НЕДЕЉА 1

Заснивање реалних бројева

Циљ ове лекције јесте да формално заснујемо поље реалних бројева $\mathbb{R}$. $\mathbb{R}$ нам је познат као *скуп* бројева чије елементе можемо да сабирамо и множимо, односно знамо чему је једнако $\frac{1}{2}+5$, $(-\frac{3}{4})\cdot 17$. Такође смо могли приближно да одредимо чему је једнако $\sqrt{3}\approx 1,73205080757$ док је познато да је тај број решење једначине $x^2=3$. Али да бисмо формално засновали ово поље морамо скуп $\mathbb{R}$ да обогатимо додатним структурама.

Претпоставићемо да је читаоцу познат скуп *природних бројева* $\mathbb{N}$ чије елементе означавамо са $1,2,3,...$

$$\mathbb{N} := \{1,2,3,4,...\},$$

као и да су му познате операције сабирања и множења на овом скупу. Знамо да важе једнакости

$$1+2=3=2+1,\ 7\cdot 5=35=5\cdot 7.$$

Оне осликавају *комутативност* сабирања и множења, односно да није важан редослед којим сабирамо и множимо два природна броја. Поред тога, познато је да груписање сабирака и множиоца не мења резултат сабирања, односно множења. Ова својства називају се *асоцијативност* сабирања и асоцијативност множења. Сва претходна својства односила су се појединачне операције. Једнакост

$$8\cdot(4+5)=72=8\cdot 4+8\cdot 5$$

специјалан је случај својства *дистрибутивности* множења према сабирању.

Описане особине операција на скупу природних бројева можемо да запишемо као општа својства на следећи начин:

- $m+n=n+m$ (комутативност сабирања),
- $m\cdot n=n\cdot m$ (комутативност множења),
- $m+(n+v)=(m+n)+v$ (асоцијативност сабирања),
- $m\cdot(n\cdot v)=(m\cdot n)\cdot v$ (асоцијативност множења),
- $m\cdot(n+v)=m\cdot n+m\cdot v$ (дистрибутивност множења према сабирању),

при чему сваки исказ важи за све природне бројеве m,n,v.

Поступак записивања природних бројева у низ се не завршава у коначном броју корака, односно не можемо доћи до краја овог поступка $1,2,3,4,5,6,7,8,....$ Ако претпоставимо да смо у неком коначном кораку записали све природне бројеве, у кораку $n=14568930293$ на пример, додавањем јединице на овај број добијамо природан број $n+1=14568930294$ који није записан у претходним корацима. На тај начин можемо да закључимо да постоји бесконачно много природних бројева. Ова идеја преласка са n на $n+1$ крије се у принципу математичке индукције, једном од основних својстава скупа природних бројева.

ПРИНЦИП МАТЕМАТИЧКЕ ИНДУКЦИЈЕ:
Нека је $P(n)$ исказ који зависи од природног броја n. Ако важи

$$P(1) \wedge (\forall n \in \mathbb{N})\, P(n) \Rightarrow P(n+1)$$

тада је исказ $P(n)$ тачан за све природне бројеве.

Задатак 1. Показати, користећи математичку индукцију, да су задовољени следећи идентитети

- $1+2+...+n = \frac{n(n+1)}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$,
- $1+q+q^2+...+q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}, \forall n \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$,
- $1^2+2^2+...+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \forall n \in \mathbb{N}$,
- $(1+p)^n \geq 1+np, \forall n \in \mathbb{N}, p > -1$,
- $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k, \forall n \in \mathbb{N}, a, b \in \mathbb{R}$.

  Последњи идентитет се назива *биномном формулом* а изрази облика $\binom{n}{k}$ називају се *биномним коефицијентима.* Дефинишу се на следећи начин

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

  за природне бројеве n и k за које важи $k \leq n$.

Решење. Показаћемо први идентитет и тиме објаснити како се математичка индукција користи у доказивању идентитета који зависе од природних бројева. Дакле, циљ нам је да покажемо да једнакост

$$1+2+...+n = \frac{n(n+1)}{2} \tag{1}$$

важи за сваки природан број n. Прво проверавамо да ли једнакост важи за $n = 1$. Овај корак у доказивању се назива *базом математичке индукције.* Лева и десна страна једнакости (1) за $n = 1$ дају идентитет

$$1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$$

који је тачан. Тиме смо показали базу математичке индукције.

Следећи део доказа назива се *кораком математичке индукције.* У овом кораку показујемо да важи једнакост (1) за $n+1$ ако знамо да та једнакост важи за n. Другим речима, претпостављамо да важи $1+2+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$ (и та претпоставка се назива *индукцијском хипотезом*) и желимо да покажемо да важи $1+2+...+n+(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$. Полазимо од леве стране последње једнакости и искористимо индукцијску хипотезу

$$\begin{aligned} 1+2+...+n+(n+1) &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} = \\ &= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \end{aligned}$$

Тиме смо добили једнакост коју је требало показати. ✓

Скупу природних бројева ћемо придруживати елемент 0 (нула) а проширени скуп ћемо означити са $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$. Циљ нам је да сабирамо и множимо елементе скупа $\mathbb{N}_0$ па дефинишемо сабирање и множење нулом на следећи начин

$$m+0 = 0+m = m, \forall m \in \mathbb{N}_0,$$

$$m \cdot 0 = 0 \cdot m = 0, \forall m \in \mathbb{N}_0.$$

Код биномне формуле примећујемо потребу да дефинишемо чему је једнак факторијел нуле, односно 0!. По дефиницији узимамо да је $0! := 1$.

