Analiza 1
Letnji semestar 2013/2014
dr Jelena Katić

Autor:
Nikola Ajzenhamer

10. jul 2014.

Zahvaljujem se kolegama Anji Bukurov i Pavlu Joksoviću na ogromnoj pomoći koju su mi pružili prilikom pisanja ove skripte.

Posebno se zahvaljujem profesorki Jeleni Katić koja je učestvovala u poboljšanju ove skripte, ispravljajući greške i davajući mi korisne savete.

Sadržaj

1 Aksiome realnih brojeva **5**
- 1.1 Supremum 6
- 1.2 Kantorova teorema 11

2 Limes i neprekidnost funkcije **13**
- 2.1 Limes funkcije 15
- 2.2 Univerzalna definicija 17
- 2.3 Stavovi limesa 18
  - 2.3.1 Stav o neprekidnosti funkcije 20
- 2.4 Jednostrani limesi 22
- 2.5 Neodređeni oblici 25
- 2.6 Osnovni limesi (i njihove posledice) 28
- 2.7 Limes monotone funkcije 31

3 Asimptotske relacije $\boldsymbol{o}$ i $\sim$ **34**
- 3.1 Relacija $\boldsymbol{o}$ 34
- 3.2 Relacija $\sim$ 37
- 3.3 Veza između $\boldsymbol{o}$ i $\sim$ 39

4 Svojstva neprekidnih funkcija **43**
- 4.1 Lokalna svojstva neprekidnih funkcija 43
- 4.2 Globalna svojstva neprekidnih funkcija 45
  - 4.2.1 Koši - Bolcanova teorema 45
  - 4.2.2 Teorema o međuvrednosti 48
  - 4.2.3 Vajerštrasova teorema 50
- 4.3 Vrste prekida 53

5 Neprekidnost monotone i inverzne funkcije **55**

6 Izvodi **61**
- 6.1 Definicija izvoda 61
- 6.2 Interpretacije izvoda 61
  - 6.2.1 Geometrijska interpretacija izvoda 61
  - 6.2.2 Mehanička interpretacija izvoda 62
- 6.3 Neki izvodi 62
- 6.4 Diferencijabilnost funkcije 63
- 6.5 Pravila izvoda 66
- 6.6 Izvod složene i inverzne funkcije 67
  - 6.6.1 Izvod složene funkcije 67
  - 6.6.2 Izvod inverzne funkcije 68

7 Osnovne teoreme diferencijalnog računa **72**
- 7.1 Fermaova teorema 72
- 7.2 Tri teoreme o srednjoj vrednosti 72
  - 7.2.1 Rolova teorema 72
  - 7.2.2 Lagranževa teorema 73
  - 7.2.3 Košijeva teorema (o srednjim vrednostima diferencijalnog računa) 75
- 7.3 Lopitalova pravila 77

7.4 Izvodi višeg reda 79
7.4.1 Svojstva izvoda višeg reda 80

8 Tejlorov polinom **81**
8.1 Maklorenov polinom 82

9 Kose asimptote **88**

10 Dovoljni uslovi lokalnih ekstrema **90**

11 Konveksnost **92**
11.1 Konkavnost 95

12 Ispitivanje funkcija i skiciranje grafika **97**

13 Nizovi **110**
13.1 Monotoni nizovi 113
13.2 Podnizovi i tačke nagomilavanja 116
13.3 Košijevi nizovi 119
13.4 Veza limesa niza i limesa funkcije i neprekidnosti 121
13.4.1 Dokazi pojedinih teorema (preko nizova) 123

PRVA NEDELJA

1 Aksiome realnih brojeva

Posmatramo strukturu realnih brojeva $\mathbf{R} = (R, +, \cdot, \leq)$.

(A1) $x + (y + z) = (x + y) + z$ asocijativnost sabiranja (operacije $+$)
(A2) $x + y = y + x$ komutativnost sabiranja
(A3) $\exists 0 : x + 0 = x$ postojanje neutralnog elementa za $+$ kojeg nazivamo ,,nula"
(A4) $\forall x \exists y : x + y = 0$ postojanje inverznog elementa za $+$ i pišemo $y = -x$

Svaka struktura koja ima jednu operaciju i zadovoljava (A1), (A3), (A4) je *GRUPA*, a ako važi i (A2), onda je *ABELOVA GRUPA* ili *KOMUTATIVNA GRUPA*.

(A5) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ asocijativnost množenja (operacije $\cdot$)
(A6) $x \cdot y = y \cdot x$ komutativnost množenja
(A7) $\exists 1 : x \cdot 1 = x$ postojanje neutralnog elementa za $\cdot$ kojeg nazivamo ,,jedinica"
(A8) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ distributivnost $\cdot$ u odnosu na $+$
(A9) $\forall x, x \neq 0, \exists y : x \cdot y = 1$ postojanje inverznog elementa za $\cdot$ i pišemo $y = \frac{1}{x}$

(A10) $0 \neq 1$

Struktura koja zadovoljava A1 $-$ A8 naziva se *KOMUTATIVNI PRSTEN sa 1.*
Struktura koja zadovoljava A1 $-$ A9 naziva se *POLJE.*

Primeri:

1) $\mathbf{R}$ je grupa $(+)$, prsten i polje
2) $\mathbf{N}^+ = (N, +)$ nije grupa zbog A4
3) $(Z, +)$ jeste grupa (i to Abelova)
4) $(Z, +, \cdot)$ jeste prsten, ali nije polje zbog A9
5) $(Q, +, \cdot)$ jeste polje

(A11) $x \leq x$ refleksivnost
(A12) $x \leq y \wedge y \leq x \Longrightarrow x = y$ antisimetričnost
(A13) $x \leq y \wedge y \leq z \Longrightarrow x \leq z$ tranzitivnost

Relacija koja zadovoljava A11 $-$ A13 je *relacija PORETKA.*

(A14) $\forall x, y \in \mathbf{R}$: $x \leq y$ ili $y \leq x$

Relacija poretka koja zadovoljava i A14 je *relacija TOTALNOG PORETKA.*

(A15) $x \leq y \Longrightarrow x + z \leq y + z$ usklađenost (saglasnost) poretka i $+$
(A16) $\begin{matrix} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{matrix} \Longrightarrow x \cdot y \geq 0$ usklađenost (saglasnost) poretka i $\cdot$

Primeri (nastavak):

6) Relacija „biti podskup"($\subseteq$) je relacija poretka, ali nije relacija totalnog poretka:

Jasno je da važi: (R) $X \subseteq X$, (A) $X \subseteq Y \wedge Y \subseteq X \Longrightarrow X = Y$, (T) $X \subseteq Y \wedge Y \subseteq Z \Longrightarrow X \subseteq Z$, ali, npr:
$X = \{1, 2, 3, 4\}$; $A = \{1, 2\}$ i $B = \{2, 3\}$
$A \nsubseteq B$ i $B \nsubseteq A$

Primer 1: Dokazati da: $x \leq y \Longrightarrow -x \geq -y$

$x \leq y$
$(A4) \Longrightarrow \exists(-x) : x \leq y/ + (-x)$
$(A15) \Longrightarrow x + (-x) \leq y + (-x)$
$(A4) \Longrightarrow 0 \leq y + (-x)/ + (-y)$
$(A4), (A15) \Longrightarrow 0 + (-y) \leq y + (-x) + (-y)$
$(A1), (A2), (A3) \Longrightarrow -y \leq -x$

(A17) *Arhimedova aksioma (ARH)*: $(\forall a, b > 0)(\exists n) : n \cdot a > b$
- može da se razume kao merenje
- neće biti dovoljno **N**, **Z** da izmerimo brojevnu pravu
- za svako a i svako b, postoji takvo n, tako da ćemo sa a pomnoženim n puta sigurno premašiti dužinu b.

Za strukturu koja zadovoljava aksiome A1 $-$ A17 kažemo da je *ARHIMEDOVSKO POLJE* (ovo važi i za **Q** i za **R**, tako da nije dovoljno samo ovo da bismo opisali **R**).

1.1 Supremum

Supremum je pojam vezan samo za relaciju.

Neka je data struktura $(A, \leq)$, gde je $\leq$ poredak, i neka važi $B \subseteq A$.
Definicija 1. Kažemo da je $a \in A$ *majoranta* skupa B, ako je $b \leq a, \forall b \in B$.

Primer 2: Koji elementi skupa $A = \mathbf{R}$ su majorante skupa $B = [0, 2]$? Majorante su elementi skupa $[2, +\infty)$.

Definicija 2. Kažemo da je $a \in A$ *minoranta* skupa B, ako je $a \leq b, \forall b \in B$.

U prethodnom primeru, minorante su svi brojevi iz skupa $(-\infty, 0]$.

Primer 3: Za $A = \mathbf{R}$, $B = [0, 2]$ majorante su $[2, +\infty)$, a minorante $(-\infty, 0]$.
Definicija 3. Majoranta koja pripada skupu A se zove najveći element ili *maksimum*.
Definicija 4. Minoranta koja pripada skupu A se zove najmanji element ili *minimum*.

DEFINICIJA 5. *Supremum* skupa B, u oznaci *supB* je najmanja majoranta.
DEFINICIJA 6. *Infimum* skupa B, u oznaci *infB* je najveća minoranta.

U prethodnim primerima supremum je 2, a infimum je 0.

ZADATAK 1: Naći $\sup A$ i $\inf A$:

i) A = (0, 1)

ii) A = [0, 1)

iii) A = [0, 1]

iv) A = $[0, \sqrt{2}] \cap \mathbf{Q}$

v) A = $\{ \frac{1}{m} | m \in \mathbf{N} \}$

U kojim slučajevima $\sup A$ *i* $\inf A$ *jesu elementi skupa A?*

i) $\sup A = 1 \notin A, infA = 0 \notin A$

ii) $supA = 1 \notin A, \inf A = 0 \in A$

iii) $\sup A = 1 \in A, \inf A = 0 \in A$

iv) $\sup A = \sqrt{2} \notin A, \inf A = 0 \in A$

v) $\sup A = 1 \in A, \inf A = 0 \notin A$

Ako je $\sup A$ element skupa A, on je tada maksimum.

Zašto je 0 *baš najveća minoranta u slučaju* v)*?*

$\varepsilon > 0$
$\exists n : \frac{1}{n} < \varepsilon \Longleftrightarrow \exists n : n \cdot \varepsilon > 1$ (ovo je baš ARH)

(A18) *Aksioma supremuma (SUP)*: Svaki neprazan, odozgo ograničen skup u $\mathbf{R}$ ima supremum.

Aksiome realnih brojeva su A1 $-$ A16 i (SUP).
Aksioma supremuma (SUP) ne važi u $\mathbf{Q}$:
$A = [0, \sqrt{2}] \cap \mathbf{Q} \subseteq \mathbf{Q}$, ali nema supremum u $\mathbf{Q}$ ($\sup A = \sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$).

ZADATAK 2: Dokazati da $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$.

Rešenje: Pretpostavimo suprotno, tj. da $\sqrt{2} \in \mathbf{Q}$. Onda važi:

$\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, m, n su uzajamno prosti brojevi

$\sqrt{2} = \frac{m}{n} /^2$

$2 = \frac{m^2}{n^2}$

$(*) m^2 = 2n^2 \Longrightarrow m^2$ je paran $\Longrightarrow m$ je paran
$m = 2k$, i ovo ubacujemo u (*)

$(2k)^2 = 2n^2$

$4k^2 = 2n^2$

$n^2 = 2k^2 \Longrightarrow n^2$ je paran $\Longrightarrow n$ je paran

Dobili smo da su brojevi m i n parni, a pretpostavili smo da su oni uzajamno prosti, dakle, dobili smo kontradikciju. To znači da je početna pretpostavka pogrešna, odn. važi da $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$.

$\square$.

Primer 4: *Broj e*

Neka je dat skup $A = \{(1 + \frac{1}{n})^n | n \in \mathbf{N}\}$.
Treba dokazati:
(1) A je ograničen odozgo.
(2) (SUP) $\Longrightarrow$ A ima *sup* i $e =_{def} \sup A$.

1^o Binomna formula:
$(a+b)^n =_{def} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots + \binom{n}{n} b^n$
$C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
$0! =_{def} 1$

2^o Suma konačnog geometrijskog niza:
$1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}, q \neq 1$

Dokazujemo binomnu formulu:

(1) BAZA INDUKCIJE:
$(a+b)^1 = a+b\surd$

(2) INDUKTIVNI KORAK:
Pretpostavimo da važi iskaz za n ($I(n)\surd$). Treba dokazati da važi $I(n+1)$:

$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n} b^n / \cdot (a+b)$

$(a+b)^{n+1} = \left[\binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n} b^n\right] \cdot$
$(a+b)$

Desna strana $= \left[\binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \ldots + \binom{n}{k} a^{n-k}b^k + \ldots + \binom{n}{n} b^n\right] \cdot$
$(a+b) =$
$\left[\binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \ldots + \binom{n}{k} a^{n-k}b^k + \ldots + \binom{n}{n} b^n\right] \cdot a + (-//-) \cdot b =$
$\left[a^{n+1} + \binom{n}{1} a^n b + \binom{n}{2} a^{n-1}b^2 \ldots + \binom{n}{k} a^{n+1-k}b^k + \ldots + ab^n\right] +$
$\left[\binom{n}{0} a^n b + \binom{n}{1} a^{n-1}b^2 + \ldots + \binom{n}{k-1} a^{n+1-k}b^k + \ldots + \binom{n}{n-1} ab^n + b^{n+1}\right] =$
$a^{n+1} + \left[\binom{n}{1} + \binom{n}{0}\right] a^n b + \left[\binom{n}{2} + \binom{n}{1}\right] a^{n-1}b^2 + \ldots + \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right] a^{n+1-k}b^k +$
$\ldots + b^{n+1}$

//Kako smo dobili $a^{n+1-k}b^k$ množenjem b?
$a^{n+1-k}b^{k-1} = a^{n-(k-1)}b^{k-1}$, a njegov koeficijent je $\binom{n}{k-1}$ .//

//Šta je $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$?
$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = n!\left(\frac{1}{k(k-1)!(n-k)!} + \frac{1}{(k-1)!(n-k+1)(n-k)!}\right) =$
$\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n+1-k}\right) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\frac{n+1-k+k}{k(n+1-k)} = \frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!} = \binom{n+1}{k}$//

Dokazali smo da je desna strana jednaka:
$a^{n+1} + \binom{n+1}{1} a^n b + \binom{n+1}{2} a^{n-1}b^2 + \ldots + \binom{n+1}{k} a^{n+1-k}b^k + \ldots +$
b^{n+1}, a to je i trebalo dokazati.

$\square$.

Dokazujemo sumu konačnog geometrijskog niza:

$S = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n / \cdot q, (q \neq 1)$
$S \cdot q = q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n+1}$
Oduzimanjem ove dve jednačine dobijamo:
$S - S \cdot q = 1 - q^{n+1}$

$S(1-q) = 1 - q^{n+1}$
$S = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$
$\square$.

Dokaz da je $A = \{(1+\frac{1}{n})^n | n \in \mathbf{N}\}$ ograničen odozgo:

$(1+\frac{1}{n})^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) \cdot \frac{1}{n^k}$

$\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) \cdot \frac{1}{n^k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{1}{n^k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \cdot (n-k)!}{k! \cdot (n-k)! \cdot n^k} = \frac{\overbrace{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}^{n-(n-k)\ =\ k\ mnozenika}}{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}.$
$\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{k!}$

Važi:
$k! \geq 2^{k-1}, \forall k \geq 2$
$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (k-1) \cdot k \geq 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2$
$\Longrightarrow \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$

$$(1+\frac{1}{n})^n \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \underbrace{\frac{1}{1}}_{k=0} + \underbrace{\frac{1}{1}}_{k=1} + \underbrace{\overbrace{\frac{1}{2!}}^{\leq \frac{1}{2}} + \overbrace{\frac{1}{3!}}^{\leq \frac{1}{2^2}} + \ldots + \overbrace{\frac{1}{n!}}^{\leq \frac{1}{2^{n-1}}}}_{\leq \frac{1}{2^{k-1}} svaki}$$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} = \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) - 1 =$

$$\frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}} - 1 = \frac{\overbrace{1 - \frac{1}{2^n}}^{\leq 1}}{\frac{1}{2}} - 1 \leq \frac{1}{\frac{1}{2}} - 1 \leq 2 - 1 = 1$$

Imamo:
$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq 1 + 1 + 1 = 3$
$e < 3 \Longrightarrow e = \sup A$

$\square$.

Teorema 1.1. $(SUP) \Longrightarrow (ARH)$

Dokaz: Znamo da svaki odozgo ograničen skup ima *sup*, a hoćemo da dobijemo: $a, b > 0, \exists n : n \cdot a > b$

Pretpostavimo suprotno: za neke $a, b > 0$ uvek je $n \cdot a \leq b$.
Neka je $A = \{n \cdot a | n \in \mathbf{N}\}$. A je ograničen odozgo $\Longrightarrow_{(SUP)} \exists \alpha : \alpha = \sup A$
Znamo:
$n \cdot a \leq \alpha$
$\underbrace{\alpha - a}_{} < \alpha$
nije majoranta A
$\Longrightarrow \exists a : \underbrace{n_0 \cdot a}_{\in A} > \alpha - a$
$\underbrace{(n_0 + 1) \cdot a}_{\in A} > \alpha$

$\Longrightarrow \alpha$ nije majoranta, što dovodi do kontradikcije $(\perp)$. Dakle, početna pretpostavka nije tačna, odnosno važi: $(SUP) \Longrightarrow (ARH)$.

$\square$.

Primer 5: Strogo zasnivanje n-tog korena realnog pozitivnog broja

$a > 0, a \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$ - fiksiran broj
$A = \{x \in \mathbf{R},\ x > 0 | x^n \leq a\}$
- skup A je ograničen odozgo
$a > 1$, onda $x \in A \Longrightarrow x \leq a$
$a \leq 1$, onda $x \in A \Longrightarrow x \leq 1$

$(SUP) \Longrightarrow \exists \alpha = \sup A$, $\sqrt[n]{a} =_{def} \alpha$
Treba da se proveri $\alpha^n = a$.
- Za svaki pozitivan broj postoji α, takav da $\alpha^n = a$.

1.2 Kantorova teorema

Definicija 1. Segment u $\mathbf{R}$ je zatvoren i ograničen interval $[a, b]$.
Definicija 2. Niz umetnutih segmenata su segmenti
$I_n = [a_n, b_n], n \in \mathbf{N}$, tako da važi:

$$\begin{matrix} a_{n+1} \geq a_n \\ b_{n+1} \leq b_n \end{matrix} \Longleftrightarrow I_{n+1} \subseteq I_n$$

Teorema 1.2. (KAN) Svaki niz umetnutih segmenata ima neprazan presek u $\mathbf{R}$. (Ako beskonačno mnogo smanjujemo interval, ne možemo doći do $\emptyset$).

Napomene:
1) (KAN) ne važi u $\mathbf{Q}$.
$I_n = [\sqrt{2} - \frac{1}{n}, \sqrt{2} + \frac{1}{n}] \cap \mathbf{Q}$ - presek unutrašnjih intervala je $\sqrt{2}$, koje nije u $\mathbf{Q}$.

2) Ne važi za $I_n = (a_n, b_n)$ i $I_{n+1} \subseteq I_n$, jer može da se dođe do $\emptyset$.
$I_n = (0, \frac{1}{n}) \Longrightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \emptyset$

Dokaz za KAN:

$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots \leq a_n \leq b_n \leq b_{n-1} \leq \ldots \leq b_1 \Longrightarrow A = \{a_n | n \in \mathbf{N}\}$
Jedna majoranta skupa A je b_1. Šta više, svaki od b_i je veći od svakog a_j;
$a = \sup A$
Tvrdimo da $a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \Longleftrightarrow a \in I_n, \forall n \Longleftrightarrow a_n \leq a \leq b_n, \forall n$.
$a_n \leq a$ važi zato što je a jedna majoranta
$a \leq b_n$ važi zato što je a najmanja majoranta

Ako bi važilo $a > b_n$ za neko n, dobili bismo kontradikciju jer je b_n takođe majoranta skupa A (pošto je za svako i b_i majoranta skupa A, ovo bi značilo da a nije najmanja majoranta, a to je kontradikcija jer je $a = \sup A$).

$\square$.

Tehnikalije:

$a = \sup A \Longleftrightarrow (1), (2)$
(1) $a \geq x, \forall x \in A \longrightarrow$ a je majoranta
(2) $\forall \varepsilon > 0, \exists x_o \in A$, tako da: $x_0 > a - \varepsilon \longrightarrow a - \varepsilon$ više nije majoranta

Domaći zadatak:
$A \subseteq \mathbf{R}$
$-A =_{def} \{-x | x \in A\}$
Dokazati da je $\sup(-A) = -\inf(A)$, $\inf(-A) = -\sup A$ i uveriti se (nacrtati) nad primerima sa časa.

DRUGA NEDELJA

2 Limes i neprekidnost funkcije

Osnovni pojmovi:

∘ funkcija $|x| = \begin{cases} x, x \geq 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$

$|x-y| = \begin{cases} x-y, \ x \geq y \\ y-x, \ x < y \end{cases}$

d − rastojanje od x do y; $d(x, y) = |x - y|$

(1) Rešiti jednačinu $|x - 1| = 2$

Rastojanje $d(x, 1) = 2$

```
---|---|---|---|---|---
  -1        1       3
```

(2) Rešiti nejednačinu $|x - 2| \leq 1$

Rastojanje $d(x, -2) = |x - 2| \leq 1$

```
---[---|---]---
  -3  -2  -1
```

$x \in [-3, -1]$

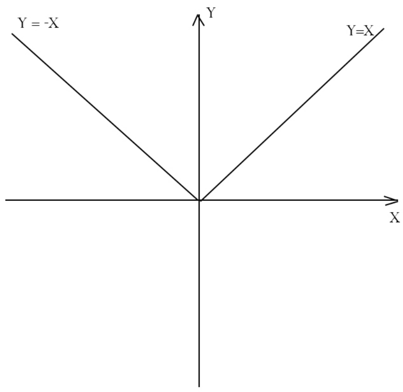
Nejednakost trougla

$|a + b| \leq |a| + |b|$ (Nejednačina 2.1.)

Dokaz: (razbijamo na slučajeve)

1) $a, b \geq 0 \Longrightarrow$ (2.1.) $a + b \leq a + b$
2) $a, b \leq 0 \Longrightarrow$ (2.1.) $-a - b \leq -a - b$
3) $a \geq 0, b \leq 0$ (ponovo razbijamo i primenjujemo 2.1.):
   i) $a + b \geq 0 \Longrightarrow a + b \leq a - b \Longleftrightarrow 2b \leq 0$
   ii) $a + b \leq 0 \Longrightarrow -a - b \leq a - b \Longleftrightarrow 2a \geq 0$
4) $a \leq 0, b \geq 0 \Longrightarrow$ slično kao 3)

□.



Slika 2.1. Grafik funkcije $y = |x|$

Definicija 1. Ako je $x \in \mathbf{R}$, okolina tačke x je interval $(x - \delta, x + \delta)$ za neko $\delta > 0$.

Definicija 2. Šuplja okolina tačke x je $(x - \delta, x + \delta) \backslash \{x\}$

Oznake: u_x je okolina x; $\dot{u}_x$ je šuplja okolina x

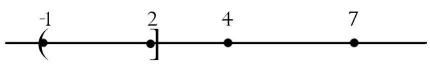
Definicija 3. Okolina tačke $+\infty$ je $(M, +\infty)$. Šuplja okolina tačke tačke $+\infty$ je takođe $(M, +\infty)$. Okolina tačke $-\infty$ je $(-\infty, -M)$. Šuplja okolina

tačke $-\infty$ je takođe $(-\infty, -M)$.

Definicija 4. Neka je $A \subset \mathbf{R}$. a je tačka nagomilavanja (t.n.) skupa A ako za svaku šuplju okolinu $\dot{u}_a$ važi:

$\dot{u}_a \cap A \neq \emptyset$. Definicija važi za $a \in \bar{\mathbf{R}}$, gde je $\bar{\mathbf{R}} =_{def} \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Primer 1: Šta su tačke nagomilavanja skupa $A = (-1, 2] \cup \{4, 7\}$?



Tačke 4 i 7 su izolovane tačke i, pošto one ne pripadaju svojim šupljim okolinama, ne mogu da budu tačke nagomilavanja skupa A.
Rešenje: Tačke nagomilavanja su $[-1, 2]$.

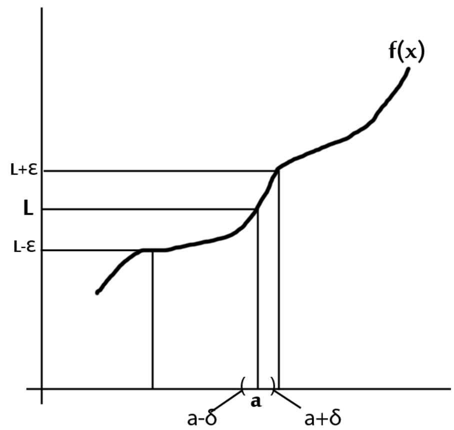
2.1 Limes funkcije

Definicija 5. Neka je $f : D_f \longrightarrow \mathbf{R}$ i neka je a tačka nagomilavanja skupa D_f (domen funkcije f). Kažemo da je L ($L \in \mathbf{R}$) granična vrednost ili limes funkcije f u tački a ako važi:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 :\ \forall x \in D_f\ 0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Graničnu vrednost L označavamo:

$$L = \lim_{x \to a} f(x)$$



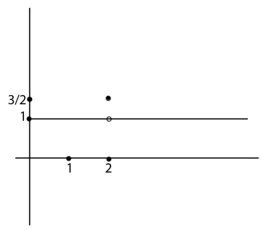
Slika 2.2. Grafički prikaz definicije limesa

∘ a može da bude u D_f, ali ,,uglavnom najinteresantniji" slučaj jeste kad $a \notin D_f$
∘ Ova definicija govori da kad se približava x-om tački a, funkcija $f(x)$ približava se L
∘ Pišemo $0 < |x - a|$, odnosno $<$ umesto $\leq$ jer:
(1) $|x - a| = 0 \Longrightarrow x = a$, dok a možda nije u D_f, pa ne možemo pisati $f(a)$
(2) limes zaključujemo prema ponašanju funkcije u okolini tačke, a ne prema samoj tački

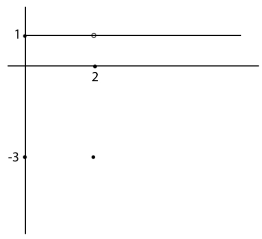
Definicija 6. Neka je $a \in D_f$. Kažemo da je funkcija f neprekidna u a, ako je $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

(Ili: $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 :\ \forall x \in D_f\ |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$)

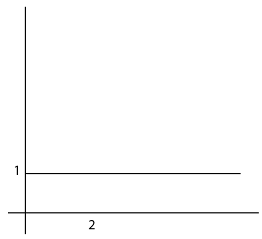
Primer 2: Šta je $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ na slikama 2.3, 2.4. i 2.5. i koje od ove tri funkcije su neprekidne?



Slika 2.3.



Slika 2.4.



Slika 2.5.

Rešenje: $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 1$ u svim slučajevima, ali je $f(x)$ neprekidna samo u slučaju (2.5.).

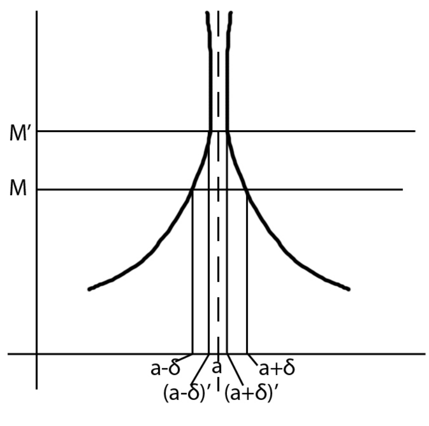
Formalno izračunavanje (iz definicije) za slučaj 2.3:
$\forall \varepsilon\ \exists \delta :\ 0 < |x-2| < \delta \Longrightarrow \underbrace{|f(x)-1|}_{0\ za\ x\neq 2} < \varepsilon$ (Nejednačina 2.2.)
ako za ε uzmemo, npr: $\delta = \frac{1}{2}$ i važi (2.2.)

Napomena:
• Limes je ono što očekujemo kako bi se funkcija ponašala kada bi bila neprekidna u a.

Definicija 7. Neka je a t.n. domena D_f. Tada:

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \ \ ako\ \ \forall M,\ \exists \delta > 0 :\ 0 < |x-a| < \delta\ (x \in D_f) \Longrightarrow f(x) > M$$

$\Longleftrightarrow$ „Za svako M, nađemo malo δ, tako da $f(x)$ premašuje M"



Slika 2.6. Grafički prikaz definicije limesa

Slično se definiše limes u slučaju $-\infty$:

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty \ \ ako\ \ \forall M,\ \exists \delta > 0 :\ 0 < |x-a| < \delta\ (x \in D_f) \Longrightarrow f(x) < -M$$

2.2 Univerzalna definicija

$\lim\limits_{x \to a} = L$ na jeziku okolina je:

$$\forall u_L,\ \exists \dot{u}_a :\ x \in \dot{u}_a \cap D_f \Longrightarrow f(x) \in u_L$$

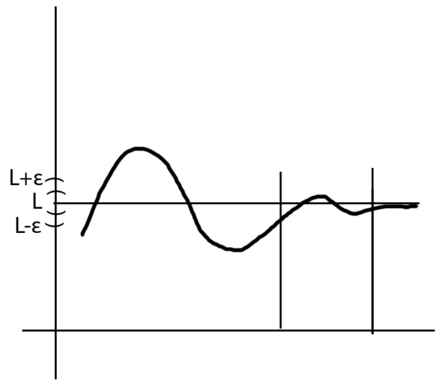
(1) Za konačno a i L, ova definicija izgleda upravo ovako

(2) Za $L = +\infty$

$$u_L = (M, +\infty),\ x \in \dot{u}_a \Longleftrightarrow 0 < |x - a| < \delta, \qquad f(x) \in u_L \Longleftrightarrow$$
$$f(x) \in (M, +\infty) \Longleftrightarrow$$
$$f(x) > M$$

(3) Za $a = +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \Longleftrightarrow_{def} \forall \varepsilon,\ \exists M :\ x > M \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$



Slika 2.7.

Slično ide za $L = -\infty$, odnosno, $a = -\infty$

(4) Za $a = +\infty$ i $L = +\infty$

$$\forall M,\ \exists N :\ x > N \Longrightarrow f(x) > M$$

(5) Za $a = -\infty$ i $L = -\infty$

$$\forall M,\ \exists N :\ x < -N \Longrightarrow f(x) < -M$$

(6) Za $a = +\infty$ i $L = -\infty$

$$\forall M,\ \exists N :\ x > N \Longrightarrow f(x) < -M$$

(7) Za $a = -\infty$ i $L = +\infty$

$$\forall M,\ \exists N :\ x < -N \Longrightarrow f(x) > M$$

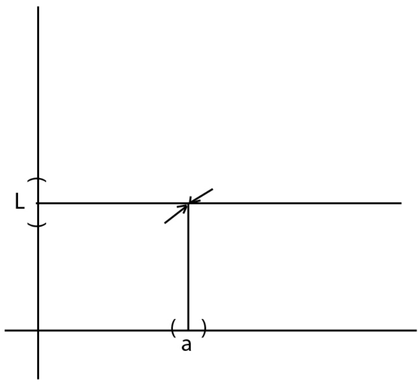
2.3 Stavovi limesa

STAV 1: Neka je $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$, $(a \in \bar{\mathbf{R}},\ L \in \mathbf{R})$. Tada važi:
$\exists \dot{u}_a$, t.d. $f(x)$ je ograničena na $\dot{u}_a$

Funkcija f je **ograničena odozgo** / **odozdo** na skupu A ako $\exists M$, t.d. $f(x) \leq M,\ \forall x \in A$ / $f(x) \geq M,\ \forall x \in A$.

Funkcija f je **ograničena** ako je istovremeno ograničena odozgo i odozdo.

Dokaz:



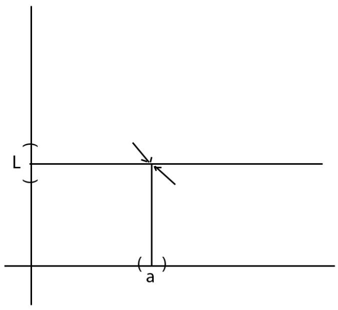
Slika 2.8.

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists \dot{u}_a :\ x \in \dot{u}_a \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$
$$|f(x) - L| < \varepsilon \Longleftrightarrow \underbrace{L - \varepsilon}_{donje\ ogranicenje} < f(x) < \underbrace{L + \varepsilon}_{gornje\ ogranicenje}$$

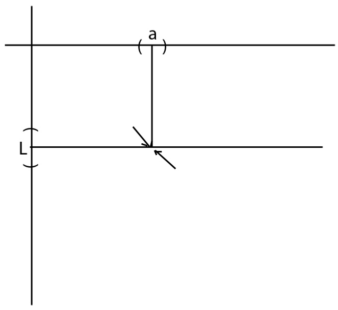
$\square$.

STAV 2: Neka je $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$, $(L \in \mathbf{R},\ \mathrm{L} \neq 0)$. Tada važi:
$\exists \dot{u}_a$, t.d. $\operatorname{sgn} f(x) = \operatorname{sgn} L,\ \forall x \in \dot{u}_a$

Štaviše: ako je $\begin{array}{l} L > 0 :\ \exists \dot{u}_a,\ t.d.\ f(x) > \frac{L}{2},\ \forall x \in \dot{u}_a\ (slika\ 2.9.) \\ L < 0 :\ \exists \dot{u}_a,\ t.d.\ f(x) < \frac{L}{2},\ \forall x \in \dot{u}_a\ (slika\ 2.10.) \end{array}$



Slika 2.8.



Slika 2.9.

Dokaz (za $L > 0$):

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = L \Longleftrightarrow_{def} \forall \varepsilon > 0,\ \exists \dot{u}_a \Longrightarrow f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$
Neka je $\varepsilon = \frac{L}{2}:\ \exists \dot{u}_a \Longrightarrow \underbrace{L - \frac{L}{2} < f(x)}_{\frac{L}{2} < f(x)} < L + \frac{L}{2}$.

$\square$.

<u>STAV 3</u>: Neka je $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L_1$ i $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L_2$, $(L_1,\ L_2 \in \mathbf{R})$. Tada važi:
(1) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x) = L_1 + L_2$
(2) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x) = L_1 \cdot L_2$
(3) Ako je $L_2 \neq 0 \Longrightarrow^{S2} g(x) \neq 0,\ x \in \dot{u}_a$
$\Longrightarrow$ ima smisla napisati $\frac{f(x)}{g(x)}$
$\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$
(4) $f(x) \leq g(x),\ x \in \dot{u}_a \Longrightarrow L_1 < L_2$

Dokaz:

(1) Hoćemo da dobijemo: $|f(x)+g(x)-(L_1+L_2)| < \varepsilon,\ x \in \dot{u}_a$
$|f(x)+g(x)-(L_1+L_2)| = |(f(x)-L_1)+(g(x)-L_2)| \leq |f(x)-L_1| + |g(x)-L_2|$ (*na osnovu N 2.1.*)
$\exists \dot{u}_a, x \in \dot{u}_a:\ |f(x)-L_1| < \frac{\varepsilon}{2}$
$\exists \dot{v}_a, x \in \dot{v}_a:\ |g(x)-L_2| < \frac{\varepsilon}{2}$
$\dot{u}_a \cap \dot{v}_a = \dot{z}_a$
$$x \in \dot{z}_a \Longrightarrow \begin{array}{l} |f(x)-L_1| < \frac{\varepsilon}{2} \\ |g(x)-L_2| < \frac{\varepsilon}{2} \end{array} \Longrightarrow |f(x)-L_1| + |g(x)-L_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\square$.

(2) $|f(x)g(x)-L_1L_2| = |f(x)g(x)-L_1g(x)+L_1g(x)-L_1L_2| \overbrace{\leq}^{N\ 2.1.} |f(x)g(x)-L_1g(x)| + |L_1g(x)-L_1L_2| = \underbrace{|g(x)|\cdot|f(x)-L_1|}_{\substack{\leq |f(x)-L_1|\cdot M \\ STAV1\ (jer\ je\ g(x)\ ogr.)}} + \underbrace{|g(x)-L_2|}_{\leq \frac{\varepsilon}{2\cdot|L_1|}} \cdot |L_1|$
$\leq M\cdot|f(x)-L_1| + |L_1|\cdot|g(x)-L_2|$
$\circ$ Neka je $\frac{\varepsilon}{2\cdot|L_1|}$ novo ε $(\hat{\varepsilon})$ za koje biramo $\dot{u}_a$, t.d. $x \in \dot{u}_a \Longrightarrow |g(x)-L_2| < \frac{\hat{\varepsilon}}{2}$
$\circ$ Isto je i za levi sabirak, pa je zbir $< \frac{\hat{\varepsilon}}{2} + \frac{\hat{\varepsilon}}{2} = \hat{\varepsilon}$

$\square$.

