Диференцијалне једначине, скрипта
прелиминарна верзија

Јелена Катић

Захвалница

Ова скрипта је писана као литература за курсеве Диференцијалне једначине А, Диференцијалне једначине Б и Диференцијалне једначине, које сам држала претходних неколико година. Сваке године она је допуњавана и мењана, и за то су у великој мери заслужни моје колеге и студенти – Дарко Милинковић, Филип Броћић, Татјана Дамњановић, Душан Дробњак, Филип Ковачевић, Ана Дамњановић, Јелена Илић, Павле Касом, Катарина Кривокућа, Павле Мартиновић и Лука Петковић– који су ми указивали и који ми и даље указују на грешке, пропусте, непрецизности. Захваљујући њиховим примедбама и сугестијама текст је на многим местима побољшан и појашњен. Свесна сам да је известан број грешака и даље присутан, и бићу захвална сваком читаоцу који ми на њих скрене пажњу.

Садржај

ГЛАВА 1

Примери

Диференцијалне једначине су једначине у којима је функција непозната, и у којој фигурише неки извод непознате функције. На курсу из Анализе 1 смо решавали најједноставнију диференцијалну једначину $x' = f(t)$, и њено решење смо звали неодређеним интегралом

$$x(t) = \int f(t)\,dt.$$

Неки аутори под диференцијалном једначином подразумевају веома широку класу једначина, нпр. облика

$$F\left(t, x, x', x'', \ldots, x^{(n)}\right) = 0, \tag{1}$$

док неки подразумевају само оне једначине у којима извод највећег реда може да се екплицитно изрази:

$$x^{(n)} = \varphi\left(t, x, x', \ldots, x^{(n-1)}\right).$$

Ми се овде нећемо бавити овим терминолошким детаљима.

Треба да знамо да ако је непозната функција функција једне променљиве, тада се диференцијална једначина назива *обичном*, а ако је непозната функција - функција више променљивих (па се у једначини појављују парцијални изводи) - тада се једначина зове *парцијалном* диференцијалном једначином. Нпр, једначина:

$$\mathbf{r}'' = \mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \mathbf{r}')$$

(Други Њутнов закон), у којој је $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ непозната вектор функција, јесте обична диференцијална, а једначина

$$u'_t = a(u''_{xx} + u''_{yy} + u''_{zz})$$

у којој је $u = u(x, y, z, t)$ непозната функција (једначина провођења топлоте) јесте парцијална диференцијална једначина. *Ред* диференцијалне једначине је ред највећег извода који се у њој појављује. Тако је ред диференцијалне једначине (1) n, а ред једначине провођења топлоте, или Другог Њутновог закона два.

Већину диференцијалних једначина не можемо или не покушавамо да решимо, већ се бавимо описом скупа њихових решења.

1. Неки примери из физике

Пример 1. (Први и Други Њутнов[1] закон.) Већ смо споменули Други Њутнов закон, $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, или, пошто је убрзање други извод вектора положаја:

$$\mathbf{r}'' = \frac{1}{m}\mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \mathbf{r}'). \tag{2}$$

Решења једначине (2) $\mathbf{r}(t)$ се зову *трајекторије система* (2).

Из Другог Њутновог закона следи Први, који каже да се тело, на које не делује никаква сила, креће праволинијски константном брзином. Заиста, ако је $\mathbf{F} = \mathbf{0}$, онда је

$$\mathbf{r}'' = 0 \Rightarrow \mathbf{r}'(t) = \mathbf{r}'_0 = \mathbf{v}_0 \Rightarrow \mathbf{r}(t) = \mathbf{v}_0\, t + \mathbf{r}_0,$$

а ово је једначина праве у простору. ✓

Пример 2. (Коси хитац.) Тело масе 1 је испаљено из координатног почетка под оштрим углом α са почетном брзином v_0. Извешћемо једначину кретања тела у равни из Другог Њутновог закона. Сила која делује на тело је сила гравитације

$$\mathbf{F} = -g\mathbf{j},$$

па је

$$\mathbf{r}''(t) = x''(t)\mathbf{i} + y''(t)\mathbf{j} = -g\mathbf{j} \quad \text{тј.} \quad x''(t) = 0,\ y''(t) = -g.$$

Одавде је

$$x'(t) = x'_0, \quad y'(t) = y'_0 - gt \Rightarrow x(t) = x_0 + x'_0\, t,\ y(t) = y_0 + y'_0\, t - \frac{gt^2}{2}, \tag{3}$$

где је

$$x_0 = x(0),\ x'_0 = x'(0), \quad y_0 = y(0),\ y'_0 = y'(0).$$

Почетна брзина v_0 је интензитет вектора брзине $\mathbf{v}_0$, па је

$$\mathbf{v}_0 = x'_0\,\mathbf{i} + y'_0\,\mathbf{j} = v_0\cos\alpha\,\mathbf{i} + v_0\sin\alpha\,\mathbf{j},$$

а како је $x_0 = y_0 = 0$, јер је тело избачено из координатног почетка, то је једначина кретања дата са:

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} = v_0\cos\alpha\, t\,\mathbf{i} + \left(v_0\sin\alpha\, t - \frac{gt^2}{2}\right)\mathbf{j}.$$

✓

Пример 3. Пројектили се испаљују са површине земље истом почетном брзином $v_0 > 0$ под променљивим углом α, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Докажимо да тачке у којима се достижу максималне висине леже на елипси

$$x^2 + 4\left(y - \frac{v_0^2}{4g}\right)^2 = \frac{v_0^4}{4g^2}.$$

Као и у претходном примеру, на пројектиле делује гравитациона сила $\mathbf{F} = -mg\mathbf{j}$. Претпоставићемо да је $m = 1$ и да се пројектили испаљују из координатног почетка ради поједностављивања записа. Видели смо да је једначина кретања

$$\mathbf{r}(t) = (v_0\cos\alpha)t\mathbf{i} + \left(-\frac{gt^2}{2} + (v_0\sin\alpha)t\right)\mathbf{j}.$$

Максимална висина је максимум функције $y(t) = -\frac{gt^2}{2} + (v_0\sin\alpha)t$ и она се достиже за $t_{\max} = \frac{v_0\sin\alpha}{g}$. Како је $x(t_{\max}) = \frac{v_0^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}$, $y(t_{\max}) = \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}$, то важи

$$x(t_{\max})^2 + 4\left(y(t_{\max}) - \frac{v_0^2}{4g}\right)^2 = \frac{v_0^4}{4g^2}.$$

✓

[1] Issac Newton,(1642–1727), енглески физичар и математичар.

Пример 4. (Закон очувања енергије.) Кажемо да је векторско поље[2] $\mathbf{F}$ *конзервативно* или *потенцијално* ако постоји функција U таква да је

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\nabla U(\mathbf{x}).$$

Функција U се зове *потенцијал векторског поља* $\mathbf{F}$. Ако је векторско поље које задаје једначину кретања

$$\mathbf{r}'' = \frac{1}{m}\mathbf{F} \tag{4}$$

конзервативно, тада важи Закон одржања енергије који каже да се тотална енергија система

$$E = K + U$$

не мења дуж трајекторија $\mathbf{r}(t)$. У горњој формули је

$$K = m\frac{\|\mathbf{r}'(t)\|^2}{2}$$

кинетичка енергија, а U је потенцијална енергија, потенцијал силе $\mathbf{F}$, која зависи само од положаја $\mathbf{r}$, а не и од брзине $\mathbf{r}'$. Да бисмо доказали Закон чувања енергије, довољно је да проверимо да је

$$\frac{d}{dt}E(\mathbf{r}(t)) = 0,$$

где је $\mathbf{r}(t)$ решење једначине (4). Како је

$$\frac{d}{dt}K = \frac{m}{2}\frac{d}{dt}\langle \mathbf{r}'(t), \mathbf{r}'(t)\rangle = m\langle \mathbf{r}'(t), \mathbf{r}''(t)\rangle$$

и

$$\frac{d}{dt}U(\mathbf{r}(t)) = \langle \nabla U(\mathbf{r}(t)), \mathbf{r}'(t)\rangle = -\langle \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)), \mathbf{r}'(t)\rangle = -m\langle \mathbf{r}''(t), \mathbf{r}'(t)\rangle,$$

то је

$$\frac{d}{dt}E(\mathbf{r}(t)) = \frac{d}{dt}K + \frac{d}{dt}U = 0.$$

✓

Задатак 5. Скицирати у равни векторска поља:

(а) $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$;
(б) $\mathbf{F}(x, y) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$;
(в) $\mathbf{F}(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j})$;
(г) $\mathbf{F}(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2}(-y\mathbf{i} + x\mathbf{j})$.

