ОБЛАСТ 2

Низови

Знамо од раније да је низ реалних бројева објекат који записујемо као

$$x = \{1, 2, 3, 8, ..., 59, 678, ...\}$$

или

$$a_n = \left\{\frac{1}{7}, \frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{13}, \frac{1}{17}, ..., \sin 50, e^{67}, ..., \cos 900, \ln 150, ...\right\}.$$

Три тачке означавају да се овај поступак записивања чланова низа никада не завршава, другим речима то је бесконачан скуп елемената.

Некада низ задајемо и у следећем облику

$$x_n = \frac{3^n}{n!},\ n \in \mathbb{N}.$$

То је низ чији су чланови дати са $x_n = \left\{3, \frac{9}{2}, \frac{27}{6}, \frac{81}{24}, ...\right\}$.

Низ можемо да задамо и *рекурентно*. Ако задамо први члан низа а сваки наредни члан зависи од претходног члана онда кажемо да је тај низ задат рекурентно. Ако сваки елемент низа зависи од претходна два члана низа онда морамо да задамо прва два елемента низа. Примери рекурентних низова су

$$a_1 = 55,\ a_{n+1} = \frac{3a_n + 2}{5},\ n \in \mathbb{N},$$

и

$$b_1 = 3,\ b_2 = 5,\ b_{n+2} = e^{b_n} + \cos b_{n+1},\ n \in \mathbb{N}.$$

Даћемо и формалну дефиницију низа мада ћемо интуитивну представу о низовима користити и касније.

Дефиниција 1. *Низ* реалних бројева је пресликавање $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Вредности

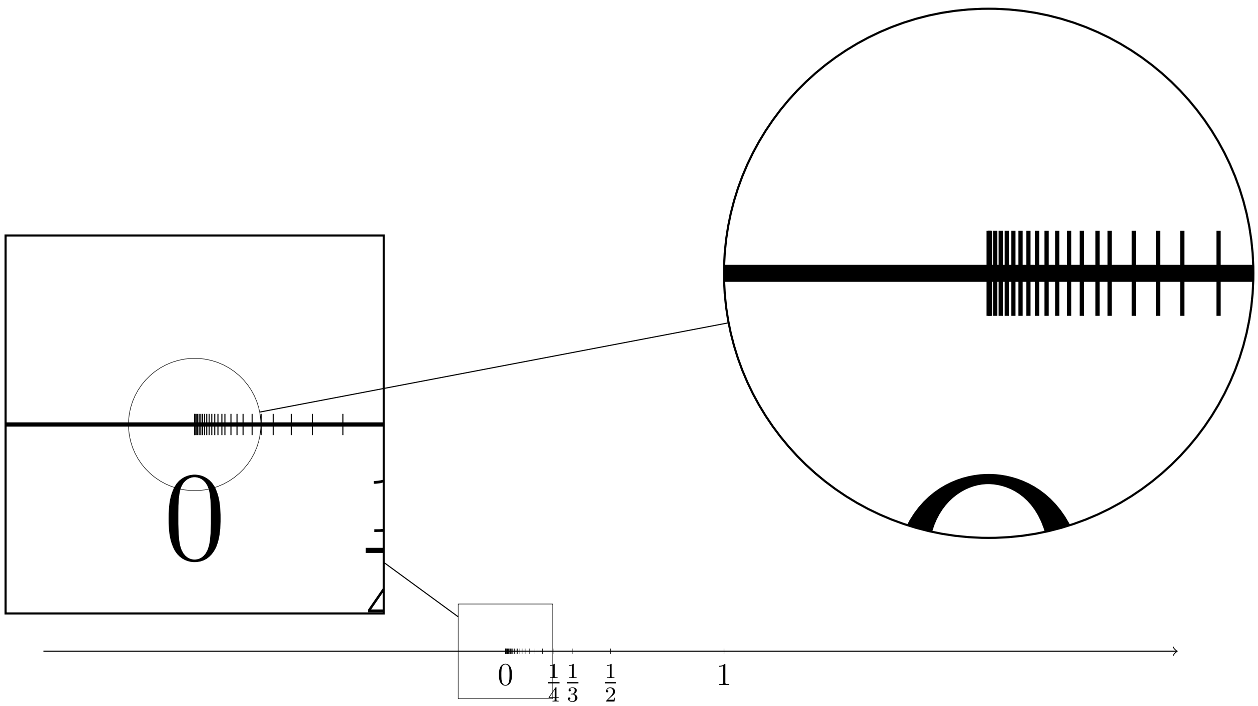
$$x(1), x(2), x(3), ..., x(54), x(55), ...$$

називамо члановима низа. Слику природног броја n при пресликавању x означавамо са $x(n)$ или x_n. Низ означавамо са $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, (x_n) или $\{x_n\}$. $\Diamond$

Када кажемо дат је низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ подразумевамо да је заправо дато пресликавање $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ и да знамо чему је једнако $x(n)$ односно x_n за свако $n \in \mathbb{N}$.

С обзиром на то да радимо са реалним низовима чланове таквих низова можемо да нацртамо на бројевној правој. Ако нам је дат неки низ тада сваком елементу можемо да придружимо тачку на бројевној правој. Нас занима како су те тачке распоређене на овој правој. Нека је наш задатак да спроведемо неки физички екперимент, на пример меримо за колико времена куглица сиђе низ једну исту стрму раван а знамо да теоријска мерења кажу да би куглица требала да сиђе за време од $3s$. Време силаска t посматрамо као неки реалан број и у првом мерењу добијено време силаска означимо са t_1, следеће мерење нам дâ време t_2, затим t_3 и када бисмо могли овај поступак да радимо до у бесконачност добили бисмо низ реалних бројева $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Сваки елемент низ t_n означава време добијено у $n-$том мерењу. У почетку смо несигурни са штоперицом па нам рука не реагује на време када куглица дође до краја стрме равни. Како повећавамо број мерења то и ми постајемо сигурнији и измерено време t_n биће све ближе вредности од $3s$. То значи да се вредности t_n, нанете на бројевну праву, гомилају око броја 3, и како индекс n расте број t_n постаје све ближе вредности 3, некада чак може и да буде једнако вредности 3. Описано понашање низа, где се његове вредности гомилају око једног броја, желимо ближе да опишемо. Таква правилност у понашању нам омогућава да контролишемо распоред елемената низа на бројевној правој.

Посматрајмо сада конкретан низ $x_n = \frac{1}{n}$. Неки елементи низа приказани су на Слици 1. Када погледамо бројевну праву из далека, можемо да приметимо да су елементи низа нагомилани са десне стране тачке 0. Ако увећамо део праве око тачке нула кроз лупу (увећани правоугаоник на слици) приметићемо да су елементи низа густо распоређени око тачке нула а то се још боље види када још једном увећамо слику (увећани круг на слици).



Слика 1. Низ реалних бројева $\frac{1}{n}$ на реалној правој

1. Гранична вредност низа

1.1. Дефиниција. У овој глави ћемо дати прецизан математички опис понашања низова из уводног дела овог поглавља.

