Približni algoritmi

Problem pokrivač skupa grana

```
Algoritam Priblizni_pokrivac_skupa_grana(G)
Ulaz G (neusmereni graf)
Izlaz C (pokrivač skupa grana čija je veličina ne više od dva puta
veća od veličine optimalnog pokrivača)
begin
    C := ∅;
    E' := E(G);
    while (E' ≠ ∅)
        do neka je (u, v) proizvoljna grana u E';
        C := C ∪ {u, v};
        izbaci iz E' sve grane koje su incidentne sa u ili sa v;
    return C;
end
```

Teorema: Algoritam Priblizni pokrivac skupa grana je polinomijalni 2-približni algoritam.

1. Dati primer grafa za koji gore predloženi algoritam uvek daje neoptimalno rešenje.

2. Neka je *A* skup grana koje se biraju u algoritmu. Dokazati da je *A* maksimalno uparivanje u grafu *G*.

3. Predlaže se sledeća heuristika za rešavanje problema pokrivač skupa grana:
uzastopno biraj čvor najvećeg stepena i izbaci sve susedne grane.
Dati primer koji nam pokazuje da predložena heuristika nema količnik aproksimacije 2.

4. Znamo da problem pokrivač skupa grana i problem klike jesu komplementarni u smislu da minimalni pokrivač grana jeste komplement klike maksimalne veličine u komplementarnom grafu.
Da li ova veza daje da postoji poliomijalni približni algoritam sa konstantnim količnikom aproksimacije za problem klike?

Problem trgovačkog putnika (TSP)

```
Algoritam Priblizni_TSP_put(G, c)
Ulaz G (kompletan neusmereni graf),
c (nenegativna funkcija cene koja zadovoljava nejednakost trougla)
Izlaz H (Hamiltonov ciklus)
begin
    izaberi čvor r ∈ V(G) za "korenski"čvor;
    odredi Minimalno Povezujuce Stablo T za graf iz korena r;
    neka je L lista čvorova posecenih PREORDER obilaskom stabla
T;
    vrati Hamiltonov ciklus H koji posecuje cvorove u redosledu
L;
end
```

Teorema: Algoritam Priblizni TSP put je polinomijalni 2-približni algoritam za TSP problem sa nejednakošću trougla.

Teorema: Ako je $P \neq NP$ onda ni za jednu konstantu $p >= 1$ ne postoji polinomijalni približni algoritam sa količnikom aproksimacije p za opšti TSP problem.

1. Pokazati kako se u polinomijalnom vremenu instanca opšteg TSP problema može transformisati u instancu TSP problema u kojoj funkcija cene zadovoljava nejednakost trougla. Dve instance treba da imaju isti skup optimalnih puteva. Objasniti zašto ovakva polinomijalna transformacija ne protivureči prethodnoj teoremi.
2. Posmatrajmo sledeću heuristiku najbliže tačke za izgradnju približnog TSP puta. Krećemo od trivijalnog ciklusa koji se sastoji samo iz jednog proizvoljno odabranog čvora. U svakom koraku utvrdimo čvor *u* koji nije na ciklusu, ali mu je rastojanje do proizvoljnog čvora na ciklusu minimalno.
Pretpostavimo da je čvor na ciklusu najbliži čvoru *u* - čvor *v*. Proširujemo ciklus tako da uključuje *u* umetanjem *u* baš nakon *v*. Ponavljamo postupak sve dok svi čvorovi nisu na ciklusu.

Dokazati da ova heurisika vraća put čija je ukupna cena ne više od dva puta veća od cene optimalnog puta.

3. Pretpostavimo da su čvorovi instance TSP problema - tačke u ravni i da je cena $c(u, v)$ Euklidsko rastojanje izmedju tačaka u i v. Pokazati da optimalni put nikada ne preseca sam sebe.

Problem pokrivanje skupa

Algoritam Pohlepni_Pokrivac_Skupa$(X, \mathcal{F})$
Ulaz X (skup), $\mathcal{F}$ (familija podskupova)
Izlaz C (podskup familije F)

```
begin
    U := X;
    C := ∅;
    while (U ≠ ∅)
        do izaberi S ∈ F koji maksimizuje |S ∩ U|;
        U := U \ S;
        C := C ∪ {S};
    return C;
end
```

Teorema: Algoritam Pohlepni_Pokrivac_Skupa je polinomijalni $\rho(n)$-približni algoritam za koji važi:

$$\rho(n) = H(max\{|S| : S \in \mathcal{F}\}),$$

tj. polinomijalni $(\ln |X| + 1)$ - približni algoritam. - nećemo dokazivati