Која од горњих поља су конзервативна, а која нису? За она поља која јесу, одредити одговарајући потенцијал. ✓

2. Неки типови диференцијалних једначина који се непосредно решавају

Обична диференцијална једначина првог реда је једначина по $x = x(t)$ (тј. x је непозната функција) облика

$$F(t, x, x') = 0.$$

Овде ћемо објаснити неколико ситуација у којима ова једначина може да се реши. Претпоставићемо да су све функције које се појављују у једначини непрекидне, и где год је потребно довољно пута диференцијабилне, тако да сви изрази које напишемо имају смисла (па се у даљем тексту нећемо задржавати на овим претпоставкама).

[2]Векторско поље је пресликавање $\mathbf{F} : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$, где је $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$.

2.1. Једначина која раздваја промењиве. Ово је једначина облика

$$x' = f(t)g(x). \tag{5}$$

Једначину решавамо тако што запишемо y' као $\frac{dy}{dx}$ и dx и dy третирамо као независне изразе:

$$\frac{dx}{dt} = f(t)g(x) \Rightarrow \frac{dx}{g(x)} = f(t)dt \Rightarrow G(x) := \int \frac{dx}{g(x)} = \int f(t)dt =: F(t),$$

што нам задаје везу између x и t.

Пример 6. Решимо једначину $x' = (1+x^2)e^t$. Имамо

$$\frac{dx}{dt} = (1+x^2)e^t \Rightarrow \frac{dx}{1+x^2} = e^t dt \Rightarrow \int \frac{dx}{1+x^2} = \int e^t dt \Rightarrow \operatorname{arctg} x = e^t + c,$$

тј. $x(t) = \operatorname{tg}(e^t + c)$. ✓

Треба још да образложимо зашто смо могли да третирамо изразе dt и dx као бројеве и шта смо заправо на тај начин урадили.

С једне стране, ако је $x(t)$ решење једначине (5), тада је

$$G(x) = \int \frac{dx}{g(x)} \overset{(\heartsuit)}{=} \int \frac{x'dt}{g(x(t))} = \int \frac{f(t)g(x)dt}{g(x)} = \int f(t)dt = F(t).$$

Једнакост $(\heartsuit)$ је смена промењиве.

С друге стране, ако је са

$$F(t) = G(x) \tag{6}$$

имплицитно дефинисана функција $x(t)$, онда диференцирањем обе стране израза (6) по t добијамо:

$$f(t) = F'(t) = G'(x)x'(t) = \frac{1}{g(x)}x'(t),$$

па је x решење једначине (5).

Задатак 7. Решити једначину $(t+1)x' = t(x^2+1)$, $t > -1$.
[Решење: $x(t) = \operatorname{tg}(t - \ln(t+1) + c)$.] ✓

2.2. Линеарна диференцијална једначина првог реда. Линеарна једначина је једначина облика

$$x' + P(t)x = Q(t). \tag{7}$$

Ако је $Q(t) = 0$, тада једначина (7) постаје

$$x' = -P(t)x \tag{8}$$

што је заправо једначина која раздваја промењиве, и њено решење је облика

$$x(t) = ce^{-\int P(t)dt}. \tag{9}$$

Једначину (8) зовемо *хомогеном линеарном једначином првог реда*.

Вратимо се на нехомоген случај (7).

Пример 8. Нађимо решење једначине

$$3tx' - x = \ln t + 1, \tag{10}$$

које задовољава услов $x(1) = -2$. Ако поделимо једначину (10) са $3t$ добијамо једначину:

$$x' - \frac{1}{3t}x = \frac{\ln t + 1}{3t}. \tag{11}$$

Покушаћемо да решимо једначину (11) на следећи начин. Одредићемо помоћну функцију $u(t)$ којом ћемо да помножимо обе стране једначине (11), тако да после тога на левој страни буде извод производа $x(t)u(t)$. То значи да је

$$ux' + u'x = ux' - u\frac{1}{3t}x,$$

па зато тражимо u као решење једначине

$$u' = -u\frac{1}{3t}, \quad \text{тј.} \quad \frac{du}{u} = -\frac{dt}{3t}.$$

Одавде добијамо да је $\ln u = -\frac{1}{3}\ln t$, па је $u = t^{-\frac{1}{3}}$. Даље, множењем једначине (11) са $u = t^{-\frac{1}{3}}$, добијамо

$$\begin{aligned} (t^{-\frac{1}{3}}x)' &= \frac{1}{3}t^{-\frac{4}{3}}(\ln t + 1) \Rightarrow \\ t^{-\frac{1}{3}}x &= \frac{1}{3}\int t^{-\frac{4}{3}}(\ln t + 1)dt = -t^{-\frac{1}{3}}(\ln t + 1) - 3t^{-\frac{1}{3}} + c, \end{aligned}$$

па је

$$x(t) = -\ln t - 4 + ct^{\frac{1}{3}}.$$

Да бисмо нашли решење за које важи $x(1) = -2$, у последњој једначини заменићемо вредности $t = 1$, $x = -2$:

$$-2 = -\ln 1 - 4 + c1^{\frac{1}{3}} \Rightarrow c = 2,$$

па је тражено решење

$$x(t) = -\ln t - 4 + 2t^{\frac{1}{3}}.$$

✓

Изведимо формулу за решење диференцијалне једначине (7) у општем случају, понављајући поступак из претходног примера. Хоћемо да одредимо помоћну функцију $u(t)$ којом ћемо да помножимо обе стране једначине (7), тако да после тога на левој страни буде извод производа $x(t)u(t)$. Ако ово успемо, имамо:

$$(x(t)u(t))' = Q(t)u(t),$$

па је

$$x(t) = \frac{1}{u(t)}\left(\int Q(t)u(t)dt + c\right). \tag{12}$$

Да бисмо експлицитно одредили овакво u, написаћемо како смо до њега дошли:

$$x'u + Pxu = (xu)' = x'u + u'x \iff Pxu = u'x,$$

а ово ће бити тачно ако је

$$Pu = u'.$$

Ово је једначина која раздваја промењиве и решавамо је као што смо описали у претходној секцији:

$$\frac{du}{dt} = Pu \Rightarrow \frac{du}{u} = Pdt \Rightarrow \int\frac{du}{u} = \int Pdt \Rightarrow \ln u = \int Pdt,$$

тако да бирамо да $u(t)$ буде

$$u(t) = e^{\int P(t)dt},$$

па убацивањем у (12) добијамо:

$$x(t) = e^{-\int P(t)dt}\left(c + \int e^{\int P(t)dt}Q(t)dt\right). \tag{13}$$

Напомена 9. Ознака $\int P(t)dt$ у изразу (13) представља једну конкретну (било коју) примитивну функцију функције $P(t)$, а не скуп свих примитивних функција, као што смо учили на Анализи 1. Исто важи и за израз $\int e^{\int P(t)dt}Q(t)dt$ у (13), као и за све неодређене интеграле, тј. изразе облика $\int \cdot\, dt$ у овој глави. $\diamond$