(3) Dovoljno je da dokažemo da važi:
$L_2 \neq 0 \Longrightarrow \lim\limits_{x\to a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{L_2}$ (Implikacija 2.3.)

zato što važi: $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot \frac{1}{g(x)} =^{S2} lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} \frac{1}{g(x)} \overbrace{=}^{I\ 2.3.} lim_{x\to a} f(x) \cdot \frac{1}{lim_{x\to a} g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$

Dokaz za [I 2.3.]:

$\lim\limits_{x\to a} g(x) = L_2 \Longrightarrow \lim\limits_{x\to a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{L_2}$

Treba da pokažemo: $\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{L-2}\right| = \left|\frac{L_2 - g(x)}{g(x)\cdot L_2}\right| = \frac{\overbrace{|g(x) - L_2|}^{znamo\ da\ je\ malo}}{g(x)\cdot L_2}$

Prema (S2), $L_2 \neq 0,\ \exists \dot{u}_a:\ |g(x)| \geq \frac{|L_2|}{2}$, tj. $\frac{1}{|g(x)|} \leq \frac{2}{|L_2|}$

$\frac{g(x)-L_2}{|g(x)|\cdot|L_2|} \leq \frac{|g(x)-L_2|\cdot 2}{|L_2|^2} = M \cdot |g(x) - L_2|$, gde je M neki konkretan broj.

$\square$.

(4) Pretpostavimo suprotno. tj. da $L_1 > L_2$, tj. $L_1 - L_2 > 0$, tj:
$\lim\limits_{a\to a}(f(x) - g(x)) > 0 \Longrightarrow \exists \dot{u}_a$ na kojoj je funkcija strogo pozitivna (S2):
$f(x) - g(x) > 0,\ \forall x \in \dot{u}_a$
$f(x) > g(x)\ \perp$

$\square$.

2.3.1 Stav o neprekidnosti funkcije

STAV 4:
(1) f je neprekidna u $a \Longrightarrow$ f je ograničena na u_a za neko u_a

(2) $\left.\begin{array}{c} f\ je\ neprekidna\ u\ a \\ f(a) \neq 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} \exists u_a,\ t.d.\ f(x) \neq 0\ na\ u_a \\ tj.\ \operatorname{sgn} f(x) = \operatorname{sgn} f(a)\ na\ u_a \end{array}\right.$

(3) $f,\ g$ su neprekidne u $a \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} f+g,\ f\cdot g\ su\ neprekidne\ u\ a \\ (g(a)\neq 0)\ \frac{f}{g}\ je\ neprekidna\ u\ a \end{array}\right.$

Dokaz:
(1) sledi iz (S1) za $L = f(a)$
(2) sledi iz (S2) za $L = f(a)$
(3) sledi iz (S3) za $L_1 = f(a),\ L_2 = g(a)$

$\square$.

Važni primeri

(1) $f(x) = c$, gde je c neka konstanta, neprekidna je na $\mathbf{R}$

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} c = c = f(a)$$

(2) $f(x) = x$ neprekidna je na $\mathbf{R}$
$|f(x) - f(a)|$ treba da bude $< \varepsilon$ ako je $|x - a| < \delta$ (po definiciji)
$|x - a| < \varepsilon$

(3) Svaki polinom $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ neprekidan je jer je:
$\forall k : x^k neprekidno$

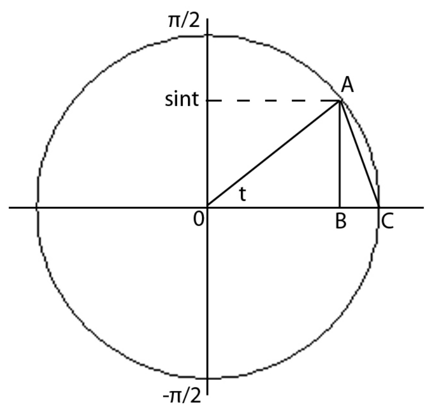
Dokaz:
x je neprekidno $\Longrightarrow x^2(x\cdot x)$ je neprekidno $\Longrightarrow \ldots \Longrightarrow x^k$ je neprekidno i još
$a_k - const$ je neprekidno
$\Longrightarrow a_kx^k$ je neprekidno
$\Longrightarrow \sum\limits_{k=0}^{n} a_kx^k$ je neprekidno

$\square$.

(4) Svaka racionalna funkcija $R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n}{b_0+b_1x+\ldots+b_mx^m}$, gde su $P_n(x),\ Q_m(x)$ polinomi, neprekidna je
R je neprekidna na svom domenu: $D_R = \{Q_m \neq 0\}$
Tamo gde nije definisana, tu ni ne govorimo o neprekidnosti.

(5) Funkcije $\sin x, \cos x$ su neprekidne na $\mathbf{R}$

Dokaz za $f(x) = \sin x$:
Prvo treba dokazati lemu: $|\sin t| \leq |t|$ (Lema 2.4.)
Dokaz:



Slika 2.11.

$P_{\Delta OAC} \leq P_{\triangleleft OAC}$, gde je $P_{\triangleleft OAC}$ kružni isečak

(1) $P_{\triangleleft,\alpha} = \frac{\alpha}{2}$ (α je u rad) $\Longrightarrow P_{\triangleleft,t} = \frac{t}{2}$
$P_{\Delta OAC} = \frac{|OC|\cdot h}{2} = \frac{1\cdot \sin t}{2} = \frac{\sin t}{2}$
$\Downarrow$
$\frac{\sin t}{2} \leq \frac{t}{2}$
$\frac{\sin t}{t} \leq 1,\ t \in [0, \frac{\pi}{2}]$
(2) $\left|\frac{\sin t}{t}\right| = \left|\frac{\sin(-t)}{-t}\right| \leq 1,\ -t \in [0, \frac{\pi}{2}]$
$\Longrightarrow |\sin t| \leq |t|$

$\square$.

Zašto je $\sin x$ neprekidna funkcija?

$$|f(x)-f(a)| = |\sin x - \sin a| = |2\cdot \sin\frac{x-a}{2}\cdot \cos\frac{x+a}{2}| = 2\cdot \underbrace{\left|\sin\frac{x-a}{2}\right|}_{2.4.} \cdot \underbrace{\left|\cos\frac{x+a}{2}\right|}_{\leq 1} \leq$$

$2\cdot |\frac{x-a}{2}| \cdot 1 \leq |x-a|$

$\square$.

Slično se dokazuje za $\cos x$, primenom $\cos x - \cos a = -2\cdot \sin\frac{x-a}{2}\cdot \sin\frac{x+a}{2}$

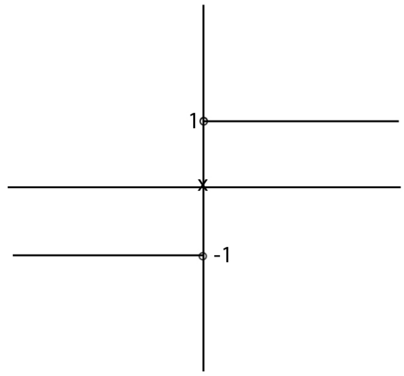
2.4 Jednostrani limesi

Definicija 8. $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L \;/\; \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L$, $(a \in \mathbf{R})$
$L \in \mathbf{R}$: $\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0:\ 0 < |x-a| < \delta,\ x > a \;/\; x < a \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$
ili
$L \in \mathbf{R}$: $\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0:\ 0 < x-a < \delta,\ /\ 0 < a-x < \delta \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

Očigledno važi:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \Longleftrightarrow \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L \\ \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L \end{array}$$

Primer 1: $f(x) = \operatorname{sgn} x$



Slika 2.12. Grafik funkcije $f(x) = \operatorname{sgn} x$

i) $\lim\limits_{x\to 0^+} \operatorname{sgn} x = 1$

ii) $\lim\limits_{x\to 0^-} \operatorname{sgn} x = -1$

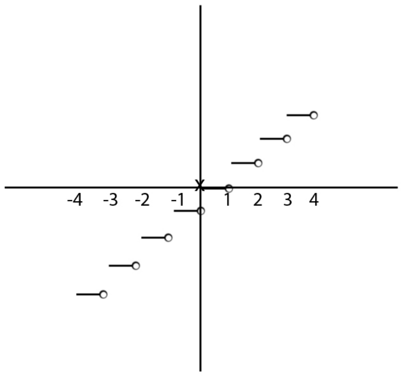
iii) Da li je f neprekidna u 0? Ne, jer da bi bila, mora da postoji $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sgn} x$ i da bude jednaka vrednosti funkcije.

Primer 2: $f(x) = [x]$

$[x] = m \in \mathbf{Z}$, ako je $m \le x < m+1$

Pitanja: Šta je $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$?
Šta je $\lim\limits_{x\to n^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to n^-} f(x)$, $n \in \mathbf{Z}$?
U kojim tačkama je ova funkcija neprekidna, a u kojima nije?

Rešenje:

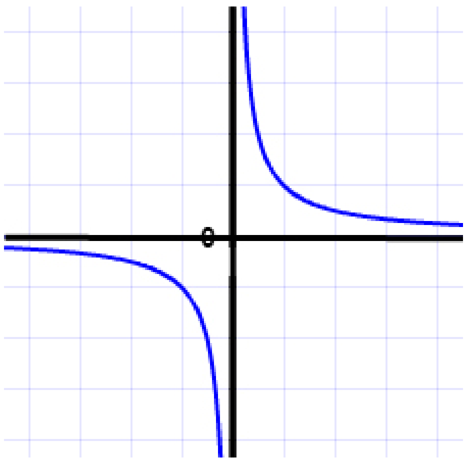


Slika 2.13. Grafik funkcije $f(x) = [x]$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = -1$
$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = -2$, $\lim\limits_{x\to n^+} f(x) = n$, $\lim\limits_{x\to n^-} f(x) = n - 1$
Funkcija nije neprekidna u celim brojevima.
Definicija 9. $\lim\limits_{x\to a^+ \ / \ a^-} f(x) = +\infty \ / \ -\infty$
$\forall M > 0, \exists \delta > 0 : \ 0 < x - a < \delta \ / \ 0 < a - x < \delta \ (za \ a^-) \Longrightarrow f(x) > M$

Primer 3: Šta je $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x}$? Šta je $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x}$?

Rešenje:



Slika 2.14. Grafik funkcije $f(x) = \frac{1}{x}$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

TREĆA NEDELJA

<u>STAV 5</u>: Za $x_0 \in \bar{\mathbf{R}}$, $L \in \mathbf{R}$

$$(1)\quad \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty \\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = L \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to x_0} (f(x)+g(x)) = \pm\infty$$

$$(2)\quad \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty \\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = L \in \mathbf{R}\setminus\{0\} \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to x_0} (f(x)\cdot g(x)) = (\operatorname{sgn}(L))\infty$$

$$(3)\quad \lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty \Longrightarrow \lim_{x\to x_0} \tfrac{1}{f(x)} = 0$$

$$(4)\quad \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0 \\ |g(x)| \le M,\ \forall x \in \dot{u}_{x_0} \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to x_0} (f(x)\cdot g(x)) = 0$$

Domaći zadatak: Dokazati prethodna tvrđenja

Pišemo:

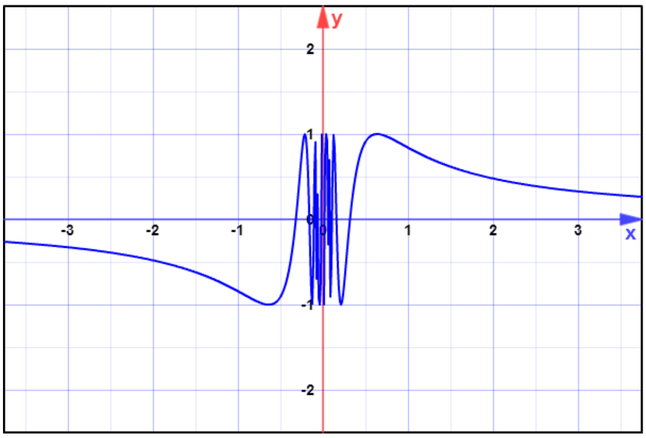
(1) $\infty + L = \infty$
(2) $\infty \cdot L = \infty,\ L \neq 0$
(3) $\frac{1}{\infty} = 0$

Primer 1: (1) Šta je $\lim\limits_{x\to 0} x \cdot sin\frac{1}{x}$? (2) Šta je $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x}$?

Rešenje:
(1) Znamo da $x \to 0$ kada $\lim\limits_{x\to 0} x.\ sin\frac{1}{x}$ nije definisan u 0, pa je na osnovu (S4) i $|sin\frac{1}{x}| \le 1,\ \lim\limits_{x\to 0} x \cdot sin\frac{1}{x} = 0$

Zašto $\sin\frac{1}{x}$ nema limes u 0?

Posmatrajmo grafik funkcije $sin\frac{1}{x}$:



Slika 2.15. Grafik funkcije $f(x) = \sin\frac{1}{x}$

Kada bi postojao limes, mogli bismo da posmatramo interval $(-\delta, \delta)\setminus\{0\}$. Ovde postoje tačke $x = \frac{1}{2n\pi}$, za dovoljno veliko n. Za njih važi:

$\sin\frac{1}{x} = \sin\frac{1}{\frac{1}{2n\pi}} = \sin(2n\pi) = 0$
Neka je sada $x = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$. Važi da je:
$\sin\frac{1}{x} = \sin(2n\pi + \frac{\pi}{2}) = \sin(2n\pi) + \sin\frac{\pi}{2} = \sin\frac{\pi}{2} = 1$. Limes onda nije ni 0, ni 1, a zapravo nije ništa iz intervala $[-1, 1]$.

$$(2)\quad \left.\begin{array}{l} f(x) = \frac{\sin x}{x} = \sin x \cdot \frac{1}{x} \\ \sin x \text{ je ograničena kada } x \to 0 \\ \frac{1}{x} \to 0 \text{ kada } x \to 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$$

Napomena:
Ne postoji $\lim\limits_{x\to\infty} \sin x$, odnosno, ne gomila se oko nijedne tačke, slično kao i kod $sin\frac{1}{x}$.

2.5 Neodređeni oblici

(1) $\infty - \infty$, (2) $\frac{\infty}{\infty}$, (3) $\frac{0}{0}$, (4) $0 \cdot \infty$, (5) 1^∞, (6) 0^0, (7) ∞^0

Primer 2:

(1) $f(x) = x,\ g(x) = x + 1$
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - g(x)) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x - x - 1) = -1$

Domaći zadatak: U (2), (3), (4), (5), (6), (7) navesti primere funkcija tako da se dobije:
a) konačan limes
b) beskonačan limes

Šta je $f(x)^{g(x)}$?
Koristimo činjenicu da je $A^B = e^{ln(A^B)} = e^{B \cdot lnA}$
$\Longrightarrow f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \cdot lnf(x)}$ (Jednačina 2.5.)

Ovo ćemo koristiti da pokažemo da su 1^∞ i 0^0 neodređeni oblici:
Neka je $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 1$, a $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} e^{g(x)\cdot lnf(x)} = e^{\infty \cdot 0}$, a oblik $\infty \cdot 0$ je neodređen, pa je i 1^∞ neodređen.
Neka je $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$, a $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} e^{g(x)\cdot lnf(x)} = e^{0\cdot(-\infty)}$, a oblik $0 \cdot (-\infty)$ je neodređen, pa je i 0^0 neodređen.

Primer 3: Ako je $P_n(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$, $\lim\limits_{x\to+\infty} P_n(x) = \pm\infty$ ($\pm$ jer zavisi od $\operatorname{sgn}(a_n)$).
Ovo važi jer ako zapišemo polinom $P_n(x)$ drugačije: $P_n(x) = x^n \cdot \Big(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_0}{x_n}\Big)$,

svaki od razlomaka teži 0 kada $x \to +\infty$, odnosno, $\lim\limits_{x\to x_0} P_n(x) = +\infty \cdot a_n = (\operatorname{sgn}(a_n))\infty$

Primer 4: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{a_n x^n+\ldots+a_1x+a_0}{b_m x_m+\ldots+b_1x+b_0} = \begin{cases} \pm\infty, & n > m \\ 0, & n < m \\ \frac{a_n}{b_n}, & n = m \end{cases}$

<u>$n > m$</u>:
$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{1}{\frac{Q_m}{P_n}} = \frac{1}{0} = \infty$

<u>$n < m$</u>:
$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\frac{P_n(x)}{x^n}}{\frac{Q_n(x)}{x^n}} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{a_n+\frac{a_{n-1}}{x}+\ldots+\frac{a_0}{x^n}}{b_m x^{m-n}+b_{m-1}x^{m-n-1}+\ldots+\frac{b_0}{x^n}} = \frac{a_n}{\infty} = 0$

<u>$m = n$</u>:
$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\frac{P_n(x)}{x^n}}{\frac{Q_n(x)}{x^n}} \lim\limits_{x\to x_0} \frac{a_n+\frac{a_{n-1}}{x}+\ldots+\frac{a_1}{x^{n-1}}+\frac{a_0}{x^n}}{b_n+\frac{b_{n-1}}{x}+\ldots+\frac{b_1}{x^{n-1}}+\frac{b_0}{x^n}} = \frac{a_n}{b_n}$

Primer 5: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^6+2x+1}{-7x^6+4x^2+10} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^6\cdot\left(3+\frac{2}{x^5}+\frac{1}{x^6}\right)}{x^6\cdot\left(-7+\frac{4}{x^4}+\frac{10}{x^6}\right)} = -\frac{3}{7}$

Primer 6: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^2+2x-13^{\backslash:x^2}}{\sqrt[3]{x^6+x^2}-\sqrt{x}+x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{3+\frac{2}{x}-\frac{13}{x^2}}{\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^4}}-x^{-\frac{3}{2}}+\frac{1}{x}} = \frac{3}{1} = 3$

Primer 7: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^7-3x^2+2\sqrt[3]{x}^{\backslash:\sqrt[3]{x}}}{2x^6+4x^5-3\sqrt[3]{x}} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^{\frac{20}{3}}-3x^{\frac{5}{3}}+2}{2x^{\frac{17}{3}}+4x^{\frac{14}{3}}-3} = -\frac{2}{3}$

$0 < a < 1 \Longrightarrow a^\alpha < a^\beta,\ \alpha > \beta$

Napomena:
Ukoliko imamo količnik polinoma oblika $ax^{\alpha_1}+bx^{\alpha_2}+\ldots (\alpha_1 > \alpha_2 > \ldots)$, onda:
ako $x \to \infty$, gledamo (i delimo) najveći stepen uz x,
ako $x \to 0$, gledamo (i delimo) najmanji stepen uz x.

Napomena:
U Primeru 6 uradili smo: $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[3]{1+\frac{1}{x^4}} = \sqrt[3]{\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x^4})} = \sqrt[3]{\lim\limits_{x\to\infty} 1 + \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^4}} = \sqrt[3]{1} = 1$ (akcenat je na prvoj jednakosti)
Ovo možemo da uradimo za sve funkcije koje su neprekidne i to nam obezbeđuje sledeća teorema:

Teorema 2.1. Neka je $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ i funkcija φ je neprekidna u tački L. Onda je:

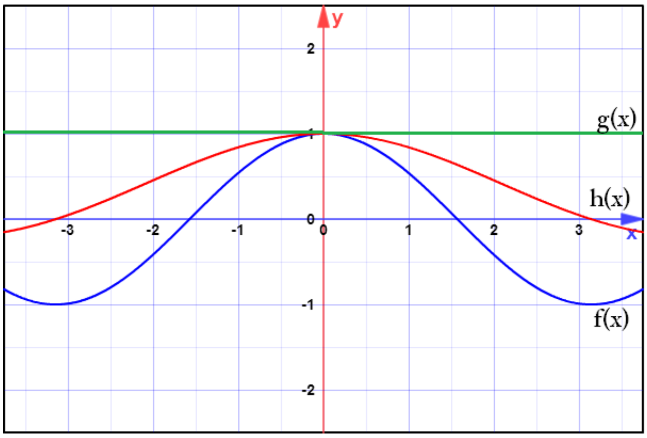
$$\lim_{x\to x_0} \varphi(f(x)) = \varphi(\lim_{x\to x_0} f(x))$$

Rečima: „Neprekidna funkcija i Limes komutiraju."

Dokazali smo da su polimoni, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, racionalne funkcije neprekidne na svom domenu, kao i sve njihove kompozicije, zbirovi, razlike, proizvodi i kolicnici neprekidni.
Dokazaćemo da su e^x, a^x, $\ln x$, $\log_a x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$, x^α $(\alpha \in \mathbf{R})$ i sve njihove kompozicije, zbirovi, razlike, proizvodi i količnici neprekidni, kao i sve njihove inverzne funkcije.

Sve prethodno navedene funkcije nazivaju se *ELEMENTARNE FUNKCIJE*.

TEOREMA 2.2. Teorema o tri limesa („Teorema o dva policajca", „Teorema o sendviču"):
Ako je $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = L$, $(x_0,\ L \in \mathbf{R})$ i ako je $f(x) \le h(x) \le g(x)$, $\forall x \in \dot{u}_{x_0}$, onda postoji $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = L$. Važi i za jednostrane limese.



Slika 2.16. Primer funkcija za koje važi Teorema 2.2. $(x_0 = 0,\ L = 1)$

Dokaz:
Neka je L konačno i x_0 konačno. Pošto je $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$, neka je zadato $\varepsilon > 0$. Sledi: $\exists\delta_1$ t.d. $x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1) \setminus \{x_0\}$ $(\Longleftrightarrow 0 < |x - x_0| < \delta_1)$. Tada je $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$ $(\Longleftrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$. Isto važi i za $g(x)$, s time da δ_2 može biti različito od δ_1, odnosno: $\exists\delta_2$ t.d. $x_0 - \delta_2 < x < x_0 + \delta_2,\ x \ne x_0$ $(\Longleftrightarrow 0 < |x - x_0| < \delta_2)$. Tada sledi: $L - \varepsilon < g(x) < L + \varepsilon$
Uzmimo da je δ manji od δ_1 i δ_2. Onda važi:
$L - \varepsilon < \begin{matrix} f(x) \\ g(x) \end{matrix} < L + \varepsilon$, a znamo da je $f(x) \le h(x) \le g(x)$, pa sledi:

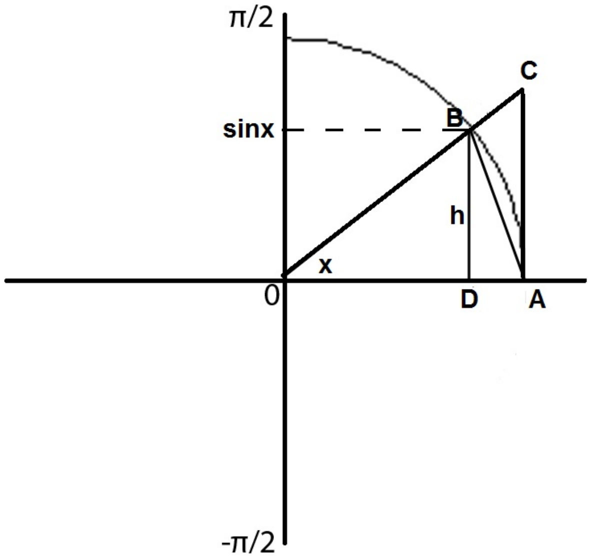
$$\begin{gathered} L - \varepsilon < f(x) \le h(x) \le g(x) < L + \varepsilon \\ \Downarrow \\ L - \varepsilon < h(x) < L + \varepsilon \\ \Updownarrow \\ h(x) \to L \text{ kada } x \to x_0 \end{gathered}$$

$\square$.

2.6 Osnovni limesi (i njihove posledice)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

Dokaz:



Slika 2.17.

Za $x \in (0, \frac{\pi}{2})$:
$P_{\triangle OAB} = \frac{|OA|\cdot h}{2} = \frac{1\cdot \sin x}{2} = \frac{\sin x}{2}$
$P_{\triangleleft OAB} = \frac{x}{2}\cdot |OA|^2 = \frac{x}{2}$ (x je u rad)
$\frac{|AC|}{|OA|} = \frac{|BD|}{|OD|} \iff |AC| = \frac{|BD|}{|OD|} = \frac{\sin x}{\cos x}$
$P_{\triangle OAC} = \frac{|OA|\cdot|AC|}{2} = \frac{|AC|}{2} = \frac{\sin x}{2\cdot \cos x}$
$P_{\triangle OAB} \leq P_{\triangleleft OAB} \leq P_{\triangle OAC}$
$\frac{\sin x}{2} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{\sin x}{2\cdot \cos x}$
$\sin x \leq x \leq \frac{\sin x}{\cos x}$
$(\frac{\sin x}{x} \leq 1 \quad i \quad \frac{\sin x}{x} \geq \cos x)$
$\Downarrow$
$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$
važi za $x \in (0, \frac{\pi}{2})$

Ako je $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$, možemo da uzmemo $t = -x$, $t \in (0, \frac{\pi}{2})$
Znamo za t da važi:
$\cos t \leq \frac{\sin t}{t} \leq 1$
$\cos(-x) \leq \frac{\sin(-x)}{-x} \leq 1$

$\cos x \le \frac{\sin x}{x} \le 1$

(Teorema 2.2.) $\Longrightarrow \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\square$.

Posledica 2.3:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = 1 - 2\sin^2 \frac{x}{2}$

$\lim\limits_{x\to x_0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1-1+2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = 2\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{4\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{2}{4}\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 =$

$\left|\begin{array}{c} smena:\ t = \frac{x}{2} \\ x\to 0 \Longleftrightarrow t\to 0 \end{array}\right| = \frac{1}{2}\lim\limits_{t\to 0}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e,\ e =_{def} sup\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \mid n\in N\right\}$$

Posledica 2.4:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \left|\begin{array}{c} smena:\ t = -x \\ x\to -\infty \Longleftrightarrow t\to +\infty \end{array}\right| = \lim\limits_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{-t} = \lim\limits_{t\to+\infty}\left(\frac{t-1}{t}\right)^{-t} =$

$\lim\limits_{t\to+\infty}\left(\frac{t}{t-1}\right)^t = \lim\limits_{t\to+\infty}\left(\frac{t-1+1}{t-1}\right)^t = \lim\limits_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1+1} = \lim\limits_{t\to+\infty} \underbrace{\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1}}_{\substack{smena:\ y=t-1 \\ t\to+\infty \Longleftrightarrow y\to+\infty}} \cdot$

$\underbrace{\left(1+\frac{1}{t-1}\right)}_{\to 1} = \lim\limits_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y \cdot \lim\limits_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right) = e\cdot 1 = e$

Posledica 2.5:

$$\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = e$$

Dobijamo iz Posledice 2.4. smenom $x = \frac{1}{t}$

Posledica 2.6:

$$\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t} = 1$$

$\ln(\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}) = \ln e = 1$

$\Updownarrow$

$\lim\limits_{t\to 0}(\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}) = \lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t} = 1$

Posledica 2.7:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

$\lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=\left|\begin{array}{c} smena:\ x=\ln(1+t) \\ t\to 0 \Longleftrightarrow x\to 0\end{array}\right|=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{e^x-1}=1$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{e^x-1}}=\frac{1}{1}=1$

Posledica 2.8:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$$

$a^x=e^{\ln a^x}=e^{x\ln a}$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x\ln a}-1}{x\ln a}\ln a=\left|\begin{array}{c} smena:\ t=x\ln a \\ x\to 0 \Longleftrightarrow t\to 0\end{array}\right|=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^t-1}{t}\cdot\ln a=\ln a$

Posledica 2.9:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha$$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\alpha\ln(1+x)}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\alpha\ln(1+x)}-1}{\alpha\ln(1+x)}\cdot\frac{\alpha\ln(1+x)}{x}=\left|\begin{array}{c} smena:\ t=\alpha\ln(1+x) \\ x\to 0 \Longleftrightarrow t\to 0\end{array}\right|=$
$\lim\limits_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\alpha=1\cdot 1\cdot\alpha=\alpha$

Teorema 2.3. Teorema o smeni promenljive u limesu:

(1) Ako $\varphi:(a,b)\longrightarrow^{na}_{1-1}(c,d)$ (φ je neprekidna bijekcija) i $\varphi(t_0)=x_0$
$t_0\in(a,b)$
$x_0\in(c,d)$
Onda je $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{t\to t_0}f(\varphi(t))$

Ovo svojstvo smo koristili u smenama, na primer:
$x=\ln(1+t),\ x=-t,\ x=e^t-1,\ \dots$

(2) Ako $\varphi:(a,b)\longrightarrow^{na}_{1-1}(c,d)$ je neprekidna bijekcija, gde su $a,b,c,d\in\bar{\mathbf{R}}$ i još je $\lim\limits_{t\to a^+}\varphi(t)=c$, onda je $\lim\limits_{x\to c^+}f(x)=\lim\limits_{t\to a^+}f(\varphi(t))$

Ovo svojstvo smo koristili u smeni, na primer:
$x=\frac{1}{t},\ x\to 0^+\Longleftrightarrow t\to+\infty$

Može i: Ako $\lim\limits_{t\to a^+}\varphi(t)=d$, onda $\lim\limits_{x\to d^-}f(x)=\lim\limits_{x\to a^+}f(\varphi(t))$

2.7 Limes monotone funkcije

Definicija 10. Funkcija f je monotono rastuća ako $x < y \Longrightarrow f(x) \leq f(y)$

Definicija 11. Funkcija f je strogo monotono rastuća ako $x < y \Longrightarrow f(x) < f(y)$

Definicija 12. Funkcija f je monotono opadajuća ako $a < y \Longrightarrow f(x) \geq f(y)$

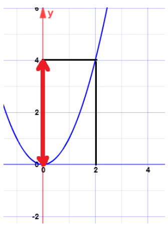
Definicija 13. Funkcija f je strogo monotono opadajuća ako $x < y \Longrightarrow f(x) > f(y)$

Definicija 14. Supremum funkcije f na skupu A je supremum skupa $\{f(x) \mid x \in A\}$ u oznaci $sup_A f$

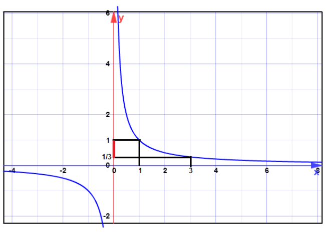
Primer 5: Naći $sup_A f$ ako je:

1. $f(x) = x^2,\ A = (0, 2)$
2. $f(x) = \frac{1}{x},\ A = (1, 3)$
3. $f(x) = x^2,\ A = [-4, 2)$

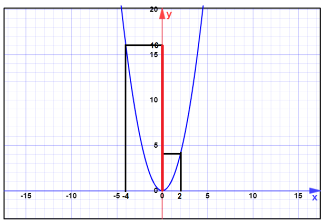
Rešenje:



Slika 2.18.



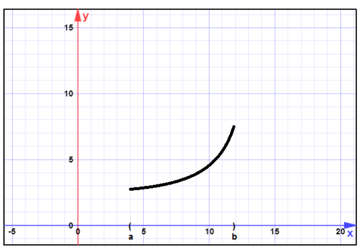
Slika 2.19.



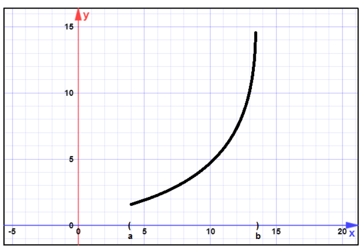
Slika 2.20.

1. $f((0, 2)) = (0, 4),\ sup_A f = 4$ (Slika 2.18.)
2. $f((1, 3)) = (\frac{1}{3}, 1),\ sup_A f = 1$ (Slika 2.19.)
3. $f([-4, 2)) = [0, 4) \cup (4, 16],\ sup_A f = 16$ (Slika 2.20.)

Definicija 15. Ako je $sup_A f = f(x_0),\ f(x_0) \in f(A)$ za $x_0 \in A$, onda se $sup_A f$ zove *maksimum* u oznaci $max_A f$.



Slika 2.21. Funkcija f raste i ograničena je



Slika 2.22. Funkcija f raste i neograničena je

Teorema 2.4. Neka $f \nearrow (a,b)$ (čitamo: ,,Funkcija f monotono raste na intervalu (a,b)"). Tada:

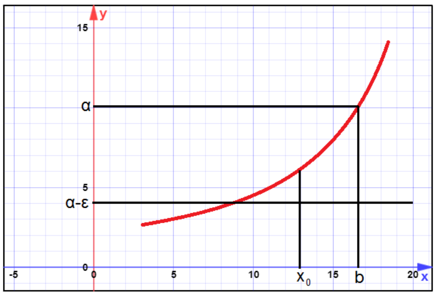
(1) Funkcija f je ograničena odozgo $\Longrightarrow \exists \lim\limits_{x\to b^-} f(x) = sup_{(a,b)}f$

(2) Funkcija f nije ograničena odozgo $\Longrightarrow \lim\limits_{x\to b^-} f(x) = +\infty$

Domaći zadatak: Ispitati situacije:
(1) $f \nearrow \lim\limits_{x\to a^+}$
(2) $f \searrow \lim\limits_{x\to a^+}$
(3) $f \searrow \lim\limits_{x\to b^-}$

Dokaz za Teoremu 2.4. (1):

Ako je f ograničena odozgo, sledi: $f(a,b)$ je ograničen odozgo, pa na osnovu (SUP) sledi: $\exists \alpha = sup f(a,b)$. Treba da pokažemo: $\alpha = \lim\limits_{x\to b^-} f(x)$.
Hoćemo da nađemo δ t.d. $x \in (b-\delta, b) \Longrightarrow L - \varepsilon < f(x) < \alpha + \varepsilon$, pri čemu je desna nejednakost tačna jer je $\alpha \geq f(x)$.
Uzmemo dovoljno $\varepsilon > 0$: $\alpha - \varepsilon < \alpha$, pa $\alpha - \varepsilon$ više nije majoranta $\Longrightarrow \exists x_0$, $f(x_0) > \alpha - \varepsilon$



Slika 2.23.

$f \nearrow \Longrightarrow \forall x \in (x_0, b)$
$f(x) \geq f(x_0) > \alpha - \varepsilon$
gde je $f(x_0) \longrightarrow b - \delta$, što je i trebalo dokazati

$\square$.

Zadatak: Naći limese:
(1) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$ (2) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{sin(x-1)}$ (3) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{sin(3x)}{sin(7x)}$

(4) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{\ln(\cos x)}$ (5) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{\mathrm{tg}^2(3x)}$ (6) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{2x+7}{2x-3}\right)^{x-3}$ (7) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}}$

Rešenje:

(1) I način: Koristeći svojstvo racionalisanja $\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} \cdot \frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}$

II način: $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{1+(x-1)}-1}{\sqrt[3]{1+(x-1)}-1} = \left| \begin{array}{c} smena: \ t = x-1 \\ x \to 1 \Longleftrightarrow t \to 0 \end{array} \right| = \lim\limits_{t\to 0} \frac{(1+t)^{\frac{1}{2}}-1}{(1+t)^{\frac{1}{3}}-1} =$

$\lim\limits_{t\to 0} \frac{\frac{(1+t)^{1/2}-1}{t}}{\frac{(1+t)^{\frac{1}{3}}-1}{t}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$

(2) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{sin(x-1)} = \left| \begin{array}{c} smena: \ t = x-1 \\ x \to 1 \Longleftrightarrow t \to 0 \end{array} \right| = \lim\limits_{t\to 0} \frac{(t+1)^{\frac{1}{3}}-1}{\sin t} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{\frac{(t+1)^{\frac{1}{3}}-1}{t}}{\frac{\sin t}{t}} =$
$\frac{\frac{1}{3}}{3} = \frac{1}{3}$

(3) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{sin(3x)}{sin(7x)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{sin(3x)}{3x}}{\frac{sin(7x)}{7x}} \cdot \frac{3}{7} = \frac{1}{1} \cdot \frac{3}{7} = \frac{3}{7}$

Uopštenjem prethodnog primera dobijamo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\alpha x)}{\sin(\beta x)} = \frac{\alpha}{\beta}$$

(4) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{\ln(\cos x)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{\ln(1-2\sin^2 \frac{x}{2})} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{\sin^2 x}{-2s\in^2 x}}{\frac{\ln(1-2\sin\frac{x}{2})}{-2\sin^2\frac{x}{2}}} = \frac{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{-2\sin^2\frac{x}{2}}}{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1-2\sin^2\frac{x}{2})}{-2\sin^2\frac{x}{2}}} = -\frac{1}{2} \lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2 =$
$-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{\frac{1}{2}}\right)^2 = -\frac{1}{2} \cdot 4 = -2$

Ostali zadaci se rade po sličnom principu (koriste se određene transformacije svodeći na neki od osnovnih limesa).

ČETVRTA NEDELJA

3 Asimptotske relacije $\boldsymbol{o}$ i $\sim$

3.1 Relacija $\boldsymbol{o}$

Posmatramo funkcije f i g koje su definisane $\dot{u}_a$, gde je $\dot{u}_a$ interval $(a-\delta, a+\delta)\setminus\{a\}$ ako je a konačno, $(M,+\infty)$ ako je $a=+\infty$ ili $(-\infty,-M)$ ako je $a=-\infty$ i želimo da uporedimo koja brže teži nekoj vrednosti (najčesće 0 ili ∞).

