1. Теорема о једнопараметарској фамилији дифеоморфизама

Следећу теорему наводимо без доказа.

Теорема 1. *Нека је векторско поље F класе C^1 на $\mathcal{U} \times I$ и $\phi_{t_0}^t$ ток векторског поља F, прецизније*

$$\phi_{t_0}^t : \mathbf{x}_0 \mapsto \mathbf{x}(t)$$

где је $\mathbf{x}(t)$ јединствено решење диференцијалне једначине

$$\mathbf{x}' = F(\mathbf{x}(t), t)$$

са почетним условима $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$. Тада је $\phi_{t_0}^t$ диференцијабилно пресликавање, класе C^1. □

Нека је $t_0 = 0$. Као последицу Пикарове теореме извешћемо једно природно својство кретања простора дефинисано аутономном диференцијалном једначином

$$\frac{d\phi_0^t}{dt}(\mathbf{x}) = F(\phi_{t_0}^t(\mathbf{x})), \quad \phi_0^0 = \mathrm{Id}\,. \tag{1}$$

Дефиниција 2. Кажемо да је пресликавање $\phi^t : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$, за $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$, $t \in I \subseteq \mathbb{R}$ интервал *једнопараметарска фамилија пресликавања* ако важи

$$\phi^{s+t} = \phi^t \circ \phi^s, \quad \phi^0 = \mathrm{Id}\,.$$

◊

За $t_0 = 0$ означаваћемо са $\phi^t := \phi_0^t$.

Теорема 3. *Нека је ϕ^t решење једначине (1) дефинисано за свако $t \in \mathbb{R}$ и F задовољава услове Пикарове теореме. Тада је ϕ^t једнопараметарска фамилија пресликавања.*

Доказ. Посматрајмо, за фиксирано s

$$\psi^t := \phi^{s+t}, \quad \text{и} \quad \theta^t := \phi^t \circ \phi^s.$$

Приметимо да су и ψ^t и θ^t решења система

$$\frac{d\varphi}{dt}(\mathbf{x}) = F(\varphi^t(\mathbf{x})), \quad \varphi^0(\mathbf{x}) = \phi^s(\mathbf{x}).$$

Из Пикарове теореме следи да се они морају поклапати где год су дефинисани, па је

$$\phi^{s+t} = \phi^t \circ \phi^s.$$

Услов $\phi^0 = \mathrm{Id}$ је очигледно испуњен. □

Последица 4. *Пресликавање ϕ^t је дифеоморфизам.*

Доказ. Из Теореме 1 знамо да је ϕ^t диференцијабилно за свако t, а из Теореме 3 следи да је ϕ^t и бијекција, као и да му је инверз диференцијабилан. Заиста, из

$$\phi^t \circ \phi^{-t} = \phi^{-t} \circ \phi^t = \phi^0 = \mathrm{Id}$$

следи да је

$$(\phi^t)^{-1} = \phi^{-t},$$

које је такође диференцијабилно. □

Напомена 5. Претходна теорема важи и под слабијим условима, ако ϕ није дефинисано на целом $\mathbb{R}$, али ако су $t, s, t+s \in I$, где је I интевал на коме је ϕ^t дефинисано. ◇

Задатак 6. Доказати да су трајекторије система $\mathbf{x}' = F(\mathbf{x})$ дисјунткни скупови. ✓

Задатак 7. Доказати да Теорема 3 важи ако и само ако је поље F аутономно. ✓

2. Продужење решења. Примена на линеарни систем

Пример 8. Једначина $x' = 1+x^2$ са почетним условом $x(0) = x_0$ не може да се продужи на интервал дужине веће од π, иако је векторско поље $F(x,t) = 1+x^2$ глатко на $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Заиста, њено решење је $x(t) = \mathrm{tg}(t + \mathrm{arctg}x_0)$ и дефинисано је на $\left(-\frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}x_0, \frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}x_0\right)$. ✓

Теорема 9. *Нека је векторско поље $F : \mathcal{U}\times I \to \mathbb{R}^n$ као у Пикаровој теореми и нека је решење једначине $\mathbf{x}' = F(\mathbf{x},t)$ дефинисано на максималном интервалу J, $\sup J < \sup I$. Ако је $K \subset \mathcal{U}$ компактан, тада постоји $t_1 \in J$ такво да $\mathbf{x}(t_1) \notin K$.*

Последица 10. *Под претпоставкама из Теореме 9, ако је решење $\mathbf{x}(t)$ садржано у неком компакту $K \subset \mathcal{U}$, тада се оно може продужити на цео I.* □

Доказ Теореме 9. Претпоставимо супротно: нека је $J \subsetneq I$ максимални интервал дефинисаности за $\mathbf{x}$ и K компактан скуп такав да је $\mathbf{x}(J) \subseteq K$. Без умањења општости, претпоставимо да је $\beta := \sup J < \infty$ и нека су a и bтакви да је $\beta \in [a,b] \subset I$. Како је $K \times [a,b]$ компактан, то постоји M такво да је $\|F(\mathbf{x},t)\| \le M$ за $(\mathbf{x},t) \in K\times[a,b]$. Имамо

$$\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(s)\| = \left\|\int_s^t \mathbf{x}'(u)du\right\| \le \int_s^t \|F(\mathbf{x}(u),u)\|du \le M|t-s|,$$