Напомена 10. Свака константа c у изразима (12) и (13) одређује једно решење диференцијалне једначине (7). Конкретно решење, односно, конкретну вредност броја c најчешће одређујемо из услова

$$x_0 = x(t_0), \tag{14}$$

као што смо радили у претходном примеру. Услов (14) се зове *почетни* или *Кошијев*[3] *услов*. Проблем решавања диференцијалне једначине заједно са почетним условом се зове и *Кошијев проблем* или *Кошијев задатак*. $\diamond$

Напомена 11. Приметимо да се у примеру 2 косог хица у решењу (3) појављују две константе као почетни услови: $x_0 = x(0)$ и $x_0' = x'(0)$ (односно y_0 и y_0'), и тек задавање обе ове константе нам даје јединствено решење. Разлог за то је што је једначина која дефинише коси хитац другог реда. $\diamond$

Напомена 12. Поред питања о егзистенцији решења диференцијалне једначине, природно се намеће питање јединствености таквог решења, тј. ако смо неку једначину успели некако да решимо, да ли смо тим поступком нашли сва могућа решења? На оба ова питања одговор у општем случају даје Пикарова теорема о егзистенцији и јединствености решења обичних диференцијалних једначина, са којом ћемо се сусрести касније. Међутим, у једноставној ситуацији линеарне једначине (7), можемо лако доказати јединственост решења без позивања на општу теорему. Наиме, ако је $u(t)$ произвољно решење једначине (7) дефинисано на неком интервалу, тада је

$$\begin{aligned}&\left(ue^{\int P(t)dt} - \int Q(t)e^{\int P(t)dt}dt\right)' = \\ &u'(t)e^{\int P(t)dt} + u(t)e^{\int P(t)dt}P(t) - Q(t)e^{\int P(t)dt} = \\ &e^{\int P(t)dt}\left[u'(t) + P(t)u(t) - Q(t)\right] = 0,\end{aligned}$$

јер је $u'(t) + P(t)u(t) - Q(t) = 0$, пошто је u решење. Одавде закључујемо да је $ue^{\int P(t)dt} - \int Q(t)e^{\int P(t)dt}dt = c$, за неку константу $c \in \mathbb{R}$, односно да је

$$u(t) = e^{-\int P(t)dt}\left(c + \int e^{\int P(t)dt}Q(t)dt\right).$$

$\diamond$

Задатак 13. Решити Кошијев проблем $\cos t \cdot x' + \sin t \cdot x = 2\cos^3 t \sin t - 1$, $0 \le t < \frac{\pi}{2}$, $x\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3\sqrt{2}$. [Решење: $x(t) = -\frac{1}{2}\cos t\cos(2t) - \sin t + c\cos t$, $c = 7$.] ✓

Пример 14. Изведимо формулу (7) на други начин, *методом варијације константи*. Кренимо од решења (9) хомогене једначине (8), али уместо константе c, потражимо решење у облику

$$x(t) = c(t)e^{-\int P(t)dt},$$

где је $c(t)$ функција коју треба да одредимо.[4] Замењивањем $x(t) = c(t)e^{-\int P(t)dt}$ у једначини (7) имамо

$$c'(t)e^{-\int P(t)dt} - c(t)e^{-\int P(t)dt}P(t) + P(t)c(t)e^{-\int P(t)dt} = Q(t),$$

па добијамо да је

$$c'(t) = e^{\int P(t)dt}Q(t),$$

[3] Augustin-Louis Cauchy (1789–1857), француски математичар.

[4] Зато се овај метод зове варијација константи.

одакле је

$$c(t) = \int e^{\int P(t)dt} Q(t)dt + c,$$

односно

$$x(t) = \left[\int e^{\int P(t)dt} Q(t)dt + c \right] e^{-\int P(t)dt}.$$

✓

Напомена 15. Пресликавање

$$L : x \mapsto x' + P(t)x$$

је очигледно линеарно, па је скуп решења једначине (8) језгро пресликавања L, а скуп решења једначине (7) је инверзна слика вектора, $L^{-1}(Q(t))$.[5] Језгро линеарног пресликавања чини векторски потпростор, док је инверзна слика произвољног вектора - афини потпростор.[6] Приметимо да смо до овог закључка могли да дођемо и директно из облика решења једначина (8) и (7). Заиста, скуп решења хомогене једначине (8) је

$$\mathcal{R}_h = \{ce^{-\int P(t)dt} \mid c \in \mathbb{R}\},$$

док је скуп решења нехомогене једначине (7)

$$\mathcal{R} = \{e^{-\int P(t)dt} \int e^{\int P(t)dt} Q(t)dt + ce^{-\int P(t)dt} \mid c \in \mathbb{R}\}.$$

Приметимо да су у оба случаја потпростори једнодимензиони и да им је базни вектор функција[7] $e^{-\int P(t)dt}$. Приметимо такође и да је вектор u_0 који дефинише афини простор $\mathcal{R}$,

$$u_0 = e^{-\int P(t)dt} \int e^{\int P(t)dt} Q(t)dt$$

једно решење нехомогене једначине (7).[8] ◇

2.3. Бернулијева једначина. Бернулијева[9] једначина је диференцијална једначина облика

$$x' + P(t)x = Q(t)x^{\alpha}, \tag{15}$$

где је $\alpha \in \mathbb{R}$. Пре свега, приметимо да је, за $\alpha = 0$ или $\alpha = 1$, једначина (15) линеарна, ято претпоставимо да је $\alpha \neq 0, 1$. Множењем (15) са $x^{-\alpha}$ добијамо:

$$x^{-\alpha}x' + P(t)x^{1-\alpha} = Q(t). \tag{16}$$

Уведимо смену $y(t) = x^{1-\alpha}(t)$. Имамо $y' = (1-\alpha)x^{-\alpha}x'$, па једначина (16) постаје

$$\frac{1}{1-\alpha}y' + P(t)y = Q(t), \quad \text{или} \quad y' + (1-\alpha)P(t)y = (1-\alpha)Q(t),$$

тј. линеарна, коју знамо да решимо.

Напомена 16. Ако је $\alpha > 0$, тада је $x \equiv 0$ очигледно једно решење једначине (15), које можда не можемо да добијемо из облика (16). ◇

[5] Нпр. L посматрамо као пресликавање из скупа непрекидно диференцијабилних функција $C^1(a,b)$ у скуп непрекидних функција $C^0(a,b)$, са операцијама сабирања функција и множења скаларом тачка-по-тачка.

[6] Афини потпростор векторског простора је скуп облика $u_0 + V$, где је u_0 неки вектор, а V векторски потпростор.

[7] База и димензија афиног потпростора $u_0 + V$ је база и димензија векторског потпростора V.

[8] Проверити, за вежбу.

[9] Jacob Bernoulli (1655–1705), швајцарски математичар.

Пример 17. Нађимо решење једначине

$$x' + \frac{4}{t}x = t^3x^2, \tag{17}$$

за $t > 0$, које задовољава почетни услов $x(2) = -1$. После множења са x^{-2}, једначина (17) постаје

$$x^{-2}x' + \frac{4}{t}x^{-1} = t^3.$$

Ако уведемо смену $x^{-1} = y$, имамо $y' = -x^{-2}x'$, па проблем сводимо на линеарну једначину

$$-y' + \frac{4}{t}y = t^3, \quad \text{тј.} \quad y' - \frac{4}{t}y = -t^3.$$

Последњу једначину решавамо поступком описаним у претходној секцији, и добијамо $y = ct^4 - t^4\ln t$. Одавде налазимо да је

$$x(t) = \frac{1}{ct^4 - t^4\ln t}.$$

Конкретно решење са задатим почетним условом, тј. константу c, налазимо замењивањем $t = 2$, $x = -1$ у претходно решење, па имамо

$$-1 = \frac{1}{c2^4 - 2^4\ln 2} \Rightarrow c = \ln 2 - \frac{1}{16}.$$

Тражено решење је, дакле:

$$x(t) = \frac{1}{\left(\ln 2 - \frac{1}{16}\right)t^4 - t^4\ln t}.$$

✓

Задатак 18. Наћи решење једначине $x' = 5x + e^{-2t}x^{-2}$, које задовољава услов $x(0) = 2$. [Решење: $x(t) = \left(ce^{15t} - \frac{3}{17}e^{-2t}\right)^{\frac{1}{3}}$, $c = \frac{139}{17}$.] ✓

