1. Еквивалентни токови. Теорема о исправљивости векторског поља

Теорема о исправљивости векторског поља нам даје опис фазног тока (до на дифеоморфизам) у близини некритичне тачке (односно тачке у којој се векторско поље не анулира). Видећемо да нам она гарантује да је у динамичком смислу, тај ток веома једноставан у близини некритичне тачке, тј. да је он еквивалентан транслацији. Зато је у динамичком смислу занимљивије понашање тока у близини критичне тачке, односно тачке еквилибријума система.

Уведимо прво неке појмове.

Дефиниција 1. Кажемо да су фазни токови ϕ^t и ψ^t дефинисани једначинама

$$\begin{aligned} \tfrac{d\phi^t}{dt} &= F(\phi^t), \quad \phi^0 = \mathrm{Id} \\ \tfrac{d\psi^t}{dt} &= G(\psi^t), \quad \psi^0 = \mathrm{Id} \end{aligned}$$

диференцијално конјуговани или *диференцијално еквивалентни* ако постоји дифеоморфизам

$$\varphi : \mathcal{U} \to \mathcal{W}$$

такав да важи

$$\varphi \circ \phi^t = \psi^t \circ \varphi.$$

$\Diamond$

Дефиниција 2. За диференцијабијно пресликавање $\varphi : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$, и векторско поље $F : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$, $\varphi_*(F)$ је векторско поље дефинисано на слици пресликавања φ као:

$$\varphi_*(F)(\varphi(\mathbf{x})) = d\varphi(\mathbf{x})(F(\mathbf{x})),$$

и назива се ***push forward*** векторског поља F пресликавањем φ. $\Diamond$

Задатак 3. Доказати да важи $(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*$ и, за дифеоморфизам φ, $(\varphi_*)^{-1} = \varphi_*^{-1}$.✓

Тврђење 4. Фазни токови ϕ^t и ψ^t, генерисани векторским пољима F и G редом, диференцијално су еквивалентни помоћу дифеоморфизма φ ако и само важи $G = \varphi_* F$.

Доказ. $\Rightarrow$: Нека F генерише ϕ^t и нека је $\psi^t = \varphi \circ \phi^t \circ \varphi^{-1}$. Диференцирањем израза $\psi^t = \varphi \circ \phi^t \circ \varphi^{-1}$ по t добијамо:

$$\begin{aligned} G(\psi^t(\mathbf{x})) = \frac{d}{dt}\psi^t(\mathbf{x}) = d\varphi(\phi^t\varphi^{-1}(\mathbf{x}))(F(\phi^t\varphi^{-1}(\mathbf{x})) = \\ d\varphi(\varphi^{-1}\psi^t(\mathbf{x}))(F(\varphi^{-1}\psi^t(\mathbf{x}))) = \varphi_* F(\varphi\varphi^{-1}\psi^t(\mathbf{x})) = \varphi_* F(\psi^t(\mathbf{x})) \end{aligned} \tag{1}$$

па је $G = \varphi_* F$.

$\Leftarrow$: Нека је $G = \varphi_* F$ и векторска поља F и G генеришу токове ϕ^t и ψ^t редом. Означимо са $\chi^t := \varphi \circ \phi^t \circ \varphi^{-1}$. Обичним диференцирањем, исто као у (1), закључујемо да је

$$\frac{d}{dt}\chi^t(\mathbf{x}) = G(\chi^t(\mathbf{x})),$$

а како је $\chi^0 = \mathrm{Id}$, из Пикарове теореме следи да мора бити $\chi^t = \psi^t$. $\square$

Теорема 5. *Нека је векторско поље $F : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ глатко и нека је $F(\mathbf{x}^0) \neq \mathbf{0}$ за $\mathbf{x}^0 \in \mathcal{U}$. Тада постоји околина $\mathcal{V}$ тачке $\mathbf{x}^0$, $\mathbf{x}^0 \in \mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ и дифеоморфизам $\varphi : \mathcal{U} \to \varphi(\mathcal{U})$ такав да је $\varphi_*(F) = \frac{\partial}{\partial x_1}$.*

Напомена 6. Ознака $\frac{\partial}{\partial x_1}$ је ознака за константно векторско поље $(1, 0, \ldots, 0)$. $\diamond$

Доказ. Без губљења општости можемо да препоставимо да је $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$[1].

Препоставимо за почетак да је $F(\mathbf{x}_0) = F(\mathbf{0}) = \frac{\partial}{\partial x_1}$. Нека је B околина тачке $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ и $\delta_0 > 0$ такво да је систем за систем:

$$\frac{d\phi^t}{dt} = F(\phi^t), \quad \phi^0 = \mathrm{Id}\,. \tag{2}$$

дефинисан за $\mathbf{x} \in B$ и $t \in [-\delta_0, \delta_0]$. Означимо са $B_0 := B \cap \{x_1 = 0\}$. За $\mathbf{y} \in B_0$ дефинишимо

$$\psi : (-\delta_0, \delta_0) \times B_0 \to \mathbb{R}^n, \quad \psi : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \phi^{x_1}(0, x_2, \ldots, x_n).$$

Докажимо да је ψ локални дифеоморфизам и да је ψ^{-1} пресликавање које исправља векторско поље $\mathbf{x}$. Имамо:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_1}(0, x_2, \ldots, x_n) = F(\phi^0(\mathbf{0})) = F(\mathbf{0}) = \frac{\partial}{\partial x_1},$$