односно $\mathbf{x}$ задовољава Кошијев услов на $[a,b]$ па постоји

$$\lim_{t\to\beta^-} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_1 \in K.$$

Приметимо и да је

$$\mathbf{x}'(\beta^-) = \lim_{t\to\beta^-}\mathbf{x}'(t) = \lim_{t\to\beta^-} F(\mathbf{x}(t),t) = F(\mathbf{x}_1,\beta). \tag{2}$$

Нека је $\mathbf{y}(t)$ јединствено решење једначине

$$\mathbf{x}'(t) = F(\mathbf{x}(t),t), \quad \mathbf{x}(\beta) = \mathbf{x}_1, \tag{3}$$

дефинисано на на $(\beta-\delta,\beta+\delta)$ које постоји на основу Пикарове теореме. Из (2) следи да је и

$$\mathbf{y}_1(t) := \begin{cases}\mathbf{x}(t), & t\in(\beta-\delta,\beta],\\ \mathbf{y}(t), & t\in[\beta,\beta+\delta)\end{cases}$$

решење једначине (3). То значи да се $\mathbf{y}$ и $\mathbf{x}$ поклапају на $(\beta-\delta,\beta]$, односно да $\mathbf{x}$ може да се продужи на $[\beta,\beta+\delta)$. Овде долазимо до контрадикције са претпоставком да је J максимални интервал дефинисаности решења $\mathbf{x}$.

На исти начин доказујемо и за продужавање у левом крају. □

Следећа теорема нам каже, да је, под релативно слабим претпоставкама, решење једначине која је линеарна по $\mathbf{x}$ дефинисано свуда где и векторско поље (упоредити са Примером 8).

Теорема 11. *Нека је матрица $A(t) = [a_{ij}(t)]_{i,j=1}^n$ има за елементе непрекидне функције $a_{ij}(t)$ дефинисане на неком интервалу I који садржи t_0. Тада неаутономни систем*

$$\mathbf{x}'(t) = A(t)\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \tag{4}$$

има јединствено решење дефинисано на I.

Доказ. Егзистенција и јединственост решења су последица Пикарове теореме (зашто су испуњени услови?). Што се тиче максималног интервала дефинисаности, претпоставимо, за почетак, да је $I = [a, b]$ ограничени интервал. Показаћемо да је решење једначине (4) ограничено, па ће из Последице 10 следити да је дефинисано на читавом I. Нека је

$$M := \max_{t \in I} \|A(t)\|.$$

Како је пресликавање

$$t \to \|A(t)\|$$

непрекидно, број M је коначан. За доказ ћемо користити следећу лему, која даје једну априорну оцену решења.

Лема 12. *Ако је* $\|\mathbf{x}'\| \leq M\|\mathbf{x}\|$, *и* $\mathbf{x}(t) \neq \mathbf{0}$, *онда је* $\|\mathbf{x}(t)\| \leq e^{M|t-t_0|}\|\mathbf{x}_0\|$.

Вратимо се на доказ Теореме 11. Пре свега, приметимо да, ако $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{x}(t) \neq \mathbf{0}$ ни за једно t.[1] Ако је $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}$, теорема очигледно важи. Како је

$$\|\mathbf{x}'\| = \|A(t)\mathbf{x}\| \leq M\|\mathbf{x}\|,$$

то из Леме 12 следи да је $\|\mathbf{x}(t)\| \leq e^{M|t-t_0|}\|\mathbf{x}_0\|$, па је $\mathbf{x}(t) \in K$, где је K компакт

$$K := \left\{\|\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{x}_0\|e^{Mc}\right\},$$

за неку позитивну константу c која зависи од сегмента $[a, b]$. Зато из Теореме 9 следи да $\mathbf{x}$ може да се продужи на $[a, b]$.

Ако интервал I није ограничен, применимо доказани део на сваки ограничени интервал садржан у I. $\square$

Доказ Леме 12. Дефинишимо

$$f(t) := \ln \|\mathbf{x}(t)\|^2.$$

Извод функције f је

$$f'(t) = \frac{2\langle \mathbf{x}'(t), \mathbf{x}(t)\rangle}{\|\mathbf{x}(t)\|^2}$$

па из Коши-Шварцове неједнакости имамо:

$$|f'(t)| \leq \frac{|2 \cdot \|\mathbf{x}'(t)\| \cdot \|\mathbf{x}(t)\||}{\|\mathbf{x}(t)\|^2} \leq 2M.$$

Одавде имамо

$$\ln \|\mathbf{x}(t)\|^2 = f(t) = f(t_0) + \int_{t_0}^{t} f'(s)ds \leq f(t_0) + 2M|t-t_0| = \ln \|\mathbf{x}_0\|^2 + 2M|t-t_0|,$$

па је

$$\|\mathbf{x}(t)\|^2 \leq \|\mathbf{x}_0\|^2 e^{2M|t-t_0|},$$

односно

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq \|\mathbf{x}_0\|e^{M|t-t_0|}.$$

$\square$

[1] Заиста, кроз тачку $\mathbf{0} = \mathbf{x}(t_1)$ пролази само једна трајекторија система са почетним условом $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{0}$, а то је $\mathbf{x} \equiv \mathbf{0}$.