Дефиниција 2. Кажемо да низ реалних бројева (x_n) има *граничну вредност* (или *лимес*) x_∞ ако важи

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})\, n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - x_\infty| < \varepsilon. \tag{1}$$

Тада пишемо

$$x_\infty = \lim_{n\to+\infty} x_n,$$

или

$$x_n \to x_\infty,\ n \to +\infty.$$

Ако низ има граничну вредност кажемо да је он *конвергентан.* У супротном, кажемо да низ *дивергира.* $\Diamond$

Неформалан опис исказа (1) смо већ видели. Како још да разумемо овај исказ? Он нам каже да када узмемо произвољан позитиван број (то је део исказа $\forall\varepsilon > 0$) онда ће бесконачно много чланова нашег низа бити у интервалу облика $(x_\infty - \varepsilon, x_\infty + \varepsilon)$ (интервали овог облика називају се отвореним околинама тачке x_∞ или ε-околинама тачке x_∞). Ми не знамо где се налазе чланови низа $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n_0-2}, x_{n_0-1}$ док су сви остали чланови $x_{n_0}, x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, \ldots$ (којих има бесконачно много) у ε-околини тачке x_∞.

Сада ћемо дати примере конвергентних низова.

Пример 3. Сваки константан низ $x_n = C$, $n \in \mathbb{N}$, је конвергентан и његова гранична вредност једнака је тој константи C. $\sharp$

Напоменимо још једну битну особину конвергентних низова. Ако променимо коначно много чланова низа, конвергенција и гранична вредност тог низа се не мењају. Низ

$$x_n = \{0, 0, 0, 13, 0, -46, \underbrace{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \ldots}_{\text{сви остали чланови једнаки су 0}}\}$$

је добијен тако што смо у константном низу чији су сви чланови једнаки нули променили четврти и шести члан. Тиме нисмо променили конвергенцију, и овај низ је конвергентан и његова гранична вредност једнака је 0.

Пример 4. Вратимо се на низ $x_n = \frac{1}{n}$ за све $n \in \mathbb{N}$. Већ смо рекли да се елементи овог низа гомилају са десне стране тачке 0 на бројевној правој. Дакле очекујемо да је нула гранична вредност овог низа. То ћемо показати и по дефиницији.

Ако је $\varepsilon = 10$ онда се сви чланови низа налазе у околини $(-10, 10)$. Ако је $\varepsilon = \frac{1}{200}$ онда је одговарајуће n_0 из исказа (1) једнако вредности 201, односно у отвореној околини $(-\frac{1}{200}, \frac{1}{200})$ ће се налазити елементи $x_{201}, x_{202}, x_{203}, \ldots$ Вредности $\varepsilon = \frac{1}{1000}$ одговара $n_0 = 1001$. На овом примеру видимо да како смањујемо вредност параметра ε индекс n_0 расте. Ако је $\varepsilon > 0$ произвољан број онда $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ задовољава услове исказа (1) (овде $[x]$ означава цео број такав да се x налази у полуотвореном интервалу $[[x], [x] + 1)$ и назива се *целим делом* броја x). Дакле

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

$\sharp$

Сада ћемо дати и примере низова који нису конвергентни.

Пример 5. Показаћемо да низ $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$, дивергира. Када распишемо првих неколико чланова низа видимо да је ово низ који садржи само вредности 1 и -1

$$a_n = \{-1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots\},$$

и вредности се не групишу ни око једне тачке већ у сваком кораку имамо скок елемената низа за вредност 2.

Претпоставимо да низ a_n конвергира и да је његова гранична вредност неко $a_\infty \in \mathbb{R}$. Разликоваћемо два случаја, $a_\infty = 1$ и $a_\infty \neq 1$.

Ако је $a_\infty = 1$ онда узмемо $\varepsilon = \frac{1}{2}$ и нађемо $n_0 \in \mathbb{N}$ такво да је $|a_n - a_\infty| < \frac{1}{2}$ за све $n \geq n_0$. Када напишемо ову неједнакост за $n = 2n_0 + 1$ који је непаран број већи од n_0 долазимо до следећег

$$|(-1)^{2n_0+1} - 1| < \frac{1}{2},$$

односно $2 < \frac{1}{2}$ а то је контрадикција. Дакле вредност 1 не може да буде гранична вредност овог низа.

Остао нам је случај $a_\infty \neq 1$. Тада за $\varepsilon = \frac{|a_\infty - 1|}{2} > 0$ нађемо $n_0 \in \mathbb{N}$ такво да важи $|a_n - a_\infty| < \varepsilon$ за све $n \geq n_0$. Распишемо претходну једнакост за вредност индекса $n = 2n_0$ који је паран и већи од n_0

$$|a_n - a_\infty| = |a_{2n_0} - a_\infty| = |(-1)^{2n_0} - a_\infty| = |1 - a_\infty| < \varepsilon.$$

Добили смо неједнакост $|1 - a_\infty| < \frac{|a_\infty - 1|}{2}$ што је контрадикција. Дакле ни једна вредност $a_\infty \neq 1$ не може да буде гранична вредност овог низа.

Наша претпоставка о конвергенцији не важи па је низ $(-1)^n$ дивергентан. ♯

Пример 6. Посматрајмо низ $x_n = n$, $n \in \mathbb{N}$. Када напишемо првих неколико чланова низа

$$x_n = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots\}$$

видимо да је сваки следећи елемент низа на растојању 1 од оног претходног. Значи у сваком кораку ми направимо скок за вредност 1 на десну страну. Јасно је да овде не можемо очекивати гомилање чланова око неке тачке, односно очекујемо да овај низ дивергира. Ми ћемо претпоставимо да низ конвергира ка некој граничној вредности $x_\infty \in \mathbb{R}$ а онда ћемо доћи до контрадикције. Дефиниција конвергенције каже да ће за $\varepsilon = \frac{1}{5}$ постојати $n_0 \in \mathbb{N}$ такво да је за све $n \geq n_0$ задовољена неједнакост $|x_n - x_\infty| < \frac{1}{5}$. Написаћемо ову неједнакост за две вредности индекса $n = n_0$ и $n = n_0 + 2$:

$$-\frac{1}{5} < x_{n_0} - x_\infty < \frac{1}{5},$$
$$-\frac{1}{5} < x_{n_0+2} - x_\infty < \frac{1}{5}.$$

Из прве неједнакости ћемо искористити следеће $-x_{n_0} < \frac{1}{5} - x_\infty$ док из друге неједнакости можемо да закључимо да је $x_{n_0+2} < \frac{1}{5} + x_\infty$. Када саберемо ове неједнакости долазимо до

$$x_{n_0+2} - x_{n_0} < \frac{2}{5}$$

а знамо да је $x_{n_0+2} - x_{n_0} = n_0 + 2 - n_0 = 2$. Дакле дошли смо до контрадикције. Наша претпоставка не важи па је низ $x_n = n$ дивергентан. Приметимо да доказ пролази и за друге вредности константе ε, ми смо овде одабрали $\frac{1}{5}$ а доказ пролази и за $\frac{1}{17}$ и за $\frac{1}{15}$. Заправо доказ пролази за било које $\varepsilon \in (0, 1)$. ♯

Ако се вратимо на претходни пример видимо да чланови низа расту када n расте (јер су и једнаки вредности n) и да иду у бесконачност. Тиме долазимо до потребе да проширимо појам граничне вредности тако да гранична вредност може да припада проширеном скупу реалних бројева, односно да може да узме вредности $+\infty$ или $-\infty$.