а како је

$$\psi(0, x_2, \ldots, x_n) = \phi_0(0, x_2, \ldots, x_n) = (0, x_2, \ldots, x_n), \quad \text{тј.} \quad \psi|_{\{x_1=0\}} = \mathrm{Id}$$

то је

$$d(\psi|_{\{x_1=0\}}) = d(\mathrm{Id}\,|_{\{x_1=0\}}) = \mathrm{Id}\,|_{\{x_1=0\}}.$$

Зато је

$$d\psi(0, x_2, \ldots, x_n) = \left[F(\mathbf{0}) \,\middle|\, \begin{matrix} \star \\ \mathrm{Id}\,|_{\{x_1=0\}} \end{matrix} \right] = \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \,\middle|\, \begin{matrix} \star \\ \mathrm{Id}\,|_{\{x_1=0\}} \end{matrix} \right],$$

где је $\star$ врста неких $n-1$ функција (по $x_1, \ldots, x_n$). Одавде је $\det d\psi(0, x_2, \ldots, x_n) = 1$, па по Теореми о инверзној функцији постоји околина $\mathcal{V}$ тачке $\mathbf{0}$ на којој је ψ дифеоморфизам. Нека је $\varphi := \psi^{-1}$ дефинисано на $\psi(\mathcal{V})$. Како је

$$\psi_*\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)(\psi(x_1, \ldots, x_n)) = d\psi(x_1, \ldots, x_n)\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right) = \frac{\partial}{\partial x_1}\psi(x_1, \ldots, x_n) =$$
$$\frac{\partial \phi^{x_1}}{\partial t}(0, x_2, \ldots, x_n) = F(\phi^{x_1}(0, x_2, \ldots, x_n) = F(\psi(x_1, \ldots, x_n)),$$

тј.

$$\psi_*\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right) = F,$$

то је

$$\varphi_*(F) = \frac{\partial}{\partial x_1}.$$

Ако $F(\mathbf{x}_0) \neq \frac{\partial}{\partial x_1}$, онда можемо линеарном сменом ово лако да постигнемо. Нека је $V \cong \mathbb{R}^{n-1}$ векторски потпростор димензије $n-1$ ортогоналан на $F(\mathbf{x}_0)$ (кроз $\mathbf{x}_0$) и нека је $\mathbf{v}_2, \ldots \mathbf{v}_n$ ортонормирана база простора V. Нека је L линеарни изоморфизам простора $\mathbb{R}^n$ дефинисан на бази $\{F(\mathbf{x}_0), \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v_n}\}$ са

$$L : F(\mathbf{x}_0) \mapsto \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad L : \mathbf{v}_j \mapsto \frac{\partial}{\partial x_j},\ j = 2, \ldots, n.$$

Векторско поље

$$F_1(\mathbf{x}) := L(F(\mathbf{x}))$$

---

[1] Ако $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{0}$, посматрајмо транслацију $T_{-\mathbf{x}_0} : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ и векторско поље $G := (T_{-\mathbf{x}_0})_* F$ Имамо:

$$G(\mathbf{x}) = (T_{-\mathbf{x}_0})_* F(\mathbf{x}) = dT_{-\mathbf{x}_0}(\mathbf{x} + \mathbf{x}_0)(F(\mathbf{x} + \mathbf{x}_0)) = F(\mathbf{x} + \mathbf{x}_0),$$

па је $G(\mathbf{0}) = F(\mathbf{x}_0)$. Дакле ако исправимо векторско поље G у околини тачке $\mathbf{0}$, помоћу дифеоморфизма φ, векторско поље F ћемо исправити у околини $\mathbf{x}_0$ помоћу дифеоморфизма $\varphi \circ T_{-\mathbf{x}_0}$.

испуњава претпоставке из првог дела доказа, па, ако је $\varphi_* F_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}$, тада је $\varphi \circ L$ тражено пресликавање. $\square$

Задатак 7. Доказати да из Теореме о исправљивости векторских поља следе Теорема о једнопараметарској фамилији дифеоморфизама и Пикарова теорема о егзистенцији и јединствености решења. ✓

2. Пеанова теорема

На крају овог дела, доказаћемо једну слабију верзију Пикарове теореме, која нам, у случају да је векторско поље F само непрекидно али не и Липшицово, гарантује егзистенцију али не и јединственост решења.

Пример 8. Кошијев задатак $x' = \sqrt{|x|}$, $x(0) = 0$ има бесконачно много решења: $x_1(t) = \mathrm{sgn} t \cdot \frac{t^2}{4}$, $x_2(t) \equiv 0$, као и

$$x_\lambda(t) := \begin{cases} 0, & t \le \lambda, \\ \frac{(t-\lambda)^2}{4}, & t > \lambda \end{cases}$$

за свако $\lambda > 0$ итд.

Ово није у контрадикцији са Пикаровом теоремом јер векторско поље (у овом случају функција) $F(x) = \sqrt{|x|}$ није Липшицово ни у једној околини нуле (зашто?). ✓

Теорема 9. (Пеанова теорема) *Нека је $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^k$ отворен и векторско поље $F : \mathcal{U} \times [t_0 - a, t_0 + a] \to \mathbb{R}^k$ непрекидно. Тада за свако $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{U}$ постоји $\delta > 0$ и (не нужно јединствено) решење Кошијевог проблема*

$$\mathbf{x}'(t) = F(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \tag{3}$$

дефинисано на интервалу $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$.

Доказ. У овом доказу искористићемо Арцела–Асколијеву теорему (коју смо радили на Анализи 2).