2.4. Рикатијева једначина. Један од облика Рикатијеве[10] једначине је

$$x' = a(t) + b(t)x(t) + c(t)x^2, \tag{18}$$

за коју у општој ситуацији немамо експлицитан метод решавања као досад. Ако нам је пак познато једно решење једначине, $u(t)$, тада помоћу смене:

$$x(t) = u(t) + \frac{1}{y(t)}, \tag{19}$$

где нам је $y(t)$ нова непозната функција, Рикатијеву једначину сводимо на линеарну. Заиста, уврштавањем (19) у (18) добијамо

$$u'(t) - \frac{y'(t)}{y(t)^2} = a(t) + b(t)\left(u(t) + \frac{1}{y(t)}\right) + c(t)\left(u(t) + \frac{1}{y(t)}\right)^2.$$

Како је $u(t)$ решење једначине (18), после скраћивања добијамо:

$$-\frac{y'(t)}{y(t)^2} = \frac{b(t)}{y(t)} + \frac{2c(t)u(t)}{y(t)} + \frac{c(t)}{y(t)^2},$$

што нам кад помножимо са $y(t)^2$ даје линеарну једначину:

$$y'(t) + [b(t) + 2c(t)u(t)]y(t) = -c(t).$$

[10] Jacopo Francesco Riccati (1676–1754), италијански математичар.

Пример 19. Потражимо једно конкретно решење једначине

$$x' = -x^2 + 2xt - t^2 + 5 \tag{20}$$

у облику $x(t) = at + b$. Имамо

$$x'(t) = a = -(at + b)^2 + 2(at + b)t - t^2 + 5.$$

Изједначавањем коефицијената уз t добијамо да је $a = 1$, $b = \pm 2$. Уведимо смену:

$$x(t) = t + 2 + \frac{1}{y(t)}.$$

После сређивања добијамо једначину:

$$y'(t) - 4y(t) = 1,$$

чија су сва решења облика:

$$y(t) = ce^{4t} - \frac{1}{4}.$$

Одавде су сва решења полазне једначине облика:

$$x(t) = t + 2 - \frac{4}{4ce^{4t} - 1}.$$

✓

2.5. Тотални диференцијал. Посматрајмо једначину

$$M(t, x) + N(t, x)\frac{dx}{dt} = M(t, x) + N(t, x)x' = 0. \tag{21}$$

Ако постоји функција $f = f(t, x)$ за коју важи

$$f'_t(t, x) = M(t, x), \quad f'_x(t, x) = N(t, x), \tag{22}$$

тада нам једначина

$$f(t, x) = c = const.$$

даје имплицитно решење једначине (21). Заиста, ако је $f(t, x(t)) = c$, и ако важи (22), имамо

$$0 = \frac{d}{dt}c = \frac{d}{dt}f(t, x(t)) = f'_t + f'_x x' = M(t, x) + N(t, x)\frac{dx}{dt}.$$

Напомена 20. Израз $f'_t\,dt + f'_x\,dx$ (који бисмо добили формалним множењем леве стране једначине (21) са dt) назива се *тоталним диференцијалом* функције f. Ово је управо извод df функције f, ако dt и dx схватимо као линеарна пресликавања

$$dt : (h, k) \mapsto h, \quad dx : (h, k) \mapsto k,$$

тј. пројекције. Зато једначину (21) пишемо и у облику:

$$M(t, x)dt + N(t, x)dx = 0. \tag{23}$$

◇

Ми знамо да, ако је f два пута непрекидно диференцијабилна, важи $f''_{tx} = f''_{xt}$, па је

$$f''_{tx} = M'_x,\ f''_{xt} = N'_t \Rightarrow M'_x = N'_t,$$

односно, ако услов $M'_x = N'_t$ није испуњен, не можемо очекивати да ћемо наћи решење у описаном облику.[11]

[11] На курсу из Анализе 2 смо учили да, ако су M и N непрекидно диференцијалне на $\mathbb{R}^2$, или на некој другој просто-повезаној области на којој решавамо проблем, тада је услов $M'_x = N'_t$ и довољан за постојање функције f за коју важи $f'_t = M$, $f'_x = N$.

Пример 21. Решимо Кошијев задатак

$$2tx - 9t^2 + (2x + t^2 + 1)\frac{dx}{dt} = 0$$

са почетним условом $x(0) = -3$. Овде је $M(t, x) = 2tx - 9t^2$, а $N(t, x) = 2x + t^2 + 1$, па је

$$M'_x = 2t = N'_t,$$

тј. можемо да тражимо функцију f са описаним својствима. Како је $f'_t = M(t, x) = 2tx - 9t^2$, то је

$$f(t, x) = \int (2tx - 9t^2)dt = t^2x - 3t^3 + \varphi(x).$$

Како је $f'_x = N(t, x)$, имамо

$$f'_x = \frac{d}{dx}(t^2x - 3t^3 + \varphi(x)) = t^2 + \varphi'(x) = N(t, x) = 2x + t^2 + 1,$$

одакле је $\varphi'(x) = 2x + 1$, па је $\varphi(x) = x^2 + x + c_1$. Одавде је имплицитно решење задатка

$$f(t, x) = t^2x - 3t^3 + x^2 + x + c_1 = c_2, \quad \text{тј.} \quad t^2x - 3t^3 + x^2 + x = c.$$

Конкретну вредност константе c добијамо убацивањем $t = 0$, $x = -3$ у претходну једначину: $c = 6$, тј.

$$t^2x - 3t^3 + x^2 + x = 6.$$

✓

Задатак 22. Наћи решење једначине $2tx^2 + 4 - 2(3 - t^2x)x' = 0$ које задовољава услов $x(-1) = 8$. [Решење: $t^2x^2 - 6x + 4t = c$, $c = 12$.] ✓

2.6. Интеграциони фактор. Ако у једначини (23) не важи $M'_x = N'_t$, може да се деси да множењем једначине (23) функцијом $\mu(t, x)$ то постигнемо, тј. ако означимо

$$M_1(t, x) := \mu(t, x)M(t, x), \quad N_1(t, x) := \mu(t, x)N(t, x),$$

да погодним избором функције μ можемо постићи да важи:

$$\frac{dM_1}{dx}(t, x) = \frac{dN_1}{dt}(t, x). \tag{24}$$

Израз $\mu(t, x)$ се зове *интеграциони фактор*. Да бисмо сазнали нешто више о могућем интеграционом фактору, убацићемо $M_1(t, x) = \mu(t, x)M(t, x)$ и $N_1(t, x) = \mu(t, x)N(t, x)$ у једначину (24). Добијамо да функција μ задовољава израз

$$\mu'_xM - \mu'_tN = \mu(N'_t - M'_x). \tag{25}$$

Често је згодно да функцију μ потражимо у облику функције једне промељиве, $\mu = \mu(\omega)$, где је ω функција по (t, x), тј. да тражимо интеграциони фактор у облику $\mu(\omega(t, x))$. Тада израз (25) постаје:

$$\mu'(\omega'_xM - \omega'_tN) = \mu(N'_t - M'_x),$$

односно:

$$\frac{\mu'(\omega)}{\mu(\omega)} = \frac{N'_t - M'_x}{\omega'_xM - \omega'_tN}. \tag{26}$$

Ако је десна страна у (26) израз који зависи само од ω, последња једначина може да реши, као једначина која раздваја променљиве. Тако да, ако нам је познато у ком облику бисмо могли да тражимо $\omega(t, x)$, можемо да одредимо и μ. Takoђе, из десне стране једнакости (26) можемо и да погађамо како би могло да изгледа ω. Илуструјмо овај метод следећим примером.