Теорема 13. *Простор решења $\mathcal{R}$ једначине (4) је векторски простор димензије n.*

Доказ. Већ знамо да је $\mathcal{R}$ векторски простор. Докажимо да је он изоморфан са $\mathbb{R}^n$. За $t_0 \in I$, пресликавање

$$L_{t_0} : \mathcal{R} \to \mathbb{R}^n, \quad L_{t_0} : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}(t_0) \tag{5}$$

је изоморфизам. Заиста, линеарност је очигледна, L_{t_0} је НА на основу егзистенције решења кроз свако $\mathbf{x}_0$, а L_{t_0} је 1-1 на основу јединствености решења. □

Дефиниција 14. *Вронскијан* или *детерминанта Вронског* система n векторских функција $\mathbf{x}_j : I \to \mathbb{R}^n$, $j = 1, \dots, n$ је детерминанта

$$W(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)(t) := \mathrm{Det} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{11}(t) & \cdots & \mathbf{x}_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{x}_{n1}(t) & \cdots & \mathbf{x}_{nn}(t) \end{bmatrix},$$

где је

$$\mathbf{x}_j(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{1j}(t) \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{nj}(t) \end{bmatrix}.$$

◊

Теорема 15. *Нека су $\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)$ решења неаутономног линеарног система*

$$\mathbf{x}'(t) = A(t)\mathbf{x}(t)$$

дефинисана на интервалу I. Тада су следећи услови еквивалентни.

(1) *$\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)$ чине фундаментални скуп решења.*
(2) *$W(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)(t) \neq 0$ за свако $t \in I$.*
(3) *$W(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)(t_0) \neq 0$ за неко $t_0 \in I$.*

Доказ. Еквиваленција (1) $\Leftrightarrow$ (3): како је пресликавање L_{t_0} дефинисано у (5) изоморфизам, оно слика базу простора $\mathcal{R}$ у базу простора $\mathbb{R}^n$, па $\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)$ чине фундаментални скуп решења ако и само је $\mathbf{x}_1(t_0), \dots, \mathbf{x}_n(t_0)$ база простора $\mathbb{R}^n$, тј. ако и само ако је $W(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)(t_0) \neq 0$.

Импликација (2) $\Rightarrow$ (3) је очигледна.

Да бисмо доказали импликацију (3) $\Rightarrow$ (2), претпоставимо супротно, тј. нека је $W(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)(t_0) \neq 0$ и $W(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)(t_1) = 0$ за неко $t_1 \in I$. То значи да је

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mathbf{x}_j(t_1) = \mathbf{0},$$

за неке $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Али, ако посматрамо Кошијев задатак

$$\mathbf{x}'(t) = A(t)\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(t_1) = \mathbf{0},$$

имамо два решења

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mathbf{x}_j(t) \quad \text{и} \quad \mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0},$$

па из Пикарове теореме следи да су она једнака, односно да је

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mathbf{x}_j(t) \equiv \mathbf{0}, \quad t \in I,$$

што је у контрадикцији са претпоставком $W(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)(t_0) \neq 0$. $\square$

Теорема 16. **(Лиувилова теорема.)** *Вроскијан*

$$W(t) := W(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)(t)$$

скупа решења $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ *једначине* $\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x}$ *задовољава једначину*

$$W'(t) = \mathrm{Tr}(A(t)) \cdot W(t).$$

Доказ. Нека је L_{t_0} пресликавање из доказа Теореме 13. За $t_0, t_1 \in I$, пресликавање

$$L_{t_0}^{t_1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad L_{t_0}^{t_1} := L_{t_1} \circ L_{t_0}^{-1}$$

је линеарни изоморфизам простора $\mathbb{R}^n$, који пресликава стање система у ком се налазило у времену t_0 у стање у ком се налазило у времену t_1 ($L_{t_0}^{t_1} : \mathbf{x}(t_0) \mapsto \mathbf{x}(t_1)$). Прецизније, пресликавање $L_{t_0}^{t_1}$ тачки $\mathbf{x}_0$ придружи $\mathbf{x}(t_1)$ где је $\mathbf{x}(t)$ јединствено решење система $\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x}$ са почетним условом $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$. Како је

$$W(t) = \mathrm{Det}\Phi(t), \quad \Phi(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{11}(t) & \cdots & \mathbf{x}_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{x}_{n1}(t) & \cdots & \mathbf{x}_{nn}(t) \end{bmatrix},$$

и

$$\Phi(t_0 + \Delta t) = L_{t_0}^{t_0+\Delta t} \Phi(t_0)$$

(где смо са $L_{t_0}^{t_0+\Delta t}$ означили матрицу придружену пресликавању $L_{t_0}^{t_0+\Delta t}$), то је

$$W(t_0 + \Delta t) = \mathrm{Det}\left(L_{t_0}^{t_0+\Delta t}\right) W(t_0), \tag{6}$$