Теорема 10. (Арцела–Асколијева теорема) *Низ непрекидних пресликавања $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}^k$ има подниз који равномерно конвергира на $[a, b]$ ако и само ако је равностепено непрекидан*[2] *и равномерно ограничен*[3]*.* $\square$

Конструисаћемо низ пресликавања на који ћемо да применимо Арцела–Асколијеву теорему. Те функције ће бити део-по-део линеарне чији ће нагиб (односно извод) бити вредност векторског поља F у одговарајућим тачкама.

Претпоставићемо да је $t_0 = 0$ ради поједностављивања записа (доказ је исти у општем случају).

Нека је, као и у доказу Пикарове теореме, $r > 0$ и $B[\mathbf{x}_0, r] \subset \mathcal{U}$,

$$M := \max_{B[\mathbf{x}_0, r] \times [-a, a]} \|F\|$$

и $\alpha := \min\{r/M, a\}$.

Дефинисаћемо низ $\mathbf{x}_n : [0, \alpha] \to \mathcal{U}$ полигоналних апроксимација траженог решења, индукцијом по $j \in \{0, \ldots, n\}$. Нека је:

$$\mathbf{x}_n(0) := \mathbf{x}_0$$
$$\mathbf{x}_n(t) := F(\mathbf{x}_n(j\alpha/n), j\alpha/n)(t - j\alpha/n) + \mathbf{x}_n(j\alpha/n), \text{ за } t \in [j\alpha/n, (j+1)\alpha/n),$$

[2] За свако $\varepsilon > 0$ постоји $\delta > 0$ такво да важи: $\forall n \in \mathbb{N}$, $|s - t| < \delta \Rightarrow \|f_n(s) - f_n(t)\| < \varepsilon$.

[3] $\|f_n(t)\| \le M < +\infty$ за свако n и свако $t \in [a, b]$.

а у тачкама $t = j/n$ дефинишемо $\mathbf{x}_n$ тако да буду непрекидна пресликавања. Из конструкције видимо да су она и део-по-део глатка, са евентуално нарушеном глаткошћу у тачкама $t = j\alpha/n$. Прецизније, видимо да је

$$\mathbf{x}_n'(t) = F(\mathbf{x}_n((j-1)\alpha/n), (j-1)\alpha/n), \text{ за } t \in ((j-1)\alpha/n, j\alpha/n).$$

(На исти начин дефинишемо низ и на интервалу $[-\alpha, 0]$ и проверавамо сва својства на њему. Ради поједностављивања доказа, до краја све радимо на $[0, \alpha]$.)

Поново ћемо поделити остатак доказа на неколико корака.

I: Низ $\mathbf{x}_n$ је добро дефинисан. Да бисмо ово проверили, треба да покажемо да је $\mathbf{x}_n(j\alpha/n) \in \mathcal{U}$ (да би израз $F(\mathbf{x}_n(j\alpha/n), j\alpha/n)$ који се појављује у дефиницији низа имао смисла). Доказаћемо да је заправо $\mathbf{x}_n(j\alpha/n) \in B[\mathbf{x}_0, r]$. Доказ изводимо индукцијом по j. За $j = 0$ имамо $\mathbf{x}_n(0) = \mathbf{x}_0 \in B[\mathbf{x}_0, r]$. Претпоставимо да је $\mathbf{x}_n(i\alpha/n) \in B[\mathbf{x}_0, r]$, за $i = 0, \dots, j$ и $j+1 \leq n$. Имамо

$$\|\mathbf{x}_n((j+1)\alpha/n) - \mathbf{x}_0\| \leq \sum_{i=1}^{j+1} \|\mathbf{x}_n(i\alpha/n) - \mathbf{x}_n((i-1)\alpha/n)\| \overset{(\spadesuit)}{=}$$

$$\sum_{i=1}^{j+1} \frac{\alpha}{n} \|F(\mathbf{x}_n((i-1)\alpha/n), (i-1)\alpha/n)\| \overset{(\diamondsuit)}{\leq} \frac{\alpha}{n} \sum_{i=1}^{j+1} M = \frac{M(j+1)\alpha}{n} \leq M\alpha \overset{(\heartsuit)}{\leq} r,$$

Једнакост ($\spadesuit$) важи због начина на који смо дефинисали тачке $\mathbf{x}_n(i\alpha/n)$, неједнакост ($\diamondsuit$) важи због индукцијске хипотезе, а ($\heartsuit$) важи јер је $\alpha \leq r/M$. Закључујемо

$$\mathbf{x}_n(j\alpha/n) \in B[\mathbf{x}_0, r]. \tag{4}$$

II: Низ $\mathbf{x}_n$ је равномерно ограничен. За $t \in [(j-1)\alpha/n, j\alpha/n]$, вредност $\mathbf{x}_n(t)$ је конвексна комбинација вредности $\mathbf{x}_n((j-1)\alpha/n)$ и $\mathbf{x}_n(j\alpha/n)$. Како је кугла $B[\mathbf{x}_0, r]$ конвексан скуп, из (4) следи да је

$$\mathbf{x}_n(t) \in B[\mathbf{x}_0, r]$$

за свако $n \in \mathbb{N}$, $t \in [0, \alpha]$.

III: Низ $\mathbf{x}_n$ је равностепено непрекидан.

Означимо са Δ_n функције:

$$\Delta_n(t) := \begin{cases} \mathbf{x}_n'(t) - F(\mathbf{x}_n(t), t), & t \neq \frac{j\alpha}{n}, \\ 0 & t = \frac{j\alpha}{n}. \end{cases}$$

Докажимо да $\Delta_n(t)$ тежи нули кад $n \to \infty$ равномерно по t.