DEFINICIJA 1. $f=\boldsymbol{o}(g)$ ili $(f \ll g)$, $x\to a$ (ovo je važno pisati, jer bez ovoga, oznaka $\boldsymbol{o}$ ne bi imala smisla) nazivamo ,,f je zanemarljivo mala (beskonačno mala) u odnosu na g", ,,f je malo o od g" ako postoji funkcija $\varepsilon(x)$ definisana na $\dot{u}_a$ t.d.

$$f(x)=\varepsilon(x)\cdot g(x) \ i \ \lim_{x\to a}\varepsilon(x)=0$$

Napomena:
• Ako je $g(x)\neq 0$ na $\dot{u}_a$:

$$f=\boldsymbol{o}(g),\ x\to a \Longleftrightarrow \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=0$$

Primer 1:

i) $x^2=\boldsymbol{o}(x)$, $x\to 0$ jer $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x=0$
ii) $x^3=\boldsymbol{o}(x)$, $x\to 0$
$x^3=\boldsymbol{o}(x^2)$, $x\to 0$
$x^2=\boldsymbol{o}(\sqrt{x})$, $x\to 0$ jer $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to 0}x^{\frac{5}{2}}=0$

Uopštenjem prethodnog primera dobijamo:

$x^\alpha=\boldsymbol{o}(x^\beta),\ x\to 0$ kad $\alpha>\beta$ jer $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^\alpha}{x^\beta}=\lim\limits_{x\to 0}x^{\alpha-\beta}=0,\ (\alpha-\beta>0)$

Primer 2:

i) $x=\boldsymbol{o}(x^2),\ x\to\infty$ jer $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$

Opštije:

$x^\alpha=\boldsymbol{o}(x^\beta),\ x\to\infty$ kad $\alpha<\beta$ jer $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^\alpha}{x^\beta}=\lim\limits_{x\to\infty}x^{\alpha-\beta}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^{\beta-\alpha}}=\frac{1}{\infty}=0,\ (\beta-\alpha>0)$

ii) $\sin x=\boldsymbol{o}(x),\ x\to\infty$ jer $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\underbrace{\sin x}_{ogr.}\cdot\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}=0$

OSOBINE RELACIJE $\boldsymbol{o}$

(1) $\boldsymbol{o}(g) + \boldsymbol{o}(g) = \boldsymbol{o}(g), x \to a$

,,Ako saberemo neku funkciju f_1 i drugu funkciju f_2, gde su obe funkcije zanemarljivo male u odnosu na funkciju g, dobijamo funkciju koja je zanemarljivo mala u odnosu na funkciju g".

(2) $f \cdot \boldsymbol{o}(g) = \boldsymbol{o}(f \cdot g),\ x \to a$

,,Ako pomnožimo funkciju potčinjenu u odnosu na funkciju g funkcijom f, dobijamo funkciju potčinjenu $f \cdot g$".

(3) $\boldsymbol{o}(f) \cdot \boldsymbol{o}(g) = \boldsymbol{o}(f \cdot g)$

(4) Ako je $c - const,\ c \neq 0$
$c \cdot \boldsymbol{o}(f) = \boldsymbol{o}(c \cdot f) = \boldsymbol{o}(f)$

Dokaz:

(1) $\varphi_1 = \boldsymbol{o}(g),\ x \to a$
$\varphi_2 = \boldsymbol{o}(g),\ x \to a$
Treba dokazati: $\varphi_1 + \varphi_2 = \boldsymbol{o}(g),\ x \to a$

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_1(x) = \varepsilon_1(x) \cdot g(x), \text{ gde je } \lim\limits_{x\to a} \varepsilon_1(x) = 0 \\ \varphi_2(x) = \varepsilon_2(x) \cdot g(x), \text{ gde je } \lim\limits_{x\to a} \varepsilon_2(x) = 0 \end{array}\right. \text{ pretpostavka } \begin{array}{l} (3.1) \\ (3.2.) \end{array}$$

Hoćemo da dokažemo: $\varphi_1(x) + \varphi_2(x) = \boldsymbol{o}(g)$.
Sabiranjem (3.1.) i (3.2.) dobijamo:

$$\varphi_1(x) + \varphi_2(x) = \varepsilon_1(x)g(x) + \varepsilon_2(x)g(x) = \underbrace{[\varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x)]}_{=\varepsilon(x)} g(x) = \varepsilon(x)g(x),$$

pri čemu je $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = \lim\limits_{x\to a}(\varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x)) = 0 + 0 = 0.$

Ova osobina oznake $\boldsymbol{o}$ je posledica svojstva $0 + 0 = 0$.

$\square$.

(2) Znamo:
$\varphi(x) = \boldsymbol{o}(g),\ x \to a$ i $\varphi(x) = \varepsilon(x)g(x)$, pri čemu je $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$
Hoćemo:
$f \cdot \varphi = \boldsymbol{o}(f \cdot g)$

$$f(x) \cdot g(x) = f(x) \cdot \varepsilon(x) \cdot g(x) = \varepsilon(x) \cdot (f(x) \cdot g(x))$$

$\square$.

$$(3) \quad \begin{array}{l} \varphi_1 = \boldsymbol{o}(f),\ x \to a \\ \varphi_2 = \boldsymbol{o}(g),\ x \to a \end{array} \overbrace{\Longrightarrow}^{?} \varphi_1 \cdot \varphi_2 = \boldsymbol{o}(f \cdot g)$$

$\varphi_1(x) = \varepsilon_1(x) \cdot f(x),\ \lim\limits_{x\to a} \varepsilon_1(x) = 0$

$\varphi_2(x) = \varepsilon_2(x) \cdot g(x),\ \lim\limits_{x \to a} \varepsilon_2(x) = 0$

$\varphi_1(x) \cdot \varphi_2(x) = \varepsilon_1(x) \cdot f(x) \cdot \varepsilon_2(x) \cdot g(x) = \underbrace{(\varepsilon_1(x) \cdot \varepsilon_2(x))}_{=\varepsilon(x)} \cdot (f(x) \cdot g(x)) =$

$\varepsilon(x) \cdot (f(x) \cdot g(x))$

pri čemu je $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = \lim\limits_{x \to a} (\varepsilon_1(x) \cdot \varepsilon_2(x)) = \lim\limits_{x \to a} \varepsilon_1(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} \varepsilon_2(x) = 0 \cdot 0 = 0$

Ova osobina oznake $\boldsymbol{o}$ je posledica svojstva $0 \cdot 0 = 0$

$\Box$.

$$(4) \quad \begin{matrix} c - const \\ c \neq 0 \\ \varphi = \boldsymbol{o}(f),\ x \to a \end{matrix} \quad \overset{?}{\Longrightarrow} \quad \begin{matrix} i)\ c \cdot \varphi = \boldsymbol{o}(c \cdot f) \\ ii)\ \boldsymbol{o}(c \cdot f) = \boldsymbol{o}(f),\ x \to a \end{matrix}$$

i) Direktno sledi iz (2)

ii) $\boldsymbol{o}(c \cdot f) = \boldsymbol{o}(f),\ x \to a$
$\varphi = \boldsymbol{o}(c \cdot f) \Longrightarrow \varphi = \boldsymbol{o}(f),\ x \to a$
$\Updownarrow$

$$\begin{matrix} \varphi(x) = \varepsilon(x) \cdot c \cdot f(x) \\ \lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0 \end{matrix} \quad \overset{?}{\Longrightarrow} \quad \begin{matrix} \varphi(x) = \varepsilon_1(x) \cdot f(x) \\ \lim\limits_{x \to a} \varepsilon_1(x) = 0 \end{matrix}$$

Ako uzmemo da je $c \cdot \varepsilon(x) = \varepsilon_1(x)$ (primetimo da je $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon_1(x) = \lim\limits_{x \to} c \cdot \varepsilon(x) = c \cdot \lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = c \cdot 0 = 0$), dobijamo desnu strane implikacije iz leve.
Ovo je posledica svojstva $c \cdot 0 = 0$

Zadatak 1: Kako uporediti funkcije $\ln x,\ x^\alpha\ i\ a^x,\ (\alpha > 0,\ a > 1)$?

Rešenje: $\ln x \ll x^\alpha \ll a^x$
ili, drugačije zapisano:
$\ln x = \boldsymbol{o}(x^\alpha),\ x \to +\infty$
$x^\alpha = \boldsymbol{o}(a^x),\ x \to +\infty$

Dokaz će biti izložen na drugom mestu.

3.2 Relacija $\sim$

DEFINICIJA 2. Ako su funkcije f i g definisane na $\dot{u}_a$ ($a \in \mathbf{R}$) kažemo da je $f \sim g$ kad $x \to a$ („f je ekvivalentna, slična g") ako postoji funkcija α definisana na $\dot{u}_a$, t.d.

$$f(x) = \alpha(x) \cdot g(x) \ i \ \lim_{x \to a} \alpha(x) = 1$$

Drugim rečima: $\frac{f(x)}{g(x)} \longrightarrow 1$, kad $x \longrightarrow a$

Napomena: $\sim$ je relacija ekvivalencije (RST).

Dokaz:

(R): $f \sim f,\ x \to a$

Ako je $f(x) = \alpha(x) \cdot f(x)$, treba da $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 1$.
Neka je $\alpha(x) \equiv 1$ ($\alpha(x)$ je identički jednaka 1, odnosno, jednaka je 1 $\forall x \in u_a$).

$\square$.

(S): $f \sim g,\ x \to a \Longrightarrow g \sim f,\ x \to$

Znamo: $f \sim g,\ x \to a \Longleftrightarrow f(x) = \alpha(x) \cdot g(x),\ lim_{x \to a} \alpha(x) = 1$
Hoćemo: $g(x) = \alpha_1(x) \cdot f(x),\ \lim\limits_{x \to a} \alpha_1(x) = 1$.
Neka je $\alpha_1(x) = \frac{1}{\alpha(x)}$ (ovo je moguće uraditi jer $\alpha(x) > 0$ na nekoj $\dot{u}_a$). Tada je $\lim\limits_{x \to a} \alpha_1(x) = \lim\limits_{x \to a} \frac{1}{\alpha(x)} = \frac{1}{\lim\limits_{x \to a} \alpha(x)} = \frac{1}{1} = 1$

Ovo je posledica svojstva $\frac{1}{1} = 1$

$\square$.

(T): $f \sim g,\ x \to a \wedge g \sim h,\ x \to a \Longrightarrow f \sim h,\ x \to a$

Znamo: $f \sim g,\ x \to a \wedge g \sim h,\ x \to a \Longleftrightarrow f(x) = \alpha_1(x) \cdot g(x) \wedge g(x) = \alpha_2(x) \cdot h(x)$, pri čemu je $\lim\limits_{x \to a} \alpha_1(x) = \lim\limits_{x \to a} \alpha_2(x) = 1$
Hoćemo: $f \sim h,\ x \to a \Longleftrightarrow f(x) = \alpha(x) \cdot h(x)$
$f(x) = \alpha_1(x) \cdot g(X) = \underbrace{\alpha_1(x) \cdot \alpha_2(x)}_{=\alpha(x)} \cdot h(x) = \alpha(x) \cdot h(x)$, a važi i:

$$\lim_{x \to a} \alpha(x) = \lim_{x \to a} (\alpha_1(x) \cdot \alpha_2(x)) = \lim_{x \to a} \alpha_1(x) \cdot \lim_{x \to a} \alpha_2(x) = 1 \cdot 1 = 1$$

Ovo je posledica svojstva $1 \cdot 1 = 1$

$\square$.

Primer 3:
i) $\sin x \sim x,\ x \to 0$
jer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$
ii) $\ln(1 + x) \sim x,\ x \to 0$
iii) $1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}, x \to 0$

jer $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\dfrac{x^2}{2}}=2\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=2\cdot\dfrac{1}{2}=1$

iv) $e^x-1\sim x,\ x\to 0$

v) $a^x-1\sim x\cdot\ln a,\ x\to 0$

jer $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x\ln a}=\dfrac{1}{\ln a}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\dfrac{1}{\ln a}\cdot\ln a=1$

vi) $(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x,\ x\to 0$

Zadatak 1: Naći α tako da je $f(x)\sim c\cdot x^\alpha,\ x\to a$:

i) $f(x)=x^3+x^2+2x-7,\ a=+\infty$

ii) $f(x)=-x+\sqrt{x}+3,\ a=+\infty$

iii) $f(x)=\dfrac{x^2-3x+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+1},\ a=+\infty$

iv) $f(x)=2x^2+3x-7\sqrt{x},\ a=0$

v) $f(x)=\dfrac{x^7-3x+\sqrt{x}}{x^6+2x+2\sqrt[3]{x}},\ a=0$

Rešenje:

i) $f(x)=x^3+x^2+2x-7\sim x^3,\ \alpha=3,\ x\to+\infty$

jer $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+x^2+2x-7}{x^3}=1$

ii) $f(x)=-x+\sqrt{x}+3\sim-x,\ \alpha=1,\ x\to+\infty$

jer $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x+\sqrt{x}+3}{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{3}{x}\right)=1+0+0=1$

iii) $f(x)=\dfrac{x^2-3x+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+1}\sim x^{2-\frac{1}{3}}=x^{\frac{5}{3}},\ \alpha=\dfrac{5}{3},\ x\to+\infty$

jer $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-3x+\sqrt{x}}{x^{\frac{5}{3}}\cdot(x^{\frac{1}{3}}+1)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-3x+\sqrt{x}}{x^2+x^{\frac{5}{3}}}\,{}^{\backslash:x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\dfrac{3}{x}+x^{-\frac{3}{2}}}{1+x^{-\frac{1}{3}}}=$
$\dfrac{1}{1}=1$

iv) $f(x)=2x^2+3x-7\sqrt{x}\sim-1\sqrt{x},\ \alpha=\dfrac{1}{2},\ x\to 0$

jer $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{-7\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2+3x-7\sqrt{x}}{-7\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left(-\dfrac{2}{7}x^{\frac{3}{2}}-\dfrac{3}{7}\sqrt{x}+1\right)=0+0+1=$
1

v) $f(x)=\dfrac{x^7-3x+\sqrt{x}}{x^6+2x+2\sqrt[3]{x}}\sim\dfrac{1}{2}x^{\frac{1}{6}},\ x\to 0$

jer $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\dfrac{1}{2}x^{\frac{1}{6}}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^7-3x+\sqrt{x}}{\dfrac{1}{2}x^{\frac{1}{6}}\cdot(x^6+2x+2\sqrt[3]{x})}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^7-3x+\sqrt{x}}{\dfrac{1}{2}x^{\frac{37}{6}}+x^{\frac{7}{6}}+\sqrt{x}}\,{}^{\backslash:\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^{\frac{13}{2}}-3\sqrt{x}+1}{\dfrac{1}{2}x^{\frac{34}{6}}+x^{\frac{4}{6}}+1}=$
$\dfrac{0-0+1}{0+0+1}=1$

3.3 Veza između $\boldsymbol{o}$ i $\sim$

Pitanje: Šta bi značilo kada bismo napisali $f = \boldsymbol{o}(1),\ x \to a (g(x) \equiv 1)$?
Odgovor: Ovo je zapravo oznaka za $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ ili $f(x) = \varepsilon(x) \cdot 1 = \varepsilon(x) \longrightarrow 0,\ x \to a$

<u>STAV</u>:

(1) $f{\sim}g \Longrightarrow \boldsymbol{o}(f) = \boldsymbol{o}(g),\ x \to a$
(2) $f{\sim}g \Longleftrightarrow f(x) = g(x) + \boldsymbol{o}(g),\ x \to a$

Dokaz:

(1) Ako je funkcija φ koja je zanemarljiva za f, onda je zanemarljiva za g, ako su f i g ekvivalentne, odnosno:
Ako $f{\sim}g:\ \varphi = \boldsymbol{o}(f) \Longrightarrow \varphi = \boldsymbol{o}(g),\ x \to a$

Znamo:
$f{\sim}g,\ x \to a \Longleftrightarrow f(x) = \alpha(x) \cdot g(x),\ \lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 1$
$\varphi = \boldsymbol{o}(f),\ x \to a \Longleftrightarrow \varphi(x) = \varepsilon(x) \cdot f(x),\ \lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$

Hoćemo:
$\varphi(x) = \varepsilon_1(x) \cdot g(x)$

$$\varphi(x) = \varepsilon(x) \cdot f(x) = \underbrace{\varepsilon(x) \cdot \alpha(x)}_{=\,\varepsilon_1(x)} \cdot g(x) = \varepsilon_1(x) \cdot g(x)$$

$$\lim_{x\to a} \varepsilon_1(x) = \lim_{x\to a}(\varepsilon(x) \cdot \alpha(x)) = \lim_{x\to a} \varepsilon(x) \cdot \lim_{x\to a} \alpha(x) = 0 \cdot 1 = 0$$

$\square$.

(2)
$(\Longrightarrow)$ $f{\sim}g,\ x \to a \Longleftrightarrow f(x) = \alpha(x) \cdot g(x),\ \lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 1 = (\alpha(x) - 1 + 1)g(x) = g(x) + \underbrace{(\alpha(x) - 1)}_{=\,\varepsilon(x)} g(x) = g(x) + \varepsilon(x)g(x) = g(x) + \boldsymbol{o}(g)$

$$\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = \lim_{x\to a}(\alpha(x) - 1) = 1 - 1 = 0$$

$\square$.

$(\Longleftarrow)$ Neka je $f = g + \boldsymbol{o}(g),\ x \to a,\ \lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$. Tada je:

$$f(x) = g(x) + \varepsilon(x)g(x) = \underbrace{(1 + \varepsilon(x))}_{=\,\alpha(x)} g(x) = \alpha(x)g(x) \Longleftrightarrow f{\sim}g$$

$$\lim_{x\to a} \alpha(x) = \lim_{x\to a}(1 + \varepsilon(x)) = 1 + 0 = 1$$

$\square$.

Primer 4: Napisati osnovne limese na jeziku $\boldsymbol{o}$, odnosno, napisati $f{\sim}g \Longleftrightarrow f = g + \boldsymbol{o}(g),\ x \to a$ za osnovne limese.

Rešenje:

i)	$\sin x \sim x,\ x\to 0$	$\Longleftrightarrow$	$\sin x = x + \boldsymbol{o}(x),\ x\to 0$
ii)	$1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}$	$\Longleftrightarrow$	$1-\cos x = \frac{x^2}{2} + \boldsymbol{o}(\frac{x^2}{2}) = \frac{x^2}{2} + \boldsymbol{o}(x^2),\ x\to 0$ $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \boldsymbol{o}(x^2),\ x\to 0$
iii)	$e^x - 1 \sim x,\ x\to 0$	$\Longleftrightarrow$	$e^x - 1 = x + \boldsymbol{o}(x),\ x\to 0$ $e^x = 1 + x + \boldsymbol{o}(x),\ x\to 0$
iv)	$\ln(1+x)\sim x,\ x\to 0$	$\Longleftrightarrow$	$\ln(1+x) = x + \boldsymbol{o}(x),\ x\to 0$
v)	$a^x - 1 \sim x\ln a,\ x\to 0$	$\Longleftrightarrow$	$a^x - 1 = x\ln a + \boldsymbol{o}(x\ln a),\ x\to 0$ $a^x = 1 + x\ln a + \boldsymbol{o}(x),\ x\to 0$
vi)	$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x,\ x\to 0$	$\Longleftrightarrow$	$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \boldsymbol{o}(x),\ x\to 0$

ZADATAK 2: Rešiti zadatke pomoću jezika $\boldsymbol{o}$:

Koristićemo sledeće osobine relacije $\boldsymbol{o}$:

$\frac{\boldsymbol{o}(x)}{x} = \boldsymbol{o}(1)$

$\boldsymbol{o}(1) \longrightarrow 0$ kad $x\to 0$

(1) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$ (2) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{sin(x-1)}$ (3) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{sin(3x)}{sin(7x)}$

(4) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{\ln(\cos x)}$ (5) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{\mathrm{tg}^2(3x)}$ (6) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{2x+7}{2x-3}\right)^{x-3}$ (7) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2}}}$

Rešenje:

U (1) i (2): $\left| \begin{array}{c} smena:\ t = x-1 \\ x\to 1 \Longleftrightarrow t\to 0 \end{array} \right|$

(1) $$\lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{1+t}-1}{\sqrt[3]{1+t}-1} = \lim_{t\to 0} \frac{1+\frac{1}{2}t+\boldsymbol{o}(t)-1}{1+\frac{1}{3}t+\boldsymbol{o}(t)-1} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{1}{2}t+\boldsymbol{o}(t)\ ^{\backslash :t}}{\frac{1}{3}t+\boldsymbol{o}(t)} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{1}{2}+\boldsymbol{o}(1)}{\frac{1}{3}+\boldsymbol{o}(1)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

(2) $$\lim_{t\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+t}-1}{\sin t} = \lim_{t\to 0} \frac{1+\frac{1}{3}t+\boldsymbol{o}(t)-1\ ^{\backslash :t}}{t+\boldsymbol{o}(t)} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{1}{2}+\boldsymbol{o}(1)}{1+\boldsymbol{o}(1)} = \frac{1}{3}$$

(3) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(7x)} = \lim_{x\to 0} \frac{3x+\boldsymbol{o}(x)\ ^{\backslash :x}}{7x+\boldsymbol{o}(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{3+\boldsymbol{o}(1)}{7+\boldsymbol{o}(1)} = \frac{3}{7}$$

(4) $\sin^2 x = (x+\boldsymbol{o}(x))^2 = (x+\boldsymbol{o}(x))\cdot(x+\boldsymbol{o}(x)) = x^2 + x\boldsymbol{o}(x) + x\boldsymbol{o}(x) + \boldsymbol{o}(x)\boldsymbol{o}(x) = x^2 + \underbrace{\boldsymbol{o}(x^2)+\boldsymbol{o}(x^2)+\boldsymbol{o}(x^2)}_{=\ \boldsymbol{o}(x^2)} = x^2 + \boldsymbol{o}(x^2)$

$$\ln(\cos x) = \ln(1-\frac{x^2}{2}+\boldsymbol{o}(x^2)) = \left|\ smena:\ t = -\frac{x^2}{2}+\boldsymbol{o}(x^2)\ \right| = \ln(1+t) = t+\boldsymbol{o}(t) = -\frac{x^2}{2}+\boldsymbol{o}(x^2)+\underbrace{\boldsymbol{o}(-\frac{x^2}{2}+\boldsymbol{o}(x^2))}_{=\ \boldsymbol{o}(x^2)} = -\frac{x^2}{2}+\underbrace{\boldsymbol{o}(x^2)+\boldsymbol{o}(x^2)}_{=\ \boldsymbol{o}(x^2)} = -\frac{x^2}{2}+\boldsymbol{o}(x^2)$$

Napomena: Ukoliko imamo funkciju unutar funkcije, uvek prvo razvijamo unutrašnju, pa onda spoljašnju.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{\ln(\cos x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2+\boldsymbol{o}(x^2)}{-\frac{x^2}{2}+\boldsymbol{o}(x^2)}\,{}^{\backslash :x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1+\boldsymbol{o}(1)}{-\frac{1}{2}+\boldsymbol{o}(1)} = -2$$

$$(5)\ \mathrm{tg}^2(3x) = \frac{\sin^2(3x)}{\cos^2(3x)} = \frac{(3x+\boldsymbol{o}(x))\cdot(3x+\boldsymbol{o}(x))}{(1-\frac{9x^2}{2}+\boldsymbol{o}(x^2))\cdot(1-\frac{9x^2}{2}+\boldsymbol{o}(x^2))} =$$

$$\frac{9x^2+\boldsymbol{o}(x^2)}{(1-\frac{9x^2}{2}+\boldsymbol{o}(x^2))^2} = \frac{9x^2+\boldsymbol{o}(x^2)}{A}$$

Napomena 1: $x\to 0:\ \boldsymbol{o}(x)+\boldsymbol{o}(x^2)=\boldsymbol{o}(x)$ jer $\boldsymbol{o}(x^2)=\boldsymbol{o}(x)$ kad $x\to 0$ (oprez! – ova jednakost važi isključivo u smeru $\longrightarrow$, odnosno, ne važi $\boldsymbol{o}(x)=\boldsymbol{o}(x^2)$)
To znači: ako $\frac{f(x)}{x^2}\longrightarrow 0,\ x\to 0$, onda $\frac{f(x)}{x}\longrightarrow 0,\ x\to 0$ jer $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}\cdot x = 0\cdot 0 = 0$, a ne važi obrnuto!
Primer za ovu napomenu: $f(x)=x^{\frac{3}{2}}=\boldsymbol{o}(x),\ x\to 0$, nije $x^{\frac{3}{2}}=\boldsymbol{o}(x^2),\ x\to 0$
Uopštenjem dobijamo:

$$\textit{Kad } x\to 0,\ \textit{onda } \overrightarrow{\boldsymbol{o}(x^n)=\boldsymbol{o}(x^m)},\ n\geq m$$

Napomena 2:

$$\textit{Kad } x\to \infty,\ \textit{onda } \overrightarrow{\boldsymbol{o}(x^n)=\boldsymbol{o}(x^m)},\ n\leq m$$

$$f=\boldsymbol{o}(x^n),\ x\to\infty \overset{?}{\Longrightarrow} f=\boldsymbol{o}(x^m),\ x\to\infty$$

$$\frac{f}{x^n}\longrightarrow 0,\ x\to\infty \overset{?}{\Longrightarrow} \frac{f}{x^m}\longrightarrow 0,\ x\to\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f}{x^m} = \lim_{x\to\infty}\frac{f}{x^n}\cdot x^{n-m} = 0\cdot 0 = 0$$

$$A=(1-\frac{9x^2}{2}+\boldsymbol{o}(x^2))\cdot(1-\frac{9x^2}{2}+\boldsymbol{o}(x^2)) = 1-\frac{9x^2}{2}+\underline{\boldsymbol{o}(x^2)}-\frac{9x^2}{2}+\underline{\frac{81x^4}{4}}+\underbrace{\boldsymbol{o}(x^4)}_{-\frac{9x^2}{2}\cdot\boldsymbol{o}(x^2)}+\underline{\boldsymbol{o}(x^2)}+\underline{\boldsymbol{o}(x^4)}+\underbrace{\boldsymbol{o}(x^4)}_{\boldsymbol{o}(x^2)\cdot\boldsymbol{o}(x^2)} = 1-9x^2+\boldsymbol{o}(x^2)$$

$$\mathrm{tg}^2(3x) = \frac{9x^2+\boldsymbol{o}(x^2)}{1-9x^2+\boldsymbol{o}(x^2)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\mathrm{tg}^2(3x)} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{x^2}{2}+\boldsymbol{o}(x^2)-1}{\frac{9x^2+\boldsymbol{o}(x^2)}{1-9x^2+\boldsymbol{o}(x^2)}} = \lim_{x\to 0}\frac{(-\frac{x^2}{2}+\boldsymbol{o}(x^2))\cdot(1-9x^2+\boldsymbol{o}(x^2))\,{}^{\backslash :x^2}}{9x^2+\boldsymbol{o}(x^2)} =$$

$$\frac{-\frac{1}{2}\cdot 1}{9} = -\frac{1}{18}$$

Domaći zadatak: Rešiti primer (6)

(7) $(\cos x)^{\dfrac{1}{\sin^2\frac{x}{2}}} = e^{\dfrac{1}{\sin^2\frac{x}{2}}\cdot\ln(\cos x)}$

$\ln(\cos x) = -\dfrac{x^2}{2} + \boldsymbol{o}(x^2)$

$s\in^2 \dfrac{x}{2} = \left(\dfrac{x}{2} + \boldsymbol{o}(x)\right)^2 = \dfrac{x^2}{4} + \boldsymbol{o}(x^2)$

$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\dfrac{1}{\sin^2\frac{x}{2}}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)}{\sin^2\frac{x}{2}}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\frac{x^2}{2}+\boldsymbol{o}(x^2)\ \backslash :x^2}{\frac{x^2}{4}+\boldsymbol{o}(x^2)}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\frac{1}{2}+\boldsymbol{o}(1)}{\frac{1}{4}+\boldsymbol{o}(1)}} =$
$e^{\dfrac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}}} = e^{-2}$

PETA NEDELJA

4 Svojstva neprekidnih funkcija

Podsetnik: f je neprekidna u tački $x_0 \in D_f$ ako
$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x : |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$
ili pišemo $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
$\circ$ f je neprekidna na skupu A ako je neprekidna u svakoj tački iz A
$\circ$ $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, polinomi, racionalne funkcije su neprekidne funkcije

4.1 Lokalna svojstva neprekidnih funkcija

Lokalna svojstva se nazivaju tako zato što razmatramo njihovo ponašanje u nekoj tački (to će biti 1 i 2), ili u okolini neke tačke (3 i 4).

1) $f,\ g$ su neprekidne u $x_0 \Longrightarrow f \pm g, f \cdot g$, (ako je $g(x) \neq 0$) $\dfrac{f}{g}$ su neprekidne u x_0
Sledi iz svojstva limesa.

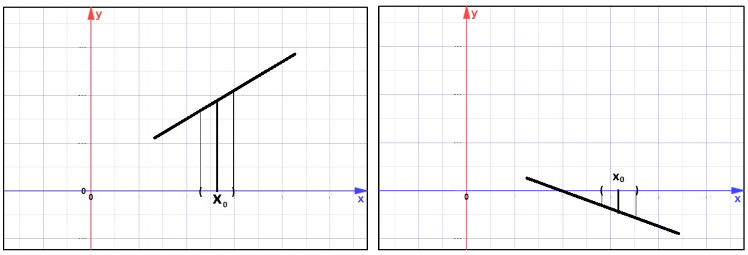
2) f je neprekidna u tački $y_0 = g(x_0)$ i g je neprekidna u $x_0 \Longrightarrow f \circ g$ je neprekidna u tački x_0
Sledi iz činjenice da $\lim f = f(\lim)$ kad je f neprekidna:

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = f(\lim_{x \to x_0} g(x)) \Longrightarrow \lim_{x \to x_0} f \circ g(x) = \lim_{x \to x_0} f(g(x)) =$$

$$\underbrace{=}_{\substack{\text{zato što je} \\ f \text{ neprekidna}}} f \underbrace{(\lim_{x \to x_0} g(x))}_{\substack{g(x_0) \text{ zato što je} \\ g \text{ neprekidna}}} = f(g(x_0)) = f \circ g(x_0)$$

Primer 1: Važi da je $\dfrac{sin(x^2 + 2x) - tg\dfrac{2x}{x^3 + 1}}{\cos^7(sin(x^4 + 2))}$ neprekidna jer ako prođemo kroz sve pojedinačne funkcije koje su neprekidne, i njihove kombinacije su neprekidne.

3) f je neprekidna u x_0 i $f(x_0) \neq 0 \Longrightarrow \exists u_{x_0}$ t.d. f je istog znaka na u_{x_0} kao i $f(x_0)$.

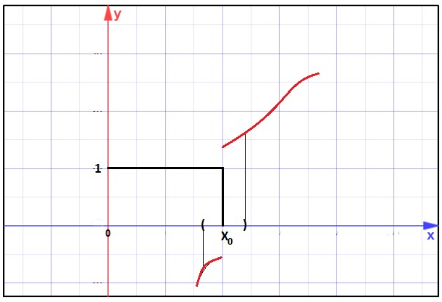


Slika 4.1.

Sledi iz drugog stava limesa ako je:

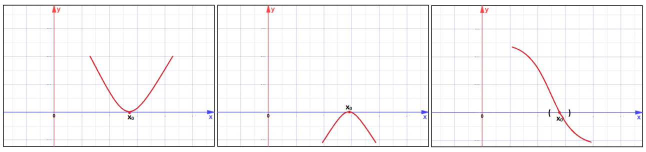
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L,\ L \neq 0 \Longrightarrow \operatorname{sgn}(f(x)) = \operatorname{sgn}(L)$

Primer 2: $f(x_0) = 1 > 0$, ali f je prekidna



Slika 4.2.

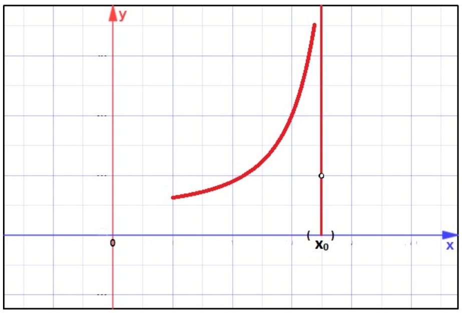
Primer 3: Ako je $f(x_0) = 0$, onda nemamo zaključak kojeg je znaka, npr:



Slika 4.3.

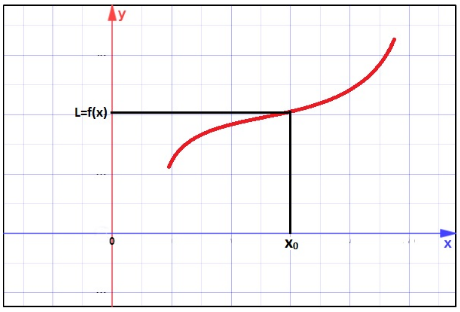
4) f je neprekidna u $x_0 \Longrightarrow \exists u_{x_0}$ na kojoj je f ograničena.

Primer 4: Primer kada ne važi ovo svojstvo, odnosno, kada nije neprekidna



Slika 4.4.

Primer 5: $\forall x \in u_{x_0} : |f(x)| \leq M \Longleftrightarrow m \leq f(x) \leq M$

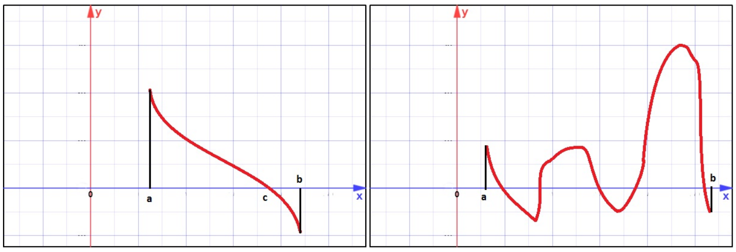


Slika 4.5.

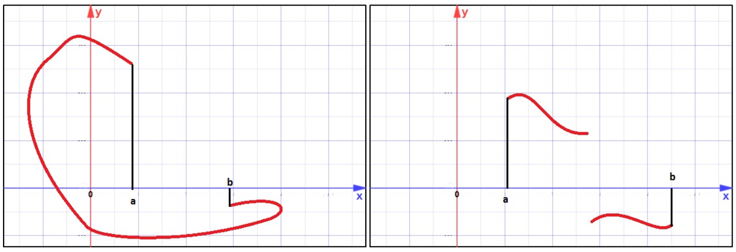
4.2 Globalna svojstva neprekidnih funkcija

4.2.1 Koši - Bolcanova teorema

$$\left.\begin{array}{c} f:[a,b]\longrightarrow \mathbf{R} \\ f\ je\ neprekidna\ na\ [a,b] \\ f(a)\cdot f(b)<0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists c\in(a,b)\ t.d.\ f(c)=0$$

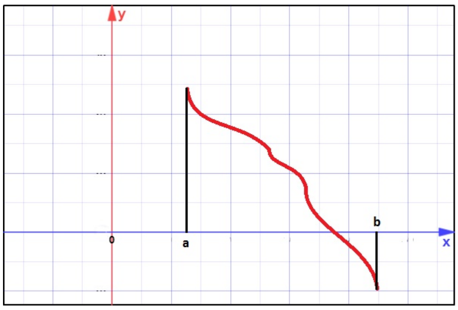


Slika 4.6. Primeri funkcija gde važi Koši-Bolcanova teorema



Slika 4.7. Slika 1 nije dobra jer to nije funkcija, a slika 2 nije u kontradikciji sa teoremom jer funkcija nije neprekidna

Dokaz: Posmatrajmo sledeću sliku:



Slika 4.8.

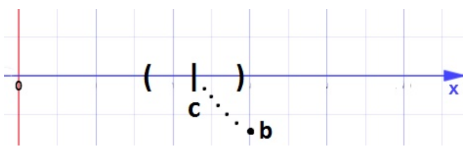
Uzmimo vrednost $\frac{a+b}{2}$. Gledamo koliko je $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$:

1) $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0 \Longrightarrow$ kraj dokaza jer $c = \frac{a+b}{2}$

2) (slučaj koji odgovara slici SLIKA) $f\left(\frac{a+b}{2}\right) > 0 \Longrightarrow$ gledamo upola manji interval $[a_2, b_2] = \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$

3) $f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0 \Longrightarrow$ gledamo upola manji interval $[a_2, b_2] = \left[a, \frac{a+b}{2}\right]$

Važi da je $f(a_2) \cdot f(b_2) < 0$.
Ponavljamo postupak polovljenja za interval $[a_2, b_2]$, ...
Nakon n koraka, imamo interval: $I_n = [a_n, b_n]$, t.d. $f(a_n) > 0$, $f(b_n) < 0$ (da bi bilo u skladu sa slikom, ali važi i obrnuto). Takođe je: $I_{n+1} \subseteq I_n$ i dužina intervala I_n je $\frac{b-a}{2^{n-1}}\left(\text{prvi je } \frac{b-a}{2^0}, \text{ drugi je } \frac{b-a}{2^1}, \ldots, n\text{-ti je } \frac{b-a}{2^{n-1}}\right)$, pa prema teoremi KAN sledi:
$\exists c \in \bigcap I_n \neq \emptyset$, i, štaviše važi: $\exists_1 c$ (postoji tačno jedno c).
Zašto je $f(c) = 0$?
Ako nije, bilo bi:
1) $f(c) > 0$
$\Downarrow$
$f(x) > 0$ na nekom $(c - \delta, c + \delta)$, a to je nemoguće jer:

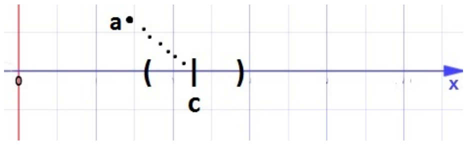


Slika 4.9.