Пример 23. Решићемо једначину

$$(3t + 2x + x^2)dt + (t + 4tx + 5x^2)dx = 0,$$

знајући да је интеграциони фактор облика

$$\mu(\omega(t,x)), \quad \omega(t,x) = t + x^2.$$

Како је

$$M(t,x) = 3t + 2x + x^2, \quad N(t,x) = t + 4tx + 5x^2,$$

израз (26) постаје

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{N'_t - M'_x}{\omega'_x M - \omega'_t N} = \frac{2x - 1}{2x^3 - x^2 + 2xt - t} = \frac{1}{x^2 + t} = \frac{1}{\omega},$$

односно

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{d\omega}{\omega}.$$

Одавде видимо да је $\mu = c\omega$, па за интеграциони фактор можемо узети баш $\mu(t,x) = \omega(t,x) = t + x^2$. После множења полазне једначине изразом $t + x^2$ и сређивања, добијамо једначину:

$$(3t^2 + 2tx + 4tx^2 + 2x^3 + x^4)dt + (t^2 + 4t^2x + 6tx^2 + 4tx^3 + 5x^4)dx = 0,$$

што јесте једначина са тоталним диференцијалом, и њено решење је дато са

$$t^3 + t^2x + 2t^2x^2 + 2tx^3 + tx^4 + x^5 = c.$$

✓

2.7. Смене променљивих. Навешћемо две смене које нам, у неким случајевима, могу свести дату једначину на једноставнији облик који знамо да решимо. Први случај је ако је једначина облика

$$x' = f\left(\frac{x}{t}\right). \tag{27}$$

Тада уводимо смену $y(t) := \frac{x}{t}$ (y нам је нова непозната функција). Имамо

$$x = ty(t) \Rightarrow x' = y(t) + ty'(t),$$

па једначина (27) постаје

$$y + ty' = f(y), \qquad y' = \frac{1}{t}(f(y) - y),$$

а ово је једначина која раздваја променљиве.

Пример 24. Одредимо решење једначине $txx' + 4t^2 + x^2 = 0$, $t > 0$, са почетним условом $x(2) = -7$. Како је

$$x' = -\frac{4t^2 + x^2}{tx} = -4\frac{t}{x} - \frac{x}{t},$$

уводимо смену $y := \frac{x}{t}$, тако да нам задатак постаје:

$$y + ty' = -4\frac{1}{y} - y, \quad \text{тј.} \quad y' = -\frac{1}{t}\left(\frac{4}{y} + 2y\right) \quad \text{тј.} \quad \frac{ydy}{2y^2 + 4} = -\frac{dt}{t}.$$

Одавде интеграљењем добијамо

$$\frac{1}{4}\ln(y^2 + 2) = -\ln t + c_1 \Rightarrow \sqrt[4]{y^2 + 2} = \frac{c_2}{t}$$
$$\Rightarrow y^2 = \frac{c}{t^4} - 2 \Rightarrow x^2 = t^2y^2 = \frac{c}{t^2} - 2t^2.$$

Како је за $t = 2$ и $x = -7$, $c = 228$, добијамо да је тражено решење

$$x^2 = \frac{228}{t^2} - 2t^2.$$

✓

Задатак 25. Наћи решење једначине $tx' = x(\ln t - \ln x)$, $t > 0$ које задовољава услов $x(1) = 4$. [Решење: $x(t) = te^{\frac{1+\ln 4}{t} - 1}$.] ✓

Друга смена коју ћемо овде споменути је $y := at + bx + c$, у случају једначине облика
$$x' = f(at + bx + c),$$
$a, b, c \in \mathbb{R}$. Тада је $y' = a + bx'$, тј. $x' = \frac{y' - a}{b}$, па једначина постаје
$$\frac{y' - a}{b} = f(y) \Rightarrow \frac{y'}{a + bf(y)} = 1 \Rightarrow \frac{dy}{a + bf(y)} = dt,$$
а ово је једначина која раздваја променљиве.

Пример 26. Решимо једначину $x' = (4t - x + 1)^2$ и нађимо решење које задовољава почетни услов $x(0) = 2$. Ако је $y = 4t - x + 1$, онда је $y' = 4 - x'$, па је $x' = 4 - y' = y^2$, тј.
$$\frac{dy}{4 - y^2} = dt \Rightarrow \frac{1}{4} \ln \frac{y + 2}{2 - y} = t + c_1 \Rightarrow \frac{y + 2}{2 - y} = ce^{4t}$$
$$\Rightarrow y = 2\frac{ce^{4t} - 1}{ce^{4t} + 1} \Rightarrow x = 4t + \frac{3 - ce^{4t}}{1 + ce^{4t}}.$$
заменом $t = 0$, $x = 2$ добијамо да је $c = \frac{1}{3}$, па је решење:
$$x(t) = 4t + \frac{9 - e^{4t}}{3 + e^{4t}}.$$
✓

3. Задаци

(1) За векторско поље силе $\mathbf{F}$ кажемо да је *централно* ако је усмерено у правцу вектора положаја, тј. ако важи
$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \lambda(\mathbf{x})\mathbf{x}$$
за неку скалар функцију λ. Нека је $\mathbf{F}$ конзервативно поље ($\mathbf{F} = -\nabla V$). Доказати да су следећи услови еквивалентни:
а) $\mathbf{F}$ је централно;
б) $\mathbf{F} = f(\|\mathbf{x}\|)\mathbf{x}$;
в) $V(\mathbf{x}) = g(\|\mathbf{x}\|)$
за неке скалар функције f и g. ✓

(2) Доказати да се кретање у пољу централне силе увек одвија у једној равни (разапетој почетним вектором положаја $\mathbf{x}(t_0)$ и почетним вектором брзине $\mathbf{v}(t_0)$). ✓

(3) Доказати да је угаони моменат $m \cdot \mathbf{x}(t) \times \mathbf{v}(t)$ константан у цетралном пољу. ✓

(4) Наћи оно решење једначине $x' = e^{9x - t}$ које задовољава услов $x(0) = 0$. [Решење: $x(t) = \frac{1}{9}(t - \ln(9 - 8e^t))$.] ✓

ГЛАВА 2

Линеарни системи диференцијалних једначина са константним коефицијентима (аутономни линеарни системи)

Нека је $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ отворен скуп и $F : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ векторско поље. *Систем диференцијалних једначина* је векторска једначина

$$\mathbf{x}'(t) = F(\mathbf{x}(t)), \tag{28}$$

(или краће, $\mathbf{x}' = F(\mathbf{x})$) где је $t \in I$ реална променљива, а $\mathbf{x}(t)$ непозната вектор-функција, дефинисана на неком интервалу $I \subset \mathbb{R}$. Ако је

$$\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)), \quad F = (f_1, \dots, f_n),$$

тада једначина (28) у координатном облику гласи:

$$\begin{aligned} x_1'(t) = &\ \ f_1(x_1, \dots, x_n), \\ \vdots & \\ x_n'(t) = &\ \ f_n(x_1, \dots, x_n). \end{aligned} \tag{29}$$

Векторско поље F може да зависи и од t:

$$F : \mathcal{U} \times I \to \mathbb{R}^n$$

и тада кажемо да је оно *неаутономно*, а једначину у векторском облику:

$$\mathbf{x}'(t) = F\left(\mathbf{x}(t), t\right), \tag{30}$$

зовемо *неаутономним* системом диференцијалних једначина. Ако F не зависи од t, као у систему (28), тада говоримо о *аутономном* векторском пољу и *аутономном* систему једначина.

Почетни услов у случају система једначина (28) је вектор

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0). \tag{31}$$

Векторско поље на скупу $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ можемо да замишљамо као стрелице (векторе) закачене за сваку тачку из $\mathcal{U}$. Решавање система (28) за почетним условом (31) можемо да схватимо као тражење криве $\mathbf{x}(t)$ у $\mathcal{U}$ која пролази кроз $\mathbf{x}_0$ и чији је тангенти вектор у свакој тачки једнак векторском пољу F. Као и раније, оваква крива се зове и *трајекторија система*.