Дефиниција 7. Нека је дат низ реалних бројева (x_n). Кажемо да је $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ ако важи

$$(\forall M \in \mathbb{R})(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})\ n \geq n_0 \Rightarrow x_n > M.$$

Кажемо да је $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = -\infty$ ако важи

$$(\forall M \in \mathbb{R})(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})\ n \geq n_0 \Rightarrow x_n < M.$$

Ако је $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ или $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = -\infty$ онда кажемо да низ (x_n) *одређено дивергира* или *конвергира у проширеном смислу.* ♢

Сада можемо да закључимо да низ из Примера 7 има граничну вредност $+\infty$.

1.2. Својства. Формулисаћемо и доказаћемо нека својства конвергентних низова. Ако елементе низа можемо да лоцирамо на неком ограниченом делу бројевне праве онда кажемо да је тај низ ограничен. У том случају можемо лакше да испитујемо конвергенцију низа. Сада ћемо и формално дефинисати појам ограничености.

Дефиниција 8. Кажемо да је низ (x_n) *ограничен* ако постоји константа $M \in \mathbb{R}$ таква да је $|x_n| \leq M$ за све $n \in \mathbb{N}$. Број M називамо *ограничењем низа* (x_n). Низ који није ограничен називамо *неограниченим низом.* $\Diamond$

Пример 9. Низ $x_n = \sin(n+9)$ је ограничен вредношћу 1, док је низ $y_n = 5n+17$ неограничен (то следи из Архимедове аксиоме). $\sharp$

Тврђење 10. Сваки конвергентан низ је ограничен.

Доказ. Нека је (x_n) конвергентан низ и нека је његова гранична вредност $x_\infty \in \mathbb{R}$. За $\varepsilon = \frac{1}{2}$ постојаће $n_0 \in \mathbb{N}$ такво да је $|x_n - x_\infty| < \frac{1}{2}$ за све $n \geq n_0$. Дакле следећи елементи низа

$$x_{n_0}, x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, x_{n_0+3}, x_{n_0+4}, \ldots$$

налазе се у ограниченом интервалу $(x_\infty - \frac{1}{2}, x_\infty + \frac{1}{2})$. Нека је

$$M_1 = \max\left\{\left|x_\infty - \frac{1}{2}\right|, \left|x_\infty + \frac{1}{2}\right|\right\}.$$

Тада је $|x_n| \leq M_1$ за све $n \geq n_0$. Преостало нам је још коначно много чланова низа који можда нису ограничени вредношћу M_1. Како их има коначно много знамо шта је њихов максимум, па дефинишемо

$$M = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots |x_{n_0-1}|, M_1\}.$$

Овако дефинисано M је једно ограничење низа (x_n). $\square$

Претходно тврђење нам каже да из конвергенције низа следи његова ограниченост. Овде не важи импликација у супротном смеру. Односно, постоји низ који је ограничен а који не конвергира. Један такав низ је $a_n = (-1)^n$. Овај низ је ограничен вредношћу 1 и дивергентан је као што смо показали у Примеру 6.

Кажемо да је $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *нула низ* ако је тај низ конвергентан и ако је његова гранична вредност једнака нули. Следећа лема нам каже да је неки низ нула низ ако и само ако је низ његових апсолутних вредности нула низ.

Лема 11. *Нека је* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *низ реалних бројева. Тада је* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$ *ако и само ако је* $\lim\limits_{n\to+\infty} |x_n| = 0$.

Доказ. Доказ, који је врло једноставан, остављамо читаоцу уз сугестију да следећи идентитет има централно место у доказу:

$$|x_n - 0| = ||x_n| - 0|.$$

$\square$

Користећи претходну лему и Пример 4 једноставно закључујемо да је низ $y_n = \frac{(-1)^n}{n}$ конвергентан и да је и његов лимес једнак нули

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0.$$

Тврђење које следи описује како се лимес низа слаже са збиром, производом и количником низова.

Тврђење 12. Нека су $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ конвергентни низови. Тада важи следеће

- **(Линеарност лимеса)** Низ $(\lambda x_n + \mu y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ је конвергентан за све реалне бројеве λ и μ и важи
$$\lim_{n\to+\infty}(\lambda x_n + \mu y_n) = \lambda \lim_{n\to+\infty} x_n + \mu \lim_{n\to+\infty} y_n,$$
(другим речима лимес низа пролази кроз збир и множење реалном константом);
- Низ $(x_n \cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ је конвергентан и важи
$$\lim_{n\to+\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to+\infty} x_n \cdot \lim_{n\to+\infty} y_n,$$
(лимес низа пролази кроз производ);
- Ако су чланови низа $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ различити од нуле и ако је $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n \neq 0$ тада је низ $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ конвергентан и важи
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to+\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to+\infty} y_n},$$
(ако је лимес имениоца различит од нуле онда лимес пролази кроз количник).

Доказ. Показаћемо својство линеарности док доказ остале две особине остављамо читаоцу као вежбу. Граничне вредности низова ћемо означити са $x_\infty := \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ и $y_\infty := \lim\limits_{n\to+\infty} y_n$. Узмимо произвољно $\varepsilon > 0$. Претпоставићемо да је $\lambda \neq 0$ и $\mu \neq 0$. На основу конвергенције низова можемо да закључимо да ће постојати $n_1 \in \mathbb{N}$ такво да је
$$|x_n - x_\infty| < \frac{\varepsilon}{2|\lambda|},$$
за све $n \geq n_1$ и постојаће $n_2 \in \mathbb{N}$ такво да је
$$|y_n - y_\infty| < \frac{\varepsilon}{2|\mu|},$$
за све $n \geq n_2$. Ако са n_0 означимо максимум бројева n_1 и n_2 тада имамо следећи низ неједнакости за све $n \geq n_0$
$$\begin{aligned}|\lambda x_n + \mu y_n - (\lambda x_\infty + \mu y_\infty)| &\overset{(*)}{\leq} |\lambda x_n - \lambda x_\infty| + |\mu y_n - \mu y_\infty| = \\ &= |\lambda| \cdot |x_n - x_\infty| + |\mu| \cdot |y_n - y_\infty| < \\ &< |\lambda| \cdot \frac{\varepsilon}{2|\lambda|} + |\mu| \cdot \frac{\varepsilon}{2|\mu|} = \varepsilon.\end{aligned}$$
У кораку $(*)$ смо искористили неједнакост троугла која каже да је $|x+y| \leq |x| + |y|$ за све реалне бројеве x и y.