$|b - c| \leq \frac{b-a}{2^n}$
$c \in \underbrace{[a_n, b_n]}_{\frac{b-a}{2^n}}$, a važi $f(b_n) < 0$

$\perp$

2) $f(c) < 0$ je nemoguće jer je $f(a_n) > 0$ (važi isto kao i pod 1, samo što prilazimo c sa druge strane):



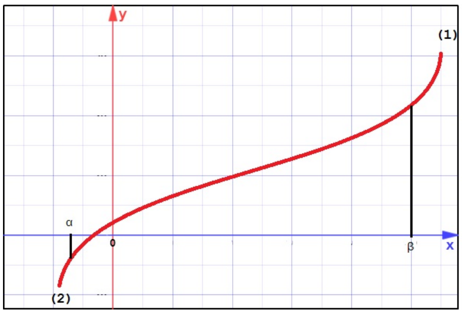
Slika 4.10.

pa ponovo dolazimo do kontradikcije ($\perp$) što znači da $f(c) = 0$.

$\square$.

Primer 6: Dokazati da svaki polinom trećeg stepena ima barem 1 realnu nulu.

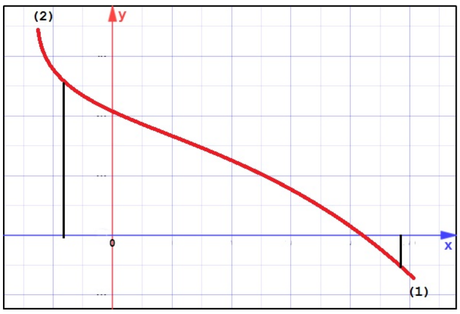
Dokaz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,\ a \neq 0$
Neka je $a > 0$:
$f(x) \to +\infty$, kad $x \to +\infty$ (*)
$f(x) \to -\infty$, kad $x \to -\infty$ (**)



Slika 4.11.

$$\left.\begin{array}{r} f \text{ je neprekidna na } [\alpha, \beta] \\ \exists\beta \text{ t.d. } f(\beta) > 0 \\ \exists\alpha \text{ t.d. } f(\alpha) < 0 \end{array}\right\} (KBT) \Longrightarrow \exists\gamma \in (\alpha, \beta) \text{ t.d. } f(\gamma) = 0$$

Neka je $a < 0$:
$f(x) \to -\infty$, kad $x \to +\infty$ (*)
$f(x) \to +\infty$, kad $x \to -\infty$ (**)



Slika 4.12.

$$\left.\begin{array}{r} f \text{ je neprekidna na } [\alpha,\beta] \\ \exists\beta \text{ t.d. } f(\beta)<0 \\ \exists\alpha \text{ t.d. } f(\alpha)>0 \end{array}\right\} (KBT) \Longrightarrow \exists\gamma\in(\alpha,\beta) \text{ t.d. } f(\gamma)=0$$

$\square$.

Primer 7: Ne možemo da primenimo KBT na polinom stepena 2 jer važi:
$f(x)\to+\infty,\ x\to\pm\infty,\ a>0$
$f(x)\to-\infty,\ x\to\pm\infty,\ a<0$

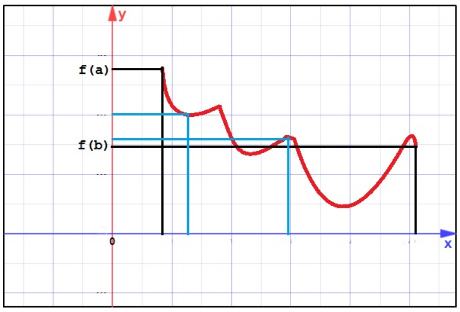
Primer 8: Svaki polinom neparnog stepena ima bar jednu realnu nulu.

Postoji jedna bitna posledica KBT koju ćemo sada razmatrati.

4.2.2 Teorema o međuvrednosti

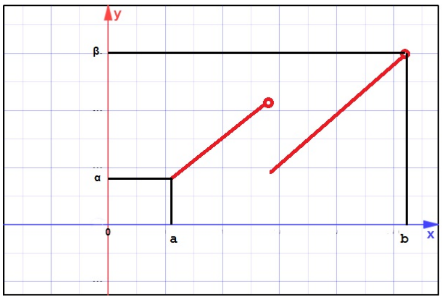
Ako imamo neprekidnu funkciju na intervalu ($f:[a,b]\longrightarrow\mathbf{R}$ je neprekidna) i γ je između $f(a)$ i $f(b)$ (gde ne mora da važi $f(a)\cdot f(b)<0$), tada:
$\exists c\in[a,b]$ t.d. $f(c)=\gamma$ i to čitamo kao:
„Svaka vrednost između $f(a)$ i $f(b)$ se dostiže" ili „Neprekidna slika intervala je interval".

$a_1,b_1\in[a,b],\ f(a_1),f(b_1)\in f([a,b])$
$f:[a_1,b_1]$ – primenimo teoremu: $\forall\gamma$ između $f(a_1)$ i $f(b_1)$ $\exists c\in[a_1,b_1]$ t.d. $f(c)=\gamma$



Slika 4.13.

Napomena: Teorema o međuvrednosti je jednosmerna, odnosno:
Ako je $f([a,b])$ interval, ne mora da znači da je f neprekidna. Pokažimo da je ovo tačno na kontraprimeru:



Slika 4.14.

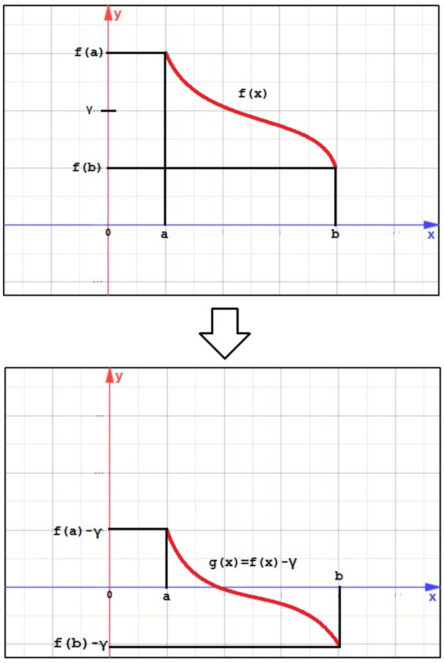
$f([a,b]) = [\alpha, \beta]$, ali je f prekidna.

Napomena: Ako skup A nije interval i f je neprekidna na A, onda $f(A)$ ne mora da bude interval. Pokažimo da je ovo tačno na kontraprimeru:
$f(x) = \dfrac{1}{x}$, $D_f = \mathbf{R} \setminus \{0\}$ nije interval
$f(D_f) = \mathbf{R} \setminus \{0\}$.
Ali: $f((0,+\infty)) = (0,+\infty)$ i $f((-\infty,0)) = (-\infty,0)$.

Dokaz Teoreme:
(1) $f(a) = f(b) = \gamma$
(2) $f(a) \neq f(b)$ (ubraja i $f(a) > f(b)$ i $f(a) < f(b)$)
Neka je $g(x) = f(x) - \gamma$, g je neprekidna funkcija
$g(a) \cdot g(b) = (f(a) - \gamma) \cdot (f(b) - \gamma)$

$$\begin{array}{c|c} f(a) < f(b) & f(a) > f(b) \\ f(a) < \gamma < f(b) & f(b) < \gamma < f(a) \\ f(a) - \gamma < 0 & f(b) - \gamma < 0 \\ f(b) - \gamma > 0 & f(a) - \gamma > 0 \end{array}$$

(KBT na g) $\Longrightarrow \exists c \in (a,b)$ t.d. $g(c) = 0$
Pa je $f(c) - \gamma = 0 \Longleftrightarrow f(c) = \gamma$



Slika 4.15.

□.

4.2.3 Vajerštrasova teorema

Podsetnik:
$sup_A f = sup\{f(x) \mid x \in A\} = f(A)$
f je ograničena (dovoljno je da bude odozgo ograničena) na $A(SUP) \Longrightarrow \exists sup_A f$
Ako je $sup_A f = f(x_0)$ za neko $x_0 \in A$, onda je $f(x_0) = max_A f$ maksimum funkcije i kažemo da se maksimum dostiže.
(Slično važi i za infimum ($inf_A f$) i minimum ($min_A f$).)

Primer 9: Neka je $f(x) = \frac{1}{x}$, $A = (0,1)$. Da li je f ograničena na A? Nije, jer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

Primer 10: Neka je $f(x) = \frac{1}{x}$, $A = (1,2)$.
$1 < x < 2 \Longrightarrow \frac{1}{2} < \frac{1}{x} < 1$
$sup_A f = 1$, ali se supremum ne dostiže

Primer 11: Neka je $f(x) = \frac{1}{x}$, $A = [1,2]$.
$1 \leq x \leq 2 \Longrightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{x} \leq 1$
$sup_A f = 1 = f(1)$, i supremum (maksimum) se dostiže

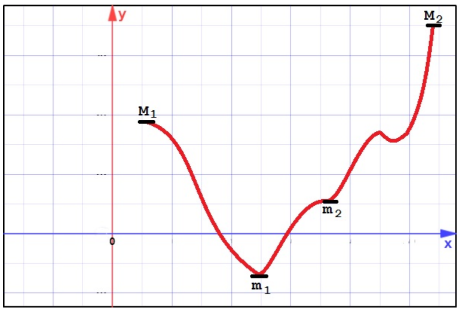
Primer 12: Neka je $f(x) = \sin x$, $A = [0, \pi]$.

$sup_A f = 1 = f(\frac{\pi}{2}) = max_A f$
$inf_A f = 0 = f(0) = min_A f$

Vajerštrasova teorema:

$$f : [a,b] \longrightarrow \mathbf{R} \text{ je neprekidna} \Longrightarrow \begin{array}{l} (1)\ f \text{ je ograničena} \\ (2)\ f \text{ dostiže svoj } max \text{ i } min \text{ na } [a,b] \end{array}$$

Dokaz:
(1) Ako f nije ograničena na $[a,b]$, onda f ili nije ograničena na $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ ili nije ograničena na $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$, jer, ako je $m_1 \leq f(x) \leq M_1$ na $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ i $m_2 \leq f(x) \leq M_2$ na $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$, onda je: $m \leq f(x) \leq M$, gde je:
$m = min\{m_1, m_2\}$
$M = max\{M_1, M_2\}$



Slika 4.16.

Izaberemo onu polovinu na kojoj f nije ograničena. Neka je to novi interval I_2. Postupak prepolovljenja primenimo na I_2, pa na I_3, $I_4, \ldots, I_n$, i tako dobijamo niz umetnutih segmenata: $I_{n+1} \subseteq I_n$ takvih da je f je neograničena na I_n
(KAN) $\Longrightarrow \exists c = \bigcap I_n$
f je neprekidna $\Longrightarrow \exists u_c = (c-\delta, c+\delta)$ na kojoj je f ograničena, a ovo je kontradikcija ($\perp$) jer za dovoljno veliko n važi $I_n \subseteq (c-\delta, c+\delta)$.

$\square$.

(2) Dokazali smo da je f ograničena. Neka je $s = sup_{[a,b]} f$. Hoćemo da pokažemo da je $s = f(x_0)$ za neko x_0.
Pretpostavimo suprotno, tj. $s \neq f(x), \forall x \in [a,b]$
$s > f(x), \forall x \in [a,b]$
Definišimo funkciju $g(x) := \dfrac{1}{s - f(x)}$
$s - f(x) > 0 \Longrightarrow g$ je neprekidna na $[a,b]$
(1) $\Longrightarrow g$ je ograničena, $g(x) \leq M$.
Sa druge strane, važi:
$\forall \varepsilon > 0 : s - \varepsilon$ više nije majoranta $\Longrightarrow \exists x_0 \in [a,b] : f(x_0) > s - \varepsilon$

$f(x_0) > s - \varepsilon$
$0 < s - f(x_0) < \varepsilon$
$g(x_0) = \dfrac{1}{s - f(x_0)} > \dfrac{1}{\varepsilon}$
za $\varepsilon < 1/M, \exists x_0$ takvo da je $g(x_0) \geq M \Longrightarrow g$ nije ograničena. $(\perp)$

$\square$.

Zaključak: Ako je $f : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$ neprekidna funkcija, onda sledi $f([a, b]) = [\underbrace{f_{min}}_{=min_{[a,b]}f}, \underbrace{f_{max}}_{=max_{[a,b]}f}] = D$.

D je interval zbog KBT.
$min_{[a,b]}f$ i $max_{[a,b]}f$ postoje zbog VAJER.

Zadatak 1: Odrediti $f([a, b])$.
1) $f(x) = x^2,\ [a, b] = [1, 4]$
2) $f(x) = x^2,\ [a, b] = [-2, -1]$
3) $f(x) = x^2,\ [a, b] = [-2, 5]$
4) $f(x) = \sin x,\ [a, b] = [0, \dfrac{3\pi}{2}]$

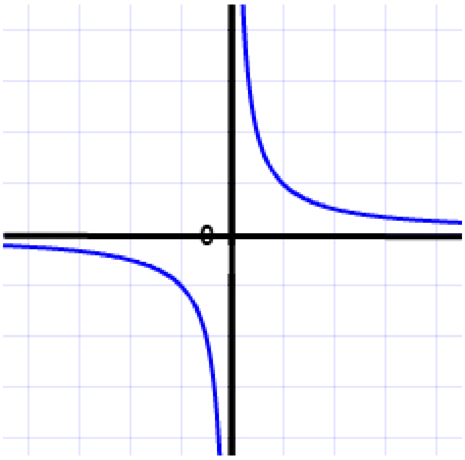
Rešenje:

4.3 Vrste prekida

DEFINICIJA 1. Ako je $x_0 \in D_f$, onda je ona tačka prekida ako f nije neprekidna u tački x_0

Primer 1: i) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

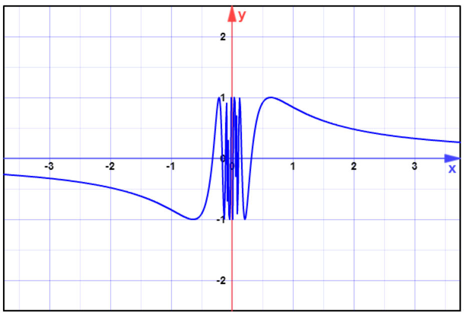
Tačka $x_0 = 0$ je tačka prekida funkcije $f(x)$ jer ne postoji $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$



Slika 4.17.

ii) $f(x) = \begin{cases} \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

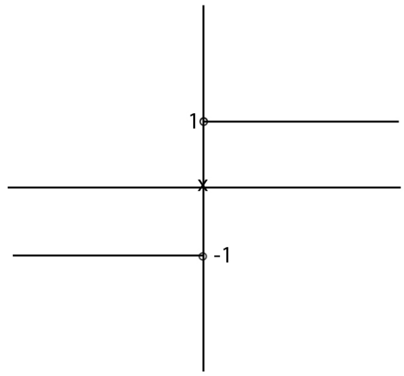
Tačka $x_0 = 0$ je prekid jer ne postoji konačan limes funkcije $f(x)$.



Slika 4.18.

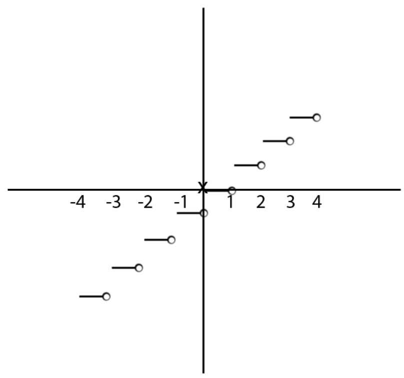
iii) $f(x) = \operatorname{sgn} x$

Tačka $x_0 = 0$ je prekid jer je $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1$, a $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -1$.



Slika 4.19.

iv) $f(x) = [x]$
Za svako $x_0 \in \mathbf{Z}$, x_0 je tačka prekida funkcije jer je
$\lim\limits_{x \to n^+} f(x) = n = [n] = f(n)$ — neprekidna je zdesna,
a $\lim\limits_{x \to n^-} f(x) = n - 1 \neq [n]$ — nije neprekidna sleva



Slika 4.20.

Definicija 2. Neka je tačka x_0 tačka prekida funkcije f. Kažemo da je:
(1) tačka x_0 *prekid prve vrste* ako $\exists \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) \in \mathbf{R}$ i $\exists \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) \in \mathbf{R}$
(2) tačka x_0 *prekid druge vrste* ako nije prekid prve vrste.

U primeru 1, x_0 je prekid:
i) i *ii*) II vrste
iii) i *iv*) I vrste

Napomena: Ako je x_0 prekid prve vrste i važi $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$, onda se x_0 nekada naziva *otklonjiv prekid*.

5 Neprekidnost monotone i inverzne funkcije

Kada posmatramo osobine nekih funkcija, mi uglavnom posmatramo one funkcije f tako da $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$. Ipak, za neke funkcije biće nam potrebno da suzimo domen ili kodomen ukoliko želimo da nam za funkciju važi ta neka osobina. Pogledajmo primere nakon sledeće implikacije:

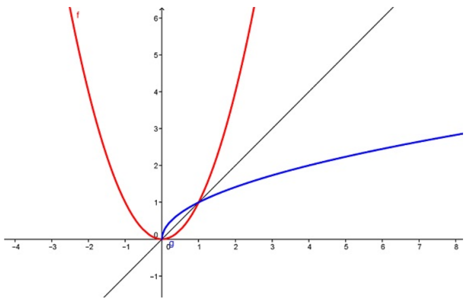
Ako je f strogo monotona $\Longrightarrow f$ je ,,1-1"$(x \neq y \Longrightarrow f(x) \neq f(y))$

Primer 1:
i) $f(x) = x^2$
$\circ f(x)$ nije monotona na $\mathbf{R}$.
$\circ f(x)$ jeste monotona na $\mathbf{R}^+$ (suzili smo D_f) $\Longrightarrow f$ jeste ,,1-1"

Slično:
$\circ f(x)$ nije ,,na"ako $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$
$\circ f(x)$ jeste ,,na"ako $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^+$

Iz svega ovoga možemo zaključiti da je $f(x)$ bijekcija na $f : \mathbf{R}^+ \longrightarrow \mathbf{R}^+$.

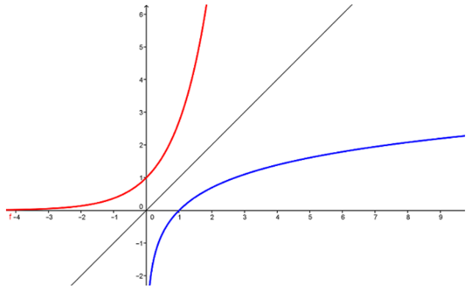
Osobina funkcije f i njene inverzne funkcije f^{-1}: simetrične su u odnosu na pravu $y = x$.



Slika 5.1.

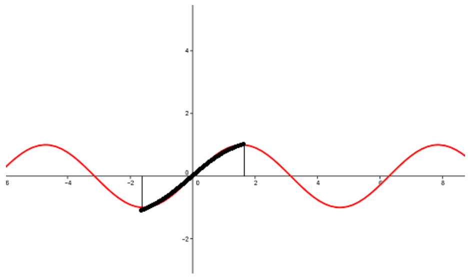
Ako grafik neke funkcije označimo Γ, onda je:
$\Gamma_f = \{(x, f(x))\}$
$\Gamma_{f^{-1}} = \{(f(x), x)\}$
$(x_0, y_0) \in \Gamma_f \Longleftrightarrow f(x_0) = y_0 \Longleftrightarrow x_0 = f^{-1}(y_0) \Longleftrightarrow (y_0, x_0) \in \Gamma_{f^{-1}}$

ii) $f(x) = e^x$, $f : \mathbf{R} \longrightarrow (0, +\infty)$ je bijekcija



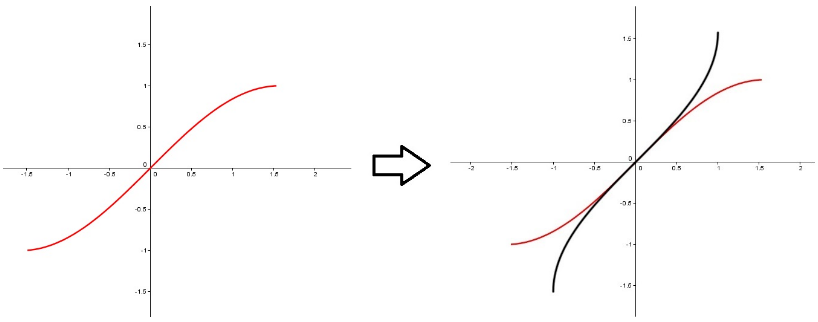
Slika 5.2.

iii) $f(x) = \sin x$



Slika 5.3.

Ako smanjimo $D_f = \mathbf{R}$ na $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, tu će funkcija biti ,,1-1".

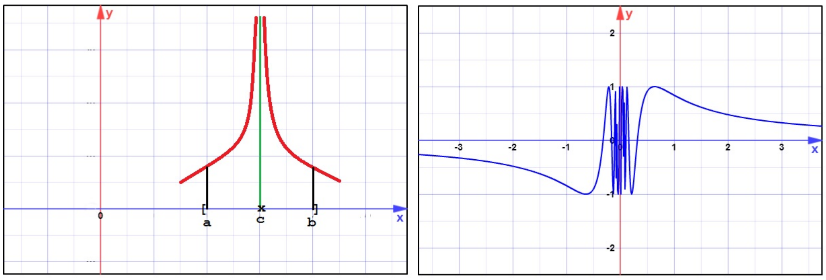


Slika 5.4.

Ukoliko smanjimo Cod_f na $[-1,1] \Longrightarrow f : \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1,1]$ je bijekcija.

Domaći:
iv) $f(x) = \cos x,\ \ f : [0, \pi] \longrightarrow [-1,1]$ je bijekcija.
v) $f(x) = \operatorname{tg} x,\ \ f : \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \mathbf{R}$ je bijekcija.
(Pomoć: $f^{-1}(x) = \operatorname{arctg} x,\ \ f : \mathbf{R} \longrightarrow \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$.)

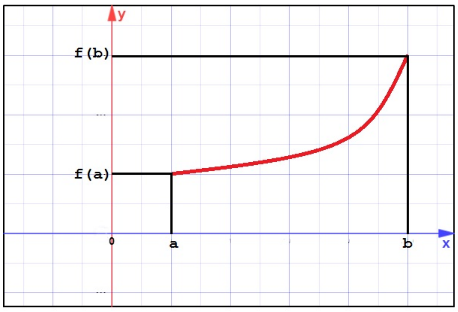
<u>STAV</u>: Monotona funkcija $f : [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ može imati samo prekide I vrste.



Slika 5.5. Funkcije na obe slike imaju prekide 2. vrste, ali nisu u kontradikciji sa teoremom

Dokaz:

f je monotona $\Longrightarrow f(x)$ je između $f(a)$ i $f(b)$

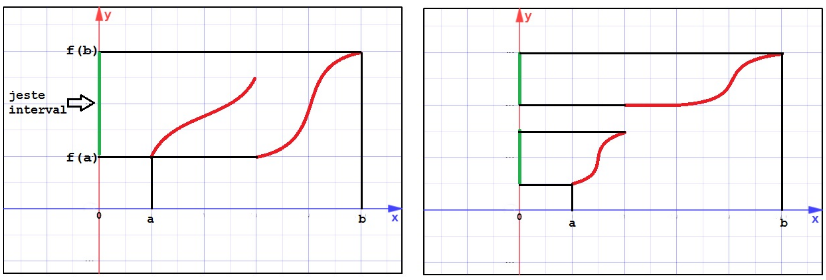


Slika 5.6.

$\forall x_0 \in [a,b]$, $\exists \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ i $\exists \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ zbog stava o limesu monotone funkcije.

$\square$.

,,Neprekidna slika intervala je interval”. (Ne važi obrnuto!)



Slika 5.7.

TEOREMA 5.1. *Neka je funkcija $f:[a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ monotona. Tada je f neprekidna akko je $f([a,b])$ interval.*

$f([a,b]) = [\alpha, \beta],\ \alpha, \beta \in \{f(a), f(b)\}$.

$f \nearrow \implies \ \alpha = f(a),\ \beta = f(b)$
$f \searrow \implies \ \alpha = f(b),\ \beta = f(a)$

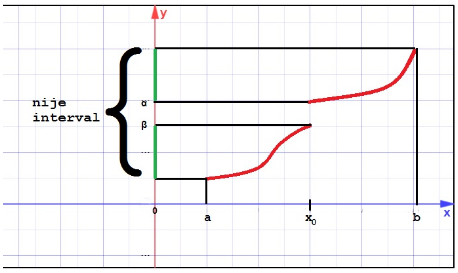
Dokaz: (zbog *akko* razbijamo na desni i levi smer)

($\Longrightarrow$) „f je neprekidna $\Longrightarrow f([a,b])$ je interval".

Ovo važi čak i kad funkcija f nije monotona (iz Teoreme o međuvrednosti.)

($\Longleftarrow$) Ukoliko pokažemo da ako je f monotona i prekidna, onda $f([a,b])$ nije interval, onda smo dokazali da važi u levom smeru (zahvaljujući kontrapoziciji).

Pretpostavimo da je funkcija f rastuća (u slučaju da je opadajuća, možemo definisati funkciju $g(x) =_{def} -f(x)$, pa dokaz ide potpuno isto, samo za funkciju $g(x)$).
Ako je x_0 prekid $(STAV) \Longrightarrow x_0$ je prekid prve vrste.



Slika 5.8.

$\alpha = f(x_0^-) < f(x_0^+) = \beta$ (ne može da bude $\leq$ jer smo pretpostavili da je prekid)
$f(x_0) \in [\alpha,\ \beta]$
$f(a) \leq \alpha < \beta \leq f(b) \Longrightarrow f([a,b])$ nije interval.

Zašto, osim $f(x_0)$, ništa u intervalu $[\alpha, \beta]$ nije nastalo kao slika (nije oblika $f(x)$)?
To jednostavno važi jer:
$x \in [a,\ x_0] \ \Longrightarrow f(x) \leq \alpha$
$x \in [x_0,\ b] \ \Longrightarrow f(x) \geq \beta$

$\square$.

Napomena: Važi sledeće:
$f \nearrow$ i $\exists f^{-1} \Longrightarrow f^{-1} \nearrow$
$f \searrow$ i $\exists f^{-1} \Longrightarrow f^{-1} \searrow$

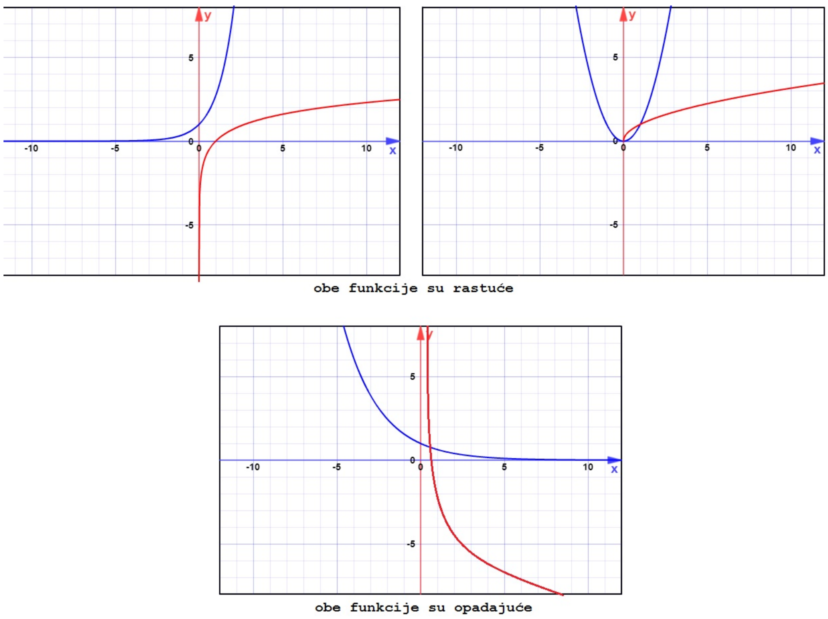
Dokaz:

Ako pretpostavimo $f \nearrow$, a f^{-1} ne raste:
$\exists y_1 < y_2$
$\underbrace{f^{-1}(y_1)}_{x_1} \geq \underbrace{f^{-1}(y_2)}_{x_2},\ (y_1 = f(x_1),\ y_2 = f(x_2))$

$x_1 \geq x_2$
$f(x_1) < f(x_2)(\perp)$

$\square$.

Primeri:



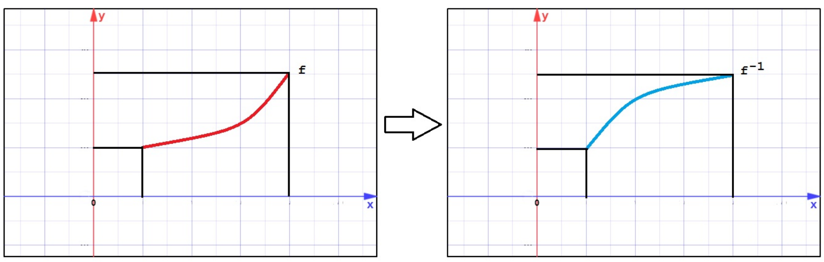
Slika 5.9.

TEOREMA 5.2. Ako je $f : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$ strogo monotona, tada je f^{-1} takođe neprekidna.

Dokaz:

Neka je $f \nearrow$ i važi $f([a, b]) = \overbrace{[f(a), f(b)]}^{[\alpha,\beta]}$.
f^{-1} je takođe $\nearrow$ i $f^{-1}([\alpha, \beta]) = [a, b]$.
$(T\ 5.2.) \Longrightarrow f^{-1}$ je neprekidna.

$\square$.



Slika 5.10.

Posledica: Dokazali smo da su inverzne funkcije polinoma, trigonometrijske funkcije, kao i sve njihove kombinacije neprekidne. Na osnovu T 5.2. sledi da su $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x}$, $\sqrt[n]{x}$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$ takođe neprekidne.

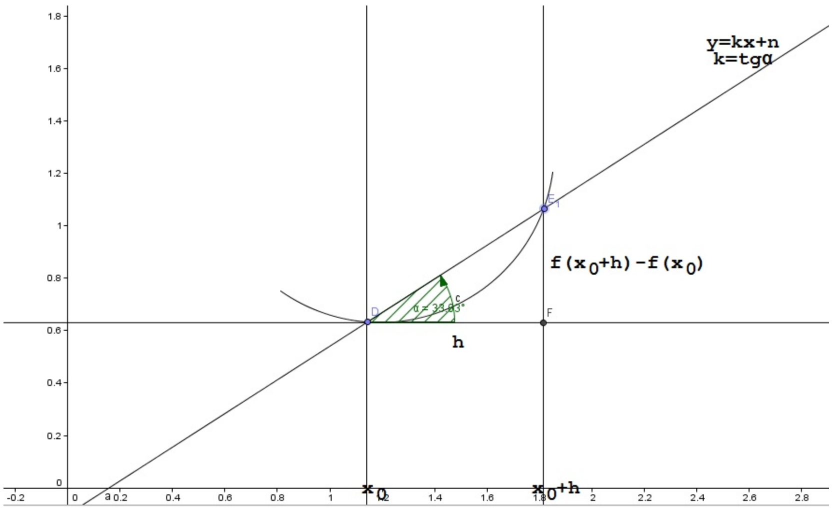
Ostalo nam je da pokažemo da važi:
a^x je neprekidna $\Longrightarrow \log_a x$ je neprekidna
e^x je neprekidna $\Longrightarrow \ln x$ je neprekidna

ŠESTA NEDELJA

6 Izvodi

6.1 Definicija izvoda

Uzmimo tačku $x_0 \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \subseteq D_f$. Posmatramo količnik $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, u kojem ono što je u brojiocu $(f(x_0+h)-f(x_0))$ nazivamo ,,priraštaj funkcije", a ono što je u imeniocu (h) nazivamo ,,priraštaj promenljive".



Slika 6.1. Definicija izvoda

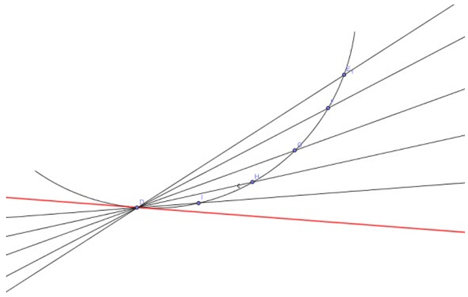
Posmatrani količnik je $\operatorname{tg}\alpha$. Ako postoji limes ovog količnika, kada $h \to 0$, onda taj limes nazivamo ,,izvod" funkcije f u tački x_0, u oznaci $f'(x_0)$. Prava $y = kx+n,\ k = \operatorname{tg}\alpha$ je sečica funkcije f u x_0.

$$f'(x) =_{def} \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

6.2 Interpretacije izvoda

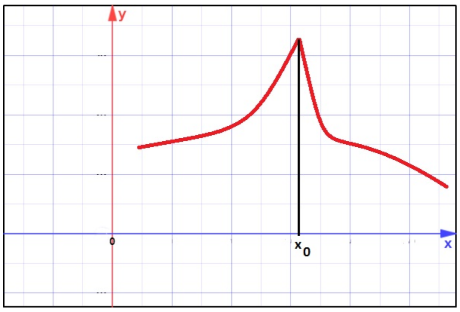
6.2.1 Geometrijska interpretacija izvoda

Geometrijska interpretacija izvoda je koeficijent $k = \operatorname{tg}\alpha$ pravca tangente na grafik u tački $(x_0, f(x_0))$.



Slika 6.2. Geometrijska interpretacija izvoda

Ukoliko je na grafiku vidljiv šiljak u tački x_0, onda funkcija nije diferencijabilna u toj tački.



Slika 6.3.

6.2.2 Mehanička interpretacija izvoda

t – vreme
$f(t)$ – pređeni put za vreme t

Količnik $\dfrac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}$ ili $\dfrac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$ je srednja brzina (što se označava $V = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$), a $f'(t_0)$ je trenutna brzina.

6.3 Neki izvodi

1) $\boxed{f(x) = c,\ f'(x) = 0}$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

2) $\boxed{f(x) = x^n,\ f'(x) = n \cdot x^{n-1},\ n \in \mathbf{N}}$

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \ldots + h^n - x^n}{h} =$$
$$\lim_{h\to 0} \left(\binom{n}{1} x^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2}h + \ldots + h^{n-1} \right) = \lim_{h\to 0} \binom{n}{1} x^{n-1} = n \cdot x^{n-1}$$

3) $\boxed{f(x) = e^x,\ f'(x) = e^x}$

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^x(e^h-1)}{h} = \left|znamo: \lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1\right| = e^x$$

4) $\boxed{f(x)=\ln x,\ f'(x)=\frac{1}{x},\ x>0}$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\ln\frac{x+h}{x}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+\frac{h}{x})}{\frac{h}{x}}\cdot\frac{1}{x} = \left|\begin{array}{c} smena: \ t=\dfrac{h}{x} \\ h\to 0 \Longleftrightarrow t\to 0\end{array}\right| =$$

$$\frac{1}{x}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t} = \frac{1}{x}$$

5) $\boxed{f(x)=x^\alpha,\ \alpha\in\mathbf{R},\, x>0}$

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^\alpha-x^\alpha}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x^\alpha\left[\left(\frac{x+h}{x}\right)-1\right]}{h} = x^\alpha\cdot\frac{1}{x}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\left(1+\frac{h}{x}\right)^\alpha-1}{\frac{h}{x}}\cdot\frac{1}{x} =$$

$$\left|\begin{array}{c} smena: \ t=\dfrac{h}{x} \\ h\to 0 \Longleftrightarrow t\to 0\end{array}\right| = x^{\alpha-1}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{(1+t)^\alpha-1}{t} = \alpha\cdot x^{\alpha-1}$$

6) $\boxed{f(x)=\sin x,\ f'(x)=\cos x}$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2\sin\frac{x+h-x}{2}\cos\frac{x+h+x}{2}}{h} = \underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}_{\to \cos x} =$$

$\cos x$

7) $\boxed{f(x)=\cos x,\ f'(x)=-\sin x}$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-2\sin\frac{h}{2}\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h} = -\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\lim_{h\to 0}\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)}_{\to \sin x} =$$

$-\sin x$

6.4 Diferencijabilnost funkcije

Definicija 1. Kažemo da je f diferencijabilna u tački x_0 ako $\exists f'(x_0)$.

Posmatrajmo funkciju $f(x)=|x|,\ x_0=0$. $f'(x_0)$ ne postoji jer:
$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \dfrac{|h-0|-0}{h} = \dfrac{|h|}{h} = \dfrac{\text{sgn}(h)\cdot h}{h} = \text{sgn}(h)$, a funkcija $\text{sgn}\, x$ nema limes kad $x\to 0$.

