$$|g(x) - L_2| < \frac{|L_2|}{3}$$
за све $x \in A \cap \dot{U}_a^1$. Ако је $L_2 > 0$ тада је $g(x) > L_2 - \frac{|L_2|}{3} = \frac{2L_2}{3} > 0$ а ако је $L_2 < 0$ тада је $g(x) < L_2 + \frac{|L_2|}{3} = \frac{2L_2}{3} < 0$. У оба случаја важи да је
$$|g(x)| > \frac{2}{3}|L_2|$$
за све $x \in A \cap \dot{U}_a^1$. За произвољно $\varepsilon > 0$ разлику $|g(x) - L_2|$ можемо да проценимо одозго са $\frac{2}{3}|L_2|^2\varepsilon$ на некој пробушеној околини $\dot{U}_a^2$. Сада на пресеку $A \cap \dot{U}_a^1 \cap \dot{U}_a^2$ важи
$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{L_2}\right| = \frac{|g(x) - L_2|}{|g(x)| \cdot |L_2|} &< \frac{|g(x) - L_2|}{\frac{2}{3}|L_2|^2} < \\ &< \frac{1}{\frac{2}{3}|L_2|^2} \cdot \frac{2}{3}|L_2|^2\varepsilon = \varepsilon.\end{aligned}$$

г) Претпоставимо супротно, $L_1 > L_2$. Нека је $\varepsilon = \frac{L_1 - L_2}{5}$. Како је $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L_1$ тада ће постојати пробушена околина $\dot{U}_a^1$ таква да важи
$$|f(x) - L_1| < \varepsilon.$$
Из чињенице да је $\lim\limits_{x \to a} g(x) = L_2$ следи да важи
$$|g(x) - L_2| < \varepsilon$$
на $A \cap \dot{U}_a^2$ за неку пробушену околину $\dot{U}_a^2$. Посматрајући пробушену околину
$$\dot{\overline{U}}_a = \dot{U}_a^1 \cap \dot{U}_a^2$$

долазимо да за све тачке домена које се налазе у овој околину важи

$$g(x) < L_2 + \varepsilon < L_1 - \varepsilon < f(x)$$

а то је у контрадикцији са тим да важи $f(x) \leq g(x)$ на некој пробушеној околини тачке a. Дакле, претпоставка не важи па закључујемо да је $L_1 \leq L_2$.

$\square$

Из претходног тврђења једноставно закључујемо да за све реалне бројеве α и β важи

$$\lim_{x\to a}(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha \lim_{x\to a} f(x) + \beta \lim_{x\to a} g(x)$$

ако функције f и g имају наведене граничне вредности. Ова једнакост, као и претходно тврђење, важи и у случају када је тачка a коначна а лимеси које посматрамо једнострани.

Следеће тврђење нам показује како се бесконачни лимеси слажу са алгебарским операцијама. Како су докази ових особина врло слични доказу Тврђења 43 остављамо их читаоцу.

Тврђење 44. Нека су дате функције $f, g : A \to \mathbb{R}$ при чему је $a \in \overline{\mathbb{R}}$ тачка нагомилавања скупа A. Тада важи:

а) ако је $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ и $\lim_{x\to a} g(x) = L$ где је $-\infty < L \leq +\infty$ тада је $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = +\infty$;

б) ако је $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ и $\lim_{x\to a} g(x) = L$ где је $-\infty \leq L < +\infty$ тада је $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = -\infty$;

в) ако је $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ и $\lim_{x\to a} g(x) = L \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$ тада је $\lim_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = (\operatorname{sgn} L) \cdot (\pm\infty)$;

г) ако је $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ тада је $\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = 0$.

Приметимо да смо ово тврђење могли да додамо Тврђењу 43 ако дозволимо да лимеси буду у скупу $\overline{\mathbb{R}}$ и да су операције $+$ и $\cdot$ проширене на $\overline{\mathbb{R}}$ као у лекцији о проширеном скупу реалних бројева. Као што смо у том поглављу већ навели неки изрази, нпр. $(+\infty) + (-\infty)$, остају недефинисани. Односно, операције $+$ и $\cdot$ не можемо да проширимо тако да буду операције на целом $\overline{\mathbb{R}}$. Следећи пример ће нам објаснити зашто $(+\infty) + (-\infty)$ не можемо да дефинишемо.

Пример 45. Нека су дате следеће функције

$$f_1(x) = x^2 + 2x,\ g_1(x) = -(x^2 + x),$$
$$f_2(x) = \sqrt{x^2 + 2x},\ g_2(x) = -\sqrt{x^2 + x}.$$

Приметимо да важи $f_1(x) \to +\infty$, $f_2(x) \to +\infty$, $g_1(x) \to -\infty$ и $g_2(x) \to -\infty$ када $x \to +\infty$. Ако желимо да нађемо лимес функција $f_1 + g_1$ и $f_2 + g_2$ проласком лимесом кроз збир долазимо до облика $(+\infty) + (-\infty)$ за који смо већ видели да није покривен Тврђењем 44. Дакле, лимес збира морамо да нађемо на другачији начин. Сређивањем израза долазимо до следећег

$$f_1(x) + g_1(x) = (x^2 + 2x) - (x^2 + x) = x \to +\infty,\ x \to +\infty,$$

и

$$f_2(x) + g_2(x) = \sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 + x} = (\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 + x}) \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{x^2 + x}}{\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{x^2 + x}} =$$
$$= \frac{x^2 + 2x - (x^2 + x)}{\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{x^2 + x}} = \frac{x}{x\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + x\sqrt{1 + \frac{1}{x}}} \to \frac{1}{2},\ x \to +\infty.$$

Дакле, у оба случаја проласком лимесом кроз збир долазимо до облика $(+\infty) + (-\infty)$. Рачунањем лимеса долазимо до тога да је у првом случају лимес бесконачан док је у другом случају лимес коначан број. На овај начин видимо да не можемо изразу $(+\infty) + (-\infty)$ доделити неки елемент из $\overline{\mathbb{R}}$ тако да алгебарска операција $+$ и lim буду усаглашени. $\sharp$

Задатак 46. Дате су функције $f_1(x) = \frac{1}{x}$, $f_2(x) = \frac{1}{x^2}$, $f_3(x) = \frac{1}{2x}$, $g_1(x) = \frac{1}{x^2}$, $g_2(x) = \frac{1}{x}$ и $g_3(x) = \frac{1}{3x}$. Наћи $\lim_{x\to+\infty} \frac{f_i(x)}{g_i(x)}$ за $i \in \{1, 2, 3\}$. Приметимо да се у сва три случаја проласком лимеса кроз количник добија облик $\frac{0}{0}$ за који знамо да није дефинисан. Дакле, то није начин да се реши овај задатак. ✓

Тврђење 47. Дате су функције $f, g : A \to \mathbb{R}$ и $a \in \overline{\mathbb{R}}$ тачка нагомилавања скупа A. Тада важи следеће:

а) ако је $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ и функција g је ограничена на некој пробушеној околини тачке a тада је $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = 0$;

б) у случају када је a коначна тачка, $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = 0$ и функција g ограничена на некој десној околини тачке a, $(a, a+\delta)\cap A$, тада је $\lim\limits_{x\to a+}(f(x)\cdot g(x)) = 0$;

в) у случају када је a коначна тачка, $\lim\limits_{x\to a-} f(x) = 0$ и функција g ограничена на некој левој околини тачке a, $(a-\delta, a)\cap A$, тада је $\lim\limits_{x\to a-}(f(x)\cdot g(x)) = 0$.

Доказ. Доказаћемо тврђење које се налази под првим словом а остала два се доказују слично. Због једноставнијег записа покрићемо случај када је тачка a коначна.

Узмимо $\varepsilon > 0$ произвољно. Нека је $\dot{U}_a(\delta_1) = (a-\delta_1, a+\delta_1)$ пробушена околина тачке a таква да је $|g(x)| \le M$ за све $x \in A \cap \dot{U}_a(\delta_1)$. Овде је $\delta_1 > 0$ и $M > 0$ је неко ограничење функције g. Како је лимес функције f једнак 0 онда ће постојати $\delta_2 > 0$ тако да важи

$$|f(x) - 0| < \frac{\varepsilon}{M},$$

за све $x \in A \cap \dot{U}_a(\delta_2)$. Нека је

$$\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}.$$

Сада за све $x \in A \cap \dot{U}_a(\delta)$ важе процене

$$|f(x)| < \frac{\varepsilon}{M},\ |g(x)| \le M,$$

па на том скупу важи и

$$|f(x)\cdot g(x)| < \frac{\varepsilon}{M}\cdot M = \varepsilon.$$

Одатле закључујемо $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = 0$. □

Напомена 48. Особина исказана у овом тврђењу нам каже да је производ ограничене функције и нула функције такође нула функција. Кажемо да је нека *функција нула* ако је њен одговарајући лимес једнак нули. ◇

Задатак 49. Показати да важи $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ и $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\cdot\sin\frac{1}{x}\right) = 0$. ✓

Користећи појам нула функције који смо споменули у Напомени 48 показаћемо да је нека функција нула функција ако и само ако је њена апсолутна вредност такође нула функција. Подсетимо се да смо имали слично тврђење за низове.

Тврђење 50. За функцију $f : A \to \mathbb{R}$ важи

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to a} |f(x)| = 0.$$

Постојање једног од наведених лимеса имплицира постојање и оног другог.

Доказ. Доказ ћемо извести низом еквиваленција при чему су прва и последња еквиваленција дефиниције лимеса док су еквиваленције између обично сређивање алгебарских израза.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} f(x)=0 &\Leftrightarrow (\forall\, \varepsilon>0)(\exists\, \dot{U}_a)(\forall\, x\in A\cap \dot{U}_a)\ |f(x)-0|<\varepsilon\\ &\Leftrightarrow (\forall\, \varepsilon>0)(\exists\, \dot{U}_a)(\forall\, x\in A\cap \dot{U}_a)\ |f(x)|<\varepsilon\\ &\Leftrightarrow (\forall\, \varepsilon>0)(\exists\, \dot{U}_a)(\forall\, x\in A\cap \dot{U}_a)\ ||f(x)|-0|<\varepsilon\\ &\Leftrightarrow \lim_{x\to a}|f(x)|=0.\end{aligned}$$

□

Ако је тачка нагомилавања коначна онда претходно тврђење важи и за једностране лимесе. У тврђењу је битно да је гранична вредност нула и не постоји тврђење које повезује граничну вредност апсолутне вредности функције и граничну вредност саме функције ако је гранична вредност неки други ненула број. То се једноставно види на примеру функције $f(x)=(-1)^{[x]}$ за коју важи да је $|f(x)|=1$ па је и $\lim\limits_{x\to+\infty}|f(x)|=1$ док лимес саме функције $f(x)$ не постоји када $x\to+\infty$.