У случају да је $\lambda \neq 0$ и $\mu = 0$ постојаће $n_3 \in \mathbb{N}$ такво да је $|x_n - x_\infty| < \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$ за све $n \geq n_3$. Важи
$$\begin{aligned}|\lambda x_n + \mu y_n - (\lambda x_\infty + \mu y_\infty)| &= |\lambda x_n - \lambda x_\infty| = \\ &= |\lambda| \cdot |x_n - x_\infty| < |\lambda| \cdot \frac{\varepsilon}{|\lambda|} = \varepsilon,\end{aligned}$$
за све $n \geq n_3$. Слично се разматра случај $\lambda = 0$ и $\mu \neq 0$, док се случај $\lambda = \mu = 0$ своди на лимес константног нула низа.

На основу овога закључујемо да је низ $\lambda x_n + \mu y_n$ конвергентан и да је његова гранична вредност једнака $\lambda x_\infty + \mu y_\infty$. □

Пример 13. Испитати конвергенцију низа $\sqrt[n]{a}$ где је $a > 0$ фиксиран реалан број.

Прво разматрамо случај када је $a > 1$. Узмимо $\varepsilon > 0$ приозвољно. На основу Архимедове аксиоме постојаће $n_0 \in \mathbb{N}$ тако да важи $n_0\varepsilon > a - 1$. Тада за све $n \geq n_0$ важи
$$(1+\varepsilon)^n \geq 1 + n\varepsilon \geq 1 + n_0\varepsilon > a.$$

Прва неједнокост следи из Бернулијеве неједнакости. Узимањем n-тог корена леве и десне стране добијамо неједнакост $\sqrt[n]{a} < 1 + \varepsilon$. Како је $\sqrt[n]{a} > 1$ закључујемо да важи

$$1 - \varepsilon < 1 < \sqrt[n]{a} < 1 + \varepsilon,$$

за све $n \geq n_0$. Закључујемо

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

Ако је $a = 1$ тада је низ $\sqrt[n]{a}$ константан и једнак јединици па је и његов лимес једнак 1. Ако је $0 < a < 1$ тада је $\frac{1}{a} > 1$ па је

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{\frac{1}{a}}} = \frac{1}{\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = 1.$$

Закључак је да за све $a > 0$ важи

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

$\sharp$

Следећа два исказа нам говоре о томе како се лимес низа слаже са релацијом $\leq$.

Тврђење 14. Нека су $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ и $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ конвергентни низови такви да је

$$x_n \leq y_n$$

за све $n \in \mathbb{N}$. Тада важи

$$\lim_{n \to +\infty} x_n \leq \lim_{n \to +\infty} y_n.$$

Приметимо да ће претходно тврђење важити и ако $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n, \lim\limits_{n \to +\infty} y_n \in \overline{\mathbb{R}}$. Ово тврђење нам каже да лимес пролази кроз релацију $\leq$ међу низовима. Напоменимо да се релација $<$ међу низовима не чува при проласку лимеса. Пример за то су низови $x_n = \frac{1}{n}$ и $y_n = \frac{2}{n}$. За ова два низа важи $x_n < y_n$ за све индексе n док међу лимесима важи једнакост (а не строга неједнакост) јер је $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 0 = \lim\limits_{n \to +\infty} y_n$. Дакле, ако важи $x_n < y_n$ једино можемо да закључимо да је $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n \leq \lim\limits_{n \to +\infty} y_n$.

Доказ. Претпоставимо супротно $x_\infty := \lim\limits_{n \to +\infty} x_n > \lim\limits_{n \to +\infty} y_n =: y_\infty$. Нека је $\varepsilon = \frac{x_\infty - y_\infty}{3}$. За овако одабрано ε нађимо $n_1 \in \mathbb{N}$ такво да је $|x_n - x_\infty| < \varepsilon$ за све $n \geq n_1$ и нађимо $n_2 \in \mathbb{N}$ за које је $|y_n - y_\infty| < \varepsilon$ за све $n \geq n_2$. Означимо са n_0 већи од ова два одабрана природна броја n_1 и n_2, $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. За сваки индекс n који је већи од индекса n_0 важе неједнакости

$$x_\infty - \varepsilon < x_n < x_\infty + \varepsilon,$$
$$y_\infty - \varepsilon < y_n < y_\infty + \varepsilon.$$

Њиховим комбиновањем долазимо до неједнакости

$$y_n < y_\infty + \varepsilon < x_\infty - \varepsilon < x_n$$

која је у контрадикцији са условом тврђења $x_n \leq y_n$ за све природне бројеве n. Закључујемо да претпоставка не важи, односно закључујемо да је $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n \leq \lim\limits_{n \to +\infty} y_n$. $\square$

Теорема 15. (Теорема о три лимеса за низове) *Нека су дати низови (a_n), (b_n) и (c_n) такви да важи*

$$a_n \leq b_n \leq c_n \tag{2}$$

за све $n \in \mathbb{N}$. Ако низови (a_n) и (c_n) конвергирају ка истој граничној вредности d_∞ тада је и низ (b_n) конвергентан и конвергира ка истој граничној вредности, $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = d_\infty$.

Доказ. Узмимо $\varepsilon > 0$ произвољно. Из конвергенције низова (a_n) и (b_n) следи да постоје природни бројеви n_1 и n_2 такви да је

$$|a_n - d_\infty| < \varepsilon, \forall n \geq n_1,$$
$$|c_n - d_\infty| < \varepsilon, \forall n \geq n_2.$$

Тада за све $n \geq \max\{n_1, n_2\}$ важи $d_\infty - \varepsilon < a_n$ и $c_n < d_\infty + \varepsilon$. Комбиновањем ове две неједнакости са условом (2) долазимо до процене

$$d_\infty - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < d_\infty + \varepsilon.$$

Одавде закључујемо да је низ (b_n) конвергентан и да конвергира ка граничној вредности d_∞. □

Напомена 16. Приметимо да закључак теореме важи и ако је неједнакост (2) задовољена почев од неког индекса, односно ако не важи за коначно много елемената низова (a_n), (b_n) и (c_n). Ово следи из чињенице да промена коначно много чланова низа не утиче ни на његову конвергенцију ни на његову граничну вредност. ◇

Користећи Теорему о три лимеса за низове једноставно се доказује следеће тврђење које нам каже да је производ ограниченог низа и нула низ опет нула низ.

Тврђење 17. Нека је низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ конвергентан при чему је његов лимес $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$ и нека је $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ограничен низ. Тада је низ $(x_n \cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ конвергентан и важи

$$\lim_{n\to+\infty}(x_n \cdot y_n) = 0.$$

Следећи пример се решава применом теореме о три лимеса.