циљ нам је да одредимо $\mathrm{Det}L_{t_0}^{t_0+\Delta t}$, односно прва два члана у Тејлоровом развоју пресликавања $\Delta t \mapsto \mathrm{Det}L_{t_0}^{t_0+\Delta t}$. Приметимо да

$$L_{t_0}^{t_0+\Delta t} : \mathbf{x}(t_0) \mapsto \mathbf{x}(t_0 + \Delta t). \tag{7}$$

Посматрајмо пресликавање

$$\Delta t \mapsto \mathbf{x}(t_0 + \Delta t)$$

и напишимо први члан његовог Тејлоровог развоја:

$$\mathbf{x}(t_0 + \Delta t) = \mathbf{x}(t_0) + \mathbf{x}'(t_0)\Delta t + o(\Delta t) = \mathbf{x}(t_0) + \Delta t \cdot A(t_0)\mathbf{x}(t_0) + o(\Delta t), \quad \Delta t \to 0.$$

Из претходне једнакости и (7) закључујемо да, за $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ важи:

$$L_{t_0}^{t_0+\Delta t}(\mathbf{v}) = \mathbf{v} + A(t_0)\mathbf{v}\Delta t + o(\Delta t), \quad \Delta t \to 0,$$

то је

$$L_{t_0}^{t_0+\Delta t} = E + \Delta t A(t_0) + o(\Delta t) = E + \Delta t[A(t_0) + o(1)], \quad \Delta t \to 0.$$

Ако применимо Лему која каже

$$\mathrm{Det}(E + \varepsilon A) = 1 + \varepsilon \cdot \mathrm{Tr}A + o(\varepsilon), \quad \varepsilon \to 0,$$

на матрицу $L_{t_0}^{t_0+\Delta t}$, имамо

$$\mathrm{Det}\left(L_{t_0}^{t_0+\Delta t}\right) = 1 + \Delta t \cdot \mathrm{Tr}A(t_0) + o(\Delta t), \quad \Delta t \to 0,$$

па је

$$\frac{W(t_0+\Delta t)-W(t_0)}{\Delta t} \overset{(6)}{=} \frac{\mathrm{Det}\left(L_{t_0}^{t_0+\Delta t}\right)W(t_0)-W(t_0)}{\Delta t} =$$
$$\frac{[1+\Delta t \mathrm{Tr} A(t_0)+o(\Delta t)]W(t_0)-W(t_0)}{\Delta t} = \mathrm{Tr} A(t_0)\cdot W(t_0)+o(1), \quad \Delta t\to 0,$$

одакле, преласком на $\lim\limits_{\Delta t\to 0}$, добијамо тврђење. □

Задатак 17. Доказати Теорему 15 применом Теореме 16. ✓

4. Стабилност еквилибријума, функција Љапунова

Дефиниција 18. Кажемо да су фазни токови ϕ^t и ψ^t дефинисани једначинама

$$\frac{d\phi^t}{dt} = F(\phi^t), \quad \phi^0 = \mathrm{Id}$$
$$\frac{d\psi^t}{dt} = G(\psi^t), \quad \psi^0 = \mathrm{Id}$$

диференцијално конјуговани или *диференцијално еквивалентни* ако постоји дифеоморфизам

$$\varphi : \mathcal{U} \to \mathcal{W}$$

такав да важи

$$\varphi\circ\phi^t = \psi^t\circ\varphi.$$

♢

Следећу важну теорему (Теорему о исправљивост векторскoj поља) наводимо без доказа.

Теорема 19. *Нека глатко векторско поље $F : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ дефиннише ток ϕ^t и нека је $F(\mathbf{x}^0) \neq \mathbf{0}$ за $\mathbf{x}^0 \in \mathcal{U}$. Тада постоји околина $\mathcal{V}$ тачке $\mathbf{x}^0$, $\mathbf{x}^0 \in \mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ и дифеоморфизам $\varphi : \mathcal{U} \to \varphi(\mathcal{U})$ такав да је*

$$\varphi\circ\phi^t = \psi^t\circ\varphi,$$

где је

$$\psi^t : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} + (t, 0, 0, \ldots, 0)$$

транслација за време t у правцу вектора $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)$. □

Задатак 20. Доказати да из Теореме о исправљивости векторских поља следе Теорема о једнопараметарској фамилији дифеоморфизама и Пикарова теорема о егзистенцији и јединствености решења. ✓

Теорема о исправљивости векторског поља нам даје опис фазног тока (до на дифеоморфизам) у близини некритичне тачке (односно тачке у којој се векторско поље не анулира). У динамичком смислу, ова кретања су веома једноставна, еквивалентна су транслацији. Због тога нам је интересантније да изучавамо понашење система у околини *сингуларне тачке*, односно тачке $\mathbf{x}_*$ за коју је $F(\mathbf{x}_*) = \mathbf{0}$, коју зовемо и *стационарном, тачком равнотеже*, или *еквилибријумом* система. Приметимо да је константна трајекторија једина трајекторија која пролази кроз еквилибријум, ако је поље F као у Пикаровој теореми (што у целој овој глави претпостављамо). Приметимо и да је, из Тејлоровог развоја

$$F(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}_*) + dF(\mathbf{x}_*)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_*) + o(\mathbf{x}-\mathbf{x}_*) = dF(\mathbf{x}_*)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_*) + o(\mathbf{x}-\mathbf{x}_*),$$