Имамо да је

$$\|\Delta_n(t)\| \leq \|F(\mathbf{x}_n(j\alpha/n), j\alpha/n) - F(\mathbf{x}_n(t), t)\|,$$

за $t \in [j\alpha/n, (j+1)\alpha/n]$. За $t \in [j\alpha/n, (j+1)\alpha/n)$ важи:

$$\|\mathbf{x}_n(t) - \mathbf{x}_n(j\alpha/n)\| = \|F(\mathbf{x}_n(j\alpha/n), j\alpha/n)\|(t - j\alpha/n) \leq M\alpha/n. \tag{5}$$

Како је F непрекидно, то је оно и равномерно непрекидно на $[-\alpha, \alpha] \times B[\mathbf{x}_0, r]$. За дато $\varepsilon > 0$ изаберимо $\delta > 0$ такво да важи

$$|t - s| < \delta, \ \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|F(\mathbf{x}, t) - F(\mathbf{y}, s)\| < \varepsilon.$$

Нека је n_0 такво да за важи

$$\frac{\alpha}{n_0} < \delta, \quad \frac{M\alpha}{n_0} < \delta.$$

Како је, за $n \geq n_0$ и $t \in [j\alpha/n, (j+1)\alpha/n)$

$$|t - j\alpha/n| \leq \frac{\alpha}{n_0} < \delta,$$

а одатле, из (5) и

$$\|\mathbf{x}_n(j\alpha/n)-\mathbf{x}_n(t)\|<\delta,$$

следи да

$$\Delta_n(t)\le\|F(\mathbf{x}_n(j\alpha/n),j\alpha/n)-F(\mathbf{x}_n(t),t)\|<\varepsilon$$

тј. $\Delta_n(t)\rightrightarrows 0$.

Важи

$$\|\mathbf{x}_n(s)-\mathbf{x}_\mathbf{n}(t)\|\overset{(\heartsuit)}{=}\left\|\int_t^s[F(\mathbf{x}_n(u),u)+\Delta_n(u)]du\right\|\le\int_t^s\|F(\mathbf{x}_n(u),u)+\Delta_n(u)\|du\le|t-s|\,(M+c),$$

где је c неко (униформно) горње ограничење низа Δ_n. Једнакост ($\heartsuit$) следи из непрекидности пресликавања $\mathbf{x}_n$, непрекидности интеграла по горњој граници и Њутн-Лајбницове формуле примењене на интервалима $((j-1)\alpha/n,j\alpha/n)$.

Из Арцела-Асколијеве теореме сада закључујемо да низ $\mathbf{x}_n$ има подниз (означен исто са $\mathbf{x}_n$) који равномерно конвергира ка неком пресликавању $\mathbf{x}$.

IV: x је решење једначине.

Имамо

$$\mathbf{x}_n(t)=\mathbf{x}_0+\int_0^t\left[F(\mathbf{x}_n(u),u)+\Delta_n(u)\right]du.$$

Како смо већ доказали да $\Delta_n(t)\rightrightarrows 0$, $\mathbf{x}_n\rightrightarrows\mathbf{x}$ и како је F непрекидно, кад прођемо лимесом кроз горњу једнакост добијамо:

$$\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}_0+\int_0^t F(\mathbf{x}(u),u)du,$$

што управо значи да је $\mathbf{x}$ решење једначине (3).

□

2.1. **Веза са једначином вишег реда.** Ако имамо једначину вишег реда:

$$x^{(n)}(t)=f\left(t,x,x',\dots,x^{(n-1)}\right),\tag{6}$$

тада њу можемо да сведемо на систем од n једначина првог реда сменом:

$$\varphi:x\mapsto\mathbf{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix},\quad\begin{array}{l}x_1(t):=x(t)\\x_2(t):=x'(t)\\\vdots\\x_n(t):=x^{(n-1)}(t).\end{array}\tag{7}$$

Систем тада постаје

$$\begin{cases}x_1'(t)=x_2(t)\\x_2'(t)=x_3(t)\\\vdots\\x_{n-1}'(t)=x_n(t)\\x_n'(t)=f(t,x_1(t),\dots,x_n(t)),\end{cases}\tag{8}$$

или, у векторском облику

$$\mathbf{x}'(t)=F(t,\mathbf{x}(t)),$$

где је

$$F(\mathbf{x},t)=F(x_1,\dots,x_n,t)=\begin{bmatrix} x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \\ f(t,x_1(t),\dots,x_n(t)) \end{bmatrix}.$$

Пресликавање φ из (7) је бијекција из скупа решење једначине (6) и (8). Заиста, његов инверз је пројекција на прву координату,

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \mapsto x_1.$$

Како су решења система (8) облика

$$\mathbf{x}(t)=\begin{bmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t) \end{bmatrix},$$

то је почетни услов $\mathbf{x}(t_0)=\mathbf{x}_0$ система који смо добили одређен почетним условом

$$\mathbf{x}_0=\begin{bmatrix} x(t_0) \\ x'(t_0) \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t_0) \end{bmatrix}. \tag{9}$$

Задавање вектора (9) се назива *почетним условом у случају једначине вишег реда.*

Из претходне дискусије директно следе Пикарова и Пеанова теорема за једначину реда n.