Теорема 51. (Теорема о три лимеса) *Нека функције $f,g,h:A\to\mathbb{R}$ задовољавају неједнакости*

$$f(x)\le h(x)\le g(x)$$

на некој пробушеној околини $\dot{U}_a$ тачке a која је тачка нагомилавања скупа A. Ако постоје $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ и једнаки су, тада постоји $\lim\limits_{x\to a} h(x)$ и важи

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} h(x)=\lim_{x\to a} g(x).$$

Доказ. Означимо са $L:=\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)$ и нека је $\varepsilon>0$ произвољно. Из дефиниције лимеса следи да постоје пробушене околине $\dot{U}_a^f$ и $\dot{U}_a^g$ такве да важи

$$|f(x)-L|<\varepsilon,\ x\in \dot{U}_a^f,$$

и

$$|g(x)-L|<\varepsilon,\ x\in \dot{U}_a^g.$$

Тада на пресеку пробушених околина $\dot{U}_a=\dot{U}_a^f\cap\dot{U}_a^g$ важе неједнакости

$$L-\varepsilon<f(x)<L+\varepsilon,\ L-\varepsilon<g(x)<L+\varepsilon,\ f(x)\le h(x)\le g(x),$$

односно

$$L-\varepsilon<f(x)\le h(x)\le g(x)<L+\varepsilon.$$

Дакле, нашли смо пробушену околину тачке a на којој важи $L-\varepsilon<h(x)<L+\varepsilon$. То значи да је $L=\lim\limits_{x\to a} h(x)$. □

Теорема 52. *Нека је $a\in\overline{\mathbb{R}}$ тачка нагомилавања скупа A и $f:A\to\mathbb{R}$ функција која има граничну вредност у тачки a, $L=\lim\limits_{x\to a} f(x)\in\mathbb{R}$. Ако је функција $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ непрекидна у тачки L тада важи*

$$\lim_{x\to a}\varphi\circ f(x)=\varphi\left(\lim_{x\to a} f(x)\right)=\varphi(L).$$

Претходна теорема нам каже да непрекидна функција и лимес могу да замене места.

Теорема 53. (Теорема о смени променљиве у лимесу) *Нека функција $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ има граничну вредност у тачки $x_0\in[a,b]$ и нека је $\psi:[\alpha,\beta]\to[a,b]$ непрекидно пресликавање које је бијекција чији је инверз ψ^{-1} такође непрекидна функција. Тада је*

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{t\to\psi^{-1}(x_0)} f\circ\psi(t).$$

Напомена 54. Ако је $x_0 = a$ или $x_0 = b$ онда су лимеси који се спомињу у теореми одговарајући једнострани лимеси. Ако је, на пример, $x_0 = a$ и $\psi(\beta) = a$ тада важи $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = \lim\limits_{t\to\beta-} f\circ\psi(t)$. ◇

Доказе претходне две теореме ћемо изоставити а уместо тога ћемо у следећем одељку на неколико примера показати како се теорема примењује.

3.3. Лимеси елементарних функција и основни лимеси.

Пример 55. (Лимес полиномске функције у бесконачности) Нека је дат полином

$$P_n(x) = a_0 + a_1\,x + ... + a_n\,x^n \tag{9}$$

где су $a_0, a_1, ..., a_n$ реални коефицијенти овог полинома. Ако је полином константан, односно ако су сви коефицијенти уз $x, x^2, ..., x^{n-1}, x^n$ једнаки нули тада је $P_n(x) = a_0$ за све $x \in \mathbb{R}$. Лимес константне функције је сама та константа па је у том случају

$$\lim_{x\to+\infty} P_n(x) = a_0.$$

Претпоставимо да полином није једнак константи, тј. да је облика (9) при чему је $a_n \neq 0$ (коефицијент a_n се назива водећим коефицијентом) и $n \geq 1$ (број n се назива степеном полинома). Тада је

$$\lim_{x\to+\infty} P_n(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[\underbrace{x^n}_{\to+\infty}\underbrace{\left(\underbrace{\frac{a_0}{x^n}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{a_1}{x^{n-1}}}_{\to 0} + ... + \underbrace{\frac{a_{n-1}}{x}}_{\to 0} + \underbrace{a_n}_{\to a_n}\right)}_{\to a_n\neq 0}\right] =$$

$$= \begin{cases} +\infty, & a_n > 0 \\ -\infty, & a_n < 0. \end{cases}$$

♯

Пример 56. (Лимес рационалне функције у бесконачности) Подсетимо се да је рационална функција количник две полиномске и у општем случају је облика

$$R(x) = \frac{a_0 + a_1\,x + ... + a_n\,x^n}{b_0 + b_1\,x + ... + b_m\,x^m}.$$

Да бисмо избегли тривијалне случајеве претпоставићемо да је $a_n \neq 0$ и $b_m \neq 0$. Лимес рационалне функције у бесконачности зависи од односа степена полинома у бројиоцу и имениоцу.

Ако је $n < m$ тада је

$$\lim_{x\to+\infty} R(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^n\left(\frac{a_0}{x^n} + ... + \frac{a_{n-1}}{x} + a_n\right)}{x^m\left(\frac{b_0}{x^m} + ... + \frac{b_{m-1}}{x} + b_m\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\underbrace{\frac{1}{x^{m-n}}}_{\to 0}\,\frac{\underbrace{\dfrac{a_0}{x^n} + ... + \dfrac{a_{n-1}}{x} + a_n}_{\to a_n}}{\underbrace{\dfrac{b_0}{x^m} + ... + \dfrac{b_{m-1}}{x} + b_m}_{\to b_m}}\right] = 0.$$

Ако је $n = m$ тада је

$$\lim_{x\to+\infty} R(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{a_0}{x^n} + ... + \frac{a_{n-1}}{x} + a_n}{\frac{b_0}{x^m} + ... + \frac{b_{m-1}}{x} + b_m} = \frac{a_n}{b_m}.$$

Преостао нам је случај када је $n > m$. Искористићемо претходне трансформације функције $R(x)$ и долазимо до следећег закључка

$$\lim_{x\to+\infty} R(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[\underbrace{x^{n-m}}_{\to+\infty}\frac{\underbrace{\frac{a_0}{x^n}+...+\frac{a_{n-1}}{x}+a_n}_{\to a_n}}{\underbrace{\frac{b_0}{x^m}+...+\frac{b_{m-1}}{x}+b_m}_{\to b_m}}\right] = \operatorname{sgn}\frac{a_n}{b_m}\cdot(+\infty).$$

Долазимо до следећег закључка

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a_0+a_1\,x+...+a_n\,x^n}{b_0+b_1\,x+...+b_m\,x^m} = \begin{cases} 0, & n<m \\ \frac{a_n}{b_m}, & n=m \\ (+\infty)\cdot\operatorname{sgn}\frac{a_n}{b_m}, & n>m. \end{cases}$$

♯

Пример 57. У овом примеру желимо да нађемо граничне вредности синусне и косинусне функције у тачки $a=0$.

Користећи тригонометријски идентитет

$$\cos\phi-\cos\psi = -2\sin\frac{\phi+\psi}{2}\sin\frac{\phi-\psi}{2}$$

долазимо до једнакости

$$\cos x - 1 = \cos x - \cos 0 = -2\sin\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2},$$

односно

$$0 \le |\cos x - 1| = 2\left|\sin\frac{x}{2}\right|^2 \le 2\cdot\frac{|x|^2}{4},$$

при чему последња неједнакост следи из Последице 14. Како је $\lim\limits_{x\to0}|x|^2=0$ из Теореме о три лимеса следи

$$\lim_{x\to0}|\cos x-1| = 0,$$

потом, користећи Последицу 50 можемо да се ослободимо апсолутне вредности

$$\lim_{x\to0}(\cos x-1) = 0,$$

и на крају из својства слагања лимеса и операције + добијамо

$$\lim_{x\to0}\cos x = 1.$$

Приметимо да је $\lim\limits_{x\to0}\cos x = \cos 0$ па одмах можемо да закључимо да је косинусна функција непрекидна у тачки $a=0$.

Користећи неједнакости

$$0 \le |\sin x| \le |x|$$

и Теорему о три лимеса једноставно закључујемо

$$\lim_{x\to0}\sin x = 0.$$

Како је $\sin 0 = 0$ закључујемо да је синусна функција непрекидна у тачки $a=0$. Непрекидност синусне и косинусне функције у осталим тачкама ћемо показати у делу о нпрекидности елементарних функција. ♯

У Тврђењу 13 смо видели да за све $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ важи

$$\sin x \leq x \leq \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Желимо да ограничимо количник $\frac{\sin x}{x}$ у пробушеној околини нуле па долазимо до неједнакости

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1, \tag{10}$$

за све $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Ако је $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ тада $-x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ па је

$$\cos(-x) \leq \frac{\sin(-x)}{-x} \leq 1.$$

Искористимо чињеницу да је косинус парна а синус непарна функција па долазимо до истог низа неједнакости (10) на целој пробушеној околини $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \setminus \{0\}$ тачке нула. Видели смо да је $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$, скроз десна страна неједнакости (10) која је једнака константи 1 такође тежи јединици па из Теореме о три лимеса долазимо до основног лимеса

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.} \tag{11}$$

Пример 58. Наћи $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$.

Подсетимо се да је

$$\cos x = \cos\left(2 \cdot \frac{x}{2}\right) = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = 1 - 2\sin^2 \frac{x}{2}$$

па је

$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2}.$$

Дакле, желимо да израчунамо следећи лимес

$$2 \lim_{x \to 0} \left[\frac{\sin \frac{x}{2}}{x}\right]^2.$$

Функција $\varphi(x) = x^2$ је непрекидна функција па користећи Теорему 52 можемо да закључимо да је

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = 2\left[\lim_{x \to 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{x}\right]^2$$

ако постоји $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{x}$. Овај лимес се може израчунати користећи Теорему о смени променљиве у лимесу и основни лимес (11). Аргумент синуса је $\frac{x}{2}$ и желимо да нам то буде нова променљива коју ћемо означити са $t = \frac{x}{2}$. Јасно је да када x тежи нули онда и $\frac{x}{2}$ тежи нули, односно када је x произвољно мала величина да ће тада и t бити произвољно мала величина. Преласком на нову променљиву наш лимес постаје

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{x} = \lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{2t} = \frac{1}{2} \lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = \frac{1}{2},$$

при чему смо у последњем кораку искористили основни лимес (11). На крају добијамо

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

$\sharp$

Када смо заснивали поље $\mathbb{R}$ дефинисали смо Ојлеров број e као $e = \sup\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ а затим смо у делу о низовима показали да је $e = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Сада ћемо показати да ће e бити вредност још једног основног лимеса.