Пример 18. Показати да важи $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Означимо са $x_n = \sqrt[n]{n} - 1 \geq 0$. Тада је

$$n = (1 + x_n)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x_n^i \geq \binom{n}{2} x_n^2 = \frac{n(n-1)}{2} x_n^2,$$

при чему неједнакост важи јер је цела сума већа од члана који одговара индексу $i = 2$. Добили смо процену

$$0 \leq x_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}}.$$

Теорема о три лимеса за низове каже нам да је $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$ па је $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. ♯

Сада ћемо видети како се лимес низа у проширеном смислу слаже са операцијама сабирања, множења и дељења.

Тврђење 19. Нека је низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ одређено дивергентан, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \infty$, и нека је низ $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ конвергентан при чему је $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = y_\infty \in \mathbb{R}$. Тада важи следеће

- $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n + y_n) = \infty$,
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{y_n}{x_n} = 0$,
- ако је $y_\infty \neq 0$ тада је $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n \cdot y_n) = (\operatorname{sgn} y_\infty)\infty$.

Приметимо да у претходној теореми ознака ∞ подразумева да тврђење важи и у случају да је лимес једнак $+\infty$ и у случају да је лимес $-\infty$.

У претходном тврђењу се не појављују изрази облика $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, 1^∞, 0^0,... који су неодређени. Следећи пример нам показује зашто Тврђење 19 не можемо да применимо на неодређене облике.

Пример 20. Испитати конвергенцију и ако ковенргирају одредити граничне вредности следећих низова: $x_n = \frac{n^2+3}{5n^2+n+10}$, $y_n = \frac{n+5}{n^3+7}$, $z_n = \frac{n^3}{n+3}$.

Ако бисмо прошли лимесом кроз количник ових низова у сва три случаја добијемо облик $\frac{\infty}{\infty}$. Ипак знамо да тврђење не можемо да применимо на низове тог облика па ћемо прво низове записати у другачијем облику.

Поделимо бројилац и именилац од x_n са n^2 и долазимо до следећег облика

$$x_n = \frac{1+\frac{3}{n^2}}{5+\frac{1}{n}+\frac{10}{n^2}}.$$

Како $\frac{1}{n} \to 0$ и $\frac{1}{n^2} \to +\infty$ када $n \to +\infty$ закључујемо да именилац од x_n тежи ка 5 па можемо да прођемо лимесом кроз разломачку црту у x_n. Како бројилац од x_n тежи ка 1 закључујемо

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \frac{1}{5}.$$

Да бисмо израчунали лимес од y_n поделимо бројилац и именилац са n^3. Тиме добијамо

$$y_n = \frac{\frac{1}{n^2}+\frac{5}{n^3}}{1+\frac{7}{n^3}},$$

при чему именилац тежи ка 1 па можемо да прођемо лимесом кроз количник. Како $\frac{1}{n^2}+\frac{5}{n^3} \to 0$ закључујемо

$$\lim_{n\to+\infty} y_n = 0.$$

Преостао нам је низ z_n који ћемо трансформисати тако што ћемо бројилац и именилац поделити са n. Добијамо следећи облик

$$z_n = \frac{n^2}{1+\frac{3}{n}}$$

који је једноставан за рачун јер је именилац $1+\frac{3}{n}$ и он тежи ка вредности 1 када $n \to +\infty$. Како бројилац тежи ка вредности $+\infty$ закључујемо да је

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = +\infty.$$

♯

Пример 21. У овом примеру ћемо испитати када конвергира низ $x_n = q^n$, $n \in \mathbb{N}$, при чему је q неки реалан фиксиран параметар. Разликоваћемо више случајева у зависности од вредности параметра q.

- Ако је $q = 0$ онда је (x_n) константан низ чији су сви чланови једнаки вредности нула, па је и његова гранична вредност једнака нули.
- Ако је $q = 1$ онда је (x_n) опет константан низ једнак вредности 1 па је и лимес тог низа једнак јединици.
- Ако је $q > 1$ онда ће важити
$$q = 1 + \delta$$
где је $\delta > 0$. Користећи Бернулијеву неједнакост можемо да закључимо да је
$$q^n = (1+\delta)^n \geq 1 + n\delta.$$
Како је $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+n\delta) = +\infty$ онда је и $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.
- Ако је $0 < q < 1$ тада је $\frac{1}{q} > 1$ па је на основу претходне тачке $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{q^n} = +\infty$ а онда на основу тога како лимес пролази кроз ∞ закључујемо да је
$$\lim_{n\to+\infty} q^n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\frac{1}{q^n}} = „\frac{1}{+\infty}" = 0.$$

- Ако је $-1 < q < 0$ онда је $|q| \in (0,1)$ па из претходне тачке закључујемо да $|q|^n \to 0$ када $n \to +\infty$ а онда из Леме 12 следи да и $q^n \to 0$ када $n \to +\infty$.
- Ако је $q = -1$ онда имамо низ $x_n = (-1)^n$ за који смо у Примеру 6 видели да дивергира.
- Последњи случај који нам је преостао је $q < -1$. Тада је $|q| > 1$ па $|q|^n \to +\infty$ када $n \to +\infty$. То значи да за сваку константу M можемо да нађемо члан низа $|q|^n$ тако да је $|q|^n > M$. Другим речима, низ $|q^n| = |q|^n$ је неограничен па не може ни q^n бити конвергентан низ.

Закључак је

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = \begin{cases} 0, & -1 < q < 1 \\ 1, & q = 1 \\ +\infty, & q > 1 \\ \text{не постоји}, & q \le -1. \end{cases}$$

♯

Следећа теорема нам помаже да у неким случајевима одредимо чему је једнак лимес ако је он облика „било шта кроз растућу бесконачност”. Пре тога ћемо дефинисати појмове растућих и опадајућих низова.

Дефиниција 22. Кажемо да је низ (x_n) *растући* ако важи $x_n \le x_{n+1}$ за све $n \in \mathbb{N}$ док је низ (x_n) *опадајући* ако важи $x_n \ge x_{n+1}$ за све $n \in \mathbb{N}$. Кажемо да је низ *монотон* ако је растући или опадајући. ◊

Пример 23. Низ $x_n = n^2 + 5n$ је растући док је $x_n = \frac{3}{n!}$ пример опадајућег низа. ♯

Теорема 24. (Штолцова теорема) *Нека су дати реални низови (x_n) и (y_n) при чему је (y_n) растући низ реалних бројева такав да важи $y_n \to +\infty$ када $n \to +\infty$. Ако постоји $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} \in \overline{\mathbb{R}}$ онда постоји и $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x_n}{y_n}$ и важи*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}.$$

Доказ. Идеја доказа је да се $x_{n+1} - x_n$ ограничи одоздо и одозго константом помноженом са $y_{n+1} - y_n$, па да се неједнакости сумирају по одређеном скупу индекса.

Прво доказујемо случај када је лимес коначан.