Теорема 11. (Пикарова теорема) *Нека је $\mathcal{U}\subset\mathbb{R}^k$ отворен и нека је фукција $f:\mathcal{U}\times I\to\mathbb{R}$ непрекидна и локално униформно (по t) Липшицова по $\mathbf{x}$, тј. нека свака тачка из $\mathcal{U}$ има околину $\mathcal{U}_0\subset\mathcal{U}$ такву да важи $\|f(\mathbf{x},t)-f(\mathbf{y},t)\|\le L\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$, за неко $L>0$, $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathcal{U}_0$, $t\in I$. Тада за свако $\mathbf{x}_0\in\mathcal{U}$ и $t_0\in I$ постоји $\delta>0$ и јединствено решење*

$$\mathbf{x}:[t_0-\delta,t_0+\delta]\to\mathcal{U}$$

Кошијевог проблема (6) са почетним условом (9). □

Теорема 12. (Пеанова теорема) *Нека је $\mathcal{U}\subset\mathbb{R}^k$ отворен и функције $F:\mathcal{U}\times[t_0-a,t_0+a]\to\mathbb{R}$ непрекидна. Тада за свако $\mathbf{x}_0\in\mathcal{U}$ постоји $\delta>0$ и (не нужно јединствено) решење Кошијевог проблема (6) са почетним условом (9).* □

3. Стабилност еквилибријума, функција Љапунова

У претходној глави смо видели да се у околини несингуларне тачке ($F(\mathbf{x}_0)\neq\mathbf{0}$) систем $\mathbf{x}'=F(\mathbf{x})$ понаша предвидљиво, прецизније да је он у неким координатама обична транслација. Заиста, ово је садржај Теореме о исправљивости векторског поља (Теорема 5). Због тога нам је интересантније да изучавамо понашење система у околини *сингуларне тачке*, односно тачке $\mathbf{x}_*$ за коју је $F(\mathbf{x}_*)=\mathbf{0}$, коју зовемо и *стацинарном, тачком* *равнотеже*, или *еквилибријумом* система. Приметимо да је константна трајекторија једина трајекторија која пролази кроз еквилибријум, ако је поље F као у Пикаровој теореми (што у целој овој глави претпостављамо). Приметимо и да је, из Тејлоровог развоја

$$F(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}_*) + dF(\mathbf{x}_*)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_*) + o(\mathbf{x}-\mathbf{x}_*) = dF(\mathbf{x}_*)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_*) + o(\mathbf{x}-\mathbf{x}_*),$$

кад је $\mathbf{x}$ близу $\mathbf{x}_*$, и да је једначина

$$\mathbf{x}' = (\mathbf{x}-\mathbf{x}_*)' = dF(\mathbf{x}_*)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_*)$$

линеарна по $\mathbf{x}-\mathbf{x}_*$, тако да можемо да очекујемо да ће се и нелинеарни систем $\mathbf{x}' = F(\mathbf{x})$ у близини еквилибријума понашати слично његовој линеаризацији $\mathbf{x}' = dF(\mathbf{x}_*)(\mathbf{x})$, а линеарне системе смо детаљно изучили.

Дефиниција 13. Нека је $\mathbf{x}_*$ еквилибријум система $\mathbf{x}' = F(\mathbf{x})$, $F : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$. Кажемо да је $\mathbf{x}_*$

- *стабилни еквилибријум* ако за сваку околину $\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}$ тачке $\mathbf{x}_*$ постоји околина $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_0 \ni \mathbf{x}_*$, таква да важи

  $$\mathbf{x} \in \mathcal{U}_0 \Rightarrow \phi^t(\mathbf{x}) \in \mathcal{U}_1, \quad t \geq 0,$$

  где је ϕ^t решење система

  $$\frac{d\phi^t}{dt} = F(\phi^t), \quad \phi^0 = \mathrm{Id};$$

- *асимптотски стабилни еквилибријум* ако је стабилни еквилибријум и ако још важи:

  $$\mathbf{x} \in \mathcal{U}_0 \Rightarrow \lim_{t\to+\infty} \phi^t(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_*;$$

- *нестабилини еквилибријум* ако није стабилни.

$\diamondsuit$

Пример 14. Координатни почетак је увек еквилибријум линеарног система $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$. Знамо да је решење овог система са почетном вредношћу $\mathbf{x}$ дато са $\phi^t(\mathbf{x}) = e^{At}\mathbf{x}$, као и да у матрици e^{tA} фигуришу линеарне комбинације функција $e^{\lambda t}$, $t^k e^{\lambda t}$, $e^{\alpha t}\cos(\beta t)$, $e^{\alpha t}\sin(\beta t)$, $t^k e^{\alpha t}\cos(\beta t)$, $t^k e^{\alpha t}\sin(\beta t)$ где су λ, $\alpha \pm i\beta$ сопствене вредности матрице A. Ако су све сопствене вредности такве да им је реални део строго негативан, еквилибријум је асимптотски стабилан. Ако матрица A има неку сопствену вредност са строго позитивним реалним делом, координатни почетак је нестабилни еквилибријум (зашто?). А ако су све сопствене вредности са реалним делом мањим или једнаким нули, тада постоји дискусија по вишеструкости сопствене вредности чији је реални део нула. Нпр. центар у планарном случају је стабилни али не и асимптотски стабилни еквилибријум, док, у вишим димензијама, ако је вишеструкост сопствене вредности $i\beta$ већа од један, можемо имати и нестабилни еквилибријум. У примеру матрице

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \beta & 1 & 0 \\ -\beta & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & -\beta & 0 \end{bmatrix}$$

имамо нестабилни еквилибријум у координатном почетку.

У случају планарног система, који фазни портрети имају координатни почетак за стабилни, нестабилни, односно асимптотски стабилни еквилибријум? Размотрити и случај $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$.