кад је $\mathbf{x}$ близу $\mathbf{x}_*$, и да је једначина

$$\mathbf{x}' = (\mathbf{x}-\mathbf{x}_*)' = dF(\mathbf{x}_*)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_*)$$

линеарна по $\mathbf{x} - \mathbf{x}_*$, тако да можемо да очекујемо да ће се и нелинеарни систем $\mathbf{x}' = F(\mathbf{x})$ у близини еквилибријума понашати слично његовој линеаризацији $\mathbf{x}' = dF(\mathbf{x}_*)(\mathbf{x})$, а линеарне системе смо детаљно изучили.

Дефиниција 21. Нека је $\mathbf{x}_*$ еквилибријум система $\mathbf{x}' = F(\mathbf{x})$, $F : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$. Кажемо да је $\mathbf{x}_*$

- *стабилни еквилибријум* ако за сваку околину $\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}$ тачке $\mathbf{x}_*$ постоји околина $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_0 \ni \mathbf{x}_*$, таква да важи
$$\mathbf{x} \in \mathcal{U}_0 \Rightarrow \phi^t(\mathbf{x}) \in \mathcal{U}_1, \quad t \geq 0,$$
где је ϕ^t решење система
$$\frac{d\phi^t}{dt} = F(\phi^t), \quad \phi^0 = \mathrm{Id};$$
- *асимптотски стабилни еквилибријум* ако је стабилни еквилибријум и ако још важи:
$$\mathbf{x} \in \mathcal{U}_0 \Rightarrow \lim_{t \to +\infty} \phi^t(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_*;$$
- *нестабилини еквилибријум* ако није стабилни.

$\Diamond$

Пример 22. Координатни почетак је увек еквилибријум линеарног система $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$. Знамо да је решење овог система са почетном вредношћу $\mathbf{x}$ дато са $\phi^t(\mathbf{x}) = e^{At}\mathbf{x}$, као и да у матрици e^{tA} фигуришу линеарне комбинације функција $e^{\lambda t}$, $t^k e^{\lambda t}$, $e^{\alpha t}\cos(\beta t)$, $e^{\alpha t}\sin(\beta t)$, $t^k e^{\alpha t}\cos(\beta t)$, $t^k e^{\alpha t}\sin(\beta t)$ где су λ, $\alpha \pm i\beta$ сопствене вредности матрице A. Ако су све сопствене вредности такве да им је реални део строго негативан, еквилибријум је асимптотски стабилан. Ако матрица A има неку сопствену вредност са строго позитивним реалним делом, координатни почетак је нестабилни еквилибријум (зашто?). А ако су све сопствене вредности са реалним делом мањим или једнаким нули, тада постоји дискусија по вишеструкости сопствене вредности чији је реални део нула. Нпр. центар у планарном случају је стабилни али не и асимптотски стабилни еквилибријум, док, у вишим димензијама, ако је вишеструкост сопствене вредности $i\beta$ већа од један, можемо имати и нестабилни еквилибријум. У примеру матрице
$$A = \begin{bmatrix} 0 & \beta & 1 & 0 \\ -\beta & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & -\beta & 0 \end{bmatrix}$$
имамо нестабилни еквилибријум у координатном почетку.

У случају планарног система, који фазни портрети имају координатни почетак за стабилни, нестабилни, односно асимптотски стабилни еквилибријум? Размотрити и случај $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$.

$\checkmark$

Задатак 23. Доказати да су асимптотски стабилни еквилибријуми изоловане тачке. Да ли исто важи за стабилни (нестабилни) еквилибријум? $\checkmark$

5. Стабилност еквилибријума - метод функције Љапунова

Било која функција V која задовољава услове следеће теореме се зове *функција Љапунова*.

Теорема 24. (Теорема Љапунова.) *Нека је $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ отворен скуп, $F : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ класе C^1 и $\mathbf{x}_* \in \mathcal{U}$ такво да је $F(\mathbf{x}_*) = \mathbf{0}$. Означимо са ϕ^t решење једначине*

$$\frac{d}{dt}\phi^t(\mathbf{x}) = F(\phi^t(\mathbf{x})), \quad \phi^0 = \mathrm{Id}\,.$$

Претпоставимо да постоји функција $V : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ таква да важи

- *V је класе C^1 на $\mathcal{U} \setminus \{\mathbf{x}_*\}$*
- *$V(\mathbf{x}) > 0$ за $\mathbf{x} \in \mathcal{U} \setminus \{\mathbf{x}_*\}$, $V(\mathbf{x}_*) = 0$.*

Тада важи

(а) *ако V опада дуж решења ϕ^t, тада постоји околина $\mathcal{U}_0$ тачке $\mathbf{x}_*$ таква да је за свако $\mathbf{x} \in \mathcal{U}_0$, решење $\phi^t(\mathbf{x})$ дефинисано за свако $t \geq 0$; осим тога, $\mathbf{x}_*$ је стабилни еквилибријум;*