Означимо са $L = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} \in \mathbb{R}$ и нека је $\varepsilon > 0$ произвољно. Постојаће $n_1 \in \mathbb{N}$ такво да је за све $n \ge n_1$

$$\left| \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} - L \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Тада је

$$L - \frac{\varepsilon}{3} < \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} < L + \frac{\varepsilon}{3}$$

за све $n \ge n_1$ а како је низ (y_n) растући онда је $y_{n+1} - y_n > 0$ па тиме помножимо целу неједнакост

$$\left(L - \frac{\varepsilon}{3}\right)(y_{n+1} - y_n) < x_{n+1} - x_n < \left(L + \frac{\varepsilon}{3}\right)(y_{n+1} - y_n).$$

Напишемо претходну неједнакост помоћу индекса i па онда сумирамо те неједнакости од $i = n_1$ до $i = n - 1$

$$\sum_{i=n_1}^{n-1} \left(L - \frac{\varepsilon}{3}\right)(y_{i+1} - y_i) < \sum_{i=n_1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) < \sum_{i=n_1}^{n-1} \left(L + \frac{\varepsilon}{3}\right)(y_{i+1} - y_i).$$

Како је $\sum_{i=n_1}^{n-1}(x_{i+1}-x_i) = x_n - x_{n_1}$ а иста формула важи када сумирамо по y долазимо до неједнакости

$$\left(L-\frac{\varepsilon}{3}\right)(y_n-y_{n_1}) < x_n - x_{n_1} < \left(L+\frac{\varepsilon}{3}\right)(y_n-y_{n_1})$$

која важи за све $n > n_1$. Сада поделимо све са позитивним бројем $y_n - y_{n_1}$ и добијамо

$$L-\frac{\varepsilon}{3} < \frac{x_n-x_{n_1}}{y_n-y_{n_1}} < L+\frac{\varepsilon}{3},$$

односно

$$\left|\frac{x_n-x_{n_1}}{y_n-y_{n_1}} - L\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Сада процењујемо разлику количника x_n/y_n и вредности L

$$\begin{aligned}
\left|\frac{x_n}{y_n}-L\right| &= \left|\frac{x_{n_1}-Ly_{n_1}}{y_n} + \left(1-\frac{y_{n_1}}{y_n}\right)\left(\frac{x_n-x_{n_1}}{y_n-y_{n_1}}-L\right)\right| && \text{// неједнакост троугла}\\
&\le \left|\frac{x_{n_1}-Ly_{n_1}}{y_n}\right| + \left|\left(1-\frac{y_{n_1}}{y_n}\right)\left(\frac{x_n-x_{n_1}}{y_n-y_{n_1}}-L\right)\right|\\
&\le \left|\frac{x_{n_1}-Ly_{n_1}}{y_n}\right| + \frac{3}{2}\left|\frac{x_n-x_{n_1}}{y_n-y_{n_1}}-L\right| && \text{//како је } y_n \text{ растући низ и } y_n\to+\infty\\
& && \text{// када } n\to+\infty \text{ онда ће постојати } n_2\in\mathbb{N}\\
& && \text{// такво да је } \frac{1}{2}\le 1-\frac{y_{n_1}}{y_n}\le\frac{3}{2} \text{ за све } n\ge n_2\\
&< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{3}{2}\cdot\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon && \text{//први сабирак је произвољно мали јер } y_n\to+\infty, \text{ па}\\
& && \text{//} \left|\frac{x_{n_1}-Ly_{n_1}}{y_n}\right| \to 0 \text{ када } n\to+\infty \text{ а ми ћемо одабрати } n_3\in\mathbb{N}\\
& && \text{//такво да је за све } n\ge n_3 \text{ задовољено } \left|\frac{x_{n_1}-Ly_{n_1}}{y_n}\right| < \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

за све $n > \max\{n_1, n_2, n_3\}$. Закључујемо да је $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x_n}{y_n} = L$.

Сада ћемо продискутовати случај када је $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = +\infty$. Тада је $x_{n+1}-x_n$ веће од $17(y_{n+1}-y_n) > 0$ за довољно велико n па ће и низ (x_n) бити растући и тежити ка $+\infty$ па онда посматрамо реципрочну вредност $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n} = 0$ и применимо оно што смо доказали. Тада ће важити $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{y_n}{x_n} = 0$ а како је ово количник позитивних величина онда је $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x_n}{y_n} = +\infty$.

Ако је $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = -\infty$ онда је $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(-x_{n+1})-(-x_n)}{y_{n+1}-y_n} = +\infty$ па сад променимо оно од мало пре и закључујемо да ће важити $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(-x_n)}{y_n} = +\infty$ односно $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x_n}{y_n} = -\infty$. □

Последица 25. (Кошијева теорема за низове) *Нека је (a_n) конвергентан низ и нека је његова гранична вредност a_∞. Тада конвергира и низ аритметичких средина*

$$A_n = \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$$

ка истој граничној вредности, $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = a_\infty$.

Доказ. Доказ следи из Штолцове теореме када је применимо на низове $x_n = a_1+a_2+\ldots+a_n$ и $y_n = n$. □

Последица 26. *Нека низ* (a_n) *конвергира ка* a_∞*. Тада конвергира и низ хармонијских средина*

$$H_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}$$

и важи $\lim\limits_{n\to+\infty} H_n = a_\infty$*.*

Доказ. Применимо претходну последицу на низ $\frac{1}{H_n}$. □

Последица 27. *Нека је* (a_n) *конвергентан низ такав да је* $a_n > 0$ *за све* $n \in \mathbb{N}$*. Низ геометријских средина*

$$G_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$$

је такође конвергентан низ и важи $\lim\limits_{n\to+\infty} G_n = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$*.*

Доказ. Применимо Штолцову теорему на низ $\ln G_n = \frac{\ln a_1 + \ln a_2 + \ldots + \ln a_n}{n}$. □

2. Монотони низови

Подсетимо се да је низ монотон ако је растући или опадајући.

Теорема 28. *Нека је низ* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *монотон. Тада је он конвергентан ако и само ако је ограничен. Ако је низ неограничен онда је он одређено дивергентан.*

Доказ.

$\Longrightarrow$: Овај смер је тривијалан јер знамо да је сваки конвергентан низ ограничен. Приметимо да нам за овај смер претпоставка о монотоности није била потребна.

$\Longleftarrow$: Нека је сада $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ монотон и ограничен низ. Хоћемо да покажемо да он конвергира. Претпоставићемо да је низ растући (ако је опадајући онда посматрамо низ $(-x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ који ће бити растући па на њега применимо доказано). Скуп

$$X = \{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$$

је ограничен и непразан па на основу аксиоме супремума има супремум. Означимо га са

$$x_\infty = \sup X.$$

Показаћемо да је ово x_∞ гранична вредност нашег низа $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Нека је $\varepsilon > 0$ произвољно. Дефиниција супремума нам каже да ће постојати елемент скупа X који је већи од $x_\infty - \varepsilon$, односно постојаће $n_0 \in \mathbb{N}$ такво да је

$$x_\infty - \varepsilon < x_{n_0}.$$

Како је низ растући онда ће за свако $n \geq n_0$ важити

$$x_{n_0} \leq x_n.$$

Када спојимо претходне две неједнакости закључујемо да за свако $n \geq n_0$ важи

$$x_\infty - \varepsilon < x_n,$$

а како је x_∞ супремум скупа X онда ће важити и

$$x_n \leq x_\infty.$$

Дакле задовољена је неједнакост

$$|x_n - x_\infty| < \varepsilon,$$

за све $n \geq n_0$, па по дефиницији граничне вредности закључујемо

$$x_\infty = \lim_{n\to+\infty} x_n.$$

Ако је низ (x_n) опадајући онда је $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \inf\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$.