Напомена 27. Ако фиксирамо почетну тачку $\mathbf{x}_0$, решавање једначине се своди на тражење криве $\mathbf{x}(t)$ кроз $\mathbf{x}_0$ са датим тангентним векторима. Ово је дакле пресликавање $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $t \mapsto \mathbf{x}(t)$. Можемо, међутим, да посматрамо решавање система једначина и као **кретање простора** (или дела простора) $\mathbb{R}^n$, и то на следећи начин. Нека је $t_0 \in \mathbb{R}$ фиксирано. Дефинишимо пресликавање

$$\phi^{t_0} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad \phi^{t_0} : \mathbf{x}_0 \mapsto \mathbf{x}(t_0),$$

где је $\mathbf{x}(t)$ решење система

$$\mathbf{x}' = F(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0.$$

Ово краће записујемо као

$$\frac{d\phi^t}{dt}(\mathbf{x}) = F(\phi^t(\mathbf{x})), \quad \phi^0 = \mathrm{Id}\,.$$

Пре свега, није очигледно да ли је и кад пресликавање ϕ^t добро дефинисано, тј. да ли свакој тачки $\mathbf{x}_0$ огдовара тачно једно решење, које дефинише ϕ^t. О овоме ће бити више речи касније.

Како можемо да размишљамо о пресликавању ϕ^t: ако претпоставимо да смо кроз сваку тачку у простору поставили трајекторију кроз унапред задато тангентно поље (F), пресликавање ϕ^t нам каже шта се десило после времена t, где су тачке простора „стигле”, путујући на начин који дефинише F после времена t.

Овде се појављује пуно природних питања: какво је пресликавање ϕ^t (да ли је инвертибилно, непрекидно, глатко...), како оно мења запремину простора, да ли, ако померимо простор за време t, па потом за време s, добијамо исту слику као да смо га померили за време $s+t$[1] итд. На ова питања ћемо одговорити касније. ◇

Ми ћемо се касније, у Глави 3, бавити општом ситуацијом, тј. видећемо под којим условима једначина (28) може да се реши, када је решење јединствено, и на ком максималном интервалу I је оно дефинисано. У овој глави ћемо експлицитно тражити решења система (28) у неким веома специјалним случајевима.

Ако је пресликавање F линеарно по $\mathbf{x}$, тада скуп решења $\mathcal{R}$ система диференцијалних једначина чини векторски простор и у аутономном и у неаутономном случају.[2] Заиста, ако су $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ решења система (30), и F линеарно по $\mathbf{x}$, тада је

$$(\mathbf{x}+\mathbf{y})' = \mathbf{x}'+\mathbf{y}' = F(\mathbf{x},t)+F(\mathbf{y},t) = F(\mathbf{x}+\mathbf{y},t),$$

па је и $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ решење, и слично за множење скаларом. Касније ћемо видети да је овај векторски простор коначне димензије (као и у случају једне функције). Скуп генератора векторског простора $\mathcal{R}$ зове се и *фундаментални систем решења.*

Ако је F из аутономне једначине (28) линеарно по $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$, тада се систем (28) своди на систем:

$$\mathbf{x}'(t) = A\cdot\mathbf{x}(t), \tag{32}$$

где је $A\in M_n(\mathbb{R})$ квадратна матрица, или, за $A=[a_{ij}]_{i,j=1}^n$, систем (29) постаје

$$\begin{aligned} x_1'(t) = &\quad a_{11}x_1(t)+\ldots+a_{1n}x_n(t),\\ \vdots \\ x_n'(t) = &\quad a_{n1}x_1(t)+\ldots+a_{nn}x_n(t). \end{aligned}.$$

Овај систем се зове *систем линеарних диференцијалних једначина са константним коефицијентима.*

Испоставиће се да решења система (32) умногоме зависе од сопствених вредности и вектора матрице A. Прво ћемо потпуно разјаснити планарни случај.

1. Случај $n=2$

Пример 28. Решити систем (32) за $n=2$ ако је

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

У координатном запису имамо:

$$\begin{aligned} x'(t) &= 2x(t),\\ y'(t) &= -\tfrac{1}{2}y(t), \end{aligned}$$

што су две обичне линеарне једначине које знамо да решимо. Ако је $x_0=x(0)$, а $y_0=y(0)$ почетни услов, тада је решење датог система

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0e^{2t} \\ y_0e^{-t/2} \end{bmatrix}.$$

✓

[1] Тј. да ли је $\phi^s\circ\phi^t=\phi^{s+t}$.

[2] Као и у случају једне непознате функције.

Задатак 29. Скицирати у равни неколико трајекторија система из Примера 28, за разне случајеве почетног услова (x_0, y_0). Размотрити ситуације: $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $x_0, y_0 > 0$, $x_0, y_0 < 0$, $x_0 y_0 < 0$. ✓

Напомена 30. Приметимо да се, као у претходном примеру, решавање система (32) у случају дијагоналне матрице A своди на решавање n диференцијалних једначина, па је решење оваквог система:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^0 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ x_n^0 e^{\lambda_n t} \end{bmatrix},$$

где је

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} x_1^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{bmatrix}, \quad A = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}.$$

◇

Пример 31. Решити систем (32) за $n = 2$ ако је

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -6 & -4 \end{bmatrix}.$$

У координатном запису имамо:

$$\begin{aligned} x' &= 5x + 3y, \\ y' &= -6x - 4y. \end{aligned}$$

Покушаћемо да сведемо ову једначину на претходни случај, зато ћемо пробати да дијагонализујемо матрицу A. Сопствене вредности матрице A су $\lambda_1 = 2$ и $\lambda_2 = -1$, а одговарајући сопствени вектори:

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Ако је P матрица састављена од координата сопствених вектора:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix},$$

тада је $AP = PD$, где је D дијагонална матрица

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

односно $P^{-1}AP = D$. Ако једначину $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ помножимо са P^{-1} слева и запишемо A као APP^{-1}, имамо:

$$P^{-1}\mathbf{x}' = P^{-1}APP^{-1}\mathbf{x} = DP^{-1}\mathbf{x},$$

што нам сугерише да за нове координате изаберемо

$$\mathbf{y} := P^{-1}\mathbf{x}.$$

Како се ради о линеарној смени, то је $\mathbf{y}' = P^{-1}\mathbf{x}'$, па нам једначина постаје

$$\mathbf{y}' = D\mathbf{y},$$

а њу знамо да решимо. Ако је $\mathbf{y}_0 = \begin{bmatrix} \tilde{x}_0 \\ \tilde{y}_0 \end{bmatrix}$, онда је

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} \tilde{x}_0 e^{2t} \\ \tilde{y}_0 e^{-t} \end{bmatrix}.$$

Како је $\mathbf{y}_0 = P^{-1}\mathbf{x}_0$ и $\mathbf{x}(t) = P\mathbf{y}(t)$, то, после краћег срећивања, добијамо:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2x_0 + y_0)e^{2t} - (x_0 + y_0)e^{-t} \\ -(2x_0 + y_0)e^{2t} + 2(x_0 + y_0)e^{-t} \end{bmatrix}.$$

✓

Напомена 32. *Стационарна тачка*, или *еквилибријум* (или *тачка равнотеже*) система (28) је тачка $\mathbf{x}_*$ у којој је $F(\mathbf{x}_*) = \mathbf{0}$. Приметимо да је константна трајекторија $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{x}_*$ једно решење система (28) са почетним условом $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_*$. ◇

У Примерима 28 и 31 је једина стационарна тачка координатни почетак.