(б) *ако V строго опада дуж решења система, тада постоји околина $\mathcal{U}_0$ тачке $\mathbf{x}_*$ таква да је за свако $\mathbf{x} \in \mathcal{U}_0$, решење $\phi^t(\mathbf{x})$ дефинисано за свако $t \geq 0$; осим тога, $\mathbf{x}_*$ је асимптотски стабилни еквилибријум;*

(в) *ако V строго расте дуж решења система, тада је $\mathbf{x}_*$ нестабилни еквилибријум.*

Напомена 25. Ако уведемо ознаку

$$V'(\mathbf{x}) := \frac{d}{dt}\big[V(\phi^t(\mathbf{x})\big]_{t=0},$$

из

$$\frac{d}{dt}\big[V(\phi^t(\mathbf{x})\big]_{t=s} = \frac{d}{dt}\big[V(\phi^{t+s}(\mathbf{x})\big]_{t=0} = V'(\phi^{\mathbf{s}}(\mathbf{x}))$$

видимо да је

- услов (а) из Теореме 24 еквивалентан услову $V'(\mathbf{x}) \leq 0$, за $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$;
- услов (б) из Теореме 24 еквивалентан услову $V'(\mathbf{x}) < 0$, за $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$;
- услов (в) из Теореме 24 еквивалентан услову $V'(\mathbf{x}) > 0$, за $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$;.

Како је

$$V'(\mathbf{x}) = dV(\phi^t(\mathbf{x}))(F(\phi^t(\mathbf{x}))|_{t=0} = \langle \nabla V(\mathbf{x}), F(\mathbf{x}) \rangle,$$

закључујемо да провера да ли нека глатка функција испуњава неки од три услова (а), (б) или (в) из Теореме 24 не захтева експлицитно решавање једначине. $\diamond$

Доказ тачке (а) Теореме 24. Доказаћемо само прву тачку. Заинтересовани студенти могу наћи доказ остале две тачке у мојој скрипти.

Нека важе претпоставке из тачке (а). Нека је $\mathcal{U}_1 \subseteq \mathcal{U}$ произвољна околина тачке $\mathbf{x}_*$ и $r > 0$ такво да $B[\mathbf{x}_*, r] \subset \mathcal{U}_1$. Нека је

$$m := \min_{\partial B[\mathbf{x}_*, r]} V(\mathbf{x}) > 0$$

и

$$\mathcal{U}_0 := \{\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_*, r) \mid V(\mathbf{x}) < m\}.$$

Приметимо да је $\mathcal{U}_0$ отворен скуп и да $\mathbf{x}_* \in \mathcal{U}_0$.

Доказаћемо да је за свако $\mathbf{x} \in \mathcal{U}_0$, $\phi^t(\mathbf{x})$ дефинисано за свако $t \geq 0$, као и да је $\mathcal{U}_0$ тражена околина тачке $\mathbf{x}_*$ из дефиниције стабилног еквилибријума. Нека је $\mathbf{x} \in \mathcal{U}_0$. Докажимо прво да је $\phi^t(\mathbf{x}) \in B(\mathbf{x}_*, r)$ за свако $t \geq 0$ (одавде, на основу теореме о продужењу решења, следи да је $\phi^t(\mathbf{x})$ дефинисано за све $t \geq 0$, видети Последицу 10). Претпоставимо супротно, да је $\phi^{t_1}(\mathbf{x}) \notin B(\mathbf{x}_*, r)$ за неко $t_1 > 0$. Из непрекидности пресликавања $\phi^t(\mathbf{x})$ по t следи да је $\phi^{t_2}(\mathbf{x}) \in \partial B\,[\mathbf{x}_*, r]$ за неко $t_2 \in (0, t_1)$. Али, како функција V опада дуж трајекторија ϕ^t, добијамо

$$m \leq V(\phi^{t_2}(\mathbf{x})) \leq V(\phi^0(\mathbf{x})) = V(\mathbf{x}) < m,$$

што је контрадикција.

Из
$$V(\phi^t(\mathbf{x}_0)) \le V(\phi^0(\mathbf{x}_0)) = V(\mathbf{x}_0) < m$$
закључујемо да је $V(\phi^t(\mathbf{x}_0)) < m$, кадгод је $t \ge 0$ и $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{U}_0$. Одавде имамо
$$t \ge 0,\ \mathbf{x}_0 \in \mathcal{U}_0 \Rightarrow \phi^t(\mathbf{x}_0) \in \mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}_1,$$
што завршава доказ. $\square$

Пример 26. (Планарни линеарни систем.) Знамо да је координатни почетак еквилибријум линеарног система, и то: асимптотски стабилни у случају стабилних чворова и спирале за $\alpha < 0$, стабилни али не и асимптотски стабилни у случају центра и нестабилни у случају седла, нестабилних чворова и спирале за $\alpha > 0$. У сваком од ових случајева, осим у случају седла, као функција Љапунова из Теореме 24 може послужити квадрат норме, $V(x, y) := x^2 + y^2$.