Ако је растући низ неограничен то значи да ће за сваки реалан број $M \in \mathbb{R}$ постојати неки елемент низа x_{n_0} који је већи од тог реалног броја, $x_{n_0} > M$. Низ је растући па је $x_n \geq x_{n_0}$ када је $n \geq n_0$, односно $x_n > M$. Дакле $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$. Ако је низ (x_n) опадајући и неограничен онда је $(-x_n)$ растући и неограничен низ па је $\lim\limits_{n\to+\infty}(-x_n) = +\infty$, односно $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = -\infty$. $\Box$

Сада ћемо се вратити на број e који смо дефинисали као $e = \sup\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}$. Означимо са $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ низ реалних бројева. Желимо да покажемо да је овај низ растући и ограничен па на основу претходне теореме (или боље речено њеног доказа) следи да ће његова гранична вредност бити баш e.

У материјалима од прошле недеље смо показали да је низ (a_n) ограничен (показали смо да је 3 једно ограничење низа). Сада ћемо показати да је низ растући.

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{(n+2)^{n+1}n^n}{(n+1)^{2n+1}} = \left[\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right]^{n+1}\frac{n+1}{n} \\
&= \left[\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right]^{n+1}\frac{n+1}{n} \\
&= \left[1-\frac{1}{(n+1)^2}\right]^{n+1}\frac{n+1}{n} \qquad \text{//сад користимо Бернулијеву неједнакост} \\
&\geq \left(1-(n+1)\frac{1}{(n+1)^2}\right)\frac{n+1}{n} = 1
\end{aligned}$$

и ово важи за све $n \in \mathbb{N}$.

Овим долазимо до битног лимеса

$$\boxed{e = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.}$$

3. Поднизови, тачке нагомилавања, горњи и доњи лимес

Дефиниција 29. Подниз низа $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ је низ $(x_{n(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ где је $k \mapsto n(k)$ неко строго растуће пресликавање скупа $\mathbb{N}$ у себе. $\Diamond$

Ако је $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{60}, x_{61}, x_{62}, x_{63}, \ldots\}$ неки низ онда је један његов подниз $\{x_3, x_{17}, x_{18}, x_{19}, \ldots, x_{57}, x_{76}, x_{100}, \ldots\}$. Другим речима подниз се конструише тако што издвојимо неке елементе првобитног низа при чему нам индекси издвојених елемената расту.

Један подниз низа $a_n = (-1)^n$ је подниз са парним индексима

$$\{a_2, a_4, a_6, a_8, \ldots, a_{80}, a_{82}, \ldots, a_{268}, a_{270}, \ldots\}$$

и то ће бити константан низ чији су сви елементи једнаки 1. Још један подниз може да се издвоји тако што посматрамо само елементе са непарним индексима

$$\{a_1, a_3, a_5, a_7, \ldots, a_{37}, a_{39}, \ldots, a_{9907}, a_{9909}, \ldots\}.$$

Овај подниз ће такође бити константан и сви елементи ће бити једнаки вредности -1.

Доказ следеће леме следи директно из дефиниције граничне вредности конвергентног низа.

Лема 30. *Нека је* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *конвергентан низ и нека је* x_∞ *његова гранична вредност. Тада је сваки његов подниз* $(x_{n(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ *конвергентан низ и конвергира ка* $x_\infty = \lim\limits_{k\to+\infty} x_{n(k)}$.

На примеру низа $(-1)^n$ видимо да ако низ није конвергентан онда можемо да издвојимо поднизове који конвергирају ка различитим вредностима. Подниз са парним индексима конвергира ка 1 док подниз са непарним индексима конвергира ка -1. На тај начин долазимо до следеће дефиниције.

Дефиниција 31. Кажемо да је $x \in \mathbb{R}$ *тачка нагомилавања* низа $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ако постоји подниз $(x_{n(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ који конвергира ка x. Највећу тачку нагомилавања реалног низа називамо његовим *горњим лимесом* или *лимесом супериором* и означавамо са $\overline{\lim}\, x_n$ или $\limsup\, x_n$. Најмању тачку нагомилавања реалног низа називамо његовим *доњим лимесом* или *лимесом инфериором* и означавамо са $\underline{\lim}\, x_n$ или $\liminf\, x_n$. ◊

Из Леме 30 следи да конвергентан низ има само једну тачку нагомилавања и да су горњи и доњи лимеси једнаки граничној вредности тог конвергентног низа.

У дефицији смо рекли да тачка нагомилавања припада скупу $\mathbb{R}$, односно да је то нека коначна вредност. Ако желимо да проверимо да ли неки подниз конвергира ка $\pm\infty$ онда ћемо нагласити да се нађу тачке нагомилавања у $\overline{\mathbb{R}}$.

Пример 32. Наћи тачке нагомилавања у скупу $\mathbb{R}$ следећег низа $x_n = n^{(-1)^n}$.

Овде нам фактор $(-1)^n$ даје идеју да гледамо подниз са парним и непарним индексима. Подниз са парним индексима одређено дивергира

$$x_{2n} = (2n)^{(-1)^{2n}} = (2n)^1 = 2n \to +\infty,\ n \to +\infty,$$

док подниз са непарним индексима конвергира

$$x_{2n+1} = (2n+1)^{(-1)^{2n+1}} = (2n+1)^{-1} = \frac{1}{2n+1} \to 0,\ n \to +\infty.$$

Дакле, овај низ има само једну тачку нагомилавања у $\mathbb{R}$, тачку 0. Видимо да овај низ није конвергентан иако има само једну тачку нагомилавања. ♯

Пример 33. Наћи тачке нагомилавања у скупу $\mathbb{R}$ низа $b_n = \cos\left(\dfrac{n\pi}{3}\right)$, $n \in \mathbb{N}$.