Definicija 2. Ako $\exists \lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, onda se on zove desni izvod, u oznaci $f'_+(x_0)$. Ako $\exists \lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, onda se on zove levi izvod, u oznaci $f'_-(x_0)$.

Primer 1: $f(x)=|x|$:
$\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = 1$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = -1.$$

<u>Napomena</u>:

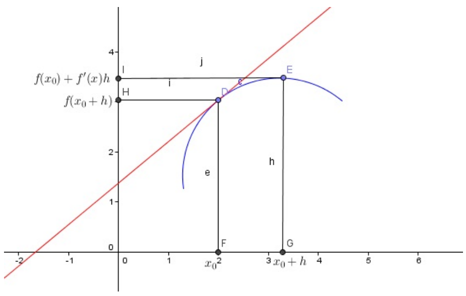
$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \iff f(x_0+h) = f(x_0)+f'(x_0)h+\boldsymbol{o}(h),\ h\to 0$$

Šta znači $\alpha(h) \to A,\ h \to 0$? To je isto što i:
$\alpha(h) - A \to 0,\ h \to 0$
$\Updownarrow$
$\alpha(h) - A = \boldsymbol{o}(1),\ h \to 0$
$\alpha(h) = A + \boldsymbol{o}(1),\ h \to 0$

Primenimo ovo na: $\alpha(h) = \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},\ A = f'(x_0)$:

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$
$\Updownarrow$
$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0) + \boldsymbol{o}(1)\ /\cdot h,\ h \to 0$$
$$f(x_0+h)-f(x_0) = f'(x_0)h + \boldsymbol{o}(h),\ h \to 0$$
$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \boldsymbol{o}(h),\ h \to 0$$

$f(x_0) + f'(x_0)h$ je zapravo prava koja aproksimira $x_0 + h$ po h
$\Updownarrow$
$f(x_0+h) \approx f(x_0) + f'(x_0)h$, za malo h



Slika 6.4.

<u>STAV</u>: Funkcija f je diferencijabilna u $x_0 \implies f$ je neprekidna u x_0 (zapisano oznakama: $f\mathcal{D}x_0 \implies f\mathcal{C}x_0$)

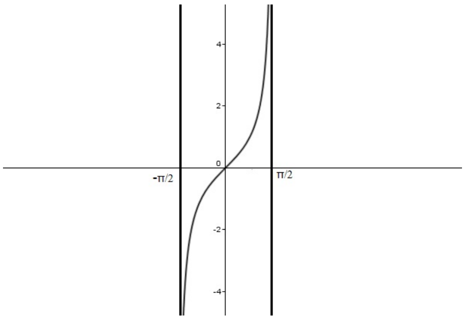
Dokaz:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \boldsymbol{o}(h),\ h \to 0\ /\lim_{h\to 0}$$
$$\lim_{h\to 0} f(x_0+h) = \lim_{h\to 0}(f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)h}_{\to 0} + \underbrace{\boldsymbol{o}(h)}_{\to 0})$$
$$\lim_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$$

$\square$.

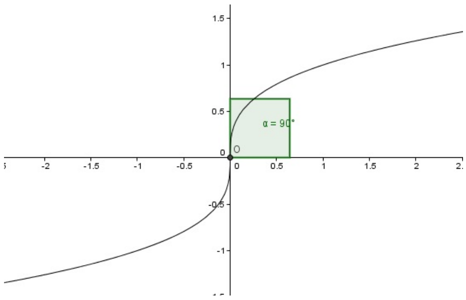
Napomena: Ako se ne naglasi, onda je f diferencijabilna u x_0 ako $\exists f'(x_0) \in \mathbf{R}$ (možemo da proširimo i na $\bar{\mathbf{R}}$).

Napomena: Šta geometrijski mozhe da predstavlja $\operatorname{tg}\alpha = f'(x_0) = +\infty$? Odgovor: vertkalnu tangentu, jer tg ima u $\frac{\pi}{2}$ vertikalnu asimptotu (videti Sliku 6.5.)



Slika 6.5. $\lim\limits_{\alpha \to \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg}\alpha = +\infty$

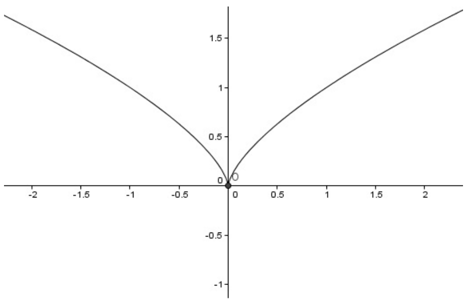
Primer 2:
i) $f(x) = \sqrt[3]{x}$



Slika 6.6.

Tangenta krive $\sqrt[3]{x}$ je y–osa, odnosno, prava $x = 0$ jer:
$f'(0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{h} - \sqrt[3]{0}}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \left(\dfrac{1}{h^{\frac{2}{3}}} \right) = +\infty$, ako posmatramo u proširenom smislu.

ii) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$



Slika 6.7.

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{h^2} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{h}} \begin{matrix} \nearrow & +\infty, \ h \to 0^+ \\ \searrow & -\infty, \ h \to 0^- \end{matrix},$$

pa u ovom slučaju ne postoji tangenta ni u osnovnom, a ni u proširenom smislu.

Ni jedna od ovih funkcija nije diferencijabilna u osnovnom smislu.

Moguće je i da $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ bude jednak $+\infty$ a da f nije ni neprekidna (npr. $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $x_0 = 0$), u tom slučaju nema govora o tangenti.

6.5 Pravila izvoda

STAV 1: Neka važi $f, g\mathcal{D}x_0$. Tada važi sledeće:

$$\left.\begin{array}{l} (1)\ (f+g)\mathcal{D}x_0 \text{ i } (f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0) \\ (2)\ cf\mathcal{D}x_0 \text{ i } (cf)'(x_0) = c \cdot f'(x_0) \end{array}\right\} \begin{array}{c} \text{linearnost operatora} \\ \text{izvoda na} \\ \text{prostoru diferencijabiilnih funkcija} \end{array}$$

(3) $(f \cdot g)\mathcal{D}x_0$ i $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$

(4) Ako $g(x) \neq 0$, onda $\frac{f}{g}\mathcal{D}x_0$ i $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0)}{g^2(x_0)}$

Dokaz: (dokazi za (1) i (2) se izvode na osnovu linearnosti operatora limesa)

(1) $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) + g(x_0+h) - (f(x_0) + g(x_0))}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} + \lim\limits_{h\to 0} \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} =$
$f'(x_0) + g'(x_0)$

□.

(2) slično kao u (1)

□.

(3) $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) \cdot g(x_0+h) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{h} =$
$\lim\limits_{h\to 0} \left[\frac{f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0+h)}{h} + \frac{f(x_0)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0)}{h}\right] =$
$\lim\limits_{h\to 0} \left[\underbrace{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}_{= f'(x_0)} \cdot \underbrace{g(x_0+h)}_{\to g(x_0)} + f(x_0) \cdot \underbrace{\frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}}_{= g'(x_0)}\right] = f'(x_0) \cdot g(x_0) +$
$f(x_0) \cdot g'(x_0)$

(4) Izvod od $\frac{1}{g}$ je:

$$\left(\frac{1}{g(x_0)}\right)' = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{g(x_0+h)} - \frac{1}{g(x_0)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{g(x_0) - g(x_0+h)}{g(x_0+h) \cdot g(x_0) \cdot h} =$$

$$-\underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{1}{g(x_0+h) \cdot g(x_0))}}_{\frac{1}{g^2(x_0)}} \cdot \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}}_{= g'(x_0)} = -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

$\left(\dfrac{f(x_0)}{g(x_0)}\right)' = \left(f(x_0) \cdot \dfrac{1}{g(x_0)}\right)' \stackrel{(3)}{=} f'(x_0) \cdot \dfrac{1}{g(x_0)} + f(x_0) \cdot \left(\dfrac{1}{g(x_0)}\right)' = \dfrac{f'(x_0)}{g(x_0)} -$
$\dfrac{f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)} = \dfrac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}$

8) $\boxed{f(x) = \operatorname{tg} x,\ f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}}$

$(\operatorname{tg} x)' = \left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)' = \dfrac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

9) $\boxed{f(x) = \operatorname{ctg} x,\ f'(x) = -\dfrac{1}{\sin^2 x}}$

$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\dfrac{\cos x}{\sin x}\right) = \dfrac{(\cos x)' \sin x - \cos x (\sin x)'}{\sin^2 x} = \dfrac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x}$

6.6 Izvod složene i inverzne funkcije

6.6.1 Izvod složene funkcije

$$g(f(x))' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

STAV 2: Neka je $f\mathcal{D}x_0,\ f(x_0) = y_0,\ g\mathcal{D}y_0$. Tada je $(g \circ f)\mathcal{D}x_0$ i $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$

Neformalan dokaz:

$$g(f(x_0))' = \lim \frac{g(f(x_0 + h)) - g(f(x_0))}{h} = \lim \frac{g(\overbrace{f(x_0 + h)}^{y_o+k}) - g(\overbrace{f(x_0)}^{y_0})}{\underbrace{f(x_0 + h)}_{y_0+k} - \underbrace{f(x_0)}_{y_0}} \cdot \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} =$$
...

Biramo $k := f(x_0 + h) - f(x_0)$

$\ldots = \underbrace{\lim \dfrac{g(y_o + k) - g(y_0)}{k}}_{= g'(y_0)} \cdot \underbrace{\lim \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}_{= f'(x_0)} = g'(y_0) \cdot f'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot$
$f'(x_0)$

Zbog ponašanja funkcije f u okolini tačke x_0, nekada ne smemo da napišemo $\dfrac{1}{f(x_0 + h) - f(x_0)}$, na primer, ukoliko je funkcija konstantna u okolini tačke x_0.

Formalan dokaz:

$g(f(x_0+h)) - g(f(x_0)) = \boxed{\quad A \quad} \cdot h + \boldsymbol{o}(h),\ h \to 0$
Ono što dobijemo na mestu A je zapravo $(g \circ f)'(x_0)$.

Neka je $k := f(x_0+h) - f(x_0)$ $(= f'(x_0) \cdot h + \boldsymbol{o}(h))$, onda je $f(x_0+h) = y_0 + k$.
S obzirom da je funkcije f neprekidna, važi $h \to 0 \Longrightarrow k \to 0$

$$
\begin{aligned}
&g(f(x_0+h)) - g(f(x_0)) = \\
&= g(y_0+k) - g(y_0) = \\
&= g'(y_0) \cdot k + \boldsymbol{o}(k) = \\
&= g'(f(x_0)) \cdot [f(x_0+h) - f(x_0)] + \boldsymbol{o}(k) = \\
&= g'(f(x_0)) \cdot [f'(x_0) \cdot h - \underbrace{\boldsymbol{o}(h)] + \boldsymbol{o}\left(f'(x_0) \cdot h + \boldsymbol{o}(h)\right)}_{= \ \boldsymbol{o}(h)} = \\
&g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) \cdot h + \boldsymbol{o}(h)
\end{aligned}
$$

Dobili smo:
$g(f(x_0+h)) - g(f(x_0)) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) \cdot h + \boldsymbol{o}(h)$, odnosno:
$(g \circ f)(x_0+h) = g \circ f(x_0) + \boxed{g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)} \cdot h + \boldsymbol{o}(h),\ h \to 0$
$\Longrightarrow g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$ je izvod od $g \circ f$

$\square$.

Primer 3: Naći izvod funkcije $f(x) = a^x$.

$$(a^x)' = (e^{\ln a^x})' = (e^{x \ln a})' = e^{x \ln a} \cdot (x \ln a)' = a^x \cdot \ln a$$

10) $\boxed{f(x) = a^x,\ f'(x) = a^x \cdot \ln a}$

Primer 4: Naći izvode funkcija:
a) $f(x) = \sin\left(x^2 e^x - \dfrac{a^x}{\ln(\cos x)}\right)$

$f'(x) = \cos\left(x^2 e^x - \dfrac{a^x}{\ln(\cos x)}\right) \cdot \left(x^2 e^x - \dfrac{a^x}{\ln(\cos x)}\right)' = \cos\left(x^2 e^x - \dfrac{a^x}{\ln(\cos x)}\right) \cdot$
$\left(2xe^x + x^2 e^x - \dfrac{a^x \ln a \ln(\cos x) - a^x \cdot \frac{-\sin x}{\cos x}}{(\ln(\cos x))^2}\right)$

b) $f(x) = x^x$

$$f'(x) = (x^x)' = (e^{x \ln x})' = e^{\ln x^x} \cdot (x \ln x)' = x^x \cdot \left(\ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right) = x^x \cdot (\ln x + 1)$$

c) $h(x) = f(x)^{g(x)}$

$h'(x) = (f(x)^{g(x)})' = (e^{g(x) \ln f(x)})' = f(x)^{g(x)} \cdot (g(x) \ln f(x))' = f(x)^{g(x)} \cdot$
$(g'(x) \ln f(x) + \dfrac{g(x)}{f(x)} f'(x))$

6.6.2 Izvod inverzne funkcije

STAV 3: Neka je $f \mathcal{D} x_0$ i $\exists f^{-1} \mathcal{D} y_0$ takva da je inverzna funkciji f na $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Neka je $g = f^{-1},\ f(x_0) = y_0$ i $g \mathcal{D} y_0$ i $f'(x_0) \neq 0$. Tada je: $g'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$

ili, preciznije $g'(y_0) = \dfrac{1}{f'(g(y_0))}$

Dokaz:

$$(g \circ f)(x) = x \;/'$$
$$g'(\underbrace{f(x_0)}_{y_0}) \cdot f'(x_0) = 1$$
$$\Longrightarrow g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

$\square$.

SEDMA NEDELJA

$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) \Longrightarrow$ za $g = f^{-1}$ važi

$$\left.\begin{array}{r} x = f(y) \\ y = g(x) \\ g'(y) = \dfrac{1}{f'(x)} \end{array}\right\} \Longrightarrow g'(y) = \frac{1}{f'(f(y))}$$

Posledica:

1. $(\arcsin(x))' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
2. $(\arccos(x))' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
3. $(\mathrm{arctg}(x))' = \dfrac{1}{1+x^2}$
4. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$
5. $\sqrt{x} = \dfrac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$

Dokazi:

1. $f(x) = \arcsin(x) = y$, $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
   $x = \sin(y) = g(y)$, $x \in [-1, 1]$
   $f'(x) = \dfrac{1}{g'(y)} = \dfrac{1}{\cos(y)}$
   $\sin(y) = \sin(x)$
   $1 - \sin^2(y) = 1 - x^2$
   $\cos^2(x) = 1 - x^2$
   $\cos(y) = +\sqrt{1-x^2}$, $+$ jer je y ugao u prvom ili četvrtom kvadrantu, a *cos* je tu pozitivan

   $\square$.

2. $f(x) = \arccos(x) = y$, $x \in [-1, 1]$
   $\cos(y) = x = g(y)$, $y \in [0, \pi]$
   $f'(x) = \dfrac{1}{g'(y)} = \dfrac{1}{-\sin(y)}$
   $1 - \cos^2(y) = 1 - x^2$
   $\sin^2(y) = 1 - x^2$
   $\sin(y) = +\sqrt{1-x^2}$, $+$ jer je y ugao u prvom ili drugom kvadrantu, a tu je *sin* pozitivan

   $\square$.

3. $f(x) = \mathrm{arctg}(x) = y \Longleftrightarrow x = tg(y) = g(y)$, $x \in \mathbf{R}, y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

/------------------------------

$t = \mathrm{tg}(x)$

$$\cos^2(x) = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(x)}} = \frac{1}{\frac{\sin^2(x)+\cos^2(x)}{\cos^2(x)}} = \frac{1}{\mathrm{tg}^2(x)+1} = \frac{1}{t^2+1}$$

$$\sin^2(x) = 1-\cos^2(x) = 1-\frac{1}{t^2+1} = \frac{t}{t^2+1}$$

------------------------------/

$$f'(x) = \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{tg(y)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(x)}} = \frac{1}{x^2+1}$$

$\square$.

4. $y = \ln x = f(x)$
   $x = e^y = g(y)$
   $$f'(x) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}$$

   $\square$.

7 Osnovne teoreme diferencijalnog računa

7.1 Fermaova teorema

Definicija Tačka $x_0 \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq D_f$, kažemo da je x_0:

- lokalni maksimum ako $\exists \delta_1$ tako da je $f(x_0) \geq f(x)\ \forall x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$.
- lokalni minimum ako $\exists \delta_1$ tako da je $f(x_0) \leq f(x)\ \forall x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$.
- strogi maksimum ako $\exists \delta_1$ tako da je $f(x_0) > f(x)\ \forall x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$.
- strogi minimum ako $\exists \delta_1$ tako da je $f(x_0) < f(x)\ \forall x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$.

Lokalni ekstremum je lokalni maksimum ili lokalni minimum.
Napomena: Da bismo definisali lokalni ekstremum ne mora da $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq D_f$, to nam treba za izvod. Može samo: $x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1) \cap D_f \Rightarrow f(x_0) \geq f(x)$.

Teorema 7.1 (Ferma) $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq D_f$
Neka je funkcija f diferencijabilna u $x_0(\exists f'(x_0))$ i ima lokalni ekstremum u $x_0 \Longrightarrow f'(x_0) = 0$.

Dokaz: Pretpostavimo da je $x_0 = max$ (za minimum se radi slično).
$f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$

$$f'_+(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{\overbrace{f(x_0 + h) - f(x_0)}^{\leq 0}}{\underbrace{h}_{\geq 0}} \leq 0$$

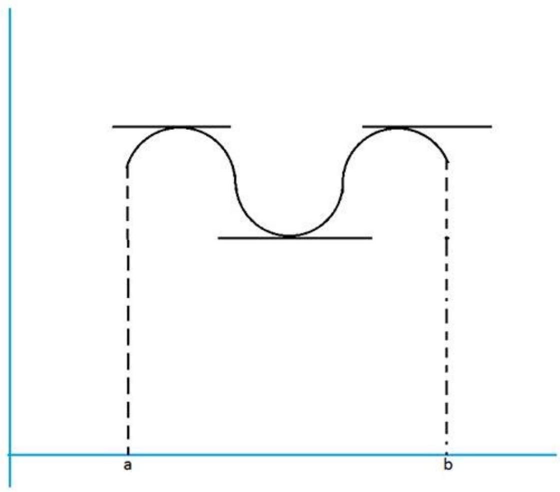
$$f'_-(x_0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{\overbrace{f(x_0 + h) - f(x_0)}^{\geq 0}}{\underbrace{h}_{\geq 0}} \geq 0\ f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$$

$f'_+(x_0) \leq 0 \wedge f'_-(x_0) \geq 0 \Longrightarrow f'(x_0) = 0$

7.2 Tri teoreme o srednjoj vrednosti

7.2.1 Rolova teorema

Neka je funkcija $f : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$ neprekidna i diferencijabilna na (a, b), i $f(a) = f(b)$. Tada $\exists c \in (a, b)$ tako da je $f'(c) = 0$.



Dokaz: $f : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$ je neprekidna, na osnovu Vajerštrasove teoreme, funkcija dostiže svoj maksimum i minimum.

I slučaj: $x_{max}, x_{min} \in \{a, b\}$, to znači da je $f(a) = f(b) = x_{max} = x_{min}$. Ako ima istu vrednost za minimum i maksimum znači da je $f(x) = const \Longrightarrow f'(x) = 0,\ \forall x$.

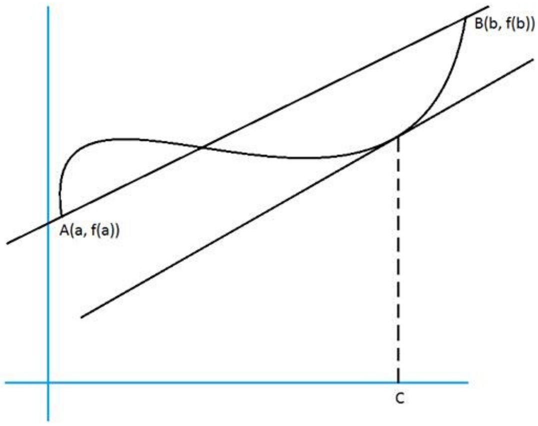
II slučaj: Ili x_{max} ili $x_{min} \in (a, b)$, na osnovu Fermaove teoreme $f'(x_{max}) = 0$ ili $f'(x_{min}) = 0$

$\square$.

7.2.2 Lagranževa teorema

Neka je funkcija $f : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$ neprekidna i diferencijabilna na (a, b), i $f(a) = f(b)$. Tada $\exists c \in (a, b)$ tako da je $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$

Geometrijska interpretacija



$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ je koeficijent pravca prave kroz a i b. Postoji tačka c tako da tangenta kroz nju bude paralelna u odnosu na pravu kroz $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$

Fizička interpretacija

Postoji tačka u kojoj se srednja brzina $(\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a})$ poklapa sa trenutnom $(f'(c))$

Dokaz:

$F(x) := f(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot x$

Ideja: Nova funkcija koja će da „iskrivi" funkciju f, na nju primenjujemo Rolovu teoremu.

Treba da proverimo:

1. $F(x)$ je neprekidna na $[a, b]$ i diefencijabilna na (a, b).
2. $F(a) = F(b)$

   $F(a) = f(a) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot b = \dfrac{(b-a)\cdot f(b) - b\cdot f(b) + a \cdot f(b)}{b-a} = \boxed{\dfrac{b\cdot f(a) - a\cdot f(b)}{b-a}}$

   $F(b) = f(b) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot b = \dfrac{(b-a)\cdot f(b) - b\cdot f(b) + b \cdot f(b)}{b-a} = \boxed{\dfrac{b\cdot f(a) - a\cdot f(b)}{b-a}}$

   Pošto važi jednakost, po Rolovoj teoremi $\exists c$ tako da je $F'(c) = 0$

   $F'(x) := f'(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

   $F'(c) = 0 \iff f'(c) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0 \iff f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$\square$.

Posledica: Funkcija je diferencijabilna na (a, b)

1. $f'(x) = 0, \forall x \in (a, b) \Longrightarrow f = const$

2. $f'(x) \geq 0 \; \forall x \in (a, b) \Longrightarrow f \nearrow$
   $f'(x) > 0 \; \forall x \in (a, b) \Longrightarrow f strogo \nearrow$

3. $f'(x) \leq 0 \; \forall x \in (a, b) \Longrightarrow f \searrow$
   $f'(x) < 0 \; \forall x \in (a, b) \Longrightarrow f strogo \searrow$

Dokaz: Direktno iz Lagranževe teoreme
$x_1, x_2 \in (a, b)$, $x_1 < x_2$
$\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$ za neko $c \in (x_1, x_2)$
$f(x_2) - f(x_1) = f'(c) \cdot (x_2 - x_1)$

1. $f'(x) = 0 \Longrightarrow f(x_2) - f(x_1) = 0$
   $f(x_1) = f(x_2)$, $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$, $f = const$

2. $f'(x) \geq 0$, $\forall x$, $f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(c)}_{\geq 0} \cdot \underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0} \geq \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$, što znači da funkcija raste.

3. $f'(x) \leq 0$, $\forall x$, $f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(c)}_{\leq 0} \cdot \underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0} \leq \Longrightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$, što znači da funkcija opada.

$\square$.

OPREZ!!!

Posledica (kao i Langranževa teorema) se primenjuje na intervale.
(I) $f(x) = [x]$ na $(m, m+1)$, $m \in \mathbf{Z}$, $f'(x) = 0$ na svakom posebnom intervalu je konstanta, ali ne i na celom $\mathbf{R}$.
(II) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $D_f = \mathbf{R}$ 0 nije interval!
$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$ ali funkcija f nije opadajuća na D_f jer $f(-1) = -1 < f(1) = 1$, ali funkcija f jeste opadajuća na $(-\infty, 0)$ i na $(0, \infty)$ nije tačno reći da opada svuda (može da se kaže da opada na svim intervalima).

7.2.3 Košijeva teorema (o srednjim vrednostima diferencijalnog računa)

.
/------------------------------
Kriva se u ravni može zadati na tri načina:

1. eksplicitno (kao grafik), $y = f(x)$, $x \in D_f$

2. implicitno (nekad jeste, nekad nije grafik):
   (a) $x^2 + y^2 = 1$ - krug, nije grafik
   (b) $a \cdot x + b \cdot y + c = 0$ - prava, nekad je grafik, a nekad nije

3. parametarski:
   $x = f(t)$, $y = g(t)$, $t \in T \subseteq \mathbf{R}$

- npr. parametarska jednačina kruga $x(t) = \cos(t)$, $y(t) = \sin(t)$, $t \in [0, 2 \cdot \pi]$
- parametarska jednačina prave kroz tačku (x_0, y_0) sa vektorom pravca (a, b)
  $x = a \cdot t + x_0$
  $y = b \cdot t + y_0$

  $A_0(x(t_0), y(t_0)) = (f(t_0), g(t_0))$
  $A_h(x(t_0+h), y(t_0+h)) = (f(t_0+h), g(t_0+h))$

  $$k_h = \frac{y(t_0+h) - y(t_0)}{x(t_0+h) - x(t_0)} = \frac{g(t_0+h) - g(t_0)}{f(t_0+h) - f(t_0)} = \frac{\frac{g(t_0+h) - g(t_0)}{h}}{\frac{f(t_0+h) - f(t_0)}{h}}$$

  $$\frac{g'(t_0)}{f'(t_0)} = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}$$

-------------------------------/

Teorema 7.2.3: $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$ neprekidna i diferencijabilna na (a, b), $f'(x) \neq 0$ $\forall x \in (a, b)$, tada $\exists c \in (a, b)$ tako da je $\frac{g(b) - g(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{g'(c)}{f'(c)}$

Komentari:

1. $f(b) - f(a) \neq 0$, jer ako bi $f(a) = f(b)$ onda bi po Rolovoj teoremi $\exists c \in (a, b)$ tako da je $f'(c) = 0$
2. geometrijiska interpretacija:
   $x = f(t)$, $y = g(t)$
   $\frac{g(b) - g(a)}{f(b) - f(a)} = k$

   $A(f(a), g(a))$
   $B(f(b), g(b))$

3. Ako u Košijevoj teoremi uzmemo da je $f(x) = x$ dobićemo Lagranževu teoremu.

Dokaz:
$F(x) := (f(b) - f(a)) \cdot g(x) - (g(b) - g(a)) \cdot f(x)$, funkcija F zadovoljava uslove Rolove teoreme:

1. Funkcija F je neprekidna na $[a, b]$ i diferencijabilna na (a, b) jer je nastala of funkcija f i g množenjem konstantom i oduzimanjem
2. $F(a) = (f(b) - f(a)) \cdot g(a) - (g(b) - g(a)) \cdot f(a) = \boxed{f(b) \cdot g(a) - g(b) \cdot f(a)}$
   $F(b) = (f(b) - f(a)) \cdot g(b) - (g(b) - g(a)) \cdot f(b) = \boxed{f(b) \cdot g(a) - g(b) \cdot f(a)}$

   $F(a) = F(b)$, po Rolovoj teoremi sledi da $\exists c \in (a, b)$, tako da je $F'(c) = 0$
   $F'(x) = (f(b) - f(a)) \cdot g'(x) - (g(b) - g(a)) \cdot f'(x)$

$F'(c) = 0$
$\Updownarrow$
$\underbrace{(f(b) - f(a))}_{\neq 0} \cdot g'(c) - (g(b) - g(a)) \cdot \underbrace{f'(c)}_{\neq 0} \ / : f'(c) \cdot (f(b) - f(a))$
$\dfrac{g'(c)}{f'(c)} = \dfrac{g(b) - g(a)}{f(b) - f(a)}$

7.3 Lopitalova pravila

Teorema 7.3: Funkcije $f, g : (a, b) \longrightarrow \mathbf{R}$ su diferencijabilne.
Pretpostavimo da je $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \bar{\mathbf{R}}$. Pretpostavimo i da je $g(x) \neq 0$ i $g'(x) \neq 0$ na (a, b).
Ako je:

1. $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} g(x) = 0$, - oblik $\dfrac{0}{0}$
2. $\lim\limits_{x \to a^+} g(x) = \infty$ - oblik $\dfrac{\infty}{\infty}$, dovoljno je da samo $g(x) \longrightarrow \infty$

tada je $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$

Napomena:

1. važi i ako umesto a^+ piše a^-, dokaz ide isto
2. važi i ako umesto $\lim\limits_{x \to a^+}$ stavimo $\lim\limits_{x \to a}$
3. važi i za $a = \pm\infty$ jer $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} =$ /*uvodimo smenu $t = \dfrac{1}{x}$, $t \longrightarrow 0^+$*/
$= \lim\limits_{t \longrightarrow 0^+} \dfrac{f(\frac{1}{t})}{g(\frac{1}{t})} = \lim\limits_{t \longrightarrow 0^+} \dfrac{f'(\frac{1}{t}) \cdot \frac{-1}{t^2}}{g'(\frac{1}{t}) \cdot \frac{-1}{t^2}} = \lim\limits_{t \longrightarrow 0^+} \dfrac{f'(\frac{1}{t})}{g'(\frac{1}{t})} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ dokazali smo za $a \in \mathbf{R} \Longrightarrow$ lopital važi za $a = +\infty$

Dokaz:
1. iz Košijeve teoreme
Pretpostavke:

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} g(x) \\ \lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A \end{array}\right\} \Longrightarrow^? \lim\limits_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = A$$

Ideja: $\dfrac{f(x)}{g(x)} =^? \dfrac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \dfrac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$ po Košijevoj teoremi
Dodefinišemo funkcije $f(a) = g(a) = 0$, sad su one neprekidne na $[a, x]$ za $x \in (a, b)$

$\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \dfrac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$, $c_x \to a^+$, $a < c_x$
$\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$

Primer:
$\ln x \prec\prec x^\alpha \prec\prec a^x,\ x \to \infty$
$\ln x = \boldsymbol{o}(x^\alpha),\ x^\alpha = \boldsymbol{o}(a^x),\ x \to \infty$

Dokaz:

1. $\ln x = \boldsymbol{o}(x),\ x \to \infty$
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$
2. $\ln x = \boldsymbol{o}(x^\alpha),\ x \to \infty$
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha \cdot x^{x-1}} = \frac{1}{\alpha} \cdot \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^\alpha} = 0,\ \alpha > 0$$
3. $x = \boldsymbol{o}(a^x),\ x \to \infty,\ (a > 1)$
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{a^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{a^x \cdot \ln a} = 0$$
4. $x^\alpha = \boldsymbol{o}(a^x), \longrightarrow \infty,\ (a > 1),\ \alpha > 0$
$a^x = t$
$x = \log_a t = \dfrac{\ln t}{\ln a}$
$$\frac{x^\alpha}{a^x} = \frac{\left(\frac{\ln t}{\ln a}\right)^\alpha}{t} = \underbrace{\overset{c\geq 0}{\left(\frac{1}{\ln a}\right)^\alpha}} \cdot \frac{(\ln t)^\alpha}{t} = c \cdot \left(\frac{\ln t}{t^{\frac{1}{\alpha}}}\right)^\alpha \longrightarrow 0 \text{ kad } t \longrightarrow +\infty$$
5. $$\lim_{x\to 0^+} (x \cdot \ln x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^2}{x} = -\lim_{x\to 0^+} x = 0$$
6. $\alpha > 0$ $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} (x^\alpha \cdot \ln x) = 0$ jer $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} (x^\alpha \cdot \ln x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} \dfrac{\ln x}{x^{-\alpha}} = \lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} \dfrac{\frac{1}{x}}{-\alpha \cdot x^{-\alpha-1}} =$
$$-\frac{1}{\alpha} \lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{1}{x} \cdot x^{\alpha+1} = -\frac{1}{\alpha} \lim_{x\longrightarrow 0^+} x^{\overbrace{\alpha}^{>0}} = -\frac{1}{\alpha} \cdot 0 = 0$$

OSMA NEDELJA

7.4 Izvodi višeg reda

DEFINICIJA 1. Funkcija f je n puta diferencijabilna u tački x_0 ako postoji $f^{(n)}(x_0)$

$$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)}(x))'$$

Primer 1: Naći n-ti izvod sledećih funkcija:

$i)$ $(e^x)^{(n)} = e^x$

$$ii)(\sin x)^{(n)} = \begin{cases} \cos x, \ n = 4k+1 \\ -\sin x, \ n = 4k+2 \\ -\cos x, \ n = 4k+3 \\ \sin x, \ n = 4k \end{cases}$$

$$iii)(\cos x)^{(n)} = \begin{cases} -\sin x, \ n = 4k+1 \\ -\cos x, \ n = 4k+2 \\ \sin x, \ n = 4k+3 \\ \cos x, \ n = 4k \end{cases}$$

$$iv)(\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n+1} \cdot (n-1)!}{x^n}$$

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$
$(\ln x)'' = -\frac{1}{x^2}$
$(\ln x)''' = (-x^{-2})' = \frac{2}{x^3}$
$(\ln x)^{(4)} = -\frac{3 \cdot 2}{x^4}$
$(\ln x)^{(5)} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{x^5}$
$\vdots$

$$I(n) : (\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n+1} \cdot (n-1)!}{x^n}$$

Dokaz: (indukcijom po n)

(1) BAZA INDUKCIJE: $n = 1$: $(\ln x)' = \frac{1}{x} = \frac{(-1)^2 \cdot 0!}{x^1}$ $\checkmark$
(2) INDUKTIVNI KORAK: Pretpostavimo da važi $I(n)$ (INDUKTIVNA HIPOTEZA). Treba dokazati da važi $I(n+1)$:

$$(\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{x^n} \ /'$$

$$(\ln x)^{(n+1)} = (-1)^{n+1} \cdot (n-1)! \cdot (x^{-n})' = \frac{(-1)^{n+1} \cdot (-n) \cdot (n-1)!}{x^{n+1}} = \frac{(-1)^{n+2} \cdot n!}{x^{n+1}}$$

$\square$.

$$v)(x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \cdot \ldots \cdot (\alpha-n+1) \cdot x^{\alpha-n}$$

$(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$
$(x^\alpha)'' = \alpha(\alpha-1) \cdot x^{\alpha-2}$

$(x^\alpha)''' = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdot x^{\alpha-3}$
$\vdots$

Dokaz se izvodi indukcijom po n.

7.4.1 Svojstva izvoda višeg reda

(1)
$$(f+g)^{(n)} = (f)^{(n)} + (g)^{(n)}$$

(2) $c - const$
$$(c\cdot f)^{(n)} = c\cdot (f)^{(n)}$$

(3) Lajbnicova formula:
$$(f\cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}\cdot g^{(k)}$$

$(f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g'$
$(f\cdot g)' = (f'g+fg')' = f''g + f'g' + f'g' + fg'' = f''g + 2f'g' + fg''$
$(f\cdot g)''' = (f''g + 2f'g' + fg'')' = f'''g + f''g' + 2(f''g' + f'g'') + f'g'' + fg''' = f'''g + 3f''g + 3f'g'' + fg'''$
$\vdots$
$$(f\cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}\cdot g^{(k)}$$

uz dogovor: $f^{(0)} =_{def} f(x)$
Dokaz se izvodi indukcijom po n. (Dokaz ide isto kao u dokazu binomne formule)

8 Tejlorov polinom

Znamo da je $f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \boldsymbol{o}(h),\ h \to 0$. Ako je $x = x_0 + h$ (jer je $h = x - x_0$), onda je:
$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \boldsymbol{o}(x - x_0),\ x \to x_0$.
Odavde zaključujemo da je funkcija $f(x)$ aproksimirana linearnom funkcijom do na tačnost $\boldsymbol{o}$, odn. $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Podsetimo se: Kažemo da je funkcija f n puta diferencijabilna u tački x_0 ako postoji $f^{(n)}(x_0)$.
Definicija 1. Funkcija f je klase C^n ako je $f^{(n)}$ neprekidna.

Cilj nam je da pokažemo:
$f(x) \approx a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n$. Postavlja se pitanje šta je $a_k,\ k = 0, \ldots, n$?

Ako krenemo od polinoma $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$, dobijamo: $a_0 = f(0)$. Diferenciramo li ovaj polinom, dobijamo:
$f'(x) = a_1 + 2a_2x + \ldots + n \cdot a_nx^{n-1}$, odakle je $a_1 = f'(0)$. Daljim diferenciranjem dobijamo:

$$f''(x) = 2a_2 + 3 \cdot 2 \cdot a_3x + 4 \cdot 3 \cdot a_4 \cdot x^2 + \ldots + n(n-1)x^{n-2} \Longrightarrow a_2 = \frac{f''(0)}{2}$$

$$f'''(x) = 3 \cdot 2 \cdot a_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot a_4 \cdot x + \ldots + n(n-1)(n-2)x^{n-3} \Longrightarrow a_3 = \frac{f'''(0)}{3 \cdot 2}$$

$$\vdots$$

$$f^{(k)}(x) = k(k-1)(k-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot a_k + \boxed{}x + \boxed{}x^2 + \ldots + \boxed{}x^{n-k} \Longrightarrow$$

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

Posmatrajmo polinom $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n$. Potrebno je odrediti koeficijente a_k u ovom slučaju. To će zapravo biti isti koeficijenti iz gornjeg teksta, samo što će biti translirani za vrednost x_0, odnosno:

$$a_0 = f(x_0)$$

$$\vdots$$

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

Definicija 2. Neka je funkcija f n puta diferencijabilna u tački x. Tejlorov polinom funkcije f stepena n u okolini tačke x_0 se definiše:

$$P_n(x, x_0, f) =_{def} f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Postavlja se pitanje koliko dobro ovaj polinom aproksimira funkciju f?