Од раније такође знамо да можемо да упоређујемо природне бројеве, знамо да је број 1 мањи од броја 2, број 2 мањи од броја 3, односно да је сваки број мањи од свог следбеника и већи од свог претходника. Знамо и да је број 6 мањи од броја 174 (ова неједнакост следи из општијег својства транзитивности релације). Интуитиван појам упоређивања два природна броја водиће нас до општијег појма релације $\leq$ на целом скупу реалних бројева.

Знамо да је $2+7=9$ а ову једнакост можемо да интерпетирамо и као чињеницу да једначина $x+7=9$ има решење по x у скупу $\mathbb{N}$ и то решење је $x=2$. Ако мало закомпликујемо ствар па посматрамо једначину $x+9=7$ знамо да она нема решење у скупу природних бројева. Потреба да решавамо једначине овог облика био је један од разлога да проширимо скуп природних бројева до скупа *целих бројева* који означавамо са $\mathbb{Z}$ а његове елементе са

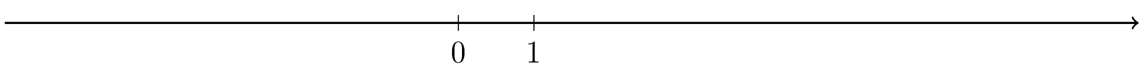
$$\mathbb{Z} := -\mathbb{N} \cup \{0\} \cup \mathbb{N} = \{... -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7...\}.$$

Сабирање и множење можемо да проширимо и на скуп целих бројева (појам *проширимо* значи да дефинишемо збир два елемента из скупа $\mathbb{Z}$ тако да када специјално сабирамо два елемента из $\mathbb{N}$ резултат буде једнак ономе што знамо од раније).

Решавање једначина у којима се појављује операција множења довела је до потребе да проширимо скуп целих бројева. Једначина $(-6) \cdot x = 3$ нема решења у скупу целих бројева, односно ни један цео број x не задовољава горњу једначину. Проширивање скупа целих бројева до скупа *рационалних бројева* $\mathbb{Q}$ омогућило нам је решавање и једначина овог облика. Неформално речено скуп рационалних бројева једнак је скупу разломака, односно

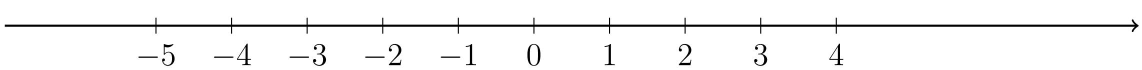
$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{m}{n} \,\middle|\, m \in \mathbb{Z},\, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Посматрајући *бројевну праву* рационалним бројевима можемо да дамо и геометријску интерпретацију. На правој ћемо издвојити две тачке које ћемо означити бројевима 0 и 1 (видети Слику 1). На тај начин дужина сегмента између 0 и 1 постаје наша јединица дужине.



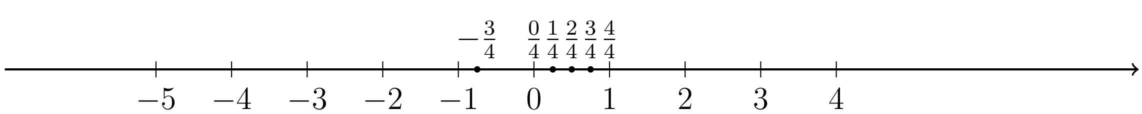
Слика 1. Бројевна права са означеним тачкама 0 и 1

Ако се корацима јединичне дужине крећемо десно од тачке 1 додајемо природне бројеве 2, 3, 4, ... Крећући се лево од тачке која је означена бројем 0 на бројевну праву додајемо негативне целе бројеве као што је приказано на Слици 2.



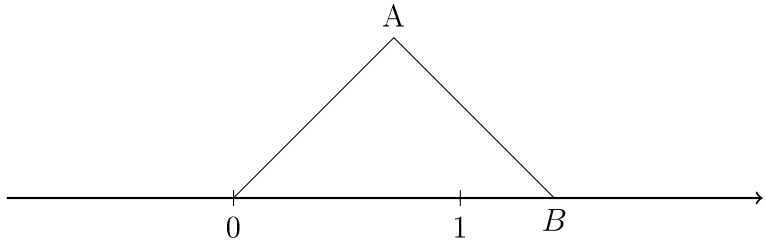
Слика 2. Бројевна права

Поделимо сваки сегмент дужине 1 на n једнаких делова. Тачке у овој подели одговарају рационалним бројевима чији је именилац једнак броју n (видети Слику 3 за $n=4$).