Приметимо да је

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] = e \tag{12}$$

јер је $[x]$ природан број када x иде у бесконачност а за лимес по n смо већ показали чему је једнак. Биће нам потребан и следећи лимес

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n} = \lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\frac{n+1}{n+2}\right] = e. \tag{13}$$

Овде лимес може да прође кроз производ јер постоји и лимес од $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$ и лимес од $\frac{n+1}{n+2}$ (први лимес је заправо лимес низа $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ коме је само индекс померен за један).

Нека је сада x реалан позитиван број. Знамо да је

$$[x] \le x < [x]+1,$$

па је

$$\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} \le \left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}.$$

Скроз лева страна тежи ка вредности e када $x\to+\infty$ (то следи из једначине (13)) док скроз десна страна тежи истој вредности а то следи из једначине (12). На основу Теореме о три лимеса за функције добијамо следећи основни лимес:

$$\boxed{e = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}.} \tag{14}$$

Пример 59. Израчунати следећи лимес $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$.

Идеја је да се пређе на нову променљиву $t=-x$ при чему важи да $t\to+\infty$ када $x\to-\infty$. Дакле

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} &\overset{(a)}{=} \lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{-t} = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t}{t-1}\right)^{t} = \\ &= \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t} = \lim_{t\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1}\cdot\left(1+\frac{1}{t-1}\right)\right] = \\ &\overset{(b)}{=} \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1}\cdot\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right) = \\ &\overset{(c)}{=} \lim_{z\to+\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{z}\cdot(1+0) = e.\end{aligned}$$

Једнакост (a) се добије увођењем смене $t=-x$, (b) се добија проласком лимеса кроз производ док смо корак (c) добили увођењем смене $z=t-1$. Приметимо да $z\to+\infty$ када $t\to+\infty$. Последња једнакост следи коришћењем основног лимеса (14). ♯

Задатак 60. Користећи одговарајуће смене показати следеће једнакости:

а) $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$,

б) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$,

в) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x} = 1$, г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a,\ a>1,$

д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha.$

✓

3.4. Лимес монотоне функције. У Дефиницији 9 смо дефинисали монотоне функције, док смо у Дефиницији 7 дефинисали појам супремума и инфимума функције на неком скупу. Они ће нам бити потребни за следећу теорему која описује када постоји лимес монотоне функције.

Теорема 61. *Нека је $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ растућа функција чији је домен интервал (a,b). Важи следеће:*

а) *ако је функција ограничена одозго тада постоји коначан $\lim\limits_{x\to b-} f(x)$ и важи*

$$\lim_{x\to b-} f(x)=\sup_{x\in(a,b)} f(x);$$

б) *ако функција није ограничена одозго тада је*

$$\lim_{x\to b-} f(x)=+\infty;$$

в) *ако је функција ограничена одоздо тада постоји коначан $\lim\limits_{x\to a+} f(x)$ и важи*

$$\lim_{x\to a+} f(x)=\inf_{x\in(a,b)} f(x);$$

г) *ако функција није ограничена одоздо онда је*

$$\lim_{x\to a+} f(x)=-\infty.$$

Доказ. Показаћемо део а) и б) а остала два слова се показују аналогно.

а) Нека је функција ограничена одозго, неком константом M. То значи да важи

$$(\forall\, x\in(a,b))\ f(x)\le M.$$

Тада скуп вредности

$$V=\{f(x)\mid x\in(a,b)\}$$

који је непразан скуп има једно горње ограничење, константу M. Подсетимо се да у скупу $\mathbb{R}$ важи Аксиома супремума па сваки непразан и одозго ограничен скуп има супремум. Закључујемо да скуп V има супремум у скупу $\mathbb{R}$, $L=\sup V$. То је заправо другачија ознака истог појма $\sup V=\sup\limits_{x\in(a,b)} f(x)$.

Сада нам је преостало да покажемо да је L леви лимес функције у тачки b. Нека је $\varepsilon>0$ произвољно. Желимо да нађемо $\delta>0$ такво да важи

$$|f(x)-L|<\varepsilon$$

за све $x\in(b-\delta,b)$. Како је $L-\varepsilon$ број који је строго мањи од L, а L је најмање горње ограничење скупа V, то значи да $L-\varepsilon$ неће бити горње ограничење скупа V. Дакле постојаће елемент скупа V који је већи од $L-\varepsilon$

$$(\exists\, x_0\in(a,b))f(x_0)>L-\varepsilon.$$

Са друге стране како је f растућа функција онда је

$$f(x_0)\le f(x)$$

за све вредности x из интервала (a,b) које су веће од x_0. Знамо да $f(x)\in V$ па је и $f(x)\le L$ за такве вредности x. Одабраћемо

$$\delta=b-x_0.$$

Дошли смо до неједнакости

$$L - \varepsilon < f(x_0) \leq f(x) \leq L$$

која важи за све $x \in (b-\delta, b) = (x_0, b)$. Овим смо показали да је $L = \lim\limits_{x \to b-} f(x)$.

б) Сада полазимо од функције која није ограничена одозго, односно за коју важи

$$\neg\,(\exists\, C \in \mathbb{R})\,(\forall\, x \in (a,b))\; f(x) \leq C.$$

Када прођемо негацијом кроз претходни израз долазимо до тога да важи

$$(\forall\, C \in \mathbb{R})\,(\exists\, x_0 \in (a,,b))\; f(x_0) > C.$$

Функција f је растућа па ће за све $x \geq x_0$ важити

$$f(x) \geq f(x_0) > C.$$

Закључујемо следеће

$$(\forall\, C \in \mathbb{R})\,(\exists\, \delta = b - x_0 > 0)\,(\forall\, x \in (b-\delta, b) = (x_0, b))\; f(x) > C,$$

односно $\lim\limits_{x \to b-} f(x) = +\infty$.

□

Остављамо читаоцу да сам формулише аналогну теорему уз претпоставку да је функција опадајућа.

3.5. Асимптотске релације и асимптоте функције. Сада када нам је познат појам лимеса функције можемо да дефинишемо разне релације међу функцијама које ће нам на неки начин упоређивати функције.

Дефиниција 62. Нека су дате функције $f : A \to \mathbb{R}$ и $g : B \to \mathbb{R}$ и $a \in \overline{\mathbb{R}}$ тако да је a тачка нагомилавања и скупа A и скупа B. Кажемо да важи

$$f = o(g) \text{ или } f \ll g \text{ када } x \to a$$

ако и само ако постоји функција $\alpha(x)$ дефинисана на некој пробушеној околини тачке a, $\dot{U}_a$, таква да важи

$$f(x) = \alpha(x) \cdot g(x),\; \forall\, x \in \dot{U}_a \cap A \cap B,$$

и

$$\lim_{x \to a} \alpha(x) = 0.$$

Када су две функције f и g у оваквој релацији онда кажемо *функција f је занемарљива у односу на функцију g* или *f је бесконачно мала функција у односу на g* или *f је мало о од g.* ◊

Истакнимо да домени функција f и g не морају бити једнаки али морају имати заједничку тачку нагомилавања и релација коју смо дефинисали тиче се локалног понашања функције у пробушеној околини тачке нагомилавања.

Ову дефиницију можемо да формулишемо и на ε-δ језику

$$f \ll g,\; x \to a \Leftrightarrow\; (\forall\, \varepsilon > 0)\,(\exists\, \delta > 0)\; 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon \cdot |g(x)|.$$

Ако је функција g различита од нуле на некој пробушеној околини тачке a онда дељењем једнакости $f = \alpha \cdot g$ са g и проласком лимесом када $x \to a$ долазимо до тога да важи $f \ll g$ када $x \to a$ ако и само ако је

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = 0.$$

Пример 63. Показати да важи $x^3 = o(x^2)$ када $x \to 0$.

Функција $g(x) = x^2$ је различита од нуле на пробушеној околини нуле $(-1,1) \setminus \{0\}$, па само треба наћи лимес

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \to 0} x = 0.$$

Општије, важиће $x^\alpha = o(x^\beta)$, $x \to 0$, кад год међу реалним параметрима важи неједнакост $\alpha > \beta$. ♯

Пример 64. Желимо да упоредимо раст степених функција у околини тачке $+\infty$. Показати да важи $x = o(x^2)$ када $x \to +\infty$.

Функција $g(x) = x^2$ је различита од нуле на $(1, +\infty)$ што је пробушена околина тачке $+\infty$ и довољно је наћи лимес количника

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Општије, важиће $x^\alpha = o(x^\beta)$, $x \to +\infty$, кад год међу реалним параметрима важи неједнакост $\alpha < \beta$. ♯

Пример 65. Показати да важи $\sin x = o(x)$ када $x \to +\infty$.

У Тврђењу 47 смо видели да је лимес производа ограничене и нула функције такође једнак нули. Тако да ћемо количник $\frac{\sin x}{x}$ видети као производ синусне функције која је ограничена и функције $\frac{1}{x}$ која тежи нули када $x \to +\infty$ одакле једноставно закључујемо да је

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

♯

За разлику од претходног примера када смо упоређивали функције у околини бесконачности у околини нуле важи другачија релација.

Пример 66. Показати да важи $\sin x - x = o(x)$ када $x \to 0$.

Ово својство се показује помоћу основног лимеса (11).

$$\lim_{x\to0} \frac{\sin x - x}{x} = \lim_{x\to0} \frac{\sin x}{x} - 1 = 1 - 1 = 0.$$

♯

Тврђење 67. Показати да важи

а) $o(f) + o(f) = o(f)$;
б) $f \cdot o(g) = o(f \cdot g)$;
в) $o(f) \cdot o(g) = o(f \cdot g)$;
г) $(\forall\, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\})\ c \cdot o(f) = o(f)$;
д) $f = o(1),\ x \to a \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.

Доказ. Показаћемо само неке особине док остале остављамо читаоцу за вежбу. Када у делу а) кажемо да важи једнакост $o(f) + o(f) = o(f)$ то заправо значи да када узмемо неку функцију која је занемарљива у односу на f када $x \to a$, означимо је са h_1, и неку другу функцију која је такође занемарљива у односу на f када $x \to a$, означимо је са h_2, онда ће и њихов збир $h_1 + h_2$ бити функција која је занемарљива у односу на f када $x \to a$. Покажимо ово својство.