Definicija 3. Ostatak Tejlorovog polinoma se definiše:

$$R_n(x, x_0, f) =_{def} f(x) - P_n(x, x_0, f),\ tj.$$

$$f(x) = P_n(x, x_0, f) + R_n(x, x_0, f)$$

STAV 1: $f^{(k)}(x_0) = P_n^{(k)}(x_0, x_0, f);\ k = 0, ..., n$

Dokaz:

$$P_n^{(k)}(x_0, x_0, f) = k! \cdot \underbrace{a_k}_{\substack{\text{koef. Tejlorovog} \\ \text{polinoma} \\ \text{uz } (x-x_0)^k}} = k! \cdot \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} = f^{(k)}(x_0)$$

$\square$.

TEOREMA 7.4. Peanova teorema – Peanov oblik ostatka:
Ako je funkcija f klase C^n u okolini tačke x_0. Tada je:

$$R_n(x, x_0, f) = \boldsymbol{o}((x - x_0)^n),\ x \to x_0$$

Dokaz:

Hoćemo da $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{R_n(x, x_0, f)}{(x - x_0)^n} = 0$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x, x_0, f)}{(x - x_0)^n} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P_n(x, x_0, f)}{(x - x_0)^n} \overset{L}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - P_n'(x, x_0, f)}{n(x - x_0)^{n-1}} \overset{L}{=}$$
$$\ldots \overset{L}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n)}(x) - P_n^{(n)}(x, x_0, f)}{n!} = \frac{f^{(n)}(x_0) - P_n^{(n)}(x_0, x_0, f)}{n!} = \frac{0}{n!} = 0$$

$\square$.

8.1 Maklorenov polinom

DEFINICIJA 5. Ako je $x_0 = 0$, onda se $P_n(x, 0, f) = f(0) + f'(0)x + \dfrac{f''(0)}{2}x^2 + \ldots + \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ naziva Maklorenov polinom. Tada je $R_n(x, 0, f) = \boldsymbol{o}(x^n),\ x \to 0$.

Maklorenov polinom za neke osnovne funkcije

Znamo:

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \boldsymbol{o}(x), & x \to 0 \\
\sin x &= x + \boldsymbol{o}(x), & x \to 0 \\
\cos x &= 1 - \tfrac{x^2}{2} + \boldsymbol{o}(x^2), & x \to 0 \\
\ln(1 + x) &= x + \boldsymbol{o}(x), & x \to 0 \\
(1 + x)^\alpha &= 1 + \alpha \cdot x + \boldsymbol{o}(x), & x \to 0
\end{aligned}$$

1) $(e^x)^{(n)} = e^x$

$f^{(n)}(0) = 1, \forall n \in \mathbf{N}$
$P_n(x, 0, e^x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n$

$$\boxed{e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \boldsymbol{o}(x^n),\ x \to 0}$$

$$2)\ \sin^{(n)}(x) = (\sin x)^{(n)} = \begin{cases} \cos x,\ n = 4k+1 \\ -\sin x,\ n = 4k+2 \\ -\cos x,\ n = 4k+3 \\ \sin x,\ n = 4k \end{cases}$$

$$(\sin x)^{(0)} = \begin{cases} 1,\ n = 4k+1 \\ 0,\ n = 4k+2 \\ -1x,\ n = 4k+3 \\ 0,\ n = 4k \end{cases}$$

$P_{2k+1}(x, 0, \sin x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + \frac{(-1)^k \cdot x^{2k+1}}{(2k+1)!}$

$$\boxed{\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + \frac{(-1)^k \cdot x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \boldsymbol{o}(x^{2k+1}),\ x \to 0}$$

$$3)\ (\cos x)^{(n)} = \begin{cases} -\sin x,\ n = 4k+1 \\ -\cos x,\ n = 4k+2 \\ \sin x,\ n = 4k+3 \\ \cos x,\ n = 4k \end{cases}$$

$$(\cos x)^{(n)} = \begin{cases} 0,\ n = 4k+1 \\ -1,\ n = 4k+2 \\ 0,\ n = 4k+3 \\ 1,\ n = 4k \end{cases}$$

$P_{2k}(x, 0, \cos x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{(-1)^l \cdot x^{3k}}{(2k)!}$

$$\boxed{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{(-1)^l \cdot x^{3k}}{(2k)!} + \boldsymbol{o}(x^{2k}),\ x \to 0}$$

Ako razvijemo Maklorenov polinom u okolini 0, onda će on za parne funkcije imati parne koeficijente, a za neparne funkcije, neparne koeficijente. Razlog toga je u sledećoj činjenici:

$$f \text{ parna} \Longrightarrow f' \text{ neparna}$$
$$f \text{ neparna} \Longrightarrow f' \text{ parna}$$

Dokaz da ovo važi sledi iz definicije izvoda (samo treba staviti $-x$ umesto x).

Neka je funkcija φ neparna: $\varphi(x) = -\varphi(-x)$
Ako je $x = 0$:
$\varphi(0) = -\varphi(-0) = -\varphi(0)$
$2\varphi(0) = 0 \Longrightarrow \varphi(0) = 0$

$4)\ (\ln(1+x))^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n+1} \cdot (n-1)!}{(1+x)^n}$
$f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1} \cdot (n-1)!$
Uz x^k imamo $\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{(-1)^{k+1} \cdot (k-1)!}{k!} = \frac{(-1)^{k+1}}{k}$
$P_n(x, 0, \ln(1+x)) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$

$$\boxed{\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n + \boldsymbol{o}(x^n),\ x \to 0}$$

Znamo: $\forall n, k \in \mathbf{N},\ \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!},\ 0! =_{def} 1$

Definicija 6. $\forall\alpha\in\mathbf{R}, k\in\mathbf{N}$, definišimo $\binom{\alpha}{k} := \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1)}{k!}$

5) $((1+x)^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-k}$
$f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)$
Uz x^k je $\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1)}{k!} = \binom{\alpha}{k}$
$P_n(x,0,(1+x)^\alpha) = 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!}x^n = \sum\limits_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}x^k$

$$\boxed{(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}x^k + \boldsymbol{o}(x^n),\ x\to 0}$$

Primer 1: Razviti $\dfrac{1}{1+x}$ u okolini tačke $x_0=0$.

$\dfrac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$

$\binom{-1}{k} = \dfrac{-1(-1-1)(-1-2)\cdot\ldots\cdot(-1-k+1)}{k!} = \dfrac{(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)\cdot\ldots\cdot(-k)}{k!} =$
$\dfrac{(-1)^k\cdot k!}{k!} = (-1)^k$

$\dfrac{1}{1+x} = 1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+\ldots+(-1)^nx^n+\boldsymbol{o}(x^n),\ x\to 0$

Zadatak 2: Naći $P_3(x,0,\operatorname{tg}x)$.

$$\operatorname{tg}x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x-\frac{x^3}{6}+\boldsymbol{o}(x^3)}{1-\frac{x^2}{2}+\boldsymbol{o}(x^2)} = \left(x-\frac{x^3}{6}+\boldsymbol{o}(x^3)\right)\cdot\left(1\underbrace{-\frac{x^2}{2}+\boldsymbol{o}(x^2)}_{=t}\right)^{-1}$$

$\boldsymbol{o}(t) = \boldsymbol{o}(-\frac{x^2}{2}+\boldsymbol{o}(x^2)) = \boldsymbol{o}(x^2)$
$(1+t)^{-1} = 1-t+\boldsymbol{o}(t)$
$(1-\frac{x^2}{2}+\boldsymbol{o}(x^2))^{-1} = 1-(-\frac{x^2}{2}+\boldsymbol{o}(x^2))+\boldsymbol{o}(x^2) = 1+\frac{x^2}{2}+\boldsymbol{o}(x^2)$

$\operatorname{tg}x = \sin x\cdot\cos^{-1}x = \left(x-x\frac{x^3}{6}+\boldsymbol{o}(x^3)\right)\cdot\left(1+\frac{x^2}{2}+\boldsymbol{o}(x)\right) = x+\frac{x^3}{2}+\boldsymbol{o}(x^3)-\frac{x^3}{6}+\boldsymbol{o}(x^3)+\boldsymbol{o}(x^3)+\boldsymbol{o}(x^3)+\boldsymbol{o}(x^3)+\boldsymbol{o}(x^3) = x+\frac{x^3}{3}+\boldsymbol{o}(x^3)$

Zadatak 3: Naći Maklorenov polinom funkcije $f(x)=\ln(\cos x)$ stepena 6 (ili, drugačije rečeno, naći $P_6(x,0,\ln(\cos x))$).

$\cos x = 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{6!}+\boldsymbol{o}(x^6)$
$\ln(\cos x) = \ln(1\underbrace{-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}-\dfrac{x^6}{6!}+\boldsymbol{o}(x^6)}_{=t}) = \ln(1+t)$

$t = -\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{6!}+\boldsymbol{o}(t)$

$\boldsymbol{o}(t) = \boldsymbol{o}(x^2)$ jer je $t\sim-\frac{x^2}{2}$, tj. $t=-\frac{x^2}{2}+\boldsymbol{o}(x^2),\ x\to 0$

$t^2 = (-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \boldsymbol{o}(x^2))^2 = \frac{x^4}{4} + \boldsymbol{o}(x^4),\ x \to 0$ jer su svi ostali stepena ≥ 6, pa se oni svi nalaze u $\odot(x^4)$.

$\odot(t^3) = \boldsymbol{o}(x^6),\ x \to 0$ jer
$t^3 = (-\frac{x^2}{2} + \ldots)^3 = -\frac{x^6}{8} + \boldsymbol{o}(x^6)$
$---$
$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \boldsymbol{o}(t^3) = (-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \boldsymbol{o}(x^6)) + -\frac{1}{2}(A) + \frac{1}{3}(B) + \boldsymbol{o}(x^6)$

$---$
$A = t^2 = (-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \boldsymbol{o}(x^6))^2 = \frac{x^4}{4} - 2 \cdot \frac{x^2}{2} \cdot \frac{x^4}{24} + \boldsymbol{o}(x^6) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{24} + \boldsymbol{o}(x^6)$
$B = t^3 = t^2 \cdot t = (\frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{24} + \boldsymbol{o}(x^6)) \cdot (-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \boldsymbol{o}(x^6)) = -\frac{x^6}{8} + \boldsymbol{o}(x^6)$
$---$

$\ln(1+t) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \boldsymbol{o}(x^6) - \frac{x^4}{8} + \frac{x^6}{48} + \boldsymbol{o}(x^6) - \frac{x^6}{24} + \boldsymbol{o}(x^6) + \boldsymbol{o}(x^6) =$
$-\frac{x^2}{2} + x^4 \cdot (\frac{1}{24} - \frac{1}{8} - \frac{1}{24}) + x^6 \cdot (-\frac{1}{720} + \frac{1}{48} - \frac{1}{24}) + \boldsymbol{o}(x^6)$

Zadatak 4: Naći $P_3(x, 1, \sqrt{x})$.

$\sqrt{x} = \sqrt{1 + (x-1)} = \left| \begin{array}{l} \text{smena: } x - 1 = t \\ x \to 1 \iff t \to 0 \end{array} \right| (1+t)^{\frac{1}{2}} = 1 + \alpha t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} t^2 +$
$\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6} t^3 + \boldsymbol{o}(t^3) = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{32}(x-1)^3 + \boldsymbol{o}((x-1)^3),\ x \to 1$

Zadatak 5: Naći $P_6(x, 0, \ln \frac{\sin x}{x})$.

$$\ln \frac{\sin x}{x} = \ln \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{7!} + \boldsymbol{o}(x^7)}{x} = \ln \Big(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^6}{7!} + \boldsymbol{o}(x^6)\Big)$$
$t = -\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^6}{7!} + \boldsymbol{o}(x^6)$

$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \boldsymbol{o}(t^3),\ t \to 0$

$t^2 = \Big(-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^6}{7!} + \boldsymbol{o}(x^6)\Big)^2 = \frac{x^4}{36} - 2 \cdot \frac{x^6}{720} + \boldsymbol{o}(x^6) = \frac{x^4}{36} - \frac{x^6}{360} + \boldsymbol{o}(x^6)$

$t^3 = \Big(-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^6}{7!} + \boldsymbol{o}(x^6)\Big) \cdot \Big(\frac{x^4}{36} - \frac{x^6}{360} + \boldsymbol{o}(x^6)\Big) = -\frac{x^6}{216} + \boldsymbol{o}(x^6)$

$\ln \frac{\sin x}{x} = -\dfrac{x^2}{6} + \dfrac{x^4}{120} - \dfrac{x^6}{7!} + \boldsymbol{o}(x^6) - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x^4}{36} - \dfrac{x^6}{360} + \boldsymbol{o}(x^6)\right) + \dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{x^6}{216} + \boldsymbol{o}(x^6)\right),\ x \to 0$

Zadatak 6: Naći $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos(3x) - e^{-x^2}}{\operatorname{tg}^2(2x)}$.

$\operatorname{tg} t = t + \boldsymbol{o}(t),\ x \to 0$
$\operatorname{tg}(2x) = 2x + \boldsymbol{o}(x),\ x \to 0$
$\operatorname{tg}^2(2x) = (2x + \boldsymbol{o}(x))^2 = 4x^2 + \boldsymbol{o}(x^2),\ x \to 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(3x) - e^{-x^2}}{\operatorname{tg}^2(2x)} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \frac{9x^2}{2} + \boldsymbol{o}(x^2) - (1 - x^2 + \boldsymbol{o}(x^2))}{4x^2 + \boldsymbol{o}(x^2)} = \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{9}{2} + 1 + \boldsymbol{o}(1)}{4 + \boldsymbol{o}(1)} = -\frac{7}{8}$$

Zadatak 7: Naći $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{3x^3+x^4}$.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{3x^3+x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-(x-\frac{x^3}{6}+\boldsymbol{o}(x^3))}{x^3(3+x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x^3}{6}+\boldsymbol{o}(x^3)}{x^3(3+x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{6}+\boldsymbol{o}(1)}{3+x}=$
$\dfrac{1}{18}$

Zadatak 8: Naći a,b,c,d tako da važi: $\sqrt{1+x^2}-x=ax+b+\frac{c}{x}+\frac{d}{x^2}+\boldsymbol{o}(\frac{1}{x^2})$
a) $x\to+\infty$ b) $x\to-\infty$

$\sqrt{1+x^2}=\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}=\sqrt{x^2}\cdot\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^2=|x|\cdot\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^2$
Smena: $t=\frac{1}{x^2},\ \boldsymbol{o}(t)=\boldsymbol{o}(\frac{1}{x^2})$

$(1+t)^2=1+\frac{1}{2}t-\frac{1}{8}t^2+\boldsymbol{o}(t^2)=1+\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{8x^4}+\boldsymbol{o}(\frac{1}{x^4})$

a) $\sqrt{1+x^2}-x=x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-x=x\left(1+\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{8x^4}+\boldsymbol{o}(\frac{1}{x^4})\right)-x=x+$
$\frac{1}{2x}\underbrace{-\dfrac{1}{8x^3}+\boldsymbol{o}(\dfrac{1}{x^3})}_{\boldsymbol{o}(\frac{1}{x^2})}-x=\frac{1}{2x}+\boldsymbol{o}(\frac{1}{x^2})\Longrightarrow a=0,b=0,c=\frac{1}{2},d=0$

b) $\sqrt{1+x^2}-x=-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-x=-x\left(1+\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{8x^4}+\boldsymbol{o}(\frac{1}{x^4})\right)-x=-x-$
$\frac{1}{2x}\underbrace{+\dfrac{1}{8x^3}+\boldsymbol{o}(\dfrac{1}{x^3})}_{\boldsymbol{o}(\frac{1}{x^2})}-x=-2x-\frac{1}{2x}+\boldsymbol{o}(\frac{1}{x^2})\Longrightarrow a=-2,b=0,c=-\frac{1}{2},d=0$

Teorema 7.7. Lagranžev oblik ostatka
Ako funkcija f pripada klasi C^n (ima n izvoda na $[x_0-\delta,x_0+\delta]$ koji su neprekidni) i $\exists f^{(n+1)}(x)$ na $(x_0-\delta,x_0+\delta)$, tada je:

$$R_n(x,x_0,f)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

za neko $c\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$.

Dokaz:

Uvodimo funkcije $F(t):=f(x)-P_n(x,t,f)$ i $G(t):=(x-t)^{n+1}$.
Primetimo da je $F(x_0)=R_n(x,x_0,f)$ i $P_n(x,x,f)=f(x)$.

Primenimo Košijevu teoremu na F i G:

$\dfrac{F(x)-F(x_0)}{G(x)-G(x_0)}=\dfrac{F'(c)}{G'(c)}$, gde je c između x i x_0. Sada ćemo da računamo svaku od $F(x)-F(x_0),G(x)-G(x_0),F'(c),G'(c)$ i da izračunate vrednosti ubacimo u $\dfrac{F(x)-F(x_0)}{G(x)-G(x_0)}=\dfrac{F'(c)}{G'(c)}$:

$F(x)-F(x_0)=f(x)-P_n(x,x,f)-f(x)+P_n(x,x_0,f)=f(x)-f(x)-f(x)+P_n(x,x_0,f)=-R_n(x,x_0,f)$

$G(x)-G(x_0)=0-(x-x_0)^{n+1}=-(x-x_0)^{n+1}$

$F(t) = f(x) - P_n(x,t,f) = f(x) - (f(t) + f'(t)(x-t) + \frac{f''(t)}{2}(x-t)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^{(n)}$

$F'(t) = -(f'(t)+f''(t)(x-t)-f'(t)+\frac{f'''(t)}{2}(x-t)^2-\frac{f''(t)2(x-t)}{2}+\frac{f^{(4)}(t)}{3!}(x-t)^3 - \frac{f'''(t)3(x-t)^2}{3\cdot 2} + \ldots + \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}\cdot n \cdot (x-t)^{n-1}) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^{n+1}$

$G'(t) = -(n+1)(x-t)^n$

Nakon ubacivanja, dobijamo:

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{G(x)-G(x_0)} = \frac{F'(c)}{G'(c)}$$

$$\frac{-R_n(x,x_0,f)}{-(x-x_0)^{n+1}} = \frac{-f^{(n+1)}(c)(x-c)^n}{-n!(n+1)(x-c)^n}$$

$$R_n(x,x_0,f) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

$\square$.

DEVETA NEDELJA

9 Kose asimptote

DEFINICIJA 1. $y = kx + n$ je kosa asimptota funkcije $f(x)$ ako je $f(x) = kx + n + \boldsymbol{o}(1),\ x \to \pm\infty$

U zadatku 8 iz prošle nedelje imali smo:

$$\sqrt{1+x^2} - x = \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{2x} + \boldsymbol{o}(\frac{1}{x}),\ x \to +\infty \\ -2x - \frac{1}{2x} + \boldsymbol{o}(\frac{1}{x}),\ x \to -\infty \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 + \boldsymbol{o}(1),\ x \to +\infty \\ -2x + \boldsymbol{o}(1),\ x \to -\infty \end{array} \right.$$

Odatle čitamo asimptote:
1) $x \to +\infty:\ y = 0\ (k = n = 0)$
2) $x \to -\infty:\ y = -2x\ (k = -2,\ n = 0)$

Ako uspemo da razvijemo više od oblika $f(x) = ax + b + \boldsymbol{o}(1)$ (na primer: $f(x) = ax + b + \frac{c}{x} + \boldsymbol{o}(\frac{1}{x})$), onda znamo da li je funkcija $f(x)$ iznad ili ispod asimptote.

Pre nego što ovo vidimo, koristićemo jedno svojstvo:

$$\operatorname{sgn}(\varphi + \boldsymbol{o}(\varphi)) = \operatorname{sgn}(\varphi), \quad x \in \dot{u}_{x_0}$$

koje važi jer $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\varphi + \boldsymbol{o}(\varphi)}{\varphi} = \lim\limits_{x \to x_0} (1 + \boldsymbol{o}(1)) = 1.$

$f(x) = -2x - \frac{1}{2x} + \boldsymbol{o}(\frac{1}{x}),\ x \to -\infty$

$f(x) - (-2x) = \underbrace{-\dfrac{1}{2x} + \boldsymbol{o}(\dfrac{1}{x})}_{>0,\ x \to -\infty}$

Dakle:
$f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x} + \boldsymbol{o}\left(\frac{1}{x}\right),\ x \to \pm\infty:$

1) imamo $y = ax + b$ asimptotu

2) za $f(x) - (ax + b) = \dfrac{c}{x} + \boldsymbol{o}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ diskutujemo znak izraza $\frac{c}{x}$

Vrednosti k i n možemo dobiti i na sledeći način:
$f(x) = kx + n + \boldsymbol{o}(1)\ \big/ : x,\ x \to \infty$
$\dfrac{f(x)}{x} = k + \frac{n}{x} + \boldsymbol{o}(\frac{1}{x})\ \big/ \lim\limits_{x \to \infty},\ x \to \infty$
$\Longrightarrow \boxed{k = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x}} \in \mathbf{R}$

Kad znamo šta je k, onda:
$f(x) - kx = n + \boldsymbol{o}(1)\ \big/ \lim\limits_{x \to \infty},\ x \to \infty$
$\Longrightarrow \boxed{n = \lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - kx)} \in \mathbf{R}$

Terminologija asimptota:

Ako je $k = 0$ i $\exists n \in \mathbf{R}$, tada se $y = n$ naziva horizontalna asimptota.

Suštinski razlikujemo samo dve vrste asimptota: vertikalnu i kosu.

Vertikalna asimtota

Ako je $\lim\limits_{x \to x_0^{\pm}} f(x) = \pm\infty$, pri čemu tačka $x_0 \notin D_f$, ali je na rubu domena (na primer: $(0, x_0)$ ili $(x_0, b) \subseteq D_f$), onda se $x = x_0$ naziva vertikalnom asimptotom.

10 Dovoljni uslovi lokalnih ekstrema

$$\left[\begin{array}{c} A \text{ je dovoljan uslov za } B \text{ ako } A \Longrightarrow B. \\ A \text{ je potreban (neophodan) uslov za } B \text{ ako } B \Longrightarrow A. \end{array}\right]$$

Potreban uslov za lokalne ekstreme, ako je f diferencijabilna je $f'(x_0) = 0$. Ako znamo da f ima ekstremum u x_0 i $f\mathcal{D}x_0$, onda $f(x_0) = 0$, ali:

Neka je $f(x) = 3x^3$. Odatle je $f'(x) = 6x^2$, pa je $f'(x) = 0 \Longleftrightarrow 6x^2 = 0 \Longleftrightarrow x = 0$, ali tačka $x_0 = 0$ nije ni maksimum ni minimum jer $f(x) - f(x) = x^3 - 0^3 = x^3$, a x^3 nije stalnog znaka ni u jednom okruženju $(-\delta, \delta)$.

Neka je $f(x) = x^2$. Odatle je $f'(x) = 2x$, pa je $f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.
$f(x) - f(x) = x^2 - 0^2 = x^2 \geq 0$, pa je $x_0 = 0$ minimum.

Definicija 1. Tačka x_0 se zove *stacionarna (singularna, kritična) tačka* ako je $f'(x_0) = 0$.

STAV: Ako je f dva puta neprekidno diferencijabilna ($f \in C^2$) i x_0 je stacionarna tačka i $f''(x_0) \neq 0$, onda je x_0 ekstremum, i to:
1) MAKSIMUM, ako je $f''(x_0) < 0$
2) MINIMUM, ako je $f''(x_0) > 0$

Dokaz:

Iz $P_2(x, x_0, f) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dfrac{f''(x_0)(x - x_0)^2}{2}$

$f(x) = f(x_0) + \cancel{f'(x_0)}^{\,0}(x - x_0) + \dfrac{f''(x_0)(x - x_0)^2}{2} + \boldsymbol{o}((x - x_0)^2)$

$f(x) - f(x_0) = \dfrac{f''(x_0)}{2}\underbrace{(x - x_0)^2}_{\geq 0} + \boldsymbol{o}((x - x_0)^2)$

(1) $f''(x_0) < 0 \Longrightarrow \dfrac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 \leq 0$

$\dfrac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \boldsymbol{o}((x - x_0)^2) \leq 0,\ x \to x_0$

$f(x) - f(x_0) \leq 0,\ x \to x_0$

$f(x) \leq f(x_0),\ x \to x_0 \Longrightarrow x_0$ je maksimum

$\square$.

(2) slično kao pod (1)

$\square$.

Diskusija: Šta ako je $f'(x_0) = 0, f''(x_0) = 0$, a $f'''(x_0) \neq 0$?

$f(x) = f(x_0) + \cancel{f'(x_0)(x - x_0)}^{\,0} + \cancel{\dfrac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2}^{\,0} + \dfrac{f'''(x_0)}{6}(x - x_0)^3 + \boldsymbol{o}((x - x_0)^3),\ x \to x_0$

$f(x) - f(x_0) = \frac{1}{6}f'''(x_0)(x - x_0)^3 + \boldsymbol{o}((x - x_0)^3),\ x \to x_0$

$f'''(x_0) > 0$: nema ekstrema jer za:

$x > x_0 :\ f(x) - f(x_0) > 0$

$x < x_0 :\ f(x) - f(x_0) < 0$

Isto je za $f'''(x_0) < 0$.

Zaključak: Ako je $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(k-1)}(x_0) = 0$, a $f^{(k)}(x_0) \neq 0$, onda je:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \boldsymbol{o}((x - x_0)^k)$$

$$f(x) - f(x_0) = \underbrace{\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}}_{\neq 0}(x - x_0)^k$$

(1) Za $k = 2l,\ l \in \mathbf{N}$: jeste ekstremum, i to:

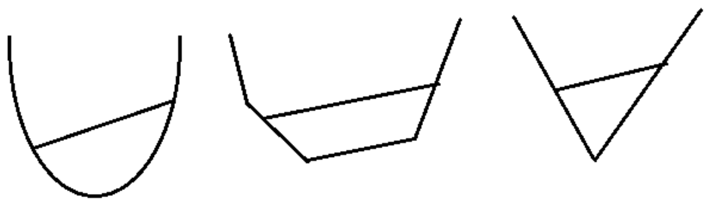
- $f^{(k)}(x_0) > 0 \Longrightarrow$ *minimum*
- $f^{(k)}(x_0) < 0 \Longrightarrow$ *minimum*

(2) Za $k = 2l + 1,\ l \in \mathbf{N}$: nije ekstremum

11 Konveksnost

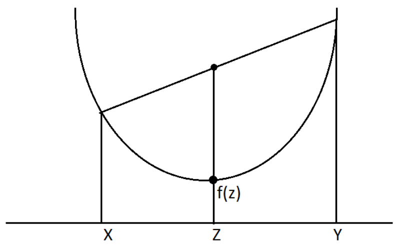
Definicija 1. Neka je $f : I \longrightarrow R$, gde je I interval. Kažemo da je funkcija f konveksna na I ako je:

$$f((1-\lambda)x+\lambda y) \leq (1-\lambda)f(x)+\lambda f(y).$$



Slika 11.1. Primeri konveksnih funkcija (grafički)

Konveksni grafici su svi oni kod kojih je svaka sečica grafika iznad tog grafika:

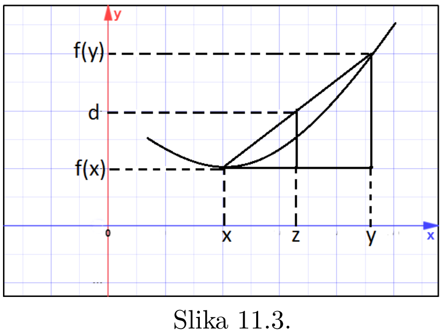


Slika 11.2. Grafički prikaz definicije konveksnosti grafika

(1) Konveksnu kombinaciju nazivamo izraz $\boxed{(1-\lambda)x+\lambda y}$ za $x < y,\ \lambda \in [0,1]$.

Neka je z tačka na duži xy koja deli tu duž na sledeći način: $xz = \lambda xy$, odnosno, $a = \lambda b$. Tada je:
$z - x = \lambda(y-x)$
$\boxed{z = x + \lambda(y-x) = (1-\lambda)x+\lambda y}$

Posmatrajmo sada sliku 11.3:



Slika 11.3.

Iz sličnosti trouglova, d deli duž $f(x)f(y)$ u istom odnosu u kojem z deli duž xy.
$\Longrightarrow \boxed{d = (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)}$.

Da je $d \geq f(z)$ znači ,,sečica je iznad grafika".

$d \geq f(z)$
$(1-\lambda)f(x) + \lambda f(y) \geq f((1-\lambda)x + \lambda y)$

Vežbanje za domaći:
Dokazati da je sečica iznad grafika na sledeći način:

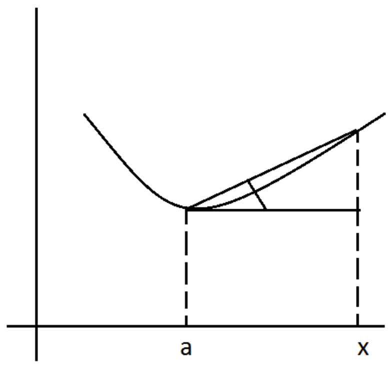
- napisati jednačinu prave kroz tačke $A(x, f(x))$ i $B(y, f(y))$ i dobiti $g(x) = kx + n$
- izračunati $g(z),\ z = (1-\lambda)x + \lambda y$
- uveriti se da je $g(z) \geq f(z)$

Sada ćemo se baviti uspostavljanjem sledeće veze:

$$\begin{array}{ccccc}
f \text{ je konveksna} & & & & f'' \geq 0 \\
\updownarrow & & & & \updownarrow \\
\text{sečica} & \leftrightarrow & \text{nagib} & \leftrightarrow & f' \text{ raste}
\end{array}$$

Funkcija nagiba kroz a (pogledati sliku 11.4.) je

$$\nu_a(x) := \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \operatorname{tg}\alpha$$

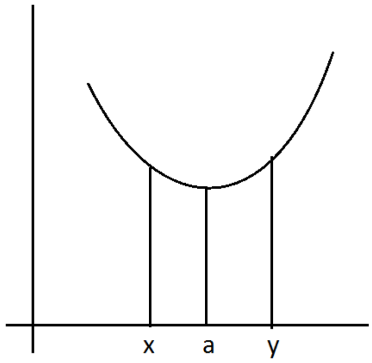


Slika 11.4. Funkcija nagiba

STAV 1: f je konveksna $\Longleftrightarrow$ za svake tri tačke u poretku $x < a < y$ važi: $\nu_a(x) \leq \nu_a(y)$

Dokaz:

Pretpostavimo da jeste konveksna. To znači da, ako je $a = (1-\lambda)x + \lambda y$, onda je $f(a) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$.



Slika 11.5.

Dokaz za ($\Longrightarrow$):

$a = (1-\lambda)x + \lambda y$
$a - x = \lambda(y - x)$
$\lambda = \dfrac{a-x}{y-x}$. Ubacivanjem novodobijenog λ u definiciju konveksnosti, dobijamo:

$f(a) \le \left(1 - \dfrac{a-x}{y-x}\right) f(x) + \dfrac{a-x}{y-x} f(y) \ / \cdot (y-x),\ y-x > 0$
$(y-x)f(a) \le (y-x-a+x)f(x) - (a-x)f(y)$
$(y-x)f(a) \le (y-a)f(x) + (a-x)f(y)$
$(y-a)f(a) - (x-a)f(a) \le (y-a)f(x) + (a-x)f(y)$
$(y-a)f(a) - (y-a)f(x) \le (x-a)f(a) - (x-a)f(y)$
$(y-a)(f(a)-f(x)) \le (x-a)(f(a)-f(y)) \ / : (x-a),\ x-a \le 0$
$\dfrac{(y-a)(f(a)-f(x))}{x-a} \ge f(a) - f(y) \ / : (y-a),\ y-a \ge 0$
$\dfrac{f(a)-f(x)}{x-a} \ge \dfrac{f(a)-f(y)}{y-a} \ / \cdot (-1)$
$\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \le \dfrac{f(y)-f(a)}{y-a}$
$\Longrightarrow \nu_a(x) \le \nu_a(y)$

$\square$.

Dokaz za ($\Longleftarrow$):

$\nu_a(x) \le \nu_a(y)$
$\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \le \dfrac{f(y)-f(a)}{y-a}$

Potpuno isto kao u ($\Longrightarrow$), samo u suprotnom smeru.

$\square$.

STAV 2: Ako je funkcija f diferencijabilna na (a, b), onda:
f je konveksna $\Longleftrightarrow f' \nearrow$

Dokaz za ($\Longrightarrow$):

Pretpostavimo da je funkcija f konveksna. Neka je $x_1 < x_2$ (hoćemo da je $f(x_1) < f(x_2)$). Uzmimo $x \in (x_1, x_2)$, odnosno, važi da je $x_1 < x < x_2$. Iz STAVA 1, za tačke $x_1 < x < x_2$ važi:

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2} \quad (*)$$

U (*), kada $x \to x_1$:

$$\lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2}$$

$$f'(x_1) \leq \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = k$$

U (*), kada $x \to x_2$:

$$\lim_{x \to x_2} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \lim_{x \to x_2} \frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2}$$

$$k = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'(x_2)$$

$$\Longrightarrow f'(x_1) \leq k \leq f'(x_2)$$

$\square$.

Dokaz za ($\Longleftarrow$):

Neka f' raste. Imamo tačke $x < a < y$. Hoćemo da je $\nu_a(x) \leq \nu_a(y)$.

$$\nu_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \overset{Lagranževa}{=} f'(\xi), \ \xi \in (x, a) \text{ („ksi”)}$$

$$\nu_a(y) = \frac{f(y) - f(a)}{y - a} \overset{Lagranževa}{=} f'(\eta), \ \eta \in (a, y) \text{ („eta”)}$$

Imamo: $x < \xi < a < \eta < y$, odn. $\xi < \eta \Longrightarrow f'(\xi) \leq f'(\eta) \Longleftrightarrow \nu_a(x) \leq \nu_a(y)$
Na osnovu STAVA 1 $\Longrightarrow$ f je konveksna.

$\square$.

<u>STAV 3</u>: Neka $\exists f''$. Tada f je konveksna $\Longleftrightarrow f'' \geq 0$.

Dokaz:

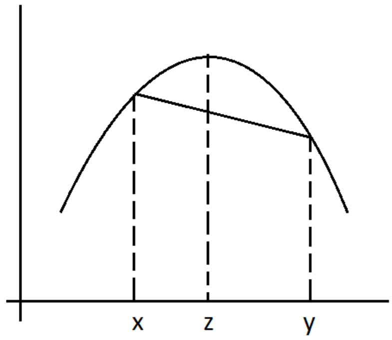
Iz STAVA 2 imamo:
f je konveksna $\Longleftrightarrow f' \nearrow \Longleftrightarrow (f')' \geq 0$, to jest, $f'' \geq 0$

$\square$.

11.1 Konkavnost

Terminologija konkavnosti:

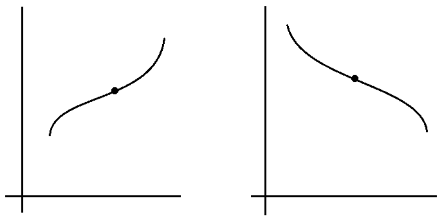
- f je konkavna akko$_{def}$ $f((1-\lambda)x + \lambda y) \geq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$



Slika 11.6.

- f je konkavna akko $-f$ je konveksna:
  STAV 1: f je konkavna $\Longleftrightarrow \nu_a$ opada
  STAV 2: f je konkavna $\Longleftrightarrow f' \searrow$
  STAV 3: f je konkavna $\Longleftrightarrow f'' \leq 0$

- Tačka x_0 se naziva prevojna tačka funkcije f ako je f konveksna/konkavna na nekom (a, x_0), a konkavna/konveksna na (x_0, b).



Slika 11.7. Prevojne tačke

Često su prevojne tačke one u kojima je $f'' = 0$.

DESETA NEDELJA

12 Ispitivanje funkcija i skiciranje grafika

1. Domen (D_f):

   - deljenje nulom
   - $\sqrt{A(x)},\ \sqrt[4]{A(x)},\ \sqrt[6]{A(x)}, ...\ A(x) \geq 0$
     - neparni koreni su definisani na $\mathbf{R}$
   - $\ln x, \log_a A(x);\ A(x) > 0$
   - $\arcsin A(x), \arccos A(x);\ -1 \leq A(x) \leq -1$
     - $\mathrm{arctg}, \mathrm{arcctg}$ su definisani na $\mathbf{R}$

2. Parnost:

   - parna: $f(-x) = f(x)$ simetrična u odnosu na y-osu
   - neparna: $f(-x) = -f(x)$ simetrična u osnosu na koordinatni početak
   - ,,ni-ni"

3. Periodičnost: $f(x+T) = f(x),\ \forall x \in D_f$

   - razmatraćemo samo za trigonometrijske

4. Znak i nule:

   - $f(x) > 0 \Longleftrightarrow x \in \ldots$
   - $f(x) < 0 \Longleftrightarrow x \in \ldots$
   - $f(x) = 0 \Longleftrightarrow x \in \ldots$

5. Neprekidnost i diferencijabilnost:

   - neprekidne su sve elementarne
   - nediferencijabilne mogu da budu:
     ∘ apsolutne vrednosti
     ∘ $\sqrt{\quad\quad}$, x^a *za* $a < 1$
     ∘ $\arcsin A(x), \arccos A(x)$ za $A(x) = \pm 1$

   Napomena:

   $f(x) = \arcsin(x)$ je definisana na intervalu $[-1, 1]$
   $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, a pitanje je da li je neprekidna i diferencijabilna u tačkama $x = \pm 1$.