Слика 3. Бројевна права са означеним рационалним тачкама

Описани поступак сада урадимо за све природне бројеве n. На тај начин сваком рационалном броју придружујемо тачку на бројевној правој. Повећавањем броја n повећава се број подеоних тачака на сваком сегменту и оне постају гушће распоређене. Ипак, не одговара свакој тачки са бројевне праве неки рационалан број. Нацртајмо изнад бројевне праве једнокраки правоугли троугао чија је катета једнака мерној јединици 1. Троугао је постављен тако да се његова хипотенуза налази на бројевној правој (положај троугла је приказан на Слици 4). Како се



Слика 4. Правоугли троугао изнад бројевне праве

тачка B налази са десне стране тачке 0 координату тачке B на овој бројевној правој можемо да видимо и као њено растојање од тачке 0. То растојање је заправо дужина хипотенузе овог правоуглог троугла. Питагорина теорема нам каже да је квадрат дужине ове хипотенузе једнак збиру квадрата дужина катета, односно $1^2 + 1^2 = 2$. Након следећег задатка ће бити јасно да координата тачке B, односно дужина хипотенузе, не може бити ни један рационалан број.

Задатак 2. Показати да је квадрат рационалног броја увек различит од броја 2.
Решење. Претпоставимо супротно, *постоји рационалан број* $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ *такав да важи* $x^2 = 2$. Претпоставимо да су p и q позитивни цели бројеви који су при томе узајамно прости $(p, q) = 1$, односно немају заједничких делитеља. Тада је

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2,$$

$$p^2 = 2q^2.$$

Одавде можемо да закључимо да је број p^2 паран односно да $2|p^2$. Тада је и сам број p паран (јер ако би он био непаран онда би и p^2 био непаран) па је облика $p = 2p_1$ за неки природан број p_1. Када све то вратимо у једнакост $p^2 = 2q^2$ добијамо

$$4p_1^2 = 2q^2.$$

Дељењем леве и десне стране последње једнакости бројем 2 долазимо до

$$2p_1^2 = q^2.$$

То значи да је број q^2 паран, па је тиме и број q паран. Закључак је да $2|p$ и $2|q$ што нас је довело до контрадикције јер су бројеви p и q узајамно прости а нашли смо њиховог заједничког делитеља, број 2. Закључак је да наша *претпоставка не важи*, односно не постоји рационалан број чији је квадрат једнак броју 2. ✓

Описана конструкција са правоуглим троуглом нам показује да на бројевној правој постоје тачке којима не можемо да доделимо рационалне координате, односно да није цела бројевна права састављена од рационалних тачака, Тачке које се налазе између рационалних тачака одговарају *ирационалним бројевима*. Додавањем ирационалних бројева на скуп рационалних бројева долазимо до скупа *реалних бројева* $\mathbb{R}$. Као што смо операције сабирања и множења проширивали са скупа $\mathbb{N}$ на скуп $\mathbb{N}_0$ па онда и на $\mathbb{Z}$ то исто можемо да урадимо и са релацијом $\leq$. Ако на горе описани начин сваку тачку на бројевној правој поистоветимо са елементом скупа $\mathbb{R}$ онда можемо да кажемо да је реалан број r мањи од реалног броја s ако се налази са његове леве стране на правој. У том случају пишемо $r \leq s$. Кажемо да је $r < s$ (и читамо r је *строго мање* од s) ако важи да је $r \leq s$ и $r \neq s$. Сви елементи (односно бројеви) који се налазе између r и s чине интервал са крајевима r и s. Интервале издвајамо следећом дефиницијом.

Дефиниција 3. *Интервали* у $\mathbb{R}$ су скупови следећег облика

- *отворен интервал* $(r,s)=\{x\in\mathbb{R}\mid r<x<s\}$,
- *затворен интервал* $[r,s]=\{x\in\mathbb{R}\mid r\le x\le s\}$,
- *полуотворени интервали* $[r,s)=\{x\in\mathbb{R}\mid r\le x<s\}$, $(r,s]=\{x\in\mathbb{R}\mid r<x\le s\}$.

$\Diamond$

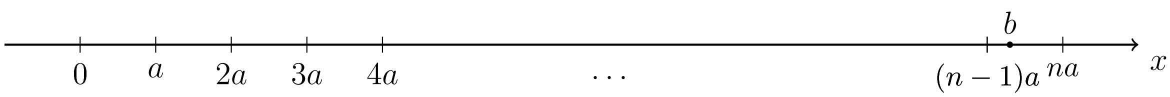
Тачка B са бројевне праве није једина тачка са ирационалним координатама, таквих тачака има бесконачно. Поред тога и рационалних бројева „има много” у скупу $\mathbb{R}$, односно ако узмемо два произвољна реална броја $r_1,r_2\in\mathbb{R}$ таква да важи $r_1<r_2$ тада можемо наћи неки рационалан број $q=\frac{m}{n}$ између њих, $r_1<q<r_2$. Ово својство се назива *густином* скупа $\mathbb{Q}$ у скупу $\mathbb{R}$. Идеја доказа је да повећавањем имениоца n у броју q добијамо све ситнију поделу бројевне праве. Ако је подела довољно ситна сигурно ће неки рационалан број из те поделе да се нађе у интервалу (r_1,r_2). То значи да и у околини нуле постоји бесконачно много рационалних бројева. Односно, ако узмемо неки мали број ε (мале величине ћемо обично означавати са ε) тада можемо да нађемо рационалан број између нуле и ε. Колико год да смањујемо ε увек можемо да нађемо још мањи рационалан број.