Ако је $h_1 = o(f)$ и $h_2 = o(f)$ онда ће постојати функције α_1 и α_2 такве да је

$$h_1 = \alpha_1(x) \cdot f(x),\ \lim_{x\to a} \alpha_1(x) = 0$$

и

$$h_2 = \alpha_2(x) \cdot f(x),\ \lim_{x\to a} \alpha_2(x) = 0.$$

Тада за функцију $\alpha(x) = \alpha_1(x) + \alpha_2(x)$ важи да је

$$h_1(x) + h_2(x) = \alpha(x) \cdot f(x),$$

при чему је

$$\lim_{x\to a}\alpha(x) = \lim_{x\to a}(\alpha_1(x)+\alpha_2(x)) = \lim_{x\to a}\alpha_1(x) + \lim_{x\to a}\alpha_2(x) = 0.$$

У последњем својству се појављује јединица у делу исказа $f = o(1)$. Та јединица означава константну функцију која је свуда једнака вредности 1. Тако да је доказ тог дела тврђења тривијалан јер

$$f = o(1),\ x\to a \Leftrightarrow \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{1} = 0.$$

□

Дефиниција 68. Нека су дате функције $f : A \to \mathbb{R}$ и $g : B \to \mathbb{R}$ и $a \in \overline{\mathbb{R}}$ тачка нагомилавања скупова A и B. Кажемо да је *фукнција f слична функцији g када $x \to a$* ако постоји функција $\beta : \dot{U}_a \to \mathbb{R}$ дефинисана на некој пробушеној околини тачке a таква да је

$$f(x) = \beta(x)\cdot g(x),\ x \in \dot{U}_a \cap A \cap B,$$

и важи

$$\lim_{x\to a}\beta(x) = 1.$$

У том случају пишемо

$$f \sim g,\ x \to a.$$

♢

На овај начин смо дефинисали једну релацију међу функцијама, и једноставно се показује да је релација $\sim$ релација еквиваленције.

Ако је $g(x) \neq 0$ на некој пробушеној околини тачке a онда се провера да ли су две функције у релацији $\sim$ своди на тражење лимеса количника јер важи

$$f \sim g,\ x\to a \Leftrightarrow \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Знајући основни лимес (11), Пример 58 и Задатак 60 долазимо до следећих функција међу којима важи релација сличности

$$\begin{aligned}
&\sin x \sim x,\ x\to 0,\\
&\ln(1+x) \sim x,\ x\to 0,\\
&1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2,\ x\to 0,\\
&e^x - 1 \sim x,\ x\to 0,\\
&a^x - 1 \sim \ln a\cdot x,\ x\to 0\ (a>0),\\
&(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha\cdot x,\ x\to 0.
\end{aligned}\tag{15}$$

Задатак 69. Показати да важе следеће релације:

а) $x^3 + x^2 + 2x - 7 \sim x^3,\ x\to +\infty$,
б) $x^3 + x^2 + 2x - 7 \sim -7,\ x\to 0$,
в) $x^7 + x^5 + 3x^2 \sim x^7,\ x\to +\infty$,
г) $x^7 + x^5 + 3x^2 \sim 3x^2,\ x\to 0$,
д) $x^8 + x^4 + \sin x^{17} \sim x^8,\ x\to +\infty$,
ђ) $\frac{x^4+8}{x^3+7x} \sim x,\ x\to -\infty$,
е) $\frac{x^{10}+10x^5+\sqrt{x}}{7x+\sqrt[5]{x}} \sim x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{5}},\ x\to 0.$ ✓

Наредно тврђење повезује релације сличности и занемарљивости између две функције.

Тврђење 70. Нека су дате две функције f и g такве да је тачка $a \in \overline{\mathbb{R}}$ тачка нагомилавања њихових домена. Тада важи следеће:

а) ако је $f \sim g$ када $x \to a$ онда је $o(f) = o(g)$ када $x \to a$;
б) $f \sim g,\ x \to a$ ако и само ако важи $f - g = o(g),\ x \to a$.

Доказ. У делу а) једнакост $o(f) = o(g)$ каже да свака функција која је занемарљива у односу на f мора бити занемарљива у односу на g и, обрнуто, свака функција која је занемарљива у односу на g мора бити занемарљива у односу на f. Све ово наравно важи под претпоставком да је $f \sim g$ када $x \to a$. Дакле, узмимо функцију h за коју важи да је $h = o(f)$ када $x \to a$. Хоћемо да покажемо да важи $h = o(g)$. Како је $f \sim g$ онда постоји функција β таква да важи $f(x) = \beta(x) \cdot g(x)$ и $\beta(x) \to 1$ када $x \to a$. Даље, како је $h = o(f)$ онда постоји функција α таква да су задовољени услови $h(x) = \alpha(x) \cdot f(x)$ и $\alpha(x) \to 0$ када $x \to a$. Закључујемо

$$h(x) = \alpha(x) \cdot \beta(x) \cdot g(x),$$

и $\alpha(x) \cdot \beta(x) \to 0$ када $x \to a$. Функцију h смо представили као производ функције g и функције која тежи нули у тачки a. Из дефиниције следи да је $h = o(g)$ када $x \to a$. За завршетак доказа потребно је узети функцију $\overline{h}$ која је занемарљива у односу на g, $\overline{h} = o(g)$, и показати да важи $\overline{h} = o(f)$. Овај део доказа је исти као и претходни део при чему је потребно заменити места функција f и g.

Што се дела б) тиче низом еквиваленција, полазећи од дефиниције сличних функција, долазимо до следећег:

$$\begin{aligned} f \sim g,\ x \to a &\Leftrightarrow f(x) = \beta(x) \cdot g(x),\ \beta(x) \to 1,\ x \to a \\ &\Leftrightarrow f(x) - g(x) = (\beta(x) - 1) \cdot g(x),\ \beta(x) - 1 \to 0,\ x \to a \\ &\Leftrightarrow f - g = o(g),\ x \to a. \end{aligned}$$

□

Користећи релације (15) и претходно тврђење долазимо до следећих једнакости које називамо још и *развојем елементарних функција*

- $\sin x = x + o(x),\ x \to 0$;
- $\ln(1 + x) = x + o(x),\ x \to 0$;
- $1 - \cos x = \frac{x^2}{2} + o\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{x^2}{2} + o(x^2),\ x \to 0$;
- $e^x - 1 = x + o(x),\ x \to 0$;
- $a^x - 1 = \ln a \cdot x + o(x),\ x \to 0\ (a > 0)$;
- $(1 + x)^\alpha - 1 = \alpha \cdot x + o(x),\ x \to 0$.

Задатак 71. Користећи претходне развоје израчунати следеће лимесе:

а) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 17x}{\sin x\sqrt{3}}$;
б) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{\ln(\cos x)}$. ✓

Сада нам је преостало да дефинишемо појмове косих, хоризонталних и вертикалних асимптота функције. То ће бити праве (ако постоје) које су произвољно близу графика фукнције у тачкама које су бесконачне или неким тачкама које су рупе домена.

Дефиниција 72. Права $y = a \cdot x + b$, $a \neq 0$ назива се *косом асимптотом функције* f *у* $+\infty$ ако важи $f(x) = a \cdot x + b + o(1)$, $x \to +\infty$.

Слично, права $y = c \cdot x + d$, $a \neq 0$ назива се *косом асимптотом функције* f *у* $-\infty$ ако важи $f(x) = c \cdot x + d + o(1)$, $x \to -\infty$. ◊

Ако је $f(x) = a \cdot x + b + o(1)$ када $x \to +\infty$ тада је

$$\frac{f(x)}{x} = a + \frac{b}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right),\ x \to +\infty,$$

па је

$$a = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - a\cdot x).$$

Ово су формуле по којима се рачунају коефицијенти a и b који се појављују у једначини косе асимптоте. Ако неки од ова два лимеса не постоји онда функција неће имати косу асимптоту у $+\infty$. Слично, у околини тачке $-\infty$ до једначине косе асимптоте долазимо рачунајући коефицијенте c и d по следећим формулама

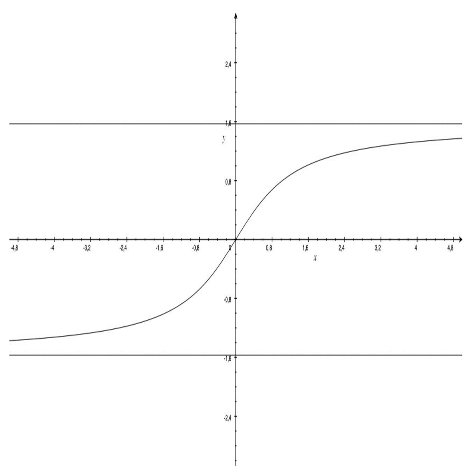
$$c = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad d = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - c\cdot x).$$

Дефиниција 73. Права $y = b$ назива се *хоризонталном асимптотом функције f у $+\infty$* ако важи $f(x) = b + o(1)$ када $x \to +\infty$.

Права $y = d$ назива се *хоризонталном асимптотом функције f у $-\infty$* ако важи $f(x) = d + o(1)$ када $x \to -\infty$. $\Diamond$

Видимо да су хоризонталне асимптоте специјалан случај косих асимптота када је $a = 0$ односно $c = 0$. Ако график функције има праву косу асимптоту ($a \neq 0$) када $x \to +\infty$ онда он не може имати и хоризонталну асимптоту у $+\infty$.

Функција $f(x) = \arctan x$ чији је график приказан на Слици 15 има хоризонталну асимптоту $y = \frac{\pi}{2}$ када $x \to +\infty$ и $y = -\frac{\pi}{2}$ када $x \to -\infty$.



Слика 15. График функције $f(x) = \arctan x$ и одговарајуће хоризонталне асимптоте

Функција $f(x) = \cos x$ нема ни хоризонталних ни косих асимптота. Иако је $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$ не постоји $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \cos x$ па самим тим не постоје никакве асимптоте у околини бесконачних тачака. Када погледамо график косинусне функције видимо да она стално осцилира између вредности 1 и -1 (јер је периодична) па график ни у једном тренутку не почиње да се приближава некој правој.

Квадратна функција $f(x) = x^2$ нема асимптота у $\pm\infty$ јер је $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$.

Експоненцијална функција $f(x) = e^x$ има хоризонталну асимптоту $y = 0$ када $x \to -\infty$ јер је $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ док у околини $+\infty$ нема ни косу ни хоризонталну асимптоту јер је $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$. Заиста када погледамо график експоненцијалне функције видимо да се она у $+\infty$ понаша јаче него било која линеарна функција.

Дефиниција 74. Права $x = C$ назива се *вертикалном асимптотом функције f* ако важи

$$\lim_{x\to C-} |f(x)| = +\infty \text{ или } \lim_{x\to C+} |f(x)| = +\infty.$$

$\Diamond$

Вертикалне асимптоте, ако постоје, јављају се у тачкама домена где је функција добијена лепљењем неке две функције или у тачкама које су избачене из домена („рупама” домена).

Пример 75. Одредити све асимптоте функције $f(x) = |x+3|e^{-\frac{1}{x}}$.