Задатак 33. Описати све могућности скупова стационарних тачака планарног система. ✓

Напомена 34. Приметимо да су Примеру 28 полуправе $x = 0, y > 0$, $x = 0, y < 0$, $y = 0, x > 0$, и $y = 0, x > 0$, инваријантне, тј, ако се $\mathbf{x}_0$ налази на некој од ових полуправих, тада ће и решење $\mathbf{x}(t)$ са тим почетним условом да припада истој полуправој, за свако $t \in \mathbb{R}$ (ово следи директно из облика решења у Примеру 28).

Што се тиче Примера 31, четири полуправе које сачињавају праве $x + y = 0$ и $2x + y = 0$ без координатног почетка, јесу инваријатне. Заиста, ако је нпр. $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ на краку праве $x + y = 0$, $x > 0$, тада је $y_0 = -x_0 < 0$, па је решење:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2x_0 + y_0)e^{2t} - (x_0 + y_0)e^{-t} \\ -(2x_0 + y_0)e^{2t} + 2(x_0 + y_0)e^{-t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2x_0 - x_0)e^{2t} - (x_0 - x_0)e^{-t} \\ -(2x_0 - x_0)e^{2t} + 2(x_0 - y_0)e^{-t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0e^{2t} \\ -x_0e^{2t} \end{bmatrix},$$

односно $x(t) = x_0e^{2t}$, $y(t) = -x_0e^{2t}$, па тачка $(x(t), y(t))$ припада полуправој $x + y = 0$, $x > 0$, за свако $t \in \mathbb{R}$.

Приметимо да су праве $x + y = 0$ и $2x + y = 0$ у правцима сопствених вектора.[3] Да ли је то случај у Примеру 28?

◇

Уопштићемо сада ове примере.

1.1. Реалне и различите сопствене вредности.

Тврђење 35. Нека је $\mathbf{u}$ сопствени вектор који одговара сопственој вредности $\lambda \in \mathbb{R}$ матрице $A \in M_n(\mathbf{R})$. Тада је $e^{\lambda t}\mathbf{u}$ једно решење једначине $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$.

Доказ. $\left(e^{\lambda t}\mathbf{u}\right)' = \lambda e^{\lambda t}\mathbf{u} = Ae^{\lambda t}\mathbf{u}$. □

Приметимо да је крива $e^{\lambda t}\mathbf{u}$ полуправа одређена правцем $\mathbf{u}$, са једне стране координатног почетка.

Тврђење 36. Нека матрица $A \in M_2(\mathbb{R})$ има два линеарно независна сопствена вектора $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$ која одговарају реалним сопственим вредностима λ_1 и λ_2. Тада је скуп решења система $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ дат са

$$\mathcal{R} = \{c_1e^{\lambda_1 t}\mathbf{u}_1 + c_2e^{\lambda_2 t}\mathbf{u}_2 \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}.$$

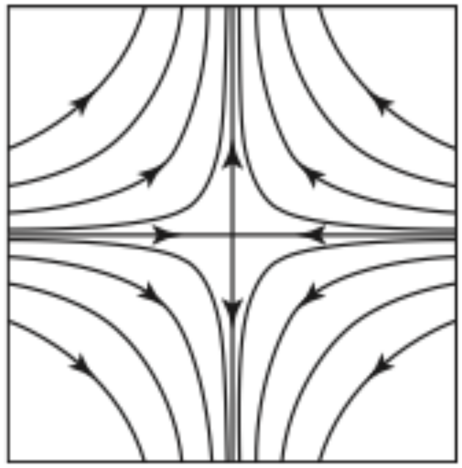
Доказ. Већ смо доказали да су $e^{\lambda_1 t}\mathbf{u}_1$ и $e^{\lambda_2 t}\mathbf{u}_2$ решења једначине $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, а како је скуп решења векторски простор, то важи

$$\mathcal{R} \supseteq \{c_1e^{\lambda_1 t}\mathbf{u}_1 + c_2e^{\lambda_2 t}\mathbf{u}_2 \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Докажимо и другу инклузију, тј. докажимо да је свако решење облика $c_1e^{\lambda_1 t}\mathbf{u}_1 + c_2e^{\lambda_2 t}\mathbf{u}_2$ за неке c_1 и c_2. Нека је $\mathbf{x}(t)$ решење система. Како су $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$ линеарно независни, то је $\mathbf{x}(t) = \alpha(t)\mathbf{u}_1 + \beta(t)\mathbf{u}_2$. Како је $\mathbf{x}$ решење, то имамо:

$$\mathbf{x}'(t) = \alpha'(t)\mathbf{u}_1 + \beta'(t)\mathbf{u}_2 = A\mathbf{x}(t) = A(\alpha(t)\mathbf{u}_1 + \beta(t)\mathbf{u}_2) = \lambda_1\alpha(t)\mathbf{u}_1 + \lambda_2\beta(t)\mathbf{u}_2,$$

[3] Ово није случајно, видети Тврђење 35 у наставку.



Слика 1. Седло, случај $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$.

па је због, линеарне независности вектора $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$:

$$\alpha'(t) = \lambda_1\alpha(t), \quad \beta'(t) = \lambda_2\beta(t).$$

Али ово значи да је $\alpha(t) = c_1e^{\lambda_1 t}$, $\beta(t) = c_2e^{\lambda_2 t}$, па је $\mathbf{x}$ траженог облика. □

Скуп трајекторија решења система називамо и *фазним портретом.* Фазни портрет планарног линеарног система у случају када су λ_1 и λ_2 различитог знака се назива *седло*, због свог изгледа. Када су λ_1 и λ_2 истог знака, фазни портрет се назива се *чвор* и то *стабилни* ако су λ_1 и λ_2 негативни, а *нестабилни* ако су λ_1 и λ_2 позитивни.

Да бисмо скицирали фазни портрет (или један његов део), изразићемо y као функцију од x. Претпоставимо да је матрица A дијагонална[4], тј. да је

$$x(t) = x_0e^{\lambda_1 t}, \quad y(t) = y_0e^{\lambda_2 t}.$$

Претпоставимо да су x_0 и λ_1 различити од нуле.[5] Имамо:

$$y(t) = y_0e^{\lambda_2 t} = y_0\left(e^{\lambda_1 t}\right)^{\lambda_2/\lambda_1} = y_0\left(\frac{x}{x_0}\right)^{\lambda_2/\lambda_1} = \frac{y_0}{|x_0|^{\lambda_2/\lambda_1}}|x|^{\lambda_2/\lambda_1} = const\cdot|x|^{\lambda_2/\lambda_1}.$$

Из горњег израза можемо да закључимо да трајекторије (у случају $x_0y_0 \neq 0$) припадају графицима функција $y = const\cdot|x|^\alpha$ (за $\alpha = \lambda_2/\lambda_1$), па дискусијом по знаку и модулу количника λ_2/λ_1 можемо да скицирамо неколико типичних трајекторија са фазног портрета. На сликама 1 и 2 приказани су примери седла, стабилног и нестабилног чвора.

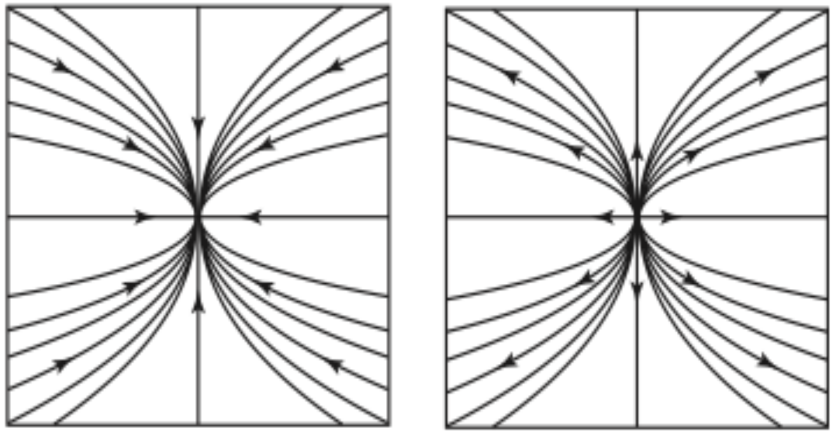
Задатак 37. Скицирати и означити стрелицама смер кретања у преосталим случајевима (дискутовати по знаку сопствених вредности). ✓

1.2. Комплексне сопствене вредности. Нека је за сада матрица A облика $\begin{bmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{bmatrix}$. Сопствене вредности матрице A су $\lambda = \pm\beta i$. Ако бисмо поновили поступак који смо имали у случају реалних и различитих сопствених вредности, добили бисмо сопствени вектор $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$, па би вектор $e^{\lambda t}\mathbf{u}$ био

$$e^{i\beta t}\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\beta t) \\ -\sin(\beta t) \end{bmatrix} + i\begin{bmatrix} \sin(\beta t) \\ \cos(\beta t) \end{bmatrix}.$$

[4]Како изгледају фазни портрети ако је матрица A само дијагонализабилна?