Ове особине повезује Архимедова аксиома.

АРХИМЕДОВА АКСИОМА

$$(\forall\, a>0)(\forall\, b)(\exists\, n\in\mathbb{N})\; n\cdot a>b.$$

Аксиома каже да колико год био велики број b ако довољан број пута саберемо број a са самим собом онда ћемо у неком тренутку прескочити број b (видети Слику 5).



Слика 5. За неки природан број n вредност $n\cdot a$ биће већа од броја b

Након што смо разумели потребу за увођењем ирационалних бројева можемо да објаснимо и њихову геометријску интерпретацију.

Посматрајмо следеће затворене интервале на реалној правој

$$I_1=[1,3],\ I_2=\left[\frac{4}{3},\frac{8}{5}\right],\ I_3=\left[\frac{7}{5},\frac{13}{9}\right],\ I_4=\left[\frac{24}{17},\frac{44}{31}\right],\ I_5=\left[\frac{41}{29},\frac{75}{53}\right],\ldots$$

који су приказани на Слици 6.
Набројани интервали су део низа интервала облика $I_n=[a_n,b_n]$ при чему је

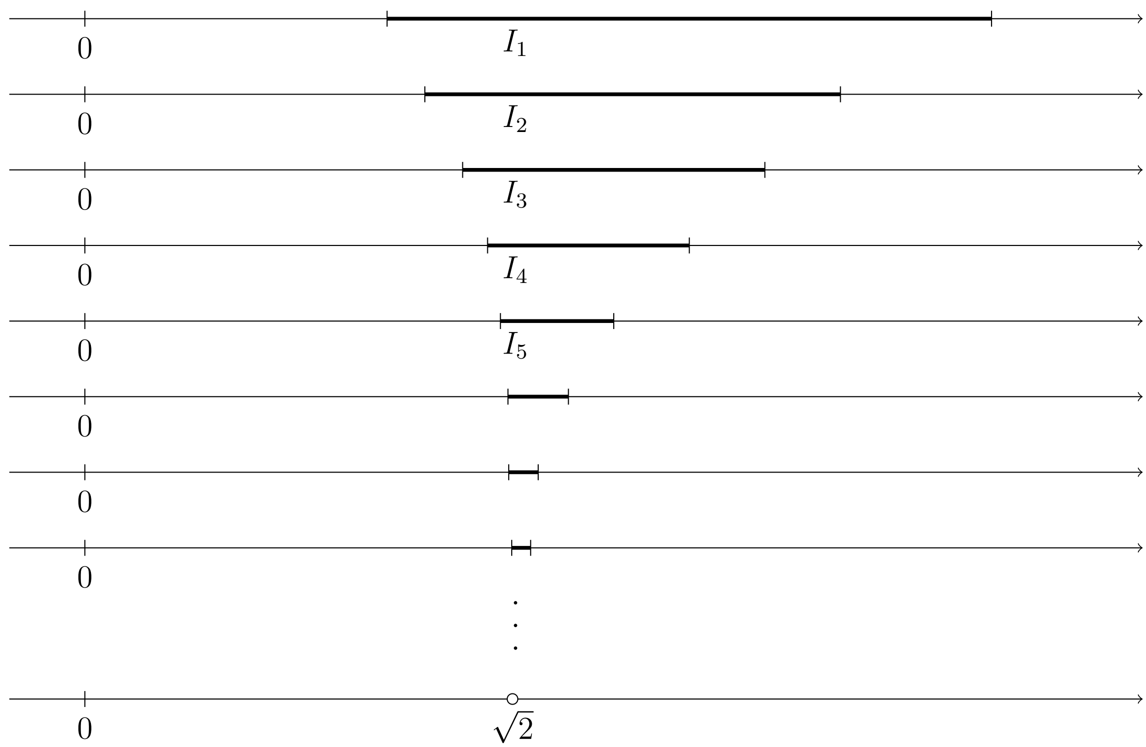
$$a_{n+1}=\frac{2a_n+2}{a_n+2},\ b_{n+1}=\frac{2b_n+2}{b_n+2}, \tag{2}$$

и $a_1=1$, $b_1=3$. Можемо да приметимо да је сваки наредни интервал садржан у следећем интервалу, $I_n\subseteq I_{n+1}$, и да се њихова ширина смањује и постаје произвољно мала како расте индекс n. Са слике може да се уочи (а касније и рачунски покаже) да се само ирационалан број $\sqrt{2}$ налази у свим овим интервалима. Овај закључак, који је нама геометријски јасан, може и да се постулира као правило које увек важи. Пре него то искажемо као аксиому потребна нам је следећа дефиниција.