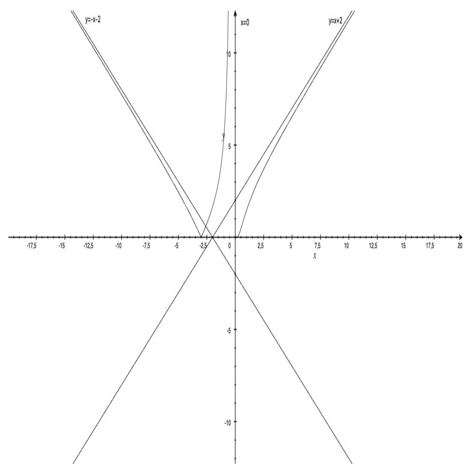
Ако развијемо $e^{-\frac{1}{x}}$ када је x произвољно велико, односно $\frac{1}{x}$ произвољно мало долазимо до следећих једнакости

$$f(x) = (x+3)\left(1 - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = x + 2 + o(1),\ x \to +\infty,$$
$$f(x) = (-x-3)\left(1 - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = -x - 2 + o(1),\ x \to -\infty.$$

То значи да функција има хоризонталне асимптоте и то $x+2$ када $x \to +\infty$ и $-x-2$ када $x \to -\infty$. Тачка $x = 0$ не припада домену функције и видимо да је

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = +\infty$$

па је $x = 0$ вертикална асимптота ове функције. Асимптоте и сам график функције су приказани на Слици 16.



Слика 16. График функције $f(x) = |x+3|e^{-\frac{1}{x}}$ и одговарајуће асимптоте

♯

4. Непрекидност функција

Подсетимо се појма непрекидности функције у тачки који је дат у Дефиницији 15. Кажемо да је функција $f : A \to \mathbb{R}$ непрекидна у тачки $a \in A$ ако и само ако важи

$$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, \delta < 0)(\forall\, x \in A)\ |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Истакнимо још једном да смо појам непрекидности дефинисали само у тачкама домена и да се зато у $\varepsilon - \delta$ дефиницији јавља услов $|x-a| < \delta$ и сама непрекидност је зависила од вредности функције у тој тачки. Док смо појам граничне вредности дефинисали у тачкама нагомилавања домена, у $\varepsilon - \delta$ дефиницији имамо услов $0 < |x-a| < \delta$ и сама гранична вредност не зависи од вредности функције у тој тачки (ако је a уопште тачка домена).

Пример 76. Показати да је линеарна функција $f(x) = ax + b$ непрекидна у свакој тачки домена (за произвољне константе a и b).

Нека је $x_0 \in \mathbb{R}$ произвољна тачка и нека је $\varepsilon > 0$ произвољно. Разлика

$$|f(x) - f(x_0)| = |a(x - x_0)|$$

биће мања од ε за свако $x \in \mathbb{R}$ за које важи $|x - x_0| < \delta$ где је

$$\delta = \begin{cases} \frac{\varepsilon}{|a|}, & a \neq 0 \\ 1, & a = 0. \end{cases}$$

Тиме смо показали непрекидност линеарне функције на целом домену. ♯

Из овог примера видимо да су константа функција и линеарна функција $f(x) = x$ непрекидне. Следећи пример даје функцију која има прекиде у неким тачкама домена.

Пример 77. Показати да функција $f(x) = \operatorname{sgn} x$ има прекид у тачки $a = 0$.

Претпоставимо супротно, функција знак броја је непрекидна у тачки $a = 0$. Узећемо да је ε које се јавља у дефиницији непрекидности у тачки једнако $\frac{1}{2}$. Дефиниција каже да ће постојати $\delta > 0$ такво да важи

$$|f(x) - f(0)| = |\operatorname{sgn} x - 0| < \frac{1}{2} \tag{16}$$

за све x за које је $|x - 0| = |x| < \delta$. Узмимо конкретно $x_1 = \frac{\delta}{2}$. Тада је x_1 у интервалу $(-\delta, \delta)$ на ком важи процена (16) али рачуном долазимо до следећег

$$|f(x_1) - f(0)| = |\operatorname{sgn} x_1 - 0| = 1 > \frac{1}{2}$$

што је контрадикција са (16). Тиме смо показали да претпоставка не важи па функција sgn има прекид у тачки $x = 0$.

Тражено својство смо могли да покажемо и на другачији начин. Већ смо споменули раније да је функција непрекидна у тачки домена ако и само ако је њен лимес у тој тачки једнак вредности функције у тој тачки (Задатак 24). Како ова функција нема лимес у тачки $a = 0$ закључујемо да ту не може бити непрекидна. ♯

Тврђење 78. Нека је функција $f : A \to \mathbb{R}$ непрекидна у тачки $a \in A$. Тада постоји околина U_a тачке a на којој је функција ограничена.

Аналогно тврђење за лимесе је Тврђење 40. Разлика је у томе што код лимеса можемо да говоримо о ограничености функције на пробушеној околини док код непрекидности имамо ограниченост функције на целој околини. Доказ ћемо изоставити јер се добија једноставном модификацијом споменутог тврђења које се односи на лимесе.

Аналогно својство исказано у Тврђењу 41 за лимесе је следеће тврђење које нам каже да график непрекидне функције можемо да одвојимо од $x-$осе у некој околини тачке у којој је функција непрекидна и различита од нуле.

Тврђење 79. Ако је функција $f : A \to \mathbb{R}$ непрекидна у тачки $a \in A$ и ако важи $f(a) \neq 0$ онда постоји околина тачке a на којој је функција различита од нуле и знак функције је исти као и знак броја $f(a)$.

Сабирањем, множењем и дељењем непрекидних функција (када је дефинисано) опет добијамо непрекидне функције.

Тврђење 80. Нека су дате функције $f, g : A \to \mathbb{R}$ које су непрекидне у тачки $a \in A$. Тада су функције $\alpha \cdot f + \beta \cdot g$ и $f \cdot g$ непрекидне функције у тачки a, за произвољне реалне константе α и β. Ако је, додатно, $g(a) \neq 0$ онда је и функција $\frac{f}{g}$ непрекидна у тачки a.

Претходно тврђење нам је показало да се појам непрекидности лепо слаже са алгебарским операцијама. Непрекидност се очувава и при композицији.

Тврђење 81. Нека су дате функције $f : A \to B$ и $g : B \to \mathbb{R}$ такве да је функција f непрекидна у тачки $a \in A$ а функција g је непрекидна у тачки $b = f(a)$. Тада је функција $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ непрекидна у тачки a.

Доказ. Узмимо произвољно $\varepsilon > 0$. Како је функција g непрекидна у тачки b онда ће постојати неко $\delta_1 > 0$ тако да важи

$$|g(y) - g(b)| < \varepsilon \tag{17}$$

кад год је $|y - b| < \delta_1$. За овако нађено δ_1 постојаће неко $\delta > 0$ тако да важи

$$|f(x) - f(a)| < \delta_1 \tag{18}$$

кад год је $|x - a| < \delta$ (ово следи из чињенице да је f непрекидна у тачки a). Сада спајамо процене (17) и (18) и закључујемо да кад год је $|x - a| < \delta$ онда је

$$|\underbrace{f(x)}_{y=f(x)} - f(a)| = |y - b| < \delta_1$$

па је

$$|g \circ f(x) - g \circ f(a)| = |g(f(x)) - g(f(a))| = |g(y) - g(b)| < \varepsilon.$$

По дефиницији следи да је функција $g \circ f$ непрекидна у тачки a. $\square$

Подсетимо се да је нека тачка домена била тачка прекида ако функција у тој тачки није непрекидна. Можемо додатно да класификујемо тачке прекида посматрајући леви и десни лимес функције у тој тачки.

Дефиниција 82. Дата је функција $f : A \to \mathbb{R}$ и $a \in A$ тачка домена у којој функција има прекид. Кажемо да f има *отклоњив прекид у тачки* a ако постоје леви и десни лимеси функције у тачки a и ако су једнаки. У супротном, прекид називамо *неотклоњивим.* Неотклоњив прекид називамо *прекидом прве врсте* ако функција има леви и десни лимес у тој тачки и лимеси су различити. Неотклоњив прекид називамо *прекидом друге врсте* ако бар један од лимеса $\lim\limits_{x\to a+} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a-} f(x)$ не постоји. $\diamondsuit$

Пример 83. Приметимо да функција $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дата са

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 7, & x = 0, \end{cases}$$

има отклоњив прекид у тачки $a = 0$. Леви и десни лимес функције g у тачки $a = 0$ једнаки су основном лимесу (11)

$$\lim_{x\to 0+} g(x) = \lim_{x\to 0-} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

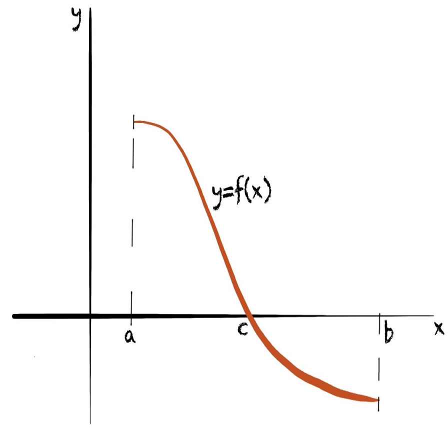
Прекиде ове врсте називамо отклоњивим јер ми можемо да променимо вредност функције g у тачки $a = 0$ тако да онда постане непрекидна. $\sharp$

У Примеру 77 смо видели да је $a = 0$ тачка прекида функције $\operatorname{sgn} x$. Како је леви лимес функције у тој тачки једнак вредности -1 а десни лимес једнак јединици закључујемо да је тачка $a = 0$ тачка прекида прве врсте функције $\operatorname{sgn} x$.

4.1. Глобална својства непрекидних функција. У претходном делу смо се бавили локалним својствима непрекидних функција, односно понашањем функције у околини неке тачке. Сада ћемо се бавити глобалним својствима непрекидних функција која описују понашање функције на неком скупу.

Теорема 84. (Коши-Болцанова теорема) *Нека је $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ непрекидна функција таква да је $f(a) \cdot f(b) < 0$. Тада је $f(c) = 0$ за неко $c \in (a, b)$.*

Доказ. Посматрамо тачку која се налази на половини интервала $[a, b]$, то је тачка $\frac{a+b}{2}$. Ако је $f(\frac{a+b}{2}) = 0$ доказ је завршен, тачка $c = \frac{a+b}{2}$ задовољава услове теореме. Ако је $f(\frac{a+b}{2}) \neq 0$ онда имамо две могућности, $f(\frac{a+b}{2}) > 0$ или $f(\frac{a+b}{2}) < 0$. Сада посматрамо интервал I_1 у чијим крајевима функција f има различит знак, то је $[a, \frac{a+b}{2}]$ или $[\frac{a+b}{2}, b]$. Поновимо овај поступак



Слика 17. Пример функције која задовољава поставке Коши-Болцанове теореме

са интервалом I_1 чије крајеве ћемо означити са $[a_1, b_1]$ (приметимо да је ширина интервала I_1 једнака $\frac{b-a}{2}$). Поделимо га тачком $\frac{a_1+b_1}{2}$ на два дела. Ако је фунција f једнака нули у тачки $\frac{a_1+b_1}{2}$ онда ће то бити тачка c која задовољава закључак теореме. У супротном, дефинишемо интервал I_2 у чијим крајевима функција f има различит знак, то ће бити интервал $[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}]$ или $[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$. Означимо крајеве интервала са $[a_2, b_2]$. Ширина интервала је $\frac{b_1-a_1}{2} = \frac{b-a}{2^2}$. Наставимо поступак даље. Ако у неком тренутку наиђемо на тачку у којој је функција једнака нули доказ се завршава. Ако не нађемо такву тачку онда смо дефинисали низ затворених уметнутих интервала

$$I_n = [a_n, b_n] \supseteq I_{n+1} = [a_{n+1}, b_{n+1}]$$

у чијим крајевима функција f има различит знак и чија је ширина $\frac{b-a}{2^n}$.