Пример 27. Потражимо функцију Љапунова у облику $V(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2$ за систем
$$\begin{aligned} x' &= (z+1)(2y-x)\\ y' &= -(z+1)(x+y)\\ z' &= -z^3 \end{aligned}$$
и докажимо да је тачка $(0, 0, 0)$ асимптотски стабилни еквилибријум.

Како је $\nabla V(x, y, z) = 2(ax, by, cz)$, а $F(x, y, z) = ((z+1)(2y-x), -(z+1)(x+y), -z^3)$, то је
$$\langle \nabla V(x, y, z), F(x, y, z)\rangle = 2[(z+1)(-ax^2 + (2a-b)xy - by^2) - cz^4],$$
закључујемо да за избор:
$$a = 1, \quad b = 2, \quad c = 1$$
важи
$$V(0, 0, 0) = 0, \quad V(x, y, z) > 0, (x, y, z) \ne (0, 0, 0), \quad V'(\mathbf{x}) < 0,$$
односно да $(0, 0, 0)$ јесте асимптотски стабилни еквилибријум. ✓

Пример 28. (Лагранж–Дирихлеова теорема.) Други Њутнов закон $F = m\mathbf{a}$ у $\mathbb{R}^3$, за конзервативни систем ($F(\mathbf{x}) = -\nabla U(\mathbf{x})$) је еквивалентан систему у $\mathbb{R}^6$ ($\mathbf{v}$ је вектор брзине $\mathbf{x}'$):
$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{v}\\ \mathbf{v}' = -\frac{1}{m}\nabla U(\mathbf{x}). \end{cases}$$
Једина тачка еквилибријума горњег система је тачка $(\mathbf{x}_*, \mathbf{v}_*)$ за коју важи
$$\nabla U(\mathbf{x}_*) = 0, \quad \mathbf{v}_* = \mathbf{0}.$$
Потражимо функцију Љапунова у облику функције енергије
$$E(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = U(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}m\|\mathbf{v}\|^2.$$
Како је $E(\mathbf{x}_*, \mathbf{0}) = U(\mathbf{x}_*)$, изменимо мало (потенцијалну) функцију Љапунова у
$$V(\mathbf{x}, \mathbf{v}) := E(\mathbf{x}, \mathbf{v}) - U(\mathbf{x}_*) = U(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}m\|\mathbf{v}\|^2 - U(\mathbf{x}_*).$$
Сада вредност функције у тачки $(\mathbf{x}_*, \mathbf{0})$ јесте једнака нули, а из Закона очувања енергије имамо:
$$\frac{d}{dt}E(\phi^t(\mathbf{x})) = 0 \le 0.$$

Овиме смо доказали *Лагранж–Дирихлеову теорему: ако је* $\mathbf{x}_*$ *строги локални минимум потенцијалне енергије* U*, тада је тачка* $(\mathbf{x}_*, \mathbf{0})$ *стабилни еквилибријум конзервативног система.* Заиста, услов да је $\mathbf{x}_*$ строги локални минимум потенцијалне енергије U нам обезбеђује позитивност функције Љапунова у околини тачке $(\mathbf{x}_*, \mathbf{0})$ као и $V(\mathbf{x}, \mathbf{v}) > 0$ за $(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \neq (\mathbf{x}_*, \mathbf{0})$.

О функцији Љапунова можемо размишљати као о уопштењу енергије, као што је то овај пример показао. Касније ћемо видети да је функција Љапунова једно уопштење и норме (као што је то био случај у Примеру 26 и 27). ✓

6. Стабилност еквилибријума - метод сопствених вредности

За почетак ћемо навести без доказа помоћно тврђење, које нам гарантује постојање једне посебне норме, придружене матрици A, норме која ће нам бити веома згодна на неким местима. Сама ова норма се понекад назива и функција Љапунова придружена матрици A. За доказ (кога занима) погледати скрипту.

Лема 29. *Нека је* $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *матрица за које важи* $\operatorname{Re}\lambda > 0$ *за сваку сопствену вредност* λ *матрице* A*. Тада постоји скаларни производ* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *на* $\mathbb{R}^n$ *и константа* $c > 0$ *такви да важи*

$$\langle A\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle \geq c\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle$$

за свако $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$*.* □

Напомена 30. Користићемо и овај облик Леме 29: нека је $\operatorname{Re}\lambda < 0$ за сваку сопствену вредност λ матрице A. Тада постоји скаларни производ $\langle\cdot,\cdot\rangle$ на $\mathbb{R}^n$ и константа $c > 0$ такви да важи

$$\langle A\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle \leq -c\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle$$

за свако $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Ово тврђење следи директно из Леме 29, примењене на матрицу $-A$. ⋄

Већ смо споменули да је природно очекивати да се у близини еквилибријума систем понаша слично придруженом линеарном систему ($\mathbf{x}' = dF(\mathbf{x}_*)\mathbf{x}$). Следећа теорема је једна илустрација тога.