Дефиниција 4. Нека је дат низ непразних затворених интервала $I_n=[a_n,b_n]$, $n\in\mathbb{N}$. Овај низ називамо *низом уметнутих интервала* ако важи

$$I_{n+1}\subseteq I_n,$$

за свако $n\in\mathbb{N}$. $\Diamond$



Слика 6. Низ затворених интервала који окружују ирационалан број $\sqrt{2}$

Пресек једне овакве бесоконачне фамилије скупова дефинише се као и коначан пресек

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{x \in \mathbb{R} \mid (\forall\, n \in \mathbb{N})\; x \in I_n\}.$$

(КАН) КАНТОРОВА АКСИОМА
Сваки низ затворених уметнутих интервала има непразан пресек.

1. Поље реалних бројева

Сада ћемо интуитивну слику из уводног дела ове главе формализовати у циљу заснивања поља реалних бројева.

Дефиниција 5. Уређена шесторка $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq, 0, 1)$ која задовољава следеће аксиоме

(A1) $(x+y)+z = x+(y+z)$ (асоцијативност сабирања)
(A2) $x+0 = 0+x = x$ (елемент 0 је неутрал за сабирање)
(A3) $(\forall\, x)(\exists\, y)\; x+y = y+x = 0$ (постојање *инверзног* елемента за сабирање, инверз од x означавамо са $-x$)
(A4) $x+y = y+x$ (комутативност сабирања)
(A5) $(x\cdot y)\cdot z = x\cdot(y\cdot z)$ (асоцијативност множења)
(A6) $x\cdot 1 = 1\cdot x = x$ (елемент 1 је неутрал за множење)
(A7) $x\cdot(y+z) = x\cdot y + x\cdot z$, $(x+y)\cdot z = x\cdot z + y\cdot z$ (дистрибутивност множења у односу на сабирање)
(A8) $x\cdot y = y\cdot x$ (комутативност множења)
(A9) $(\forall\, x \neq 0)(\exists\, y)\; x\cdot y = y\cdot x = 1$ (сваки елемент различит од нуле има *инверз у односу на множење*, тај инверз означавамо са x^{-1})
(A10) $0 \neq 1$ (нетривијалност)
(A11) $x \leq x$

(A12) $x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$
(A13) $x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$
(A14) $x \leq y \vee y \leq x$
(A15) $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$
(A16) $x \geq 0 \wedge y \geq 0 \Rightarrow x \cdot y \geq 0$
(АРХ)
(КАН)

назива се *пољем реалних бројева*. $\Diamond$

Наведене аксиоме су занимљиве и појединачно, не само као целина. Оне карактеришу разне структуре које смо већ имали прилике да упознамо. Ако на неком скупу G постоје сабирање (односно операција $+$) и истакнути елемент 0 такви да тројка $(G, +, 0)$ задовољава аксиоме (A1), (A2) и (A3) онда се та структура назива групом. Ако додатно важи и (A4) онда се та структура назива комутативном или Абеловом групом. Скуп $\mathbb{E}$ на коме постоје операције $+$ и $\cdot$ и истакнути елементи 0 и 1 такви да важе аксиоме (A1)-(A8) и (A10) назива се комутативним прстеном са јединицом. Ако важи и аксиома (A9) онда кажемо да је $(\mathbb{E}, +, \cdot, 0, 1)$ поље.

Скуп $\mathbb{Q}$ задовољава аксиоме (A1)-(A16) па има структуру поља. У њему важи и Архимедова аксиома. Оно у чему се $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$ разликују јесте што у пољу $\mathbb{Q}$ не важи Канторова аксиома. То се једноставно види посматрањем интервала $I_n \cap \mathbb{Q}$ где су I_n интервали конструисани у (2) и приказани на Слици 6.

Након увођења поља реалних бројева и описа својстава операција $+$, $\cdot$ и релације $\leq$ можемо да покажемо Бернулијеву неједнакост. Доказ тврђења нам показује да математичку индукцију можемо да искористимо и при доказивању неједнакости.

Тврђење 6. (Бернулијева неједнакост) За све природне бројеве n и реалне бројеве $\alpha > -1$ важи следећа неједнакост:

$$(1+\alpha)^n \geq 1 + n\alpha.$$

Доказ. За $n = 1$ неједнакост тривијално важи јер се своди на тврђење

$$(1+\alpha)^1 \geq 1 + 1 \cdot \alpha.$$

Тиме смо показали базу индукције.