Из Канторове теореме следи да ће пресек интервала $\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} I_n$ бити непразан. Сада ћемо показати да ће пресек бити једнак једној тачки и да ће вредност функције у тој тачки бити једнака нули. Ако би се у пресеку налазиле две различите тачке c_1 и c_2 онда би на основу Архимедове теореме постојао природан број n_0 такав да је $\frac{b-a}{2^{n_0}} < |c_2 - c_1|$. Другим речима тачке c_1 и c_2 су на растојању које је веће од ширине интервала I_{n_0} па не могу обе тачке да се нађу у интервалу I_{n_0} а самим тим ни у пресеку $\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} I_n$. Дакле, $\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} I_n = \{c\}$. Преостаје нам да покажемо да је $f(c) = 0$. Претпоставимо супротно, $f(c) \neq 0$. Како је f непрекидна функција онда ће постојати неки интервал око тачке c, облика $J_\varepsilon = (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$, на ком је функција сталног знака. Опет, из Архимедове аксиоме следи да ће постојати природан број n_0 такав да је $\frac{b-a}{2^{n_0}} < \varepsilon$. То значи да ће цео интервал I_{n_0} бити садржан у J_ε. Тиме смо дошли до контрадикције јер функција f има различит знак на крајевима интервала I_{n_0} док је f сталног знака на интервалу J_ε. □

Задатак 85. Показати да полином $p(x) = x^5 + 17x^2 + 20$ има бар једну реалну нулу.
Решење. Приметимо да је $p(2) = 120 > 0$ и $p(-3) = -70 < 0$ па ће на основу Теореме 84 постојати нула полинома p у интервалу $(-3, 2)$. ✓

Напомена 86. Важи и општије својство, сваки полином непарног степена има бар једну реалну нулу. Ово се једноставно доказује користећи чињеницу да за сваки полином непарног степена $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ важи $\lim\limits_{x\to\pm\infty} p(x) = \pm\infty$ или $\lim\limits_{x\to\pm\infty} p(x) = \mp\infty$ (знак лимеса у бесконачности зависи од знака водећег коефицијента a_n као што смо видели у Примеру 55). ◇

Задатак 87. Доказати да свака непрекидна функција $f : [0, 1] \to [0, 1]$ има фиксну тачку (фиксна тачка је тачка x_0 за коју важи $f(x_0) = x_0$).
Решење. Дефинишимо нову функцију $F : [0, 1] \to \mathbb{R}$ са

$$F(x) = f(x) - x.$$

Приметимо да фиксне тачке пресликавања f одговарају нулама функције F и обрнуто. Функција F је непрекидна као разлика непрекидних функција и у крајњим тачкама интервала има вредности $F(0) = f(0) - 0 = f(0) \geq 0$ и $F(1) = f(1) - 1 \leq 0$. Последње две неједнакости следе из чињенице да је кодомен функције f такође интервал $[0, 1]$. Ако је $F(0) = 0$ или $F(1) = 0$ тада је $x_0 = 0$, односно $x_0 = 1$, фиксна тачка пресликавања f. Претпоставимо да је $F(0) \neq 0$ и $F(1) \neq 0$. Тада је $F(0) > 0$ и $F(1) < 0$ па функција F има различит знак на крајевима интервала $[0, 1]$. Из Теореме 84 следи да постоји нула $c \in (0, 1)$ ове функције, $F(c) = 0$, а то ће бити фиксна тачка пресликавања f. ✓

Напомена 88. Приметимо да непрекидна функција $f(x) = x^2$ слика интервал $(0, 1)$ у $(0, 1)$ а ипак нема фиксних тачака на $(0, 1)$. Претходни задатак не може да се примени на овај конкретан пример јер домен функције f није затворен интервал. ◇

Теорема 89. (Теорема о међувредности) *Ако је $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ непрекидна функција за коју је $f(a) = A$ и $f(b) = B$, онда за свако C које је између A и B постоји $c \in (a, b)$ такво да је $f(c) = C$.*

Доказ. Доказ следи из претходне теореме када се посматра функција $f(x) - C$. □

Ако се подсетимо карактеризације интервала долазимо до следеће последице.

Последица 90. *Непрекидна слика интервала је интервал.*

Пример 91. Функција $f : [0, 5] \to \mathbb{R}$ дефинисана са

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & 1 < x \leq 5, \end{cases}$$

слика интервал $[0, 5]$ у $[0, 1]$ али функција f није непрекидна на $[0, 5]$ (има прекид у тачки $x = 1$). Овај пример нам говори да не важи обрнута импликација у претходној последици. ♯

Теорема 92. (Вајерштрасова теорема) *Непрекидна функција на затвореном и ограниченом интервалу је ограничена и достиже максимум и минимум.*

Доказ. Нека је $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ непрекидна функција.

Прво ћемо показати да је f ограничена. Претпоставимо супротно, f није ограничена на $[a, b]$. Тада функција није ограничена на левој или десној половини овог интервала јер ако би била ограничена на обе половине онда би била ограничена и на њиховој унији (горње ограничење би било максимум горњих ограничења на половинама а доње ограничење је минимум доњих ограничења на половинама). Означимо са I_1 интервал на ком функција није ограничена (слично као у доказу Теореме 84 интервал I_1 је ширине $\frac{b-a}{2}$). Сада интервал I_1 поделимо на два дела и означимо са I_2 интервал ширине $\frac{b-a}{2^2}$ на ком функција f није ограничена. Наставимо поступак. На овај начин дефинишемо низ опадајућих интервала $I_n \supseteq I_{n+1}$ који су ширине $\frac{b-a}{2^n}$ и f је неограничена на сваком од њих. Према Канторовој теореми њихов пресек је непразан и слично као и у доказу Теореме 84 садржаће само једну тачку, $\bigcap\limits_{n \in \mathbf{N}} I_n = \{c\}$. Према претпоставци теореме f је непрекидна на свом домену па је непрекидна и у тачки c. Локално својство непрекидних функција нам каже да ће постојати околина $J_\varepsilon = (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ на којој је функција f ограничена. На основу Архимедове аксиоме постоји природан број n_0 такав да је $\frac{b-a}{2^{n_0}} < \varepsilon$ па ће интервал I_{n_0} бити подскуп од J_ε.

Ово је контрадикција јер је са једне стране f неограничена на I_{n_0} а са друге стране смо J_ε конструисали тако да f буде ограничена на тој околини тачке c.

Сада ћемо показати да f достиже минимум на $[a,b]$ (на сличан начин се доказује да f достиже максимум). Претпоставимо супротно, нека је $m = \inf_{[a,b]} f$ али нека је $f(x) \neq m$, односно $f(x) > m$, за све $x \in [a,b]$. Дефинишимо функцију $g(x) = \frac{1}{f(x)-m}$. Како је именилац непрекидна функција различита од нуле за све $x \in [a,b]$ онда ће функција g бити непрекидна на $[a,b]$. Према претходном делу доказа функција g је ограничена па ће постојати константа $C > 0$ таква да је

$$g(x) = \frac{1}{f(x)-m} \leq C$$

за све $x \in [a,b]$. Тада је

$$f(x) \geq m + \frac{1}{C}$$

за све $x \in [a,b]$. Ово је контрадикција јер ће онда $m + \frac{1}{C}$ бити једно доње ограничење скупа $\{f(x) \,|\, x \in [a,b]\}$ чији је инфимум m мањи од те вредности (подсетимо се да је инфимум скупа његово највеће доње ограничење). Закључујемо да је $m = f(x_0)$ за неко $x_0 \in [a,b]$. $\square$

Задатак 93. Наћи слике скупова $A = (-1,1)$, $B = (-1,1]$, $C = [-3,5]$ и $D = [4,+\infty)$ при пресликавању $f(x) = x^2$.

Решење. Функција f је непрекидна а скупови A, B, C и D су интервали па ће и њихове слике бити интервали. Приметимо да је $x^2 \geq 0$ и да је $x^2 < 1$ за све $|x| < 1$. Када узмемо произвољан позитиван број s мањи од 1 онда је $\sqrt{s} \in A$ и $f(\sqrt{s}) = s$. То значи да је $f(A) = [0,1)$. Лако закључујемо да је $f(B) = [0,1]$. Са друге стране $f(5) = 25$ па је $f(C) = [0,25]$. Лако се закључује да је $f(D) = [16,+\infty)$. Приметимо да смо на скуп C могли да применимо Вајерштрасову теорему јер је C затворен и ограничен интервал док на интервале A, B и D нисмо могли да применимо исту теорему. Интервали A и B нису затворени док D није ограничен. ✓

4.2. Непрекидност монотоних функција. Подсетимо се да је функција (строго) монотона ако је она (строго) растућа или (строго) опадајућа.

Тврђење 94. Монотона функција може имати само прекиде прве врсте.