$\checkmark$

Задатак 15. Доказати да су асимптотски стабилни еквилибријуми изоловане тачке. Да ли исто важи за стабилни (нестабилни) еквилибријум? ✓

4. Стабилност еквилибријума - метод функције Љапунова

Било која функција V која задовољава услове следеће теореме се зове *функција Љапунова.*

Теорема 16. (Теорема Љапунова.) *Нека је $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ отворен скуп, $F : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ класе C^1 и $\mathbf{x}_* \in \mathcal{U}$ такво да је $F(\mathbf{x}_*) = \mathbf{0}$. Означимо са ϕ^t решење једначине*

$$\frac{d}{dt}\phi^t(\mathbf{x}) = F(\phi^t(\mathbf{x})), \quad \phi^0 = \mathrm{Id}\,.$$

Претпоставимо да постоји функција $V : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ таква да важи

- *V је класе C^1 на $\mathcal{U} \setminus \{\mathbf{x}_*\}$*
- *$V(\mathbf{x}) > 0$ за $\mathbf{x} \in \mathcal{U} \setminus \{\mathbf{x}_*\}$, $V(\mathbf{x}_*) = 0$.*

Тада важи

(а) *ако V опада дуж решења ϕ^t, тада постоји околина $\mathcal{U}_0$ тачке $\mathbf{x}_*$ таква да је за свако $\mathbf{x} \in \mathcal{U}_0$, решење $\phi^t(\mathbf{x})$ дефинисано за свако $t \geq 0$; осим тога, $\mathbf{x}_*$ је стабилни еквилибријум;*

(б) *ако V строго опада дуж решења система, тада постоји околина $\mathcal{U}_0$ тачке $\mathbf{x}_*$ таква да је за свако $\mathbf{x} \in \mathcal{U}_0$, решење $\phi^t(\mathbf{x})$ дефинисано за свако $t \geq 0$; осим тога, $\mathbf{x}_*$ је асимптотски стабилни еквилибријум;*

(в) *ако V строго расте дуж решења система, тада је $\mathbf{x}_*$ нестабилни еквилибријум.*

Напомена 17. Ако уведемо ознаку

$$V'(\mathbf{x}) := \frac{d}{dt}\big[V(\phi^t(\mathbf{x})\big]_{t=0},$$

из

$$\frac{d}{dt}\big[V(\phi^t(\mathbf{x})\big]_{t=s} = \frac{d}{dt}\big[V(\phi^{t+s}(\mathbf{x})\big]_{t=0} = V'(\phi^{\mathbf{s}}(\mathbf{x}))$$

видимо да је

- услов (а) из Теореме 16 еквивалентан услову $V'(\mathbf{x}) \leq 0$, за $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$;
- услов (б) из Теореме 16 еквивалентан услову $V'(\mathbf{x}) < 0$, за $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$;
- услов (в) из Теореме 16 еквивалентан услову $V'(\mathbf{x}) > 0$, за $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$;.

Како је

$$V'(\mathbf{x}) = dV(\phi^t(\mathbf{x}))(F(\phi^t(\mathbf{x}))|_{t=0} = \langle \nabla V(\mathbf{x}), F(\mathbf{x})\rangle,$$

закључујемо да провера да ли нека глатка функција испуњава неки од три услова (а), (б) или (в) из Теореме 16 не захтева експлицитно решавање једначине. $\diamond$

Доказ тачке (а) Теореме 16. Доказаћемо само прву тачку. Заинтересовани студенти могу наћи доказ остале две тачке у мојој скрипти.

Нека важе претпоставке из тачке (а). Нека је $\mathcal{U}_1 \subseteq \mathcal{U}$ произвољна околина тачке $\mathbf{x}_*$ и $r > 0$ такво да $B[\mathbf{x}_*, r] \subset \mathcal{U}_1$. Нека је

$$m := \min_{\partial B[\mathbf{x}_*, r]} V(\mathbf{x}) > 0$$

и

$$\mathcal{U}_0 := \{\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_*, r) \mid V(\mathbf{x}) < m\}.$$

Приметимо да је $\mathcal{U}_0$ отворен скуп и да $\mathbf{x}_* \in \mathcal{U}_0$.

Доказаћемо да је за свако $\mathbf{x} \in \mathcal{U}_0$, $\phi^t(\mathbf{x})$ дефинисано за свако $t \geq 0$, као и да је $\mathcal{U}_0$ тражена околина тачке $\mathbf{x}_*$ из дефиниције стабилног еквилибријума. Нека је $\mathbf{x} \in \mathcal{U}_0$. Докажимо прво да је $\phi^t(\mathbf{x}) \in B(\mathbf{x}_*, r)$ за свако $t \geq 0$ (одавде, на основу теореме о продужењу решења, следи да је $\phi^t(\mathbf{x})$ дефинисано за све $t \geq 0$, видети Последицу **??**). Претпоставимо супротно, да је $\phi^{t_1}(\mathbf{x}) \notin B(\mathbf{x}_*, r)$ за неко $t_1 > 0$. Из непрекидности пресликавања $\phi^t(\mathbf{x})$ по t следи да је $\phi^{t_2}(\mathbf{x}) \in \partial B\,[\mathbf{x}_*, r]$ за неко $t_2 \in (0, t_1)$. Али, како функција V опада дуж трајекторија ϕ^t, добијамо

$$m \leq V(\phi^{t_2}(\mathbf{x})) \leq V(\phi^0(\mathbf{x})) = V(\mathbf{x}) < m,$$

што је контрадикција.