Корак индукције нам каже да проверимо да ли важи $(1+\alpha)^{n+1} \geq 1+(n+1)\alpha$ ако знамо да неједност важи за природан број n. Кренимо од неједнакости која важи и помножимо леву и десну страну те неједнакости позитивним бројем $1 + \alpha$

$$(1+\alpha)^n \geq 1 + n\alpha \Big/ \cdot (1+\alpha).$$

Добијемо неједнакост

$$(1+\alpha)^{n+1} \geq (1+n\alpha)(1+\alpha) = 1 + (n+1)\alpha + n\alpha^2 \geq 1 + (n+1)\alpha,$$

чиме смо показали и индукцијски корак. $\square$

2. Супремум и инфимум скупова у $\mathbb{R}$

Посматрањем релације $\leq$ на скупу реалних бројева можемо да закључимо да је она рефлексивна, транзитивна и антисиметрична, што следи из аксиома (A11), (A12) и (A13). За такве скупове кажемо да су уређени. У овом поглављу ћемо дефинисати појмове супремума и инфимума подскупова скупа реалних бројева и објаснити за коју класу подскупова постоје ови појмови.

Дефиниција 7. Нека је $S \subseteq \mathbb{R}$. Кажемо да је $x \in \mathbb{R}$ *мајоранта* (или *горње ограничење*) скупа S ако важи
$$(\forall\ s \in S)\ s \leq x.$$
Скуп горњих ограничења скупа S означавамо са $S^{\leq}$. Кажемо да је скуп S *ограничен одозго* ако важи $S^{\leq} \neq \emptyset$ (односно ако S има бар једно горње ограничење). Кажемо да је x *максимум скупа* S ако важи $x \in S^{\leq}$ и $x \in S$. Тада пишемо
$$x = \max S.$$
Кажемо да је $a \in \mathbb{R}$ *миноранта* (или *доње ограничење*) скупа S ако важи
$$(\forall\ s \in S)\ a \leq s.$$
Скуп доњих ограничења скупа S означавамо са $S^{\geq}$. Кажемо да је скуп S *ограничен одоздо* ако важи $S^{\geq} \neq \emptyset$ (односно ако S има бар једно доње ограничење). Кажемо да је a *минимум скупа* S ако важи $a \in S^{\geq}$ и $a \in S$. Тада пишемо
$$a = \min S.$$
$\diamondsuit$

Приметимо да се максимум скупа S, ако постоји, налази у пресеку скупова S и $S^{\leq}$. Слично, ако постоји минимум онда важи $\min S \in S \cap S^{\geq}$. Са друге стране горње и доње ограничење скупа не морају бити елементи самог скупа.

Ако је наш скуп S коначан и облика $S = \{s_1, s_2, ..., s_k\}$ тада ћемо његов максимум записивати и у облику $\max\{s_1, s_2, ..., s_k\}$, односно то ће бити највећи од наведених k бројева.

Пример 8. Посматрајмо $S_1 = [0, 2] \subseteq \mathbb{R}$ и $S_2 = (0, 2) \subseteq \mathbb{R}$. Тада је $S_1^{\leq} = [2, +\infty)$, $S_1^{\geq} = (-\infty, 0]$, $\max S_1 = 2$ и $\min S_1 = 0$. Скуп S_2 има иста горња и доња ограничења као скуп S_1, $S_2^{\leq} = [2, +\infty)$ и $S_2^{\geq} = (-\infty, 0]$ али скуп S_2 нема максимум и минимум. Непостојање ових елемената следи из чињеница да је $S_2 \cap S_2^{\leq} = \emptyset$ и $S_2 \cap S_2^{\geq} = \emptyset$. $\sharp$

У претходном примеру су скупови S_1 и S_2 различити али имају особину да чим се крене лево од броја 2 (колико год био мали наш корак) наилазимо на елементе наших скупова, док са десне стране броја 2 не постоји ни један елемент тих скупова. Слично за број 0, десно од нуле имамо елементе скупова док их нема са леве стране нуле. Такве елементе издвајамо следећом дефиницијом.

Дефиниција 9. Нека је $S \subseteq \mathbb{R}$. *Супремум скупа* S је, ако постоји, најмање горње ограничење скупа S. Супремум скупа означава се са
$$\sup S := \min S^{\leq}.$$
Инфимум скупа S је, ако постоји, највеће доње ограничење скупа S. Инфимум скупа означава се са
$$\inf S := \max S^{\geq}.$$
$\diamondsuit$

Приметимо да ако $\sup S \in S$ онда је то и његов максимум (ако скуп S има максимум тада има и супремум). Слично, ако $\inf S \in S$ онда је то и његов минимум.

Пример 10. За скуп $S = (5, 7]$ важи $S^{\leq} = [7, +\infty)$, $S^{\geq} = (-\infty, 5]$ па постоје и супремум и инфимум скупа, $\sup S = 7$ и $\inf S = 5$. $\sharp$

Пример 11. Посматрамо скуп $S = [0, +\infty)$. Ако узмемо било који реалан број x тада је број $\max\{0, x + 1\}$ елемент скупа S који је већи од x што значи да x не може бити горње ограничење скупа S. Закључујемо да је $S^{\leq} = \emptyset$ па супремум скупа S не постоји. Слично, скуп $T = (-\infty, -3)$ није ограничен са доње стране па овај скуп нема инфимум. $\sharp$

Задатак 12. Наћи супремуме и инфимуме следећих скупова:

- $S_1 = (5, 7)$,
- $S_2 = [5, 7)$,
- $S_3 = [5, 7]$,
- $S_4 = [0, \sqrt{2}] \cap \mathbb{Q} = \{r \in \mathbb{Q} \mid r \geq 0,\ r^2 \leq 2\}$,
- $S_5 = \left\{\frac{1}{m} \mid m \in \mathbb{N}\right\}$,
- $S_6 = \left\{5 - \frac{1}{m} \mid m \in \mathbb{N}\right\}$,
- $S_7 = \left\{\frac{n}{m} \mid n, m \in \mathbb{N},\ n < m\right\}$.