Доказ. Нека $f : X \to \mathbb{R}$ и претпоставимо, без умањења општости, да је функција растућа. Нека је $x_0 \in X$ тачка прекида функције f. Сада ћемо показати да постоје леви и десни лимес функције у тачки x_0. Посматрамо скупове

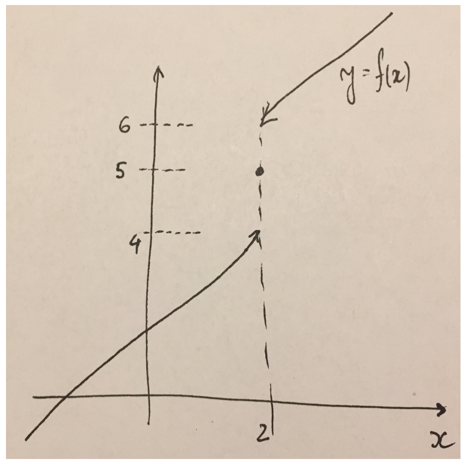
$$A = \{f(x) \,|\, x < x_0\},\ B = \{f(x) \,|\, x > x_0\}.$$

Функција је растућа па је скуп A ограничен одозго вредношћу $f(x_0)$ док је скуп B ограничен одоздо истим бројем. Аксиома супремума нам каже да ће постојати супремум скупа A, $a_0 = \sup A$, и инфимум скупа B, $b_0 = \inf B$. Показаћемо да је $\lim_{x \to x_0-} f(x) = a_0$, односно да је a_0 леви лимес функције у тачки x_0. Нека је $\varepsilon > 0$ произвољно. На основу дефиниције супремума постојаће $x_\varepsilon \in A$ за које је $a_0 - \varepsilon < f(x_\varepsilon) \leq a_0$. Како је функција растућа важиће $f(x_\varepsilon) \leq f(x)$ за све x за које је $x_\varepsilon \leq x < x_0$. Дакле $a_0 - \varepsilon < f(x) \leq a_0$ ако је $|x - x_o| < \delta$ где је $\delta = x_0 - x_\varepsilon$. Ако се подсетимо дефиниције левог лимеса у тачки закључујемо да је $a_0 = \lim_{x \to x_0-} f(x)$. Аналогно се доказује да је b_0 десни лимес функције f у тачки x_0. Тиме смо доказали да монотона функција има леви и десни лимес у свакој тачки. Још један закључак можемо да извучемо из доказа овог тврђења. Једно горње ограничење скупа A је $f(x_0)$ а његов супремум је a_0 па закључујемо да важи $a_0 \leq f(x_0)$. Скуп B има једно доње ограничење $f(x_0)$ а инфимум скупа B је b_0. Дакле $f(x_0) \leq b_0$. Од две неједнакости

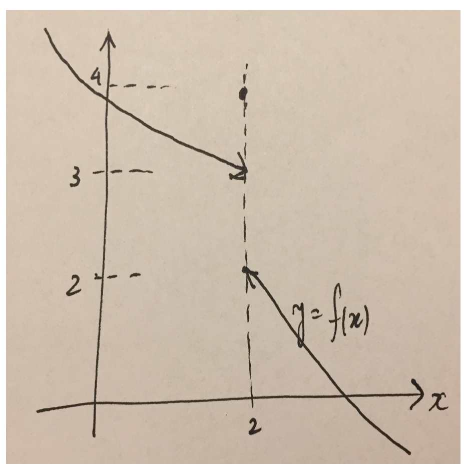
$$\lim_{x \to x_0-} f(x) = a_0 \leq f(x_0) \leq b_0 = \lim_{x \to x_0+} f(x)$$

једна је строга јер је x_0 тачка прекида функције. □

Пример 95. На Слици 18 налази се пример функције која је растућа. Приметимо да функција у тачки $x = 2$ има прекид прве врсте и да важи $\lim\limits_{x\to 2-} = 4$, $\lim\limits_{x\to 2+} = 6$ док је $f(2) = 5$. На Слици 19 налази се график функције која није монотона. Приметимо да је она опадајућа лево од тачке $x = 2$, затим има скок у $x = 2$ а онда наставља да опада. Приметимо да је $\lim\limits_{x\to 2-} = 3$, $\lim\limits_{x\to 2+} = 2$ док се вредност функције у самој тачки $x = 2$, $f(2) = 4$ не налази између левог и десног лимеса. ♯



Слика 18. Пример растуће функције



Слика 19. Пример функције која није монотона

Теорема 96. *Монотона функција $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ је непрекидна ако и само ако је $f((a, b))$ интервал.*

Напомена 97. У исказу теореме $f((a, b))$ означава слику интервала при пресликавању f, $f((a, b)) = \{f(x) \,|\, x \in (a, b)\} \subseteq \mathbb{R}$.

Доказ. Један смер (са леве на десну страну) смо већ видели као Последицу 90, ту нам претпоставка о монотоности функције није потребна. Нека је сада $f((a, b))$ интервал и f монотона функција. Претпоставимо да је неко $x_0 \in (a, b)$ тачка прекида функције f. Тада је $a_0 = \lim\limits_{x\to x_0-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = b_0$ и вредност $f(x_0)$ се налази између ових бројева. Нека је I_0 отворен интервал са крајевима a_0 и b_0 (ако је f растућа онда је $I_0 = (a_0, b_0)$ а ако је f опадајућа онда је $I_0 = (b_0, a_0)$). Како су бројеви a_0 и b_0 различити I_0 је прави интервал (није празан већ садржи бесконачно много тачака). У доказу Тврђења 94 смо видели да је $f(x_0)$ између a_0 и b_0 при чему је једна неједнакост строга. Ако је $f(x_0)$ строго између ова два броја онда је $f(x_0) \in I_0$ а може да се деси да је $f(x_0)$ једнако неком од бројева a_0 или b_0 и у том случају $f(x_0)$ не припада интервалу I_0. На основу ове анализе видимо да слика $f((a,b))$ има праву "рупу" I_0 у којој ће се можда налазити тачка $f(x_0)$ али ништа више сем тога. Другим речима $f((a,b))$ није интервал. Ова контрадикција нам каже да f не може имати тачке прекида, односно да је f непрекидна функција. □

Задатак 98. Показати да је свака строго монотона функција инјективна.
Решење. Нека је $f : X \to \mathbb{R}$ строго растућа функција и нека је $f(x_1) = f(x_2)$. Ако је $x_1 \neq x_2$ онда је $x_1 < x_2$ или $x_1 > x_2$. Из чињенице да је f строго растућа закључујемо да је $f(x_1) < f(x_2)$ или $f(x_1) > f(x_2)$. У сваком случају не може да важи $f(x_1) = f(x_2)$. Једино преостаје $x_1 = x_2$. Ако је f опадајућа функција можемо да посматрамо функцију $-f$ која је у том случају растућа па на њу применимо доказано својство инјективности. ✓

Тврђење 99. Ако је $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ строго монотона и непрекидна функција тада је и f^{-1} (са одговарајућим доменом) непрекидна функција.

Доказ. Како је f непрекидна функција онда ће слика интрвала (a,b) при пресликавању f бити неки интервал (α, β). Задатак 98 нам каже да ће f бити инјективно пресликавање, па ће постојати његов инверз $f^{-1} : (\alpha, \beta) \to (a,b)$. Преостаје нам да покажемо да ће и инверзна функција бити строго монотона. Да бисмо олакшали запис претпоставимо да је f строго растућа. Нека су $y_1 < y_2$ произвољни елементи из (α, β). Знамо да је $y_i = f(x_i)$, $i = 1,2$ за неке $x_1, x_2 \in (a,b)$. Очигледно је $x_1 \neq x_2$. Ако је $x_1 > x_2$ тада је $f(x_1) > f(x_2)$ јер је f строго растућа, односно $y_1 > y_2$ а то је у супротности са почетним одабиром елемената y_1 и y_2. Дакле, важи $x_1 < x_2$. Приметимо да је $x_i = f^{-1}(y_i)$, $i = 1,2$. Закључујемо да важи $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$ ако је $y_1 < y_2$, тј. инверзна функција f^{-1} је строго растућа. $f^{-1}((\alpha,\beta))$ је интервал, f^{-1} је монотона функција па нам Теорема 96 каже да ће и f^{-1} бити непрекидна функција. □

4.3. Непрекидност елементарних функција. У Примеру 76 смо показали да да је линеарна функција $f(x) = x$ непрекидна. Знамо да је производ непрекидних функција непрекидна функција па ће и функције $x^2, x^3, \ldots$ бити такође непрекидне. Како је збир и количник непрекидних функција непрекидна функција можемо да закључимо да су полиномске и рационалне функције непрекидне.

Квадратна функција x^2 инјективно слика скуп $[0, +\infty)$ у $[0, +\infty)$, при томе је и строго растуће и слика домена је такође $[0, +\infty)$. Инверзна, односно корена функција $\sqrt{x} : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ је такође непрекидна. Функција x^3 је строго растућа и непрекидна на свом домену и кодомен је једнак скупу $\mathbb{R}$. Њен инверз је непрекидан и слика $\sqrt[3]{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. И уопште, степена функција x^{2k} где је $k \in \mathbb{N}$ има непрекидан инверз када посматрамо њену рестрикцију на $[0, +\infty)$ док степене функције облика x^{2k+1} имају непрекидан инверз на целом $\mathbb{R}$. Другим речима, корене функције су непрекидне.

Подсетимо се да смо доказали непрекидност синусне и косинусне функције у тачки $a = 0$ у Примеру 57. Желимо да покажемо непрекидност ових функција у свим тачкама домена. Знамо да за важи $|\sin x| \leq |x|$ за све $x \in \mathbb{R}$. Нека је $x_0 \in \mathbb{R}$ произвољна тачка. Тада је

$$|\sin x - \sin x_0| = \left| 2 \cdot \sin \frac{x - x_0}{2} \cdot \cos \frac{x + x_0}{2} \right| \leq 2 \left| \sin \frac{x - x_0}{2} \right| \leq |x - x_0|.$$

Када прођемо лимесом по $x \to x_0$ добијемо да скроз десна страна тежи нули па ће и разлика $\sin x - \sin x_0$ тежити нули. Другим речима $\lim\limits_{x\to x_0} \sin x_0 = \sin x$. Слично, користећи тригонометријске идентитете добијамо низ неједнакости

$$|\cos x - \cos x_0| = \left|-2 \cdot \sin \frac{x-x_0}{2} \cdot \sin \frac{x+x_0}{2}\right| \le 2\left|\sin \frac{x-x_0}{2}\right| \le |x - x_0|,$$

па је и косинусна функција непрекидна у произвољној тачки x_0.

Приметимо да је $\sin x$ строго растућа на интервалу $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ и непрекидна па ће и њена инверзна функција arcsin бити такође непрекидна. Слично важи и за косинус. Када рестрикујемо косинус на $[0, \pi]$ (где он опада) долазимо до непрекидне инверзне функције

$$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi].$$

Горња дискусија је показала део исказа следеће теореме.

Теорема 100. *Елементарне функције су непрекидне.*

Доказ. Знамо да је збир, производ, количник (када је дефинисан) и композиција непрекидних функција непрекидна функција. Преостало нам је само да покажемо да су непрекидне експоненцијална и логаритамска функција.