Теорема 31. *Нека је* $A := dF(\mathbf{x}_*)$ *матрица извода пресликавња* F *у тачки* $\mathbf{x}_*$ *и нека је* $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$*, за сваку сопствену вредност* λ *матрице* A*. Дефинишимо*

$$V(\mathbf{x}) := \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_*\|^2,$$

где је $\|\cdot\|$ *норма Љапунова придружена матрици* A *као у Напомени 30. Тада је* V *строга функција Љапунова из тачке (в) Теореме 24, па је* $\mathbf{x}_*$ *асимптотски стабилни еквилибријум система* $\mathbf{x}' = F(\mathbf{x})$*, штавише, важи и следећа априорна оцена: постоје* $c_1, c_2 > 0$ *и околина* $\mathcal{U}_0$ *тачке* $\mathbf{x}_*$ *такви да важи*

$$\|\phi^t(\mathbf{x}) - \mathbf{x}_*\| \leq c_2 e^{-c_1 t}\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_*\|,$$

за свако $t \geq 0$*,* $\mathbf{x} \in \mathcal{U}_0$*.*

Доказ. Очигледно је да је V глатка и строго позитивна функција (осим у $\mathbf{x} = \mathbf{x}_*$), као и да је $V(\mathbf{x}_*) = 0$.

Докажимо да V строго опада дуж решења:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(\phi^t\mathbf{x}) &= \frac{d}{dt}\|\phi^t(\mathbf{x}) - \mathbf{x}_*\|^2 = \frac{d}{dt}\langle \phi^t(\mathbf{x}) - \mathbf{x}_*, \phi^t(\mathbf{x}) - \mathbf{x}_*\rangle \\ &= 2\left\langle \frac{d\phi^t}{dt}(\mathbf{x}), \phi^t(\mathbf{x}) - \mathbf{x}_*\right\rangle = 2\langle F(\phi^t(\mathbf{x})), \phi^t(\mathbf{x}) - \mathbf{x}_*\rangle. \end{aligned} \tag{8}$$

Како је
$$F(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}_*) + A(\mathbf{x}-\mathbf{x}_*) + o(\mathbf{x}-\mathbf{x}_*) = A(\mathbf{x}-\mathbf{x}_*) + o(\mathbf{x}-\mathbf{x}_*),$$
имамо:
(9)
$$\langle F(\mathbf{x}), \mathbf{x}-\mathbf{x}_*\rangle = \langle A(\mathbf{x}-\mathbf{x}_*)+o(\mathbf{x}-\mathbf{x}_*), \mathbf{x}-\mathbf{x}_*\rangle \le -c\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_*\|^2+\varepsilon(\mathbf{x})\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_*\|^2 \le -c_1\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_*\|^2,$$
за $\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_*\| < \delta$, и $c_1 := c/2$. Из последње неједнакости и (8) добијамо:
$$\frac{d}{dt}V(\phi^t(\mathbf{x})) < 0$$
за свако $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_*, \delta) \setminus \{\mathbf{x}_*\}$. Одавде специјално следи да је, ако је $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_*, \delta)$, онда је и $\phi^t(\mathbf{x}) \in B(\mathbf{x}_*, \delta)$, за $t \ge 0$.

Претпоставимо да је $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_*, \delta)$ ($\Rightarrow \phi^t(\mathbf{x}) \in B(\mathbf{x}_*, \delta)$, за $t \ge 0$). Из (8) и (9) добијамо
$$\frac{d}{dt}\|\phi^t(\mathbf{x}) - \mathbf{x}_*\| = \frac{\langle F(\phi^t(\mathbf{x})) - \mathbf{x}_*, \phi^t(\mathbf{x}) - \mathbf{x}_*\rangle}{\|\phi^t(\mathbf{x}) - \mathbf{x}_*\|} \le -c_1\|\phi^t(\mathbf{x}) - \mathbf{x}_*\|,$$
па имамо
$$\frac{\frac{d}{dt}\|\phi^t(\mathbf{x}) - \mathbf{x}_*\|}{\|\phi^t(\mathbf{x}) - \mathbf{x}_*\|} = \frac{d}{dt}\ln\|(\phi^t(\mathbf{x}) - \mathbf{x}_*\| \le -c_1.$$
Одавде је
$$\ln\|\phi^t(\mathbf{x}) - \mathbf{x}_*\| = \ln\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_*\| + \int_0^t \frac{d}{ds}\ln\|\phi^s\mathbf{x} - \mathbf{x}_*\|ds \le \ln\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_*\| - c_1 t,$$
па је
$$\|\phi^t(\mathbf{x}) - \mathbf{x}_*\| \le \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_*\|e^{-c_1 t}.$$
Горња норма је специјална норма Љапунова, али све норме у $\mathbb{R}^n$ су еквивалентне, што значи да је
$$a\|\cdot\| \le \|\cdot\|_E \le b\|\cdot\|,$$
за неке позитивне константе a и b, где смо са $\|\cdot\|_E$ означили стандардну еуклидску норму. Одавде следи тврђење. □

Важи и следећи обрат Теореме 31.

Теорема 32. *Ако је $\mathbf{x}_*$ стабилни еквилибријум, тада не постоји сопствена вредност матрице $dF(\mathbf{x}_*)$ чији је реални део строго позитиван.*

Доказ претходне теореме је сличан доказу Теореме 31, али технички много сложенији. Зато га овде изостављамо.