   $\lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} f'(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = +\infty$
   Ako $\exists \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} \underbrace{f'(x)}_{=A} \in \bar{\mathbf{R}}$

   $\lim\limits_{h \longrightarrow 0^+} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = A$

Ovo važi po Lagranžovoj teoremi o srednjim vrednostima
$\lim\limits_{h\longrightarrow 0^+} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim\limits_{h\longrightarrow 0^+} \dfrac{f'(\xi)\cdot(x_0+h-x_0)}{h} = \lim\limits_{h\longrightarrow 0^+} f'(\xi) = A$
$\xi \in (x_0, x_0+h)$, $\xi \longrightarrow x_0$ kada $h \longrightarrow 0^+$

6. Interval monotonosti i ekstremne vrednosti:

   - $f' \geq 0$ na $(a,b) \Longleftrightarrow f \nearrow (a,b)$
   - $f' \leq 0$ na $(a,b) \Longleftrightarrow f \searrow (a,b)$

   • kandidati za ekstremne vrednosti su:

   - $f' = 0$
   - tačke gde funkcija nije diferencijabilna (šiljci)

7. Konveksnost (znak drugog izvoda) i prevojne tačke ($f''=0$)

   - $f'' \geq 0$ na $(a,b) \Longleftrightarrow f$ je konveksna na (a,b)
   - $f'' \leq 0$ na $(a,b) \Longleftrightarrow f$ je konkavna na (a,b)

8. Asimptote:

   • vertikalna - to je prava $x = x_0$ ako je $\lim\limits_{x\longrightarrow x_0^+} f(x) = \pm\infty$ ili $\lim\limits_{x\longrightarrow x_0^-} f(x) = \pm\infty$
   x_0 u kojoj $f(x)$ nije definisana ali jeste na kraju domena npr. $(a,x_0) \subseteq D_f$, $(x_0,b) \subseteq D_f$

   • kosa - to je prava oblika $y = k\cdot x + n$
   $f(x) = k\cdot x + n + \boldsymbol{o}(x)$, $x \longrightarrow +\infty$ ili $x \longrightarrow +\infty \Longleftrightarrow \exists k,n \in \mathbf{R}$
   $k = \lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, $n = \lim\limits_{x\longrightarrow\infty}(f(x) - k\cdot x)$
   Ako možemo da predstavimo u obliku:
   $f(x) = \underbrace{a\cdot x + b}_{asimptota} + \dfrac{c}{x} + \boldsymbol{o}(\dfrac{1}{x})$, $x \longrightarrow \infty$
   $f(x) - a\cdot x + b = \dfrac{c}{x} + \boldsymbol{o}\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $x \longrightarrow \infty$

   • horizontalna - specijalan slučaj kose asimptote, kad je $k = 0$

Zadaci:

$\boxed{\text{(1) Ispitati tok i skicirati grafik funkcije } f(x) = x^4 - 4x^3 + 10}$

1) Domen (i asimptote): $D_f = \mathbf{R} \Longrightarrow$ nema vertikalnih asimptota. Kose: $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^4-4x^3+10}{x} = \pm\infty \Longrightarrow$ nema kosih asimptota

2) Parnost:
Pokažimo na kontraprimeru da je funkcija f „ni-ni":
$$\left.\begin{array}{r} f(1) = 1-4+10 = 7 \\ f(-1) = 1+4+10 = 15 \end{array}\right\} \Longrightarrow f \text{ je „ni-ni".}$$

3) Periodičnost:

- ima najviše 4 nule, a sa periodičnosti bi trebalo da ima beskonačno mnogo nula ili da nema nijednu

4) Znak i nule: (pogledati monotonost i ekstremne vrednosti)

5) Diferencijabilnost i neprekidnost:

Diferencijabilna je sigurno, a iz toga da je diferencijabilna sledi da je neprekidna na **R**.

6) Monotonost i ekstremne vrednosti:

$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3)$, pa pošto je $4x^2 \geq 0, \forall x \in D_f$, sledi: $\operatorname{sgn}(f') = \operatorname{sgn}(x-3)$.
$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$ ili $x = 3$

	$-\infty$ — 0	0 — 3	3 — $+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Test drugog izvoda:
$f''(x) = 12x^2 - 24x$
$f'''(x) = 24x - 24$

U $x = 0 : f''(x) = 0 \wedge f'''(x) = -24 \Longrightarrow x = 0$ nije ni maksimum ni minimum
U $x = 3 : f''(x) = 36 \wedge f'''(x) = 48 \Longrightarrow x = 3$ je minimum

Odavde možemo da zaključimo o znaku funkcije i nulama:
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty > 0$
$\lim\limits_{x \to 3} f(x) = f(3) = -17 < 0$
$\lim\limits_{x \to +\infty} = +\infty > 0$

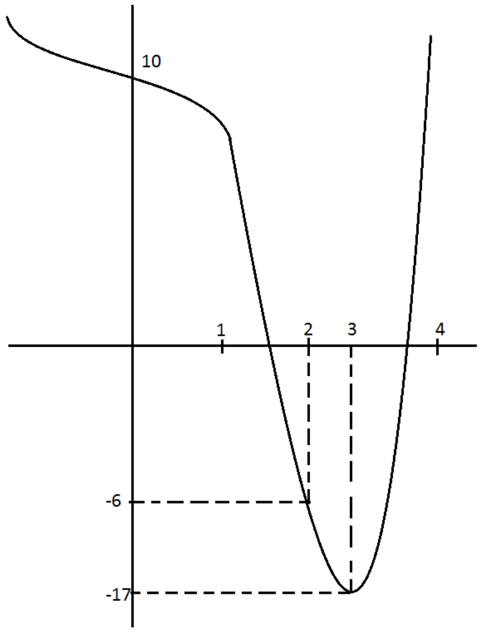
$(K - B) \Longrightarrow$ postoji nula u intervalu $(-\infty, 3)$ i u $(3, +\infty)$
(monotonost $f(x)$) $\Longrightarrow$ postoji tačno jedna nula u intervalu $(-\infty, 3)$, odnosno, u $(3, +\infty)$

7) Konkavnost i prevojne tačke:

$f''(x) = 12x(x-2)$

	$-\infty$ — 0	0 — 2	2 — $+\infty$
x	$-$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$+$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	konveksna	konkavna	konveksna

$\Longrightarrow x = 0$ i $x = 2$ su prevojne tačke



Slika 12.1. Grafički prikaz funkcije $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$

$\boxed{(2)\text{ Ispitati tok i skicirati grafik funkcije } f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{x^2+1}.}$

1) Domen i asimptote: $D_f = \mathbf{R}$
$x^2 + 1 > 0 \Longrightarrow$ nema vertikalnih asimptota
$f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{x^2+1} = \dfrac{(x+1)^2}{x^2} \cdot (1 + \dfrac{1}{x^2})^{-1} = \dfrac{x^2+2x+1}{x^2} \cdot (1 + \dfrac{1}{x^2})^{-1} = (1 + \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x^2}) \cdot (1 - \dfrac{1}{x^2} + \boldsymbol{o}(\dfrac{1}{x^2})) = 1 + \dfrac{2}{x} + \boldsymbol{o}(\dfrac{1}{x}) \Longrightarrow a = 0, b = 1, c = 2$

zaključak:
1) $y = 1$ je horizontalna asimptota kad $x \to \pm\infty$
2) $x \to +\infty : f > 1$
3) $x \to -\infty : f < 1$

2) Parnost:
Nije parna jer je za $x \to +\infty$ funkcija f iznad H.A, a za $x \to -\infty$ ispod H.A.
Nije neparna jer je i za $x \to +\infty$ i $x \to +\infty$ asimptota $y = 1$ (inače bi bilo za $x \to -\infty : y = -1$)

3) Znak i nule:
$f(x) \geq 0 : \forall x \in D_f$
$f(x) = 0 \Longleftrightarrow x = -1$

4) Periodičnost: Nije periodicna (ima tačno 1 nulu)

5) Diferencijabilnost i neprekidnost: Oba su ispunjena jer je sastavljena od diferencijabilnih funkcija, pa nema šiljaka.

6) Monotonost i ekstremne vrednosti:

$$f'(x) = \frac{2(x+1)(x^2+1) - (x+1)^2 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2(x+1)(x^2+1-x^2-x)}{(x^2+1)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$$

$-\infty \quad -1 \quad 1 \quad +\infty$

$1-x^2$	$-$	$+$	$-$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

$x = -1$ je minimum

$x = 1$ je maksimum

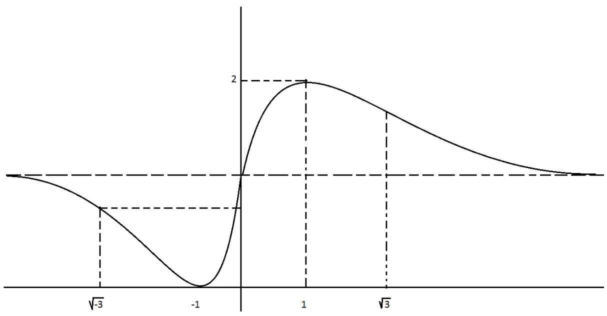
7) Konkavnost i prevojne tačke:

$$f''(x) = \frac{2(-2x(x^2+1)^2 - (1-x^2) \cdot 2 \cdot (x^2+1) \cdot 2x)}{(x^2+1)^4} = \frac{4x(x^2+1)}{(x^2+1)^4}(-x^2 - 1 - 2(1-x^2)) = \frac{4}{(x^2+1)^3} \cdot x \cdot (x^2-3)$$

$-\infty \quad -\sqrt{3} \quad 0 \quad \sqrt{3} \quad +\infty$

x	$-$	$-$	$+$	$+$
x^2-3	$+$	$-$	$-$	$+$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\cap$	$\cup$	$\cap$	$\cup$

$x = 0, x = \pm\sqrt{3}$ su prevojne tačke



Slika 12.2. Grafički prikaz funkcije $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{x^2+1}$

$\boxed{\text{(3) Ispitati tok i skicirati grafik funkcije } f(x) = (x^2-1)^{\frac{2}{3}}.}$

1) Domen i asimptote: $D_f = \mathbf{R} \Longrightarrow$ nema vertikalnih asimptota

Kose asimptote:

$$x \to \pm\infty : \frac{f(x)}{x} = \frac{(x^2-1)^{\frac{2}{3}}}{x} = \left(\frac{x^2-1}{x^{\frac{3}{2}}}\right)^{\frac{2}{3}} \to \infty \Longrightarrow \text{nema kosih asimptota}$$

2) Parnost:

$f(-x) = ((-x)^2-1)^{\frac{2}{3}} = (x^2-1)^{\frac{2}{3}} = f(x) \Longrightarrow$ parna funkcija

3) Znak i nule:

$f(x) \geq 0 : \forall x$ jer je $f(x) = (\sqrt[3]{x^2-1})^2 \geq 0$
$f(x) = 0 \Longleftrightarrow x = \pm 1$

4) Periodičnost: Nije periodična jer ima tačno 2 nule

5) Diferencijabilnost i neprekidnost: Neprekidna je zbog kompozicije neprekidnih funkcija.
Funkcija $\varphi : x \longrightarrow x^{\frac{2}{3}}$ nije diferencijabilna u 0. U našem slučaju su problem tačke $x = \pm 1$ jer je tada sve pod korenom jednako 0:
$f'(x) = \dfrac{2}{3}(x^2-1)^{-\frac{1}{3}} \cdot 2x = \dfrac{4}{3} \cdot \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$, a ovo nije dobro na $\mathbf{R}$:

$$f'_+(1) = \lim_{x \to 1^+} f'(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{4}{3} \cdot \frac{\cancelto{1}{x}}{\cancelto{0^+}{\sqrt[3]{x^2-1}}} = +\infty$$

$$f'_-(1) = \lim_{x \to 1^-} f'(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{4}{3} \cdot \frac{\cancelto{1}{x}}{\cancelto{0^-}{\sqrt[3]{x^2-1}}} = -\infty$$

Zbog parnosti, isto važi i za tačku $x_0 = -1$.

6) Monotonost i ekstremne vrednosti:
$x \neq \pm 1 : f'(x) = \dfrac{4}{3} \cdot \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$

$-\infty \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad +\infty$

x	$-$	$-$	$+$	$+$
$\sqrt[3]{x^2-1}$	$+$	$-$	$-$	$+$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

$x = 0$ je maksimum
$x = \pm 1$ su minimumi

7) Konveksnost i prevojne tačke:

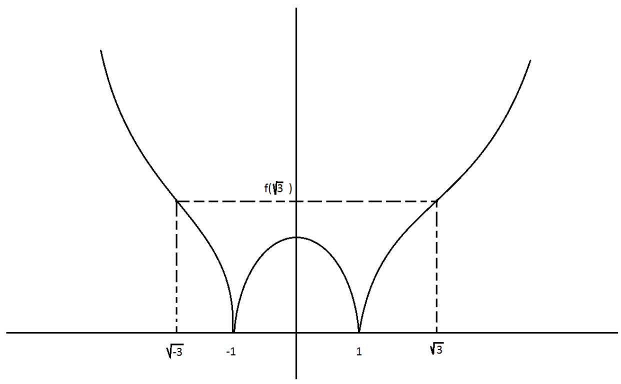
$$f''(x) = \frac{4}{3} \cdot \frac{(x^2-1)^{\frac{1}{3}} - x \cdot \frac{1}{3}(x^2-1)^{-\frac{2}{3}} \cdot 2x}{(x^2-1)^{\frac{2}{3}}} \cdot \frac{(x^2-1)^{\frac{2}{3}}}{(x^2-1)^{\frac{2}{3}}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{x^2 - 1 - \frac{2}{3}x^2}{(x^2-1)^{\frac{4}{3}}} =$$

$$\frac{4}{3(x^2-1)^{\frac{4}{3}}} \cdot (\frac{1}{3}x^2 - 1) = \underbrace{\frac{4}{9(x^2-1)^{\frac{4}{3}}}}_{\geq 0} \cdot (x^2 - 3)$$

$-\infty \quad -\sqrt{3} \quad \sqrt{3} \quad +\infty$

$x^2 - 3$	$+$	$-$	$+$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\cup$	$\cap$	$\cup$

$x = \pm\sqrt{3}$ su prevojne tačke



Slika 12.3. Grafički prikaz funkcije $f(x) = (x^2-1)^{\frac{2}{3}}$

$\boxed{\text{(4) Ispitati tok i skicirati grafik funkcije } f(x) = \sqrt[3]{x}(x^2-7).}$

1) Domen i asimptote: $D_f = \mathbf{R} \Longrightarrow$ nema vertikalnih asimptota
Kose asimptote:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-7}{x^{\frac{2}{3}}} = \pm\infty \Longrightarrow \text{nema kosih asimptota}$$

2) Parnost:
$f(-x) = \sqrt[3]{-x}((-x)^2-7) = -\sqrt[3]{x}(x^2-7) = -f(x) \Longrightarrow$ neparna funkcija

3) Znak i nule:
$f(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0,\ x = \pm\sqrt{7}$

$-\infty$ $-\sqrt{7}$ 0 $\sqrt{7}$ $+\infty$

x	$-$	$-$	$+$	$+$
x^2-7	$+$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

5) Diferencijabilnost i neprekidnost: Neprekidna je, a možda nije diferencijabilna u $x_0 = 0$:

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}(x^2-7) + \sqrt[3]{x}\cdot 2x$$

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (\cancelto{+\infty}{\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}} \cdot \cancelto{-7}{(x^2-7)} + \cancelto{0}{\sqrt[3]{x}\cdot 2x}) = -\infty$$

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (\cancelto{+\infty}{\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}} \cdot \cancelto{-7}{(x^2-7)} + \cancelto{0}{\sqrt[3]{x}\cdot 2x}) = -\infty$$

6) Monotonost i ekstremne vrednosti:

$$f'(x) = \frac{1}{3}\cdot x^{-\frac{2}{3}}\cdot(x^2-7+3x\cdot 2x) = \frac{7x^{-\frac{2}{3}}}{3}(x^2-1)$$

$-\infty$ -1 1 $+\infty$

x^2-1	$+$	$-$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

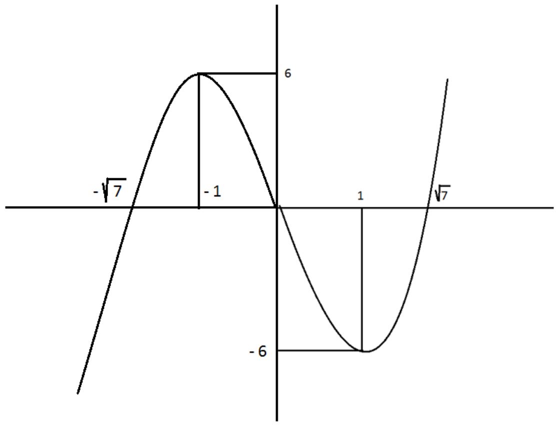
$x = -1$ je maksimum

$x = 1$ je minimum

7) Konkavnost i prevojne tačke:

$f''(x) = \frac{7}{3} \cdot (-\frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}}(x^2 - 1) + \frac{7}{3}x^{-\frac{2}{3}} \cdot 2x) = \frac{14}{9}x^{-\frac{5}{3}}(-(x^2 - 1) + 7x^2) = \frac{14}{9} \cdot x^{-\frac{5}{3}} \cdot \underbrace{(6x^2 + 1)}_{\geq 0}$

$x^{-\frac{5}{3}} > 0 : x > 0 \Longrightarrow f \cup$
$x^{-\frac{5}{3}} < 0 : x < 0 \Longrightarrow f \cap$
$x = 0$ je prevojna tačka



Slika 12.4. Grafički prikaz funkcije $f(x) = \sqrt[3]{x}(x^2 - 7)$

JEDANAESTA NEDELJA

(1) Ispitati tok i skicirati grafik funkcije $f(x) = |x+2| \cdot e^{-\frac{1}{x}}$.

1) Domen: $D_f = \mathbf{R} \backslash \{0\}$

2) Asimptote:
a) Vertikalna asimptota: Kandidat za vertikalnu asimptotu je $x = 0$:
$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} |x+2| \cdot e^{-\frac{1}{x}} = 0$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \cancelto{2}{|x+2|} \cdot \cancelto{+\infty}{e^{-\frac{1}{x}}} = +\infty$
$\Longrightarrow x = 0$ je vertikalna asimptota sa leve strane

b) Kosa asimptota:
$$e^{-\frac{1}{x}} = \left| \begin{array}{c} \text{smena: } t = -\frac{1}{x} \\ x \to +\infty \Longleftrightarrow t \to 0 \end{array} \right| = e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \boldsymbol{o}(t^2) = 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \boldsymbol{o}(\frac{1}{x^2})$$

$x \to -\infty:$
$$|x+2|e^{-\frac{1}{x}} = (-x-2)(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \boldsymbol{o}(\frac{1}{x^2})) = -x - 1 + \underbrace{\frac{3}{2x} + \boldsymbol{o}(\frac{1}{x})}_{<0} < -x - 1$$

$\Longrightarrow y = -x - 1$ je kosa asimptota kad $x \to -\infty$

$x \to +\infty:$
$$|x+2|e^{-\frac{1}{x}} = (x+2)(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \boldsymbol{o}(\frac{1}{x^2})) = x + 1 \underbrace{- \frac{3}{2x} + \boldsymbol{o}(\frac{1}{x})}_{<0} < x + 1$$

$\Longrightarrow y = x + 1$ je kosa asimptota kad $x \to +\infty$

3) Znak i nule:
$e^{-\frac{1}{x}} > 0 : \forall x \in D_f$
$|x+2| \geq 0 : \forall x \in D_f$
$|x+2| = 0 \Longleftrightarrow x = -2 \in D_f$

4) Neprekidnost i diferencijabilnost:
- neprekidna je na D_f
- možda nije diferencijabilna u $x_0 = -2$

<u>STAV</u>: $(|x|)' = \operatorname{sgn}(x),\ x \neq 0$

$$f'(x) = (|x+2|e^{-\frac{1}{x}})' = \operatorname{sgn}(x+2)e^{-\frac{1}{x}} + |x+2|e^{-\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2}$$

$f'_-(-2) = \lim\limits_{x\to -2^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to -2^-} e^{-\frac{1}{x}}(\operatorname{sgn}(x+2) + \cancelto{0}{\frac{|x+2|}{x^2}}) = \lim\limits_{x\to -2^-} e^{-\frac{1}{x}}(-1) = -\sqrt{e}$

$f'_+(-2) = \lim\limits_{x\to -2^+} e^{-\frac{1}{x}}(1 + \cancelto{0}{\frac{|x+2|}{x^2}}) = \sqrt{e}$
$f'_-(x_0) \neq f'_+(x) \Longrightarrow$ nije diferencijabilna u $x_0 = -2$

5) Monotonost i ekstremne vrednosti:

$$\operatorname{sgn}(f'(x)) = \operatorname{sgn}\left(\underbrace{\operatorname{sgn}(x+2) + \frac{|x+2|}{x^2}}_{=A}\right) \text{ jer je } e^{-\frac{1}{x}} > 0$$

$x > -2 : A = 1 + \dfrac{x+2}{x^2} = \dfrac{x^2+x+2}{x^2} > 0 \Longrightarrow f(x) \nearrow \forall x \in (-2,0) \cup (0,+\infty)$

$x < -2 : A = -1 - \dfrac{x+2}{x^2} = -\dfrac{x^2+x+2}{x^2} < 0 \Longrightarrow f(x) \searrow \forall x \in (-\infty,-2)$

$x = -2$ je lokalni minimum

6) Konveksnost i prevojne tačke:

$$f''(x) = \left(e^{-\frac{1}{x}}(\operatorname{sgn}(x+2) + \frac{|x+2|}{x^2})\right)' = e^{-\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2}\left(\operatorname{sgn}(x+2) + \frac{|x+2|}{x^2}\right) +$$

$$e^{-\frac{1}{x}}\left(0 + \frac{\operatorname{sgn}(x+2)x^2 - 2x|x+2|}{x^4}\right) = \underbrace{e^{-\frac{1}{x}}}_{\geq 0}\left(\frac{\overbrace{x^2\operatorname{sgn}(x+2) + |x+2| + \operatorname{sgn}(x+2)x^2 - 2x|x+2|}^{=B}}{x^4}\right)$$

$B = 2x^2\operatorname{sgn}(x+2) + |x+2|(1-2x)$

$x < -2 : B = -2x^2 - (x+2)(1-2x) = -2x^2 - (x - 2x^2 + 2 - 4x) = -3(\underbrace{x - \frac{2}{3}}_{<0}) \Longrightarrow$

$f''(x) < 0 : \forall x \in (-\infty,-2)$

$x > -2 : B = 2x^2 + (x+2)(1-2x) = 2x^2 + x - 2x^2 + 2 - 4x = 3(\dfrac{2}{3} - x) \Longrightarrow$

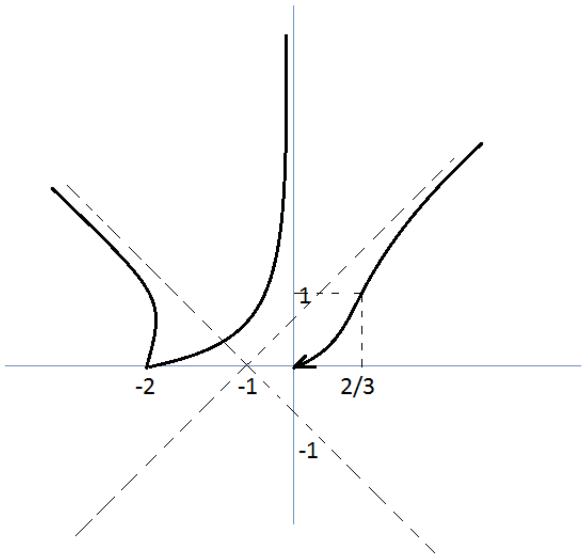
$f''(x) > 0 : \forall x < \dfrac{2}{3} \wedge f''(x) < 0 : \forall x > \dfrac{2}{3}$

Sveukupno:

$f(x)\cup : \forall x \in (-2,0) \wedge f(x)\cup : \forall x \in (0, \dfrac{2}{3})$

$f(x)\cap : \forall x \in (\dfrac{2}{3}, +\infty)$

$x = \dfrac{2}{3}$ je prevojna tačka



Slika 12.5. Grafički prikaz funkcije $f(x) = |x+2| \cdot e^{-\frac{1}{x}}$

$$\boxed{\text{(2) Ispitati tok i skicirati grafik funkcije } f(x) = \arcsin \frac{x}{\sqrt{2x^2+4x+4}}.}$$

1) Domen i asimptote:
koren: $2x^2+4x+4 \geq 0 \iff x^2+2x+2 \geq 0 \iff (x+1)^2+1 \geq 0 : \forall x \in \mathbf{R}$
razlomak: $x^2+4x+4 \neq 0 : \forall x \in \mathbf{R}$
arcsin:
$-1 \leq \dfrac{x}{\sqrt{2x^2+4x+4}} \leq 1 \ \Big/^2$
$\dfrac{x^2}{\sqrt{2x^2+4x+4}} \leq 1$
$x^2 \leq 2x^2+4x+4$
$x^2+4x+4 \geq 0$
$(x+2)^2 \geq 0 : \forall x \in \mathbf{R}$
$\Longrightarrow D_f = \mathbf{R} \Longrightarrow$ nema vertikalnih asimptota

Kose asimptote:

$$x \to +\infty : f(x) = \arcsin \frac{x}{\sqrt{2x^2+4x+4}} = \arcsin \frac{1}{\sqrt{2+\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}}} = \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} =$$

$$\frac{\pi}{4}$$

$$x \to -\infty : f(x) = \arcsin \frac{x}{\sqrt{2x^2+4x+4}} = \arcsin \frac{1}{\frac{\sqrt{2x^2+4x+4}}{-\sqrt{x^2}}} = \arcsin \frac{-1}{\sqrt{2+\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}}} =$$

$$\arcsin -\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\pi}{4}$$

2) Parnost: funkcija je ,,ni-ni" jer:

$$f(-1) = \arcsin -\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\pi}{4}$$

$f(1) = \arcsin \frac{\sqrt{10}}{10} \neq -\frac{\pi}{4}$ i $arcsin \frac{\sqrt{10}}{10} \neq \frac{\pi}{4}$

3) Znak i nule:
$\arcsin a(x) > 0 \Longleftrightarrow a(x) > 0$
$\arcsin a(x) < 0 \Longleftrightarrow a(x) < 0$
$\arcsin a(x) = 0 \Longleftrightarrow a(x) = 0$
$a(x) = \frac{x}{\sqrt{2x^2+4x+4}} \Longrightarrow \operatorname{sgn}(a(x)) = \operatorname{sgn}(x) \Longrightarrow$
$f(x) > 0 : x > 0$
$f(x) < 0 : x < 0$
$f(x) = 0 : x = 0$

4) Diferencijabilnost i neprekidnost:
- neprekidna je kao kompozicija neprekidnih funkcija
- $\arcsin t$ nije definisana u $t = \pm 1$ jer $(\arcsin t)' = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$:
Problematične tačke su:
$\frac{x}{\sqrt{2x^2+4x+4}} = \pm 1 \ /^2$
$\frac{x^2}{2x^2+4x+4} = 1$
$x^2 = 2x^2 + 4x + 4$
$x^2 + 4x + 4 = 0$
$(x+2)^2 = 0$
$x = -2$

$$x \neq -2 : f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{2x^2+4x+4}}} \left(\frac{x}{\sqrt{2x^2+4x+4}} \right)' = \sqrt{\frac{2x^2+4x+4}{2x^2+4x+4-x^2}} \cdot$$

$$\frac{\sqrt{2x^2+4x+4} - \frac{x(4x+4)}{2\sqrt{2x^2+4x+4}}}{2x^2+4x+4} = \frac{\cancel{\sqrt{2x^2+4x+4}}}{\sqrt{(x+2)^2}} \cdot \frac{2x^2+4x+4-2x(x+1)}{(2x^2+4x+4)^{\cancelto{1}{\frac{3}{2}}}} =$$

$$\frac{x+2}{|x+2|(x^2+2x+2)} = \operatorname{sgn}(x+2) \cdot \frac{1}{x^2+2x+2}$$

$$f'_-(-2) = \lim_{x \to -2^-} f'(x) = \lim_{x \to -2^-} \underbrace{\operatorname{sgn}(x+2)}_{=-1} \cdot \frac{1}{x^2+2x+2} = -\frac{1}{2}$$

$$f'_+(-2) = \lim_{x \to -2^+} f'(x) = \lim_{x \to -2^+} \underbrace{\operatorname{sgn}(x+2)}_{=1} \cdot \frac{1}{x^2+2x+2} = \frac{1}{2}$$

$f'_-(-2) \neq f'_+(-2) \Longrightarrow$ funkcija nije diferencijabilna u $x = -2$

5) Monotonost i ekstremne vrednosti:
$f'(x) = \operatorname{sgn}(x+2) \cdot \frac{1}{x^2+2x+2} \Longrightarrow \operatorname{sgn}(f'(x)) = \operatorname{sgn}(x+2)$
$f \nearrow : \forall x \in (-2, +\infty)$
$f \searrow : \forall x \in (-\infty, -2)$
$x = -2$ je minimum

6) Konveksnost i prevojne tačke:

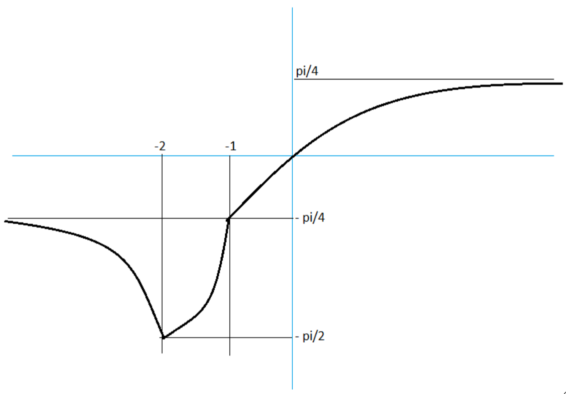
$$f''(x) = \left(\operatorname{sgn}(x+2)\cdot\frac{1}{x^2+2x+2}\right)' = \operatorname{sgn}(x+2)\cdot\frac{-1}{(x^2+2x+2)^2}\cdot(2x+2) =$$
$$-\frac{2\operatorname{sgn}(x+2)\cdot(x+1)}{(x^2+2x+2)^2}$$

$-\infty \quad -2 \quad -1 \quad +\infty$

$\operatorname{sgn}(x+2)$	$-$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$+$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	$\cap$	$\cup$	$\cap$

$x=-2, x=-1$ su prevojne tačke

Napomena: Raspored znakova u $|f''(x)| - | + | - |$ je takav zato što je $f''(x) = -\frac{2\operatorname{sgn}(x+2)\cdot(x+1)}{(x^2+2x+2)^2}$



Slika 12.6. Grafički prikaz funkcije $f(x) = \arcsin\frac{x}{\sqrt{2x^2+4x+4}}$

Domaći zadatak: Data je funkcija $f(x) = (x-2)^{\frac{2}{3}}\cdot(x+1)^{\frac{1}{3}}$.

a) Napisati datu funkciju u obliku $f(x) = ax + b + \frac{c}{x} + \boldsymbol{o}\left(\frac{1}{x}\right)$, $x \to \pm\infty$

b) Ispitati tok i skicirati grafik funkcije $f(x)$.

DVANAESTA NEDELJA

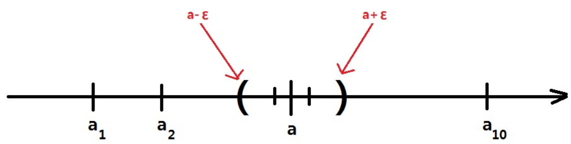
13 Nizovi

Definicija 1. Niz realnih brojeva (ili niz u $\mathbf{R}$ je preslikavanje $\varphi : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{R}$. Umesto sa $\varphi(1), \varphi(2), \ldots, \varphi(n), \ldots$, niz češće obelezavamo sa $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$ (ili $a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots$ ili $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$)

Primeri:

1. $a_n = n!$ ovo je eksplicitno zadat niz, niz je rastući i određeno divergira. Elementi su $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 6$, ...
2. $a_n = \dfrac{1}{n}$, niz je opadajući i konvergira. Elementi su $a_1 = 1$, $a_2 = \dfrac{1}{2}$, $a_3 = \dfrac{1}{3}$, ...
3. $a_n = (-1)^n$, niz je skoro konstantan, uzima samo dve vrednosti i divergira. Elementi su $a_1 = -1$, $a_2 = 1$, $a_3 = -1$, ...
4. $a_{n+1} = \dfrac{3a_n + 4}{2}$, ovo je rekurentno zadat niz
5. $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, ovo je rekurentno zadat niz sa korakom 2. Baza su dva elementa $a_1 = 1$ $a_2 = 2$

Definicija 2. $a \in \mathbf{R}$, $a = \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} a_n$ ako važi
$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)\ \forall n \geq n_0\ |a_n - a| < \varepsilon$



Ako je niz nastao od funkcije i znamo limes te funkcije, onda je to i limes niza.

Primer:
$a_n = \dfrac{1}{n}$
$\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \dfrac{1}{n} = 0$
$\varepsilon = \dfrac{1}{10} \longrightarrow n_0 = 11, \forall n \geq 11,\ \dfrac{1}{n} \in \left(-\dfrac{1}{10}, \dfrac{1}{10}\right)$
$\varepsilon = \dfrac{1}{700} \longrightarrow n_0 = 701, \forall n \geq 701,\ \dfrac{1}{n} \in \left(-\dfrac{1}{700}, \dfrac{1}{700}\right)$

Definicija 3. Ako $\exists a$ tako da je $a = \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} a_n$ kažemo da niz konvergira ili da je *konvergentan*. Ako nije konvergentan onda je *divergentan*.

Definicija 4. Kažemo da je $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} a_n = +\infty$ ako
$(\forall M)(\exists n_0)\ \forall n \geq n_0,\ a_n > M$ (određeno divergira).
Kažemo da je $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} a_n = -\infty$ ako
$(\forall M)(\exists n_0)\ \forall n \geq n_0,\ a_n < -M$
Napomena: Ako je $a_n = f(n)$, a $f(x)$ je funkcija definisana na nekom intervalu npr. $[1, +\infty)$ i $\exists \lim\limits_{x\longrightarrow\infty} f(x) = a \Longrightarrow \lim\limits_{x\longrightarrow\infty} a_n = a$
Primer: $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$
Elementi su $a_1 = -1,\ a_2 = \dfrac{1}{2},\ a_3 = -\dfrac{1}{3}, \ldots$
Niz konvergira ka 0.
$a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ (isto kao da smo rekli da je $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} a_n = 0$) jer $|a_n - 0| < \varepsilon$ (za dato ε nađemo n_0)

$$\left|\frac{(-1)^n}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

ako je $n \cdot \varepsilon > 1 \Longrightarrow n_0 > \dfrac{1}{\varepsilon}$

Definicija 5. a_n je ograničen ako $\exists M$ tako da je $|a_n| \leq M$. Ograničen je odozgo ako $\exists M$ tako da je $a_n \leq M$. Ograničen je odozdo ako $\exists m$ tako da je $a_n \geq m$.

STAV 1: Konvergentan niz je ograničen.
Dokaz:

$\varepsilon = 1$
$\forall n \geq n_0\ a_n \in (a-1, a+1)$
$m = min\{a_1, a_2, \ldots, a_{n_0-1}, a-1\}$
$M = max\{a_1, a_2, \ldots, a_{n_0-1}, a+1\}$
$\forall n\ m \leq a_n \leq M$

$\square$.

Definicija 6. a_n monotono raste ako je $a_n \leq a_{n+1}$ i obeležava se sa $a_n \nearrow$, odnosno, niz monotono opada ako je $a_n \geq a_{n+1}$ i obeležava se sa $a_n \searrow$. Niz je monoton ako raste ili opada.

Teorema 9.1 (Bernulijeva nejednakost). Ako je $a > -1$ onda važi da je $\boxed{(1+a)^n \geq 1 + n \cdot a.}$

Dokaz: (indukcijom po n)

BAZA: $n = 1\ (1+a) \geq 1 + a\ \surd$

KORAK: i.h. $(1+a)^n \geq 1 + n \cdot a\ /(1+a)$, sigurno veće od 0
$(1+a)^{n+1} \geq (1 + n \cdot a) \cdot (1+a)$
$(1+a)^{n+1} \geq 1 + n \cdot a + a + n \cdot a^2$
$(1+a)^{n+1} \geq 1 + (n+1) \cdot a + \underbrace{n \cdot a^2}_{\geq 0}$
$(1+a)^{n+1} \geq 1 + (n+1) \cdot a$

$\square$.