Косинусна функција је 2π периодична па ћемо имати понављања елемената низа. Можемо да срачунамо неколико првих чланова

$$b_1 = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2},\ b_2 = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2},\ b_3 = \cos\left(\frac{3\pi}{3}\right) = -1,$$
$$b_4 = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2},\ b_5 = \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{1}{2},\ b_6 = \cos\left(\frac{6\pi}{3}\right) = 1.$$

Након првих шест чланова сви елементи се понављају јер је

$$b_7 = \cos\left(\frac{7\pi}{3}\right) = b_1 = \frac{1}{2},\ b_8 = \cos\left(\frac{8\pi}{3}\right) = b_2 = -\frac{1}{2}, \ldots$$

Дакле гледамо поднизове са индексима који при дељењу са 6 дају исте остатке, $(b_{6k})_{k\in\mathbb{N}}$, $(b_{6k+1})_{k\in\mathbb{N}}$, $(b_{6k+2})_{k\in\mathbb{N}}$, $(b_{6k+3})_{k\in\mathbb{N}}$, $(b_{6k+4})_{k\in\mathbb{N}}$, $(b_{6k+5})_{k\in\mathbb{N}}$. Сада рачунамо чему су им једнаки чланови

$$b_{6k} = \cos\left(\frac{6k\pi}{3}\right) = \cos(2k\pi) = 1,\ b_{6k+1} = \cos\left(\frac{(6k+1)\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2},$$
$$b_{6k+2} = \cos\left(\frac{(6k+2)\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2},\ b_{6k+3} = \cos\left(\frac{(6k+3)\pi}{3}\right) = \cos\pi = -1,$$
$$b_{6k+4} = \cos\left(\frac{(6k+4)\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2},\ b_{6k+5} = \cos\left(\frac{(6k+5)\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{1}{2},$$

и све претходне једнакости важе за све $k \in \mathbb{N}$. То значи да је сваки подниз константан и једнак наведеним бројевима. Закључујемо да је скуп тачака нагомилавања низа (b_n) једнак $\left\{-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right\}$. ♯

Теорема 34. (Болцано-Вајерштрасова теорема) *Сваки ограничен низ реалних бројева има тачку нагомилавања.*

Доказ. Нека је M једно ограничење низа $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $-M \leq x_n \leq M$ за све $n \in \mathbb{N}$. Посматрамо скуп вредности овог низа $X = \{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$. Ако је овај скуп коначан онда ће постојати подниз чији су сви чланови једнаки некој константној вредности, и та вредност ће бити тачка нагомилавања низа.

Ако је скуп вредности X бесконачан онда поделимо интервал $[-M, M]$ на два једнака дела. У једном од тих интервала, $[-M, 0]$ или $[0, M]$, мора постојати бесконачно много елемената скупа X, означимо тај интервал са I_1. Сада интервал I_1 поделимо на два једнака дела, и са I_2 означимо ону половину у којој се налази бесконачно много елемената скупа X. Наставимо овај поступак и на тај начин формирамо низ уметнутих затворених интервала I_n који на основу Канторове аксиоме има непразан пресек, $\bigcap_{n=1}^{+\infty} I_n \neq \emptyset$. Нека је $x \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} I_n$ неки елемент. За свако $\varepsilon > 0$ можемо да нађемо $n \in \mathbb{N}$ такво да је $\frac{2M}{2^n} < \varepsilon$. Ширина интервала I_n је $\frac{2M}{2^n}$ а овај интервал садржи x па ће I_n бити у ε-околини тачке x. Закључујемо да у свакој околини тачке x постоји бесконачно много елемената низа (x_n). То значи да је x тачка нагомилавања низа (x_n). □

4. Кошијев критеријум конвергенције

Дефиниција 35. Кажемо да је низ *Кошијев* ако

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N})\, m, n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon. \tag{3}$$

◊

Приметимо да низ $a_n = (-1)^n$ није Кошијев. Свака два узастопна члана се по апсолутној вредности разликују за 2 па разлика два члана са произвољно великим индексима не може бити произвољно мала.

Теорема 36. (Кошијев критеријум конвергенције низова) *Низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ конвергира ако и само ако је Кошијев.*

Доказ.

$\Longrightarrow$: Нека је $\varepsilon > 0$ произвољно. Како је низ конвергентан онда ће постојати $n_0 \in \mathbb{N}$ такво да је $|x_n - x_\infty| < \frac{\varepsilon}{2}$ за све $n \geq n_0$. Тада је за све $m, n \geq n_0$ задовољена следећа неједнакост

$$|x_m - x_n| = |x_m - x_\infty + x_\infty - x_n| \leq |x_m - x_\infty| + |x_n - x_\infty| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

односно низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ је Кошијев.

$\Longleftarrow$: Нека је сада $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Кошијев низ, односно нека важи (3). За $\varepsilon = \frac{1}{2}$ одаберемо $n_0 \in \mathbb{N}$ тако да важи

$$|x_m - x_n| < \frac{1}{2}$$

за све $m, n \geq n_0$. Ако узмемо $m = n_0$ видимо да за све $n \geq n_0$ важи $-\frac{1}{2} + x_{n_0} < x_n < x_{n_0} + \frac{1}{2}$ па је низ (x_n) ограничен. На основу Болцано-Вајерштрасове теореме ограничен низ (x_n) има тачку нагомилавања. Нека је $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ подниз који конвергира ка вредности x_∞.

Показаћемо да цео низ конвергира ка тој граничној вредности x_∞. Нека је $\varepsilon > 0$ произвољно. Како је низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Кошијев постојаће неко $n_1 \in \mathbb{N}$ такво да је

$$|x_m - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

за све $m, n \geq n_1$. Подзниз $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ конвергира па ће постојати $n_{k_0} \in \mathbb{N}$ такво да је

$$|x_{n_k} - x_\infty| < \frac{\varepsilon}{2}$$

за све $n_k \geq n_{k_0}$. Дефинишемо

$$n_0 = \max\{n_1, n_{k_0}\}$$

и нека је $n \geq n_0$ произвољно. Како је $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ строго растући низ онда ће постојати неки природан број n_k који је већи од n. За тако одабрано n_k важи неједнакост

$$|x_n - x_\infty| = |x_n - x_{n_k} + x_{n_k} - x_\infty| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_\infty - x_{n_k}| < \varepsilon,$$

при чему је $|x_n - x_{n_k}|$ мање од $\frac{\varepsilon}{2}$ због Кошијевости низа јер за индексе важи $n_k > n \geq n_0 \geq n_1$. Док је разлика $|x_\infty - x_{n_k}|$ мања од $\frac{\varepsilon}{2}$ на основу конвергенције подниза. Закључујемо да низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ конвергира ка x_∞. □

Ова теорема нам даје још један начин да закључимо да низ $(-1)^n$ не конвергира јер смо већ рекли да низ није Кошијев.

Приметимо да у Кошијевом критеријуму конвергенције (3) не фигурише сама гранична вредност, односно ми не знамо чему је једнако x_∞ али знамо да постоји.

Пример 37. Да ли конвергира низ $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$?

Показаћемо да овај низ није Кошијев па самим тим неће бити ни конвергентан. Нека је n произвољан природан број. Тада је

$$x_{2n} - x_n = \sum_{i=n+1}^{2n} \frac{1}{i} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} \geq \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n}}_{\text{има укупно } n \text{ чланова}} = \frac{1}{2}.$$

Дакле разлика два члана са прозвољно великим индексима не може бити мања од $\frac{1}{2}$ (па ни произвољно мала) и низ није Кошијев па није ни конвергентан. ♯