

Redukcije

Zadaci

Zadatak 1

Naći niz edit operacija minimalne cene koji transformiše niz znakova $A = a_1 a_2 \dots a_n$ u niz znakova $B = b_1 b_2 \dots b_m$ pri čemu važi:

1. cena umetanja znaka na poziciju i je $c \cdot i$ ($c = \text{const.}$)
2. cena brisanja k -tog znaka je k
3. cena zamene jednog znaka drugim je 1 .

Rešenje:

Problem svodimo na problem nalaženja najkraćeg puta u grafu G , koji odgovara matrici upoređivanja stringova.

$$V = \{ (i, k) \mid 0 \leq i \leq n, 0 \leq k \leq m \}$$

u čvor (i, k) vode grane iz čvorova:

- $(i, k-1)$ ako je $0 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m$ (umetanje znaka b_j , cena c_k);
- $(i-1, k)$ ako je $1 \leq i \leq n, 0 \leq k \leq m$ (brisanje znaka a_i , cena i);
- $(i-1, k-1)$ ako je $1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m$ (zamena znaka a_i sa b_k , cena 0 ako $a_i = b_k$, 1 inače.

Nalazimo najkraći put od $(0, 0)$ do (n, m) i dobijamo rešenje.

Zadatak 2

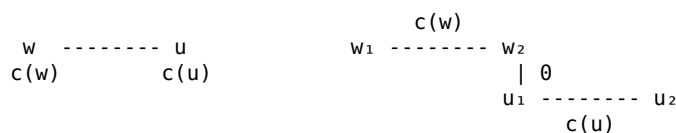
U datom grafu $G = (V, E)$ izdvojen je čvor v i svakom čvoru $w \in V$ pridružena je cena $c(w)$. Cena usmerenog puta $v, x_1, x_2, \dots, x_k, u$ definiše se izrazom:

$$\sum_{i=1}^k c(x_i);$$

specijalno, ako $(v, u) \in E$, onda je cena puta v, u nula. Konstruisati efikasan algoritam za nalaženje puteva minimalne cene od v do ostalih čvorova u G .

Rešenje:

Konstruišemo graf H takav da svakom čvoru w iz G odgovaraju dva čvora w_1 (završni), w_2 (polazni) u H , uz granu (w_1, w_2) cene $c(w)$. Za svaku granu (w, u) iz G pravimo granu (w_2, u_1) cene 0 u H .



Time smo problem sveli na problem određivanja svih najkraćih puteva od v_2 do svih **završnih** čvorova u H .

Zadatak 3

Gornje trougaona matrica je kvadratna matrica u kojoj su svi elementi ispod glavne dijagonale jednaki nula. Dokazati da ako postoji algoritam složenosti $O(T(n))$ za množenje dve $n \times n$ gornje trougaone matrice, onda postoji algoritam složenosti $O(T(n) + n^2)$ za množenje dve proizvoljne $n \times n$ matrice. Može se koristiti pretpostavka da je $T(cn) = O(T(n))$, $c = \text{const}$.

Rešenje:

A, B - dve proizvoljne kvadratne matrice reda n . Potrebno je svesti izračunavanje $A \cdot B$ na izračunavanje proizvoda nekih gornje-trougaonih matrica.

A i B možemo napisati u obliku zbira jedne donje i jedne gornje trougaone matrice:

$$\begin{aligned} A &= GA + DA \\ B &= GB + DB \end{aligned}$$

$$A \cdot B = GA \cdot GB + (GA \cdot DB + DA \cdot GB) + DA \cdot DB$$

Ako algoritam za množenje dve gornje trougaone matrice primenimo na

$$\begin{bmatrix} GA & DA \\ 0 & GA \end{bmatrix} \text{ i } \begin{bmatrix} GB & DB \\ 0 & GB \end{bmatrix} - \text{gornje trougaone dimenzija } 2n \times 2n$$

Dobijamo prva tri sabirka:

$$\begin{bmatrix} GA & DA \\ 0 & GA \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} GB & DB \\ 0 & GB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} GA & GB & GA & DB + DA & GB \\ 0 & & & & GA & GB \end{bmatrix}$$

Poslednji sabirak računamo kao $DA \cdot DB = ((DB^T) (DA^T))^T$.

Dakle, algoritam za množenje gornje trougaonih matrica primenjujemo jednom na $2n \times 2n$ matrice i jednom na $n \times n$ matrice. Pored toga, imamo 3 transponovanja i 2 sabiranja matrica reda n .

Složenost je $O(T(2n) + T(n) + n^2) = O(T(n) + n^2)$

Zadatak 4

Neka je S skup od n tačaka u ravni. Dijametar skupa S je najveće rastojanje nekih dveju tačaka iz S . Označimo sa DM problem određivanja dijametra skupa od n tačaka, a sa DS problem utvrđivanja da li su disjunktna dva skupa A i B od ukupno n realnih brojeva. Dokazati da ako postoji algoritam koji problem DM rešava za vreme $O(T(n))$, onda postoji algoritam složenosti $O(T(n) + n)$ za rešavanje problema DS .