Redukcije

Zadaci

Zadatak 1

Naći niz edit operacija minimalne cene koji transformiše niz znakova $A = a_1 a_2 \dots a_n$ u niz znakova $B = b_1 b_2 \dots b_m$ pri čemu važi:

1. cena umetanja znaka na poziciju i je $c \cdot i$ ($c = const.$)
2. cena brisanja k-tog znaka je k
3. cena zamene jednog znaka drugim je 1.

Rešenje:

Problem svodimo na problem nalaženja najkraćeg puta u grafu G, koji odgovara matrici upoređivanja stringova.

$V = \{ (i, k) \mid 0 \le i \le n, 0 \le k \le m \}$

u čvor (i, k) vode grane iz čvorova:

- $(i, k-1)$ ako je $0 \le i \le n, 1 \le k \le m$ (umetanje znaka b_j, cena c_k);
- $(i-1, k)$ ako je $1 \le i \le n, 0 \le k \le m$ (brisanje znaka a_i, cena i);
- $(i-1, k-1)$ ako je $1 \le i \le n, 1 \le k \le m$ (zamena znaka a_i sa b_k, cena 0 ako $a_i = b_k$, 1 inače.

Nalazimo najkraći put od $(0, 0)$ do (n, m) i dobijamo rešenje.

Zadatak 2

U datom grafu $G = (V, E)$ izdvojen je čvor v i svakom čvoru $w \in V$ pridružena je cena $c(w)$. Cena usmerenog puta $v, x_1, x_2, \dots, x_k, u$ definiše se izrazom:

$$\sum_{i=1}^{k} c(x_i);$$

specijalno, ako `(v, u) ∈ E`, onda je cena puta `v, u` nula. Konstruisati efikasan algoritam za nalaženje puteva minimalne cene od `v` do ostalih čvorova u `G`.

Rešenje:

Konstruišemo graf `H` takav da svakom čvoru `w` iz `G` odgovaraju dva čvora `w₁ (završni), w₂ (polazni)` u `H`, uz granu `(w₁, w₂)` cene `c(w)`. Za svaku granu `(w, u)` iz `G` pravimo granu `(w₂, u₁)` cene `0` u `H`.

```
                                       c(w)
   w  -------- u                w₁ -------- w₂
 c(w)        c(u)                            | 0
                                            u₁ -------- u₂
                                                c(u)
```

Time smo problem sveli na problem određivanja svih najkraćih puteva od `v₂` do svih **završnih** čvorova u `H`.

Zadatak 3

Gornje trougaona matrica je kvadratna matrica u kojoj su svi elementi ispod glavne dijagonale jednaki nula. Dokazati da ako postoji algoritam složenosti `O(T(n))` za množenje dve `n × n` gornje trougaone matrice, onda postoji algoritam složenosti `O(T(n) + n²)` za množenje dve proizvoljne `n × n` matrice. Može se koristiti pretpostavka da je `T(cn) = O(T(n)), c=const`.

Rešenje:

`A`, `B` - dve proizvoljne kvadratne matrice reda `n`. Potrebno je svesti izračunavanje `A · B` na izračunavanje proizvoda nekih gornje-trougaonih matrica.

`A` i `B` možemo napisati u obliku zbira jedne donje i jedne gornje trougaone matrice:

```
A = GA + DA
B = GB + DB

A · B = GA GB + (GA DB + DA GB) + DA DB
```

Ako algoritam za množenje dve gornje trougaone matrice primenimo na

```
[GA DA]     [GB DB]  - gornje trougaone dimenzija 2n x 2n
[0  GA]  i  [0  GB]
```

Dobijamo prva tri sabirka:

```
[ GA   DA ]    [ GB   DB ]    [ GA GB      GA DB + DA GB ]
|         | x  |         | =  |                          |
[ 0    GA ]    [ 0    GB ]    [ 0                  GA GB ]
```

Poslednji sabirak računamo kao DA DB = `((DBᵀ) (DAᵀ))ᵀ`.

Dakle, algoritam za množenje gornje trougaonih matrica primenjujemo jednom na `2n x 2n` matrice i jednom na `n x n` matrice. Pored toga, imamo `3` transponovanja i `2` sabiranja matrica reda `n`.

Složenost je `O(T(2n) + T(n) + n²) = Q(T(n) + n²)`

Zadatak 4

Neka je `S` skup od `n` tačaka u ravni. Dijametar skupa `S` je najveće rastojanje nekih dveju tačaka iz `S`. Označimo sa `DM` problem odredivanja dijametra skupa od n tačaka, a sa `DS` problem utvrdjivanja da li su disjunktna dva skupa `A` i `B` od ukupno `n` realnih brojeva. Dokazati da ako postoji algoritam koji problem `DM` rešava za vreme `O(T(n))`, onda postoji algoritam složenosti `O(T(n) + n)` za rešavanje problema `DS`.