Остављамо читаоцу да покаже у следеће карактеризације супремума и инфимума.

Задатак 13. Нека је $S \subseteq \mathbb{R}$. Тада важи

$$M = \sup S \Leftrightarrow \begin{cases} (\forall\, s \in S)\ s \leq M \\ (\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, s_0 \in S)\ M - \varepsilon < s_0, \end{cases}$$

$$m = \inf S \Leftrightarrow \begin{cases} (\forall\, s \in S)\ m \leq s \\ (\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, s_0 \in S)\ s_0 < m + \varepsilon. \end{cases}$$

У Примеру 11 смо видели да постоји подскуп скупа реалних бројева који нема супремум. Класу скупова за коју знамо да имају супремум издвајамо следећом аксиомом.

> (СУП) АКСИОМА СУПРЕМУМА
> Сваки непразан, одозго ограничен подскуп има супремум.

У пољу реалних бројева ће важити аксиома супремума.

Теорема 14. *Сваки непразан и одозго ограничен подскуп скупа реалних бројева има супремум.*

Доказ овог тврђења ћемо оставити читаоцу као задатак са издвојеним корацима.

Задатак 15. Нека је $S \subseteq \mathbb{R}$ непразан и одозго ограничен скуп. Означимо са s елемент скупа S, за који знамо да постоји, а са x једно његово горње ограничење.

- Показати да постоји природан број k такав да је $s + \frac{k}{2^2}$ горње ограничење скупа S.
- Посматрајмо низ бројева a_n и b_n дефинисан на следећи начин: $a_1 := s$, $b_1 := x$. Сваки следећи елемент се дефинише као $b_n := s + \frac{m_n}{2^n}$ где је m_n најмањи природан број k за који важи да је $s + \frac{k}{2^n}$ горње ограничење скупа S; $a_n := s + \frac{m_n - 1}{2^n}$. Показати да је $[a_n, b_n] \cap S \neq \emptyset$.
- Показати је $[a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}$, низ уметнутих интервала.
- Показати да се у пресеку $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]$ налази тачно један елемент s_0.
- Показати да је s_0 супремум скупа S.

Пролазећи кроз овај задатак показали смо да из Архимедове аксиоме (АРХ) и Канторове аксиоме (КАН) следи Аксиома супремума (СУП). Важиће и обрнуто, из Аксиоме супремума следе Архимедова и Канторова аксиома. То значи да смо у аксиоматском заснивању поља реалних бројева у Дефиницији 5 могли да кажемо да је то структура која задовољава (А1)-(А16), (СУП).

Својство аналогно Аксиоми супремума важи и за инфимум.

Теорема 16. *Сваки непразан и одоздо ограничен подскуп $T \subseteq \mathbb{R}$ има инфимум у $\mathbb{R}$.*

Сада можемо формално да дефинишемо број e који нам је од раније познат само као број са пуно децимала чија је приближна вредност

$$e \approx 2.71828.$$

Нека је

$$E = \left\{ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\} \subseteq \mathbb{R}.$$

Скуп E је непразан јер $2 \in E$ и ограничен је одозго бројем 3 јер за произвољно $n \in \mathbb{N}$ важи

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \sum_{k=2}^{n} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}\frac{1}{k!} \\ &\le 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} \\ &= 2 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) \\ &= 2 + 1 - \frac{1}{n} < 3.\end{aligned}$$

У првој једнакости смо искористили биномну формулу док прва неједнакост следи из

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} \le 1 \text{ и } k! \ge k(k-1).$$

Аксиома супремума нам каже да скуп E има супремум у скупу реалних бројева. Његов супремум је *Ојлеров број*

$$e := \sup E.$$

Овај број је ирационалан и *трансцедентан*[1].

Познавање појма супремума омогућава нам да формално дефинишемо чему је једнако $2^{\frac{1}{5}}$ или $2^{\sqrt{3}}$. До сада смо, као и за број e, ово могли да разумемо само као приближну вредност коју рачунамо на дигитрону

$$2^{\sqrt{3}} \approx 2^{1.7320508} \approx 3.321997.$$

Ми знамо да степенујемо природним бројем било који реалан број, на пример

$$2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2.$$

Број $2^{\frac{1}{5}}$ можемо да дефинишемо као јединствено позитивно решење једначине $x^5 = 2$ али поставља се питање зашто овакво решење постоји. До одговора на то питање долазимо помоћу супремума одговарајућег скупа.