Из

$$V(\phi^t(\mathbf{x}_0)) \leq V(\phi^0(\mathbf{x}_0)) = V(\mathbf{x}_0) < m$$

закључујемо да је $V(\phi^t(\mathbf{x}_0)) < m$, кадгод је $t \geq 0$ и $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{U}_0$. Одавде имамо

$$t \geq 0,\ \mathbf{x}_0 \in \mathcal{U}_0 \Rightarrow \phi^t(\mathbf{x}_0) \in \mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}_1,$$

што завршава доказ. □

Пример 18. **(Планарни линеарни систем.)** Знамо да је координатни почетак еквилибријум линеарног система, и то: асимптотски стабилни у случају стабилних чворова и спирале за $\alpha < 0$, стабилни али не и асимптотски стабилни у случају центра и нестабилни у случају седла, нестабилних чворова и спирале за $\alpha > 0$. У сваком од ових случајева, осим у случају седла, као функција Љапунова из Теореме 16 може послужити квадрат норме, $V(x, y) := x^2 + y^2$.

Пример 19. Потражимо функцију Љапунова у облику $V(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2$ за систем

$$\begin{aligned} x' &= (z+1)(2y - x) \\ y' &= -(z+1)(x+y) \\ z' &= -z^3 \end{aligned}$$

и докажимо да је тачка $(0,0,0)$ асимптотски стабилни еквилибријум.

Како је $\nabla V(x, y, z) = 2(ax, by, cz)$, а $F(x, y, z) = ((z+1)(2y-x), -(z+1)(x+y), -z^3)$, то је

$$\langle \nabla V(x, y, z), F(x, y, z) \rangle = 2[(z+1)(-ax^2 + (2a-b)xy - by^2) - cz^4],$$

закључујемо да за избор:

$$a = 1, \quad b = 2, \quad c = 1$$

важи

$$V(0,0,0) = 0, \quad V(x, y, z) > 0, (x, y, z) \neq (0,0,0), \quad V'(\mathbf{x}) < 0,$$

односно да $(0,0,0)$ јесте асимптотски стабилни еквилибријум. ✓

Пример 20. **(Лагранж–Дирихлеова теорема.)** Други Њутнов закон $F = m\mathbf{a}$ у $\mathbb{R}^3$, за конзервативни систем ($F(\mathbf{x}) = -\nabla U(\mathbf{x})$) је еквивалентан систему у $\mathbb{R}^6$ ($\mathbf{v}$ је вектор брзине $\mathbf{x}'$):

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{v} \\ \mathbf{v}' = -\frac{1}{m}\nabla U(\mathbf{x}). \end{cases}$$

Једина тачка еквилибријума горњег система је тачка $(\mathbf{x}_*, \mathbf{v}_*)$ за коју важи

$$\nabla U(\mathbf{x}_*) = 0, \quad \mathbf{v}_* = \mathbf{0}.$$

Потражимо функцију Љапунова у облику функције енергије

$$E(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = U(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}m\|\mathbf{v}\|^2.$$

Како је $E(\mathbf{x}_*, \mathbf{0}) = U(\mathbf{x}_*)$, изменимо мало (потенцијалну) функцију Љапунова у

$$V(\mathbf{x}, \mathbf{v}) := E(\mathbf{x}, \mathbf{v}) - U(\mathbf{x}_*) = U(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}m\|\mathbf{v}\|^2 - U(\mathbf{x}_*).$$

Сада вредност функције у тачки $(\mathbf{x}_*, \mathbf{0})$ јесте једнака нули, а из Закона очувања енергије имамо:

$$\frac{d}{dt}E(\phi^t(\mathbf{x})) = 0 \leq 0.$$

Овиме смо доказали *Лагранж–Дирихлеову теорему: ако је $\mathbf{x}_*$ строги локални минимум потенцијалне енергије U, тада је тачка $(\mathbf{x}_*, \mathbf{0})$ стабилни еквилибријум конзервативног система.* Заиста, услов да је $\mathbf{x}_*$ строги локални минимум потенцијалне енергије U нам обезбеђује позитивност функције Љапунова у околини тачке $(\mathbf{x}_*, \mathbf{0})$ као и $V(\mathbf{x}, \mathbf{v}) > 0$ за $(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \neq (\mathbf{x}_*, \mathbf{0})$.

О функцији Љапунова можемо размишљати као о уопштењу енергије, као што је то овај пример показао. Касније ћемо видети да је функција Љапунова једно уопштење и норме (као што је то био случај у Примеру 18 и 19). ✓

5. Стабилност еквилибријума - метод сопствених вредности

За почетак ћемо навести без доказа помоћно тврђење, које нам гарантује постојање једне посебне норме, придружене матрици A, норме која ће нам бити веома згодна на неким местима. Сама ова норма се понекад назива и функција Љапунова придружена матрици A. За доказ (кога занима) погледати скрипту.

Лема 21. *Нека је $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ матрица за које важи $\operatorname{Re}\lambda > 0$ за сваку сопствену вредност λ матрице A. Тада постоји скаларни производ $\langle\cdot,\cdot\rangle$ на $\mathbb{R}^n$ и константа $c > 0$ такви да важи*

$$\langle A\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle \geq c\langle\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle$$

за свако $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. □

Напомена 22. Користићемо и овај облик Леме 21: нека је $\operatorname{Re}\lambda < 0$ за сваку сопствену вредност λ матрице A. Тада постоји скаларни производ $\langle\cdot,\cdot\rangle$ на $\mathbb{R}^n$ и константа $c > 0$ такви да важи

$$\langle A\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle \leq -c\langle\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle$$

за свако $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Ово тврђење следи директно из Леме 21, примењене на матрицу $-A$. ⋄

Већ смо споменули да је природно очекивати да се у близини еквилибријума систем понаша слично придруженом линеарном систему ($\mathbf{x}' = dF(\mathbf{x}_*)\mathbf{x}$). Следећа теорема је једна илустрација тога.