Показујемо непрекидност експоненцијалне функције у тачки $x = 0$. Нека је $\varepsilon > 0$ произвољно. Како је $e > 1$ онда ће бити $e - 1 > 0$ па ће на основу Архимедове аксиоме постојати природан број n такав да важи

$$n \cdot \varepsilon > e - 1,$$

односно $1 + n \cdot \varepsilon > e$. Користећи Бернулијеву неједнакост закључујемо да је

$$(1 + \varepsilon)^n \ge 1 + n \cdot \varepsilon > e.$$

Када узмемо $n-$ти корен леве и десне стране добијамо неједнакост

$$1 + \varepsilon > e^{\frac{1}{n}}.$$

Када неједнакост запишемо у следећем облику $e^{\frac{1}{n}} - 1 < \varepsilon$ па леву и десну страну помножимо са $e^{-\frac{1}{n}}$ добијемо неједнакост

$$1 - e^{-\frac{1}{n}} < e^{-\frac{1}{n}} \cdot \varepsilon < \varepsilon$$

при чему последња неједнакост важи јер је $0 < e^{-\frac{1}{n}} < 1$. Ако је x у следећој околини тачке 0, $(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ (где смо n одабрали тако да важе све горње неједнакости) онда је

$$e^{-\frac{1}{n}} < e^x < e^{\frac{1}{n}},$$

па је даље

$$-\varepsilon < e^{-\frac{1}{n}} - 1 < e^x - 1 < e^{\frac{1}{n}} - 1 < \varepsilon.$$

Дакле у $(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ околини тачке 0 важи

$$|e^x - 1| < \varepsilon.$$

Закључујемо $\lim\limits_{x\to 0} e^x = 1$ а знамо да је $e^0 = 1$ па је експоненцијална функција непрекидна у $x = 0$. За произвољну тачку $x_0 \in \mathbb{R}$ приметимо да је

$$\lim_{x\to x_0} (e^x - e^{x_0}) = \lim_{x\to x_0} \left(e^{x_0}(e^{x-x_0} - 1)\right) = e^{x_0} \lim_{x\to x_0} (e^{x-x_0} - 1) = e^{x_0} \lim_{h\to 0}(e^h - 1) = e^{x_0} \cdot 0 = 0,$$

односно $\lim\limits_{x\to x_0} e^x = e^{x_0}$ па је експоненцијална функција непрекидна у свакој тачки свог домена.

Експоненцијална функција је строго растућа и непрекидна па ће на основу Тврђења 99 и њој инверзна логаритамска функција бити непрекидна. □

5. Хајнеова и Кошијева карактеризација лимеса

Појам граничне вредности смо дефинисали на $\varepsilon - \delta$ језику и то је Кошијева дефиниција. Граничну вредност функције можемо да дефинишемо користећи низове. Ту дефиницију је дао Хајне, еквивалентна је Кошијевој дефиницији и ми ћемо то формулисати као теорему.

Теорема 101. (Хајнеова карактеризација лимеса) *Нека је дата функција $f : X \to \mathbb{R}$ и нека је $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ тачка нагомилавања скупа X. Тада је $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L \in \overline{\mathbb{R}}$ ако и само ако за сваки низ $x_n \in X \setminus x_0$ важи импликација*

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = x_0 \implies \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = L.$$

Доказ.

$\implies$:

Нека је L гранична вредност функције f у тачки x_0 и нека је (x_n) низ у $X \setminus x_0$ за који важи $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x_0$. Хоћемо да покажемо да је $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = L$.

Нека је $\varepsilon > 0$ произвољно. Тада ће постојати $\delta > 0$ такво да је $|f(x) - L| < \varepsilon$ кад год је $0 < |x - x_0| < \delta$. Када дефинишемо овакво $\delta > 0$ онда ће постојати $n_0 \in \mathbb{N}$ за које је $|x_n - x_0| < \delta$ за све $n \geq n_0$. На основу овога закључујемо да за све $n \geq n_0$ важи $|f(x_n) - L| < \varepsilon$, односно $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = L$.

$\impliedby$:

Претпоставимо да не важи $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$. То значи да

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x \in X)\, 0 < |x - x_0| < \delta \wedge |f(x) - L| \geq \varepsilon.$$

Овај део $\forall \delta > 0$ ми ћемо заменити са $\forall n \in \mathbb{N}$ јер желимо да конструишемо низ, а узећемо да је $\delta = \frac{1}{n}$. Дакле за сваки природан број n постоји $x_n \in X$ тако да важи $0 < |x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ и $|f(x_n) - L| \geq \varepsilon$. На овај начин смо конструисали низ $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ из $X \setminus \{x_0\}$ за који важи $x_n \to x_0$ када $n \to +\infty$ а са друге стране је $|f(x_n) - L| \geq \varepsilon$ па не може да важи $f(x_n) \to L$ када $n \to +\infty$. Тиме смо дошли до контрадикције па претпоставка не важи, односно задовољена је једнакост $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$.

Овај доказ подразумева да су x_0 и L коначне вредности и сличан је доказу када су x_0 или L бесконачне вредности. □

Пример 102. Показати да не постоји $\lim\limits_{x \to +\infty} \sin x$.

Претпоставимо да постоји овај лимес и да је једнак некој вредности L. Посматрамо два низа, $x_n = 2n\pi$ и $y_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$. Очигледно да оба низа имају граничну вредност $+\infty$. Низ вредности $f(x_n) = \sin(2n\pi) = 0$ је константан па важи $f(x_n) \to 0$ када $n \to +\infty$. Хајнеова карактеризација каже да је $L = 0$. Други низ вредности $f(y_n) = \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) \to 1$ када $n \to +\infty$, па опет из Хајнеовог принципа следи да је $L = 1$. Ово је контрадикција па не постоји $\lim\limits_{x \to +\infty} \sin x$. ♯

Претходна особина је последица општијег својства. Ако је f периодична функција и ако није константна онда она нема лимес у бесконачности. Нека су $a, b \in Dom(f)$ две тачке у којима f има различите вредности (ове тачке постоје јер f није константна функција) и нека је $T > 0$ период функције. Посматрамо низове $a_n = a + nT$ и $b_n = b + nT$. Оба низа теже ка $+\infty$ када $n \to +\infty$. Вредности функције на овим низовима су константне јер је $f(a_n) = f(a + nT) = f(a)$ док је $f(b_n) = f(b)$. Дакле граничне вредности низова $f(a_n)$ и $f(b_n)$ су различите па не постоји $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. На основу овога закључујемо да периодична функција не може имати хоризонталну асимптоту. А не може имати ни косу асимптоту што следи из чињенице да f има коначне вредности када је аргумент произвољно велик.

Као последицу Хајнеове карактеризације можемо да дамо карактеризацију непрекидности функције помоћу низова.

Последица 103. *Функција $f : X \to \mathbb{R}$ је непрекидна у тачки $x_0 \in X$ ако и само ако за сваки низ $x_n \in X$ важи*

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x_0 \implies \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x_0).$$

Следећа теорема нам даје потребан и довољан услов постојања коначне граничне вредности функције.

Теорема 104. (Кошијев критеријум постојања лимеса у тачки) *Нека је дата функција $f : A \to \mathbb{R}$ при чему је $A \subseteq \mathbb{R}$ и $a \in \mathbb{R}$ тачка нагомилавања скупа A. Тада постоји гранична вредност функције f у тачки a ако и само ако важи*

$$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, \delta > 0)(\forall\, s,t \in A)\ 0 < |s-a| < \delta \wedge 0 < |t-a| < \delta \Rightarrow |f(s) - f(t)| < \varepsilon. \tag{19}$$

Напомена 105. Битно је истаћи да у Кошијевом критеријуму не фигурише сама гранична вредност L која се појављује у дефиницији граничне вредности. Дакле овај критеријум показује да ли лимес постоји или не без обзира на то што можда не знамо која је вредност лимеса. $\diamond$

Доказ.

$\Longleftarrow$:

Нека функција f има граничну вредност, коју ћемо означити са L, у тачки a и нека је $\varepsilon > 0$ произвољно. Тада постоји $\delta > 0$ такво да је $|f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ кад год је $0 < |x-a| < \delta$. За тако одабрано δ важи

$$|f(s) - f(t)| = |f(s) - L + (L - f(t))| \overset{(*)}{\leq} |f(s) - L| + |f(t) - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

кад год је $0 < |s-a| < \delta$ и $0 < |t-a| < \delta$ (у кораку $(*)$ смо искористили неједнакост троугла). Тиме смо доказали неједнакост са десне стране импликације (19).

$\Longleftarrow$:

Доказ овог смера, који користи Хајнеову карактеризацију, дајемо у два корака.

1. корак. Нека је $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ произвољан низ у $X\setminus\{x_0\}$ за који важи $x_n \to x_0$ када $n \to +\infty$. Нека је $\varepsilon > 0$ произвољно и нађимо $\delta > 0$ тако да важи (19). Тада ће постојати $n_0 \in \mathbb{N}$ тако да је за све $n \geq n_0$ задовољено $|x_n - x_0| < \delta$. Сада за све $m,n \geq n_0$ важи $0 < |x_n - x_0| < \delta$ и $0 < |x_m - x_0| < \delta$ па је на основу (19) задовољена неједнакост $|f(x_m) - f(x_n)| < \varepsilon$. То значи да је низ $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ Кошијев, па ће бити и конвергентан, односно постоји коначно $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)$.

Сада је питање зашто је за сваки низ који тежи ка x_0 ова гранична вредност иста. То ћемо показати у другом кораку.

2. корак. Нека је $x_n \in X \setminus \{x_0\}$ један произвољан низ који тежи ка x_0 и означимо са $L = \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)$. Нека је $y_n \in X \setminus \{x_0\}$ произвољан низ који тежи ка x_0 и нека је $\varepsilon > 0$ произвољно. Дефинишемо $\delta > 0$ из (19) и нађемо $n_1 \in \mathbb{N}$ такво да је $|y_n - x_0| < \frac{\delta}{2}$ за све $n \geq n_1$. И нека је $n_2 \in \mathbb{N}$ такво да је $|x_n - x_0| < \frac{\delta}{2}$ за све $n \geq n_2$. Дефинишемо

$$n_3 = \max\{n_1, n_2\}.$$

Тада је за све $n \geq n_3$ задовољено

$$|x_n - y_n| = |x_n - x_0 + x_0 - y_n| \leq |x_n - x_0| + |x_0 - y_n| < \delta.$$

Низ $f(x_n)$ тежи ка L па постоји $n_4 \in \mathbb{N}$ тако да је

$$|f(x_n) - L| < \varepsilon$$

за све $n \geq n_4$. На крају узмемо

$$n_0 = \max\{n_3, n_4\}.$$

Тада је за све $n \geq n_0$ задовољена неједнакост

$$|f(y_n) - L| \leq |f(y_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - L| < \varepsilon + \varepsilon,$$

при чему важи $|f(y_n) - f(x_n)| < \varepsilon$ јер су аргументи x_n и y_n на растојању мањем од δ. То значи да је $\lim\limits_{n \to +\infty} f(y_n) = L$.

Сада на основу Хајнеове карактеризације закључујемо да је гранична вредност функције f у тачки x_0 једнака тој коначној вредности L, односно да постоји.

$\square$

Пример 106. Дата је функција $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ са

$$h(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Показати да је тачка $a = 0$ тачка прекида друге врсте функције h.

У произвољно малој десној околини тачке $a = 0$ постоје тачке домена облика $x_k = \frac{1}{2k\pi}$ и $y_k = \frac{1}{2k\pi + \frac{\pi}{2}}$, $k \in \mathbb{N}$, за које важи

$$|f(x_k) - f(y_k)| = \left|\sin(2k\pi) - \sin\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right| = 1.$$

Тиме видимо да није задовољен Кошијев услов постојања лимеса па не постоји десни лимес функције h у тачки $a = 0$. $\sharp$

6. Задаци