Уопштено, нека је $a > 0$ произвољан реалан број и n произвољан природан број. Хоћемо да дефинишемо $\sqrt[n]{a}$ односно $a^{\frac{1}{n}}$. Посматрамо скуп

$$A = \{x \mid x \ge 0,\ x^n \le a\} \subseteq \mathbb{R}.$$

Овај скуп је непразан јер $0 \in A$ и ограничен је одозго бројем $\max\{1, a\}$. Ако је $a \ge 1$ тада $a \in A^{\le}$ а ако је $a < 1$ тада $1 \in A^{\le}$. Из аксиоме супремума следи да постоји супремум скупа A и тај супремум ће бити

$$\sqrt[n]{a} := \sup A.$$

Следећи задатак нам каже да ће $\sqrt[n]{a}$ (појам који је дефинисан као супремум скупа) заиста бити решење једначине $x^n = a$.

Задатак 17. Показати да важи $(\sqrt[n]{a})^n = a$.

Сада знамо да степенујемо позитивне реалне бројеве било којим рационалних бројем

$$a^{\frac{p}{q}} = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p,$$

[1] Број је трансцедентан ако није нула ни једног полинома са целобројним коефицијентима.

при чему је $x^p = (x^{-1})^{|p|}$ ако је p негативан цео број. Преостало нам је још да формално дефинишемо степеновање ирационалним бројем. Идеја је слична као кад смо степеновали са $\frac{1}{n}$, посматра се супремум одговарајућег скупа. На пример, дефиниција броја $2^{\sqrt{3}}$ би била

$$2^{\sqrt{3}} = \sup\{2^r \mid r \in \mathbb{Q},\ r < \sqrt{3}\}.$$

3. Проширени скуп реалних бројева

Проширење скупа $\mathbb{R}$ је скуп

$$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}.$$

Хоћемо да проширимо операције а и уређење на $\overline{\mathbb{R}}$. Релација $\leq$ и даље остаје релација тоталног поретка на $\overline{\mathbb{R}}$ при чему постулирамо да важи

$$-\infty < x < +\infty$$

за свако $x \in \mathbb{R}$. Операције проширујемо по следећим правилима

(1) $x + (+\infty) = +\infty$ за свако $-\infty < x \leq +\infty$,
(2) $x + (-\infty) = -\infty$ за свако $-\infty \leq x < +\infty$,
(3) $\frac{x}{+\infty} = \frac{x}{-\infty} = 0$ за свако $x \in \mathbb{R}$,
(4) $x \cdot (\pm\infty) = \pm\infty$ за свако $0 < x \leq +\infty$,
(5) $x \cdot (\pm\infty) = \mp\infty$ за свако $-\infty \leq x < 0$.

Изрази облика $0 \cdot (\pm\infty)$, $\frac{0}{0}$, $\frac{1}{0}$, $(+\infty) - (+\infty)$, $+\infty + (-\infty)$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$,... остају неодређени па $\overline{\mathbb{R}}$ нема структуру поља као $\mathbb{R}$. Неодређеност ових облика биће мало јаснија после дефинисања појма лимеса функција.

Приметимо да проширивањем скупа реалних бројева има смисла дефинисати отворени интервал (r, s) или полуотворени интервал $(r, s]$ и када је његов леви крај r једнак вредности $-\infty$, али и даље интервали, дефинисани на овај начин, остају подскупови у $\mathbb{R}$. Слично, можемо да дефинишемо и интервале облика $(r, +\infty)$ и $[r, +\infty)$. Ако у дефиницији затвореног интервала допустимо да његови одговарајући крајеви буду $+\infty$ и $-\infty$ онда скуп $\overline{\mathbb{R}}$ можемо да запишемо и као $[-\infty, +\infty]$.

Напомена 18. Интервал I у скупу реалних бројева може да се карактерише као скуп са следећим својством: Ако $a, b \in I$ тада и свако c за које је $a < c < b$ важи $c \in I$. $\diamond$

4. Задаци

Задатак 19. Показати да за сваки природан број n важи $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 2(\sqrt{n+1} - 1)$.

Задатак 20. Показати да је низ интервала $U_n = \left(0, \frac{1}{n}\right) \subseteq \mathbb{R}$ уметнут и да је њихов пресек празан скуп. Овај задатак показује да претпоставка о затворености интервала у Канторовој аксиома не може да се ослаби.

Задатак 21. Посматрајмо низ затворених уметнутих интервала

$$J_n = \left[\sqrt{2} - \frac{1}{n}, \sqrt{2} + \frac{1}{n}\right] \cap \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q},\ n \in \mathbb{N}.$$

Показати да је ово низ затворених уметнутих интервала чији је пресек празан скуп. Овај задатак нам показује да у пољу рационалних бројева не важи Канторова аксиома.

Задатак 22. Показати да, ако постоји, максимум скупа је јединствен. Слично за минимум, ако постоји минимум скупа онда је он јединствен.

Задатак 23. Нека је $S \subseteq \mathbb{R}$. Дефинишемо скуп

$$-S := \{-s \mid s \in S\} \subseteq \mathbb{R}.$$

Показати да важи $\sup(-S) = -\inf S$ и $\inf(-S) = -\sup S$.