Теорема 23. *Нека је $A := dF(\mathbf{x}_*)$ матрица извода пресликавња F у тачки $\mathbf{x}_*$ и нека је $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$, за сваку сопствену вредност λ матрице A. Дефинишимо*

$$V(\mathbf{x}) := \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_*\|^2,$$

где је $\|\cdot\|$ норма Љапунова придружена матрици A као у Напомени 22. Тада је V строга функција Љапунова из тачке (в) Теореме 16, па је $\mathbf{x}_*$ асимптотски стабилни еквилибријум система $\mathbf{x}' = F(\mathbf{x})$, штавише, важи и следећа априорна оцена: постоје $c_1, c_2 > 0$ и околина $\mathcal{U}_0$ тачке $\mathbf{x}_*$ такви да важи

$$\|\phi^t(\mathbf{x}) - \mathbf{x}_*\| \leq c_2 e^{-c_1 t}\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_*\|,$$

за свако $t \geq 0$, $\mathbf{x} \in \mathcal{U}_0$.

Доказ. Очигледно је да је V глатка и строго позитивна функција (осим у $\mathbf{x} = \mathbf{x}_*$), као и да је $V(\mathbf{x}_*) = 0$.

Докажимо да V строго опада дуж решења:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}V(\phi^t\mathbf{x}) &= \frac{d}{dt}\|\phi^t(\mathbf{x}) - \mathbf{x}_*\|^2 = \frac{d}{dt}\langle\phi^t(\mathbf{x}) - \mathbf{x}_*, \phi^t(\mathbf{x}) - \mathbf{x}_*\rangle \\ &= 2\left\langle\frac{d\phi^t}{dt}(\mathbf{x}), \phi^t(\mathbf{x}) - \mathbf{x}_*\right\rangle = 2\langle F(\phi^t(\mathbf{x})), \phi^t(\mathbf{x}) - \mathbf{x}_*\rangle.\end{aligned} \tag{10}$$

Како је

$$F(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}_*) + A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*) + o(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*) = A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*) + o(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*),$$

имамо:

(11)

$$\langle F(\mathbf{x}), \mathbf{x}-\mathbf{x}_*\rangle = \langle A(\mathbf{x}-\mathbf{x}_*)+o(\mathbf{x}-\mathbf{x}_*), \mathbf{x}-\mathbf{x}_*\rangle \le -c\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_*\|^2+\varepsilon(\mathbf{x})\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_*\|^2 \le -c_1\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_*\|^2,$$

за $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_*\| < \delta$, и $c_1 := c/2$. Из последње неједнакости и (10) добијамо:

$$\frac{d}{dt}V(\phi^t(\mathbf{x})) < 0$$

за свако $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_*, \delta) \setminus \{\mathbf{x}_*\}$. Одавде специјално следи да је, ако је $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_*, \delta)$, онда је и $\phi^t(\mathbf{x}) \in B(\mathbf{x}_*, \delta)$, за $t \ge 0$.

Претпоставимо да је $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_*, \delta)$ ($\Rightarrow \phi^t(\mathbf{x}) \in B(\mathbf{x}_*, \delta)$, за $t \ge 0$). Из (10) и (11) добијамо

$$\frac{d}{dt}\|\phi^t(\mathbf{x}) - \mathbf{x}_*\| = \frac{\langle F(\phi^t(\mathbf{x})) - \mathbf{x}_*, \phi^t(\mathbf{x}) - \mathbf{x}_*\rangle}{\|\phi^t(\mathbf{x}) - \mathbf{x}_*\|} \le -c_1\|\phi^t(\mathbf{x}) - \mathbf{x}_*\|,$$

па имамо

$$\frac{\frac{d}{dt}\|\phi^t(\mathbf{x}) - \mathbf{x}_*\|}{\|\phi^t(\mathbf{x}) - \mathbf{x}_*\|} = \frac{d}{dt}\ln\|(\phi^t(\mathbf{x}) - \mathbf{x}_*\| \le -c_1.$$

Одавде је

$$\ln\|\phi^t(\mathbf{x}) - \mathbf{x}_*\| = \ln\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_*\| + \int_0^t \frac{d}{ds}\ln\|\phi^s\mathbf{x} - \mathbf{x}_*\|ds \le \ln\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_*\| - c_1 t,$$

па је

$$\|\phi^t(\mathbf{x}) - \mathbf{x}_*\| \le \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_*\|e^{-c_1 t}.$$

Горња норма је специјална норма Љапунова, али све норме у $\mathbb{R}^n$ су еквивалентне, што значи да је

$$a\|\cdot\| \le \|\cdot\|_E \le b\|\cdot\|,$$

за неке позитивне константе a и b, где смо са $\|\cdot\|_E$ означили стандардну еуклидску норму. Одавде следи тврђење. □

Важи и следећи обрат Теореме 23.

Теорема 24. *Ако је $\mathbf{x}_*$ стабилни еквилибријум, тада не постоји сопствена вредност матрице $dF(\mathbf{x}_*)$ чији је реални део строго позитиван.*

Доказ претходне теореме је сличан доказу Теореме 23, али технички много сложенији. Зато га овде изостављамо.