SVOJSTVA LIMESA NIZA:

I Pretpostavimo da imamo nizove a_n i b_n $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} a_n = a$ i $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} b_n = b$, oni su konvergentni. onda važi da su sledeći nizovi takođe konvergentni:

1. $a_n + b_n$
   $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}(a_n + b_n) = a + b$
2. $a_n \cdot b_n$
   $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$
3. $\dfrac{a_n}{b_n}$, $b_n \neq 0$ i $b \neq 0$
   $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$
4. $a_n \leq b_n \Longrightarrow a \leq b$

II Teorema o 3 limesa se primenjuje i na limese nizova
$a_n \leq b_n \leq c_n$ i $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} a_n = \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} c_n = a \Longrightarrow b_n$ konvergira i $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} b_n = a$

III

1. $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} a_n = \infty$, $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} b_n = b$, $b \in\mathbf{R} \Longrightarrow \lim\limits_{n\longrightarrow\infty}(a_n + b_n) = \infty$
2. $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} a_n = \infty$, $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} b_n = b$, $b \in\mathbf{R} \Longrightarrow \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \dfrac{b_n}{a_n} = 0$
3. $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} a_n = \infty$, $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} b_n = b \neq 0$, $b \in\mathbf{R} \Longrightarrow \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} a_n \cdot b_n = \pm\infty$

IV Neodređeni oblici:
$\infty - \infty$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, $\dfrac{0}{0}$, 1^{∞}, 0^0

<u>Primer:</u> Dokazati da $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} a_n = 0 \Longleftrightarrow \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} |a_n| = 0$

Dokaz:
$(\Longleftarrow)$
$-|A| \leq A \leq |A|$
$-|a_n| \leq a_n \leq |a_n| / \lim\limits_{n\longrightarrow\infty}$
$0 \leq a_n \leq 0$
Iz Teoreme o tri limesa $\Longrightarrow \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} a_n = 0$

$\square$.

$(\Longrightarrow)$
Znamo $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} a_n = 0$, hoćemo $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} |a_n| = 0$
$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0)\ \forall n \geq n_0\ ||a_n| - 0| < \varepsilon$
pošto je $||a_n|| = |a_n|$ onda je to $|a_n - 0| < \varepsilon$ jer $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} a_n = 0$

$\square$.

$\boxed{\text{VAŽAN PRIMER:}}$
$a_n = q^n$
$(q \geq 0)$:

- $q = 0$: $q^n = 0 \Longrightarrow \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} q^n = 0$, ovo je konstantan niz, jedina vrednost koja se pojavljuje je 0
- $q = 1$: $q^n = 1 \Longrightarrow \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} q^n = 1$, i ovo je konstantan niz, jedina vrednost koja se pojavljuje je 1
- $q^n > 1$: $q^n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$
  jer ako zamenimo $q = 1 + a$, dobijemo $q^n = (1 + a)^n \geq 1 + n \cdot a \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$
- $q \in (0, 1)$: $\dfrac{1}{q} \Longrightarrow \left(\dfrac{1}{q}\right)^n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$
  $q^n = \dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{q}\right)^n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} ,,\dfrac{1}{\infty}" = 0$

$(q < 0)$:

- $-1 < q < 0 \Longrightarrow 0 < |q| < 1$
  znamo: $|q^n| \longrightarrow 0 \Longrightarrow q^n \longrightarrow 0$
- $q = -1$: $q^n = (-1)^n$, niz divergira
- $q < -1$: $|q^n| \longrightarrow \infty$ divergira jer nije ograničen

Zaključak:

$$q^n = \begin{cases} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,\ q \in (0,1) \\ \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1,\ q = 1 \\ \text{određeno divergira ka } \infty,\ q > 1 \\ \text{divergira}, q \leq -1 \end{cases}$$

13.1 Monotoni nizovi

Teorema 10.1. Neka je niz a_n monoton. Tada on konvergira ako i samo ako je ograničen. Ako nije, onda određeno divergira.

Dokaz:

$(\Longrightarrow)$ Ako niz konvergira, on je ograničen. To važi za sve nizove.

$\Box$.

$(\Longleftarrow)$: $a_n \nearrow$
$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots \leq a_n \leq M$, $\forall n$
$S = \sup\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$
hoćemo: $S = \lim\limits_{x \longrightarrow \infty} a_n$,
odnosno: $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0\ a \in (S - \varepsilon, S + \varepsilon)$
$a_n \leq S \leq S + \varepsilon$
$S + \varepsilon$ više nije gornja granica tj. $\exists n_0$ tako da $a_{n_0} > S - \varepsilon$, ali pošto je $a_n \geq$

$a_{n_0} > S - \varepsilon$, $n \geq n_0$, nije ga premašio samo jedan element, nego svi jer je niz rastući.
Slučaj kad a_n nije ograničen:
$\Longrightarrow \forall M\ \exists n_0\ a_{n_0} \geq M$, ali svi $n \geq n_0$, ako je n_0 prebacio, onda su ga svi prebacili jer $a_n \geq a_{n+1} > M$ iz čega sledi da je $a_n \nearrow$.

$\square$.

<u>NAJVAŽNIJI PRIMER</u>

$a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ $a_n \nearrow$ znamo da je $a_n \leq 3$.
Dokazali smo da je $\sup \left\{ \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \right\} = e$
Ako dokažemo da je $a_n \leq a_{n+1}$ tj. da $a_n \nearrow$ po teoremi će slediti da je $e = \lim\limits_{n \leftrightarrow \infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$
Dokazujemo da a_n raste tj. da je $a_{n-1} \leq a_n$ (može i sa $a_n \leq a_{n+1}$, ali ovako je lakše).
/*koristićemo Bernulijevu nejednakost za dokaz*/

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}} = \frac{(n+1)^n \cdot (n-1)^{n-1}}{n^n \cdot n^{n-1}} =$$

$$\frac{(n+1)^n \cdot (n-1)^n}{n^n \cdot n^n} \cdot \frac{n}{n-1} = \frac{(n^2+1)^n}{(n^2)^n} \cdot \frac{n}{n-1} = \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1} \overbrace{\geq}^{Bernuli} \left(1 - n \cdot \frac{1}{n^2}\right) \cdot \frac{n}{n-1} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{n}{n-1} = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n}{n-1} = 1$$

$$a = -\frac{1}{n^2} \Longrightarrow a_n \geq a_{n-1} \text{ tj. } a_n \nearrow \Longrightarrow \lim_{n \leftrightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

$\square$.

Iz ovoga sledi da je $\lim\limits_{x \leftrightarrow \infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$.
Dokaz:
Znamo: $\lim\limits_{[x] \leftrightarrow \infty} \left(1 + \dfrac{1}{[x]}\right)^{[x]} = e$ (jer je ceo deo broja je prirodan broja, a u prethodnom dokazu je pokazano da ovo važi za prirodne brojeve)

$$[x] \leq x \leq [x] + 1$$

$$1 + \frac{1}{[x]+1} \leq 1 + \frac{1}{x} \leq 1 + \frac{1}{[x]}$$

$$\left(1 + \frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} \xrightarrow{} e \quad \leq \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leq \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1} \xrightarrow{} e$$

Pošto i levi i desni teže broju e, po teoremi o tri limesa, i ovaj u sredini teži broju e.

<u>Primeri:</u> Dokažimo:

1. da za $a > 0$ važi da je $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$

   (1) $a = 1$: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ konstantan niz jedinica

   (2) $a > 1$: $\sqrt[n]{a} = 1 + \alpha_n$, $\alpha_n > 0$
   $\alpha_n := \sqrt[n]{a} - 1$
   hoćemo da $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$
   $a = (1+\alpha_n)^n \geq 1 + n\cdot\alpha_n$, po Bernulijevoj
   $a - 1 \geq n \cdot \alpha_n$
   $0 < \alpha_n \leq \frac{a-1}{n} / \lim_{n\to\infty}$
   Po teoremi o tri limesa $\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0 \Longrightarrow \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty}(1+\alpha_n) = 1 + 0$

   (3) $a < 1 \Longleftrightarrow \frac{1}{a} > 1$:
   $a = \frac{1}{\frac{1}{a}}$
   $\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{1} = 1$

   $\square$.

2. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$
   $\sqrt[n]{n} = 1 + \alpha_n$, $\alpha_n \geq 0$
   hoćemo: $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$

   $$n = (1+\alpha_n)^n = \underbrace{1 + \alpha_n + \overbrace{\frac{n\cdot(n-1)}{2}\cdot\alpha_n^2} + \ldots + \alpha_n^n}_{binomnaformula} \geq \frac{n\cdot(n-1)}{2}\cdot\alpha_n^2$$

   $$\Longrightarrow \alpha_n^2 \leq \frac{n}{\frac{n\cdot(n-1)}{2}} = \frac{2}{n-1}$$

   $$\Longrightarrow 0 \leq \alpha_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

   $$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$$

   $\square$.

Zadaci:

1. $\lim_{n\longrightarrow\infty} \sqrt[n]{2 + \frac{1}{n}}$
   $2 < 2 + \underbrace{\frac{1}{n}}_{\geq 1} \leq 3$
   $\sqrt[n]{2} < \sqrt[n]{2 + \frac{1}{n}} \leq \sqrt[n]{3}$
   pošto i $\sqrt[n]{2}$ i $\sqrt[n]{3}$ teži 1, po teoremi o tri limesa, i $\sqrt[n]{2 + \frac{1}{n}}$ teži 1.

2. $\sqrt[n]{2^n+5^n} = \sqrt[n]{5^n\cdot\left(\left(\frac{2}{5}\right)^n+1\right)} = 5\cdot\sqrt[n]{1+\left(\frac{2}{5}\right)^n}$

$\frac{2}{5}<1 \Longrightarrow 1+\left(\frac{2}{5}\right)^n < 1+1=2$

$1<1+\left(\frac{2}{5}\right)^n \leq 1+1=2$

$1<\sqrt[n]{1+\left(\frac{2}{5}\right)^n} \leq \sqrt[n]{2}$

po teoremi o tri limesa, $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\sqrt[n]{1+\left(\frac{2}{5}\right)^n} = 1 \Longrightarrow \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} 5\cdot\sqrt[n]{1+\left(\frac{2}{5}\right)^n} =$

$5\cdot 1 = 5$

3. /*$\ln x \ll x^\varepsilon \ll a^x, a>1, \varepsilon>0, x\longrightarrow\infty$*/

$\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\sqrt[n]{n+2^n}$

$\sqrt[n]{n+2^n} = 2\cdot\sqrt[n]{1+\frac{n}{2^n}}$

$\frac{n}{2^n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

$\frac{n}{2^n} \leq 1$, može se dokazati matematičkom indukcijom da važi za svako n

$2\cdot\sqrt[n]{1} \leq 2\cdot\sqrt[n]{1+\frac{n}{2^n}} \leq 2\cdot\sqrt[n]{1+1} = 2\cdot\underbrace{\sqrt[n]{2}}_{\to 1} \Longrightarrow \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} 2\cdot\sqrt[n]{1+\frac{n}{2^n}} = 1$

13.2 Podnizovi i tačke nagomilavanja

Definicija 7. Imamo neki niz a_n, onda je njegov podniz $a_{\varphi(n)}$ gde je $\varphi : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ strogo rastuća funkcija.

neki niz: $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, \ldots$
neki njegov podniz je: $a_1, a_3, a_4, a_{100}, a_{200}, a_{300}$
nije podniz: $a_1, a_2, a_3, a_1, a_2, a_1$

Definicija 8. Tačka nagomilavanja niza je $a\in\mathbf{R}$ ako postoji podniz niza a_n koji konvergira ka tački a.
Napomena: Ako niz a_n konvergira, on ima samo 1 tačku nagomilavanja, svaki podniz konvergira ka njoj.

Primer:
$a_n = (-1)^n$
$a_{2n} = 1$ jer je $(-1)^{2n} = 1$
$a_{2n+1} = -1$ jer je $(-1)^{2n+1} = -1$,
Pošto ima dve tačke nagomilavanja, niz je divergentan.

Definicija 9. Gornji i donji limes niza su najveća i najmanja tačka nagomilavanja.
$\overline{\lim} a_n = \lim\sup(a_n)$ (limes superior)
$\underline{\lim} a_n = \lim\inf(a_n)$ (limes inferior)

Ako a_n konvergira važi:

$$\boxed{\overline{\lim} a_n = \underline{\lim} a_n = \lim_{n\longrightarrow\infty} a_n}$$

U prethodnom primeru je $\overline{\lim}(-1)^n = 1$, $\underline{\lim}_{n\longrightarrow\infty}(-1)^n = -1$

<u>Zadaci:</u> Naći cve tačke nagomilavanja, gornji i donji limes.

1. $a_n = \dfrac{2n+1}{3n+2} + (-1)^n \left(1 + \dfrac{1}{3n+1}\right)^{3n}$

   $\alpha_n = \dfrac{2+1}{3n+2} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \dfrac{2}{3}$

   $$\beta_n = \left(1 + \frac{1}{3n+1}\right)^{3n} = \underbrace{\left(1 + \frac{1}{3n+1}\right)^{3n+1}}_{\searrow e} \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{1}{3n+1}\right)^{-1}}_{\searrow 1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} e$$

   $a_n = \alpha_n + (-1)^n \cdot \beta_n$

   $a_{2n} = \alpha_{2n} + (-1)^{2n} \cdot \beta_{2n} = \alpha_{2n} + \beta_{2n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \dfrac{2}{3} + e$

   $a_{2n+1} = \alpha_{2n+1} + (-1)^{2n+1} \cdot \beta_{2n+1} = \alpha_{2n+1} - \beta_{2n+1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \dfrac{2}{3} - e$

   Tačke nagomilavanja su $\dfrac{2}{3} + e$ i $\dfrac{2}{3} - e$

   $\overline{\lim} a_n = \dfrac{2}{3} + e$

   $\underline{\lim} a_n = \dfrac{2}{3} - e$

2. $a_n = \cos \dfrac{n\pi}{2}$

   $$\cos\frac{\pi}{2} = 0,\ \cos\frac{2\pi}{2} = \cos\pi = -1,\ cos 3\pi 2) = 0,\ \cos\frac{4\pi}{2} = \cos(2\pi) = 1$$

   ,

   $$\cos\frac{5\pi}{2} =,\ \cos\frac{6\pi}{2} = -1,\ \cos\frac{7\pi}{2} = 0,\ \cos\frac{8\pi}{2} = 1$$

   $\cos\dfrac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, n = 4\cdot k + 1 \text{ ili } n = 4\cdot k + 3 \\ -1, n = 4\cdot k + 2 \\ 1, n = 4\cdot k + 4 \text{ (tj. } n = 4\cdot k) \end{cases}$

   Imamo 4 podniza, a 3 tačke nagomilavanja: -1, 0, 1.

   $\overline{\lim} a_n = 1$

   $\underline{\lim} a_n = -1$

3. $a_n = \sin\dfrac{n\pi}{3}$

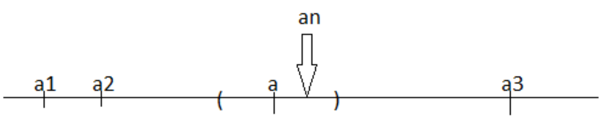
4. $a_n = \sin\dfrac{n\pi}{4} \cdot \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n + (-1)^n \dfrac{n+1}{n+2}$

5. $a_n = 2^{(-1)^n n}$

TRINAESTA NEDELJA

Ponavljanje:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \iff (\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0)\forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon$$



• Podniz: $a_{\varphi(n)}$, $\varphi(n)$ – rastući niz prirodnih brojeva
$\varphi : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ je rastuća funkcija
•a je tačka nagomilavanja niza a_n ako niz konvergira ka a (za $(-1)^n$ t.n. su $1, -1$)

STAV 1: a je tačka nagomilavanja niza a_n akko u svakoj okolini broja a postoji beskonačno mnogo članova niza a_n
Dokaz:
($\Longrightarrow$) a je tačka nagomilavanja $\Longrightarrow \exists$ podniz $\varphi(n)$, $a_{\varphi(n)\to a}$
$\varepsilon > 0,\ n \geq n_0 : (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$
$a_{\varphi(n)} \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$

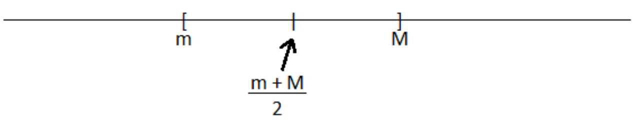
$\square$.

($\Longleftarrow$) Neka u svakoj okolini tačke a postoji beskonačno mnogo članova niza. Uzmemo okolinu $(a-1, a+1)$. Uzmemo jedan član niza koji se nalazi u ovoj okolini, i neka je to $a_{\varphi(1)}$. Uzmemo okolinu $(a-\frac{1}{2}, a+\frac{1}{2})$. Uzmemo $a_{\varphi(2)}$ t.d. $\varphi(2) > \varphi(1)$.
Ako smo našli $a_{\varphi(n)} \in (a-\frac{1}{n}, a+\frac{1}{n})$, onda biramo $a_{\varphi(n+1)}$ t.d. $a_{\varphi(n+1)} \in (a-\frac{1}{n+1}, a+\frac{1}{n+1})$ i da je $\varphi(n+1) > \varphi(n)$.
Ovim smo napravili podniz $a_{\varphi(n)} \in (a-\frac{1}{n}, a+\frac{1}{n})$, $a_{\varphi(n)} \to a \Longrightarrow a$ je tačka nagomilavanja.

$\square$.

TEOREMA 13.1. (Bolcano-Vajerštrajsova): Svaki ograničen niz ima bar jednu tačku nagomilavanja.

Dokaz: Neka je $m \leq a_n \leq M$. Posmatrajmo skup $\{a_n | n \in \mathbf{N}\}$. On može biti konačan ili beskonačan. Ako je konačan, postoji konstantan podniz $a_{\varphi(n)} \equiv a$ i ovo teži ka a. Ako je skup beskonačan, onda ga prepolovimo na pola:



Ili ima beskonačno mnogo u $\left[m, \dfrac{m+M}{2}\right]$ ili u $\left[\dfrac{m+M}{2}, M\right]$, pa biramo onaj koji ima beskonačno mnogo. Pravimo niz umetnutih odsečaka:

$I_1 = [m, M]$
$I_2 = \left[m, \dfrac{m+M}{2}\right]$ ili $\left[\dfrac{m+M}{2}, M\right]$, t.d. beskonačno mnogo članova niza $\in I_2$
$\vdots$
$I_{n+1} \subseteq I_n$
$\forall n:\ I_n$ je dužine $\dfrac{M-m}{2^{n-1}}$ i beskonačno mnogo članova niza a_n je u I_n.
(KAN) $\Longrightarrow \exists c = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_n$

13.3 Košijevi nizovi

Definicija 1. Niz a_n je Košijev ako:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)\ t.d.\ \forall m, n \geq n_0 : |a_n - a_m| < \varepsilon$$

STAV 2: Ako a_n konvergira, onda je a_n Košijev.

Dokaz: $a_n \to a \Longrightarrow |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2},\ \forall n \geq n_0$

$$|a_n - a_m| = |\underbrace{a_n - a}_{\alpha} + \underbrace{a - a_m}_{\beta}| \overbrace{<}^{nej.\triangle} |\alpha| + |\beta| = |a_n - a| + |a_m - a| < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

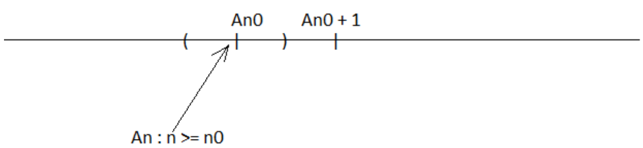
$\square$.

Primer 1: Niz $a_n = (-1)^n$ nije Košijev ($(STAV2) \implies nije\ konvergentan.$)

$|a_{n+1} - a_n| = |(-1)^{n+1} - (-1)^n| = |(-1)^n| \cdot |(-1-1)| = 1 \cdot 2 = 2.$
Za $\varepsilon = 1$, za bilo koje n_0 ne može da važi Košijevo svojstvo $|a_n - a_m| < \varepsilon \Longrightarrow$ nije Košijev.

STAV 3: Svaki Košijev niz je ograničen.

Dokaz: Neka je $\varepsilon = 1$. Njemu pridružujemo n_0 t.d. $\forall m, n \geq n_0 : |a_n - a_m| < 1$.



$m = min\{a_1, a_2, ..., a_{n_0-1}, a_{n_0} - 1\}$
$M = max\{a_1, a_2, ..., a_{n_0-1}, a_{n_0+1}\}$

$\square$.

STAV 4: Košijev niz konvergira akko ima konvergentan podniz.

Dokaz:
($\Longrightarrow$) Svaki konvergentan niz ima konvergentan podniz ($a_n \to a \Longrightarrow$ svaki podniz $\to a$)

$\square$.

$(\Longleftarrow)$ Treba pokazati: $\left.\begin{array}{c} a_n \text{ je Košijev} \\ a_{\varphi(n)} \end{array}\right\} a_n \to a$

$$|a_n - a| = |a_n - a_{\varphi(n)} + a_{\varphi(n)} - a| \le \underbrace{|a_n - a_{\varphi(n)}|}_{<\frac{\varepsilon}{2} \text{ jer je niz Kosijev}} + \underbrace{|a_{\varphi(n)} - a|}_{<\frac{\varepsilon}{2} \text{ jer } a_{\varphi(n)} \to a} < \varepsilon$$

$\square$.

TEOREMA 13.2. a_n je konvergentan akko a_n je Košijev.

Dokaz:
$(\Longrightarrow)$ STAV 2

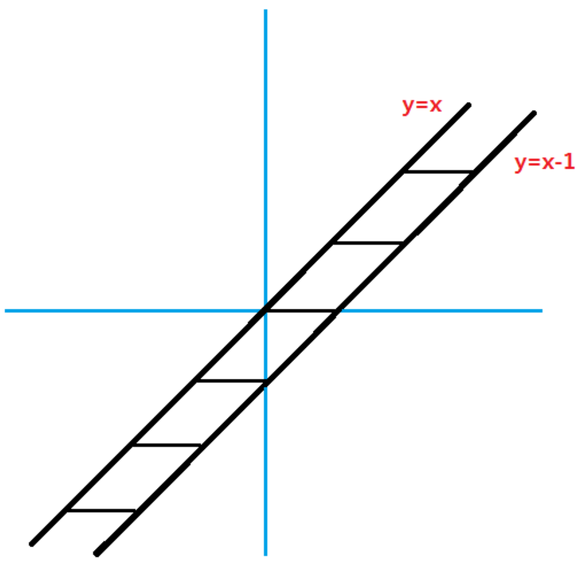
$\square$.

$(\Longleftarrow)$ Neka je a_n Košijev:
(STAV 3) $\Longrightarrow a_n$ je ograničen
(B-V) $\Longrightarrow a_n$ ima konvergentan podniz
(STAV 4) $\Longrightarrow a_n$ konvergira.

$\square$.

Napomena: U $\mathbf{Q}$ postoje Košijevi nizovi koji ne konvergiraju u $\mathbf{Q}$.
1) Dokazati da $\forall n \in \mathbf{R}, \exists$ niz $r_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} r,\ r_n \in \mathbf{Q}$

Dokaz: $r \in \mathbf{R},\ r_n = \dfrac{\lceil n \cdot r \rceil}{n} \in \mathbf{Q}$



$x - 1 \le [x] \le x$
$\frac{nr-1}{n} \le \frac{[nr]}{n} \le \frac{nr}{n} = r$
$\underset{\nearrow r}{r - \frac{1}{n}} \le r_n \le \underset{\nearrow r}{r} \Longrightarrow r_n \to r$

$\square$.

2) Dati primer Košijevog niza u $\mathbf{Q}$ čiji limes nije u $\mathbf{Q}$.

$a_n = \dfrac{[n\sqrt{2}]}{n} \xrightarrow{n\to\infty} \underbrace{\sqrt{2}}_{\notin \mathbf{Q}} \Longrightarrow a_n$ je Košijev

Primer 2:

1) Harmonijski red: $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ nije Košijev

Treba pokazati da je $|s_{2n} - s_n| \geq \frac{1}{2}$:

$|s_{2n} - s_n| = |\cancel{1} + \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{...} + \cancel{\frac{1}{n}} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n} - (\cancel{1} + \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{...} + \cancel{\frac{1}{n}})| = |\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n}| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n} \geq \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + ... + \frac{1}{2n}}_{n\ sabiraka} = n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \Longrightarrow$

divergira

2) Niz: $t_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2} = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ jeste Košijev

Treba pokazati: $|t_m - t_n| < \varepsilon$

Neka je $m > n$: $|t_m - t_n| = |\cancel{1} + \cancel{\frac{1}{2^2}} + \cancel{\frac{1}{3^2}} + \cancel{...} + \cancel{\frac{1}{n^2}} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + ... + \frac{1}{(m-1)^2} + \frac{1}{m^2} - (\cancel{1} + \cancel{\frac{1}{2^2}} + \cancel{\frac{1}{3^2}} + \cancel{...} + \cancel{\frac{1}{n^2}})| = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + ... + \frac{1}{(m-1)^2} + \frac{1}{m^2} < ...$

$\left[\left[\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{k-(k-1)}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right]\right]$

$... < \left(\frac{1}{n} - \cancel{\frac{1}{n+1}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{n+1}} - \cancel{\frac{1}{n+2}}\right) + \cancel{...} + \left(\cancel{\frac{1}{m-2}} - \cancel{\frac{1}{m-1}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{m-1}} - \frac{1}{m}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{m} < \frac{1}{n} < \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0 : n \geq n_0 \Longrightarrow t_n$ je Košijev

13.4 Veza limesa niza i limesa funkcije i neprekidnosti

<u>STAV 5:</u> (Hajneova definicija limesa funkcije):

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \ (a, b \in \bar{\mathbf{R}}) \Longleftrightarrow \forall\ niz\ a_n \to a,\ n \to \infty\ (a_n \neq a)\ važi:\ f(a_n) \to L$$

Dokaz:

($\Longrightarrow$:) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) : 0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$ i neka $a_n \to a$, $n \to \infty$ $(a_n \neq a)$. Onda je $0 < |a_n - a| < \delta$, za dovoljno veliko n:

$\Longrightarrow |f(a_n) - L| < \varepsilon$

$\Longrightarrow f(a_n) \xrightarrow{n\to\infty} L$

($\Longleftarrow$:) Pretpostavimo da $a_n \to a \Longrightarrow f(a_n) \to L$ $(\forall a_n \neq a)$. Treba dokazati da $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$.

Pretpostavimo suprotno, tj. da $\exists \varepsilon > 0$, $\forall \delta$, $\exists x_0 : 0 < |x_0 - a| < \delta \Longrightarrow |f(x_0) - L| \geq \varepsilon$

Neka je ε dato.

Uzmemo $\delta = \frac{1}{n}$ i nađemo njemu odgovarajuće x_n za koje važi $0 < |x_n - a| < \frac{1}{n}$, ali $|f(x_n) - L| \geq \varepsilon$. Ovim smo konstruisali niz $x_n \neq a$, $x_n \to 0$, ali $f(x_n) \not\to L$, što je kontradikcija.

$\square$.

Posledica:

$$a \in \mathbf{R},\ f \text{ je neprekidna u } a \Longleftrightarrow \forall \text{ niz } a_n \to a,\ n \to \infty \Longrightarrow f(a_n) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} f(a)$$

Primer 3: $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ nema $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

Pretpostavimo da postoji $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = L$.
(STAV 5) $\Longrightarrow \forall$ niz $x_n \to 0 \Longrightarrow f(x_n) \to L$

$$\left.\begin{array}{r}
x_n = \dfrac{1}{2n\pi} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \\
f(x_n) = \sin\dfrac{1}{x_n} = \sin\dfrac{1}{\frac{1}{2n\pi}} = \sin(2n\pi) = 0 \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \\
y_n = \dfrac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \\
f(y_n) = \sin\dfrac{1}{y_n} = \sin(2n\pi + \frac{\pi}{2}) = 1 \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 1
\end{array}\right\} \nexists \lim_{x\to 0} f(x)$$

Primer 4: $\left.\begin{array}{c} f \text{ periodična} \\ f \neq const \end{array}\right\} \Longrightarrow \nexists \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ (nema H.A.)

Hoćemo da konstruišemo 2 niza: $x_n \to \infty,\ y_n \to \infty$, ali da $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq \lim\limits_{n\to\infty} f(y_n)$.

$$\begin{array}{ll}
\exists x, y: & f(x) \neq f(y) - \text{jer } f \neq const \\
& T - \text{period} \\
& x_n = x + nT \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty \\
& y_n = y + nT \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty
\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l}
f(x_n) = f(x) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x) \\
f(y_n) = f(y) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} f(y)
\end{array}\right\} \neq$$

Primer 5: $f(x) = [x]$ ima prekid u $x = m \in \mathbf{Z}$

$$x_n = m - \tfrac{1}{n} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} m$$
$$f(x_n) = \underbrace{[m - \frac{1}{n}]}_{\in(m-1,m)} = m - 1 \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} m - 1 \neq [m]$$

Košijev princip konvergencije funkcija

TEOREMA 1.2. Neka je $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Funkcija f ima (konačan) limes u a ako i samo ako važi:

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \dot{u}_a) \text{ t.d.j: } \quad x, y \in \dot{u}_a \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \qquad (\clubsuit)$$

Dokaz. $\Rightarrow$: Neka je $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L \in \mathbb{R}$ i $\varepsilon > 0$. Postoji $\dot{u}_a$ td. $x \in \dot{u}_a \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon/2$. Za $x, y \in \dot{u}_a \Rightarrow$

$$|f(x) - f(y) \leq |f(x) - L| + |f(y) - L| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

$\Leftarrow$: Neka je $x_n \to a$ proizvoljan niz različit od a. Iz ($\clubsuit$) sledi da je $f(x_n)$ Košijev pa je kovergentan. Neka je $L = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \in \mathbb{R}$. Dokažimo još da je za svaki niz $y_n \to a$ različit od a, $\lim_{n\to\infty} f(y_n) = L$ (iz Hajnea ovo je kraj dokaza). Znamo da za svaki takav niz y_n, niz $f(y_n)$ konvergira (već dokazano za $f(x_n)$, isto se dokazuje za $f(y_n)$). Neka je $\lim_{n\to\infty} f(y_n) = L_1$. Za proizvoljno $\varepsilon > 0$ imamo

$$|L - L_1| \leq |L - f(x_n)| + |f(x_n) - f(y_n)| + |f(y_n) - L_1| < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon$$

za dovoljno veliko n. Prvi sabirak je manji od $\varepsilon/3$ jer $f(x_n) \to L$, drugi zbog $x_n, y_n \to a$ i uslova ($\clubsuit$), a treći jer $f(y_n) \to L_1$. $|L - L_1| < \varepsilon$ za svako $\varepsilon > 0 \Rightarrow |L - L_1| = 0$.

$\square$.

13.4.1 Dokazi pojedinih teorema (preko nizova)

(1) f neprekidna $\Longrightarrow \mathbf{f}(\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x_0}} \mathbf{g}(\mathbf{x})) = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x_0}} \mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{x}))$

Neka je $x_n \to x_0$ niz i $\lim_{x\to x_0} g(x) = \alpha$. Tada je $f(\lim_{x\to x_0} g(x)) = f(\alpha)$.
(STAV 5) $\Longrightarrow g(x_n) \to \alpha$
f je neprekidna, pa $f(g(x_n)) \to f(\alpha)$
$\forall$ niz $x_n \to x_o : f(g(x_n)) \to f(\alpha)$
(Hajne) $\Longrightarrow \lim_{x\to x_0} f(g(x)) = f(\alpha)$

$\square$.

(2) f, g neprekidne $\Longrightarrow f \circ g$ je neprekidna

Za $x_n \to x_0$ hoćemo $f \circ g(x_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f \circ g(x_0)$
$f \circ g(x_n) = f(\underbrace{g(x_n)}_{y_n})$

$$x_n \to x_0 \Longrightarrow \underbrace{g(x_n)}_{y_n} \underbrace{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}}_{nepr.\ g} \underbrace{g(x_0)}_{y_0} \underbrace{\Longrightarrow}_{nepr.\ f} \underbrace{f(y_n)}_{f(g(x_n))} \to f(y_0) = f(g(x_0))$$

$\square$.

(3) Koši–Bolcanova teorema:

$$\mathbf{f\ je\ neprekidna\ i\ f(a) \cdot f(b) < 0 \Longrightarrow \exists c : f(c) = 0}$$

$\bigcap I_n = c$
$I_n = [a_n, b_n]$
$f(a_n) > 0$
$f(b_n) < 0$
$a_n \to c \overset{f\ nepr.}{\Longrightarrow} \overbrace{f(a_n)}^{>0} \to f(c) \geq 0$

$b_n \to c \Longrightarrow f(b_n) \to f(c) \le 0$
$b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^{n-1}},\ c \in [a_n, b_n] \Longrightarrow |a_n - c| \le \dfrac{b-a}{2^n}$ i $|b_n - c| \le \dfrac{b-a}{2^n}$
Odavde sledi da nizovi a_n i b_n konvergiraju ka c.

$\square$.

(4) $\mathbf{e^x}$ je neprekidna

Dovoljno je da pokažemo da je $\lim\limits_{x\to 0} e^x = 1$ jer, inače, $\lim\limits_{x\to x_0} e^x = \lim\limits_{x\to x_0} e^{x-x_0}\cdot e^{x_0} = e^{x_0}\cdot \lim\limits_{x\to x_0} e^{x-x_0} = e^{x_0}\cdot e^0 = e^{x_0}\cdot 1 = e^{x_0}$.

Neka niz $x_n \to 0$, a hoćemo $e^{x_n} \to 1$. Pretpostavimo da $x_n > 0$. Znamo da $\sqrt[n]{e} \to 1$, tj. $e^{1/n} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$.
$0 < x_n \to 0 : \exists n_0,\ \forall n \ge n_0 :\ x_n < \frac{1}{m}$, za unapred zadato m.
$1 = e^0 < e^{x_n} < e^{\frac{1}{m}};\ e^{\frac{1}{m}} < 1 + \varepsilon$
$1 < e^n < 1 + \varepsilon$
$\Longrightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} e^x = 1.$
Sa druge strane:
$\lim\limits_{x\to 0^-} e^x = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{e^{-x}} = \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{1}{e^t} = \dfrac{1}{1} = 1$

$\square$.

(5.1.) Štolcova teorema za nizove:

$$\mathbf{x_n,\ y_n,\ y_n \nearrow \infty \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}}$$

Bez dokaza!

(5.2.) Posledica: Košijeva teorema za nizove:
Ako $\mathbf{a_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} a}$, onda niz aritmetičkih sredina $\mathbf{S_n \to a}$

$$\mathbf{S_n = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} a}$$

$x_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$
$y_n = n\ (y_n \nearrow \infty)$
(Štolc) $\Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{\cancel{n}+1-\cancel{n}} = a$

$\square$.

(6) STAV:

$$\mathbf{a_n > 0,\ a_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} a > 0 \Longrightarrow G_n = \sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot ...\cdot a_n} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} a}$$

$$\left[\left[\ \begin{array}{c} H \le G \le A \\ \dfrac{n}{\frac{1}{a_n} + ... + \frac{1}{a_n}} \le \sqrt[n]{a_1\cdot ...\cdot a_n} \le \dfrac{a_1 + ... + a_n}{n} \end{array}\ \right]\right]$$

$$H_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + ... + \frac{1}{a_n}} = \frac{1}{\frac{\frac{1}{a_1} + ... + \frac{1}{a_n}}{n}}$$

$$\lim_{n\to\infty} H_n = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{a_1} + ... + \frac{1}{a_n}}{n}} \overbrace{=}^{Koši\ za\ A.S.\ a_n} \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n}} = \frac{1}{\frac{1}{a}} = a$$

$$\cancel{H_n}^{\nearrow a} \le G_n \le \cancel{A_n}^{\nearrow a} \Longrightarrow G_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$$

$\square$.

Zadatak 1: Izračunati $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$

$$a_n = \frac{n^n}{n!} = \underbrace{\frac{a_n}{a_{n-1}}}_{=b_n} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot ... \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot a_1$$

$a_0 = 1$
$b_1 = \frac{a_1}{a_0} = a_1$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n \cdot ... \cdot b_1} \cdot = \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$b_n = \frac{\frac{n^n}{n!}}{\frac{(n-1)^{n-1}}{(n-1)!}} = \frac{n^n}{(n-1)^{n-1}} \cdot \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{n^n}{(n-1)^{n-1}} \cdot \frac{1}{n} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} =$$
$$\left(\frac{n-1+1}{n-1}\right)^{n-1} = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} e$$

Posledica: $\sqrt[n]{n!} \sim \frac{\mathbf{n}}{\mathbf{e}}$

Važi asimtotski poredak: $\ln n \ll n^\varepsilon \ll a^n \ll n! \ll n^n$.
Prve dve relacije smo dokazali za funkcije. Druge dve dokazati za domaći.