[5]Остављамо за вежбу читаоцу да скицира фазни портрет у случају $x_0 = 0$, као и $\lambda_1 = 0$.



Слика 2. Стабилни ($0 > \lambda_2 > \lambda_1$) и нестабилни ($0 < \lambda_2 < \lambda_1$) чвор.

Испоставиће се да реални и имагинарни део вектора $\mathbf{x}(t)$ чине фундаментални систем решења. Ово није необично јер, ако је $\mathbf{v}_1 + i\mathbf{v}_2$ решење једначине $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ (и матрица A је реална), тада су то и $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$.

Тврђење 38. Сва решења једначине $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}$ су облика

$$c_1 \begin{bmatrix} \cos(\beta t) \\ -\sin(\beta t) \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} \sin(\beta t) \\ \cos(\beta t) \end{bmatrix}.$$

Доказ. Директно се проверава да

$$c_1 \begin{bmatrix} \cos(\beta t) \\ -\sin(\beta t) \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} \sin(\beta t) \\ \cos(\beta t) \end{bmatrix}$$

јесте решење за свако c_1 и c_2. Докажимо и обрнуту инклузију. Нека је $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} a(t) \\ b(t) \end{bmatrix}$ решење система $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}$. Посматрајмо функцију

$$f(t) = (a(t) + ib(t))e^{i\beta t}.$$

Како је

$$f'(t) = (a'(t) + ib'(t))e^{i\beta t} + i\beta(a(t) + ib(t))e^{i\beta t} = [a'(t) - \beta b(t) + i(b'(t) + \beta a(t))]\, e^{i\beta t} \equiv 0,$$

то је $f = const = c_1 + ic_2$. Одавде добијамо да је

$$a(t) = c_1 \cos(\beta t) + c_2 \sin(\beta t), \quad b(t) = -c_1 \sin(\beta t) + c_2 \cos(\beta t),$$

тј:

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \begin{bmatrix} \cos(\beta t) \\ -\sin(\beta t) \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} \sin(\beta t) \\ \cos(\beta t) \end{bmatrix}. \tag{33}$$

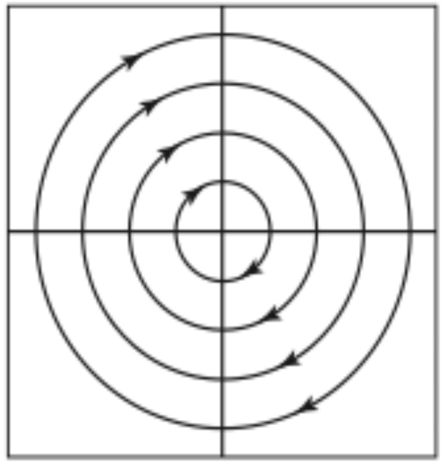
□

Фазни портрет у овом случају се назива *центар* (видети Слику 3).

Напомена 39. Систем $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ у $\mathbb{R}^2$ је еквивалентан једначини $z' = -i\beta z$ у $\mathbb{C}$, где је $z = x + iy$. Ово је једначина која раздваја промењиве и може се показати да и у $\mathbb{C}$ имамо јединственост ове једначине, односно да важи

$$z' = -i\beta z \iff z(t) = z(0)e^{-i\beta t},$$

што је у $\mathbb{R}^2$ еквивалентно изразу (33) за $c_1 = x(0)$, $c_2 = y(0)$. ◇



Слика 3. Центар, случај $\beta > 0$.

Нека је сада матрица A облика $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$. Сопствене вредности су у овом случају $\lambda = \alpha \pm \beta i$. Сада за сопствени вектор добијамо $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$, па је

$$e^{\lambda t}\mathbf{u} = e^{\alpha + i\beta t}\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = e^{\alpha t}\begin{bmatrix} \cos(\beta t) \\ -\sin(\beta t) \end{bmatrix} + ie^{\alpha t}\begin{bmatrix} \sin(\beta t) \\ \cos(\beta t) \end{bmatrix}.$$

Задатак 40. Доказати да је фундаментални систем решења једначине

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}\mathbf{x}$$

чине вектори

$$e^{\alpha t}\begin{bmatrix} \cos(\beta t) \\ -\sin(\beta t) \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad e^{\alpha t}\begin{bmatrix} \sin(\beta t) \\ \cos(\beta t) \end{bmatrix}.$$

[Упутство: ако је $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} a(t) \\ b(t) \end{bmatrix}$ решење система, посматрати функцију $f(t) = (a(t) + ib(t))e^{(-\alpha + i\beta)t}$.]

✓

Напомена 41. Нека R означава матрицу фундаменталног система решења, тј.

$$R = e^{\alpha t}\begin{bmatrix} \cos(\beta t) & \sin(\beta t) \\ -\sin(\beta t) & \cos(\beta t) \end{bmatrix}.$$

Тада је свако решење у матричном запису дато са

$$\mathbf{x}(t) = R\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}.$$

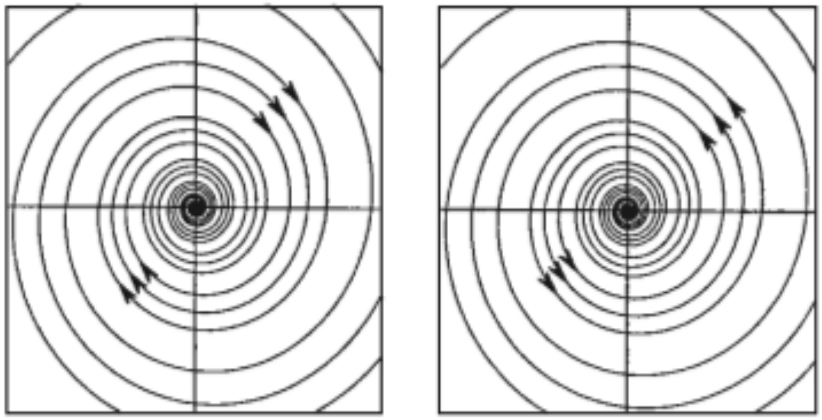
Очигледно да су константе c_1 и c_2 одређене почетним условом:

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix},$$

тј. скраћено записано:

$$\mathbf{x} = R\mathbf{x}_0. \tag{34}$$

◇



Слика 4. Спирале, лева: $\alpha < 0, \beta > 0$, десна: $\alpha > 0, \beta < 0$.

Напомена 42. Слично као у Напомени 42, можемо да приметимо да је систем

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

у $\mathbb{R}^2$ је еквивалентан једначини $z' = (\alpha - i\beta)z$ у $\mathbb{C}$, па да је $z(t) = z(0)e^{(\alpha - i\beta)t}$, што је у $\mathbb{R}^2$ еквивалентно изразу (34). ◇

У овом случају фазни портрет се назива *спирала* (видети Слику 4).

Задатак 43. Нацртати спирале у преостала два случаја ($\alpha, \beta < 0$ и $\alpha, \beta > 0$.) ✓

Нека матрица $A \in M_2(\mathbb{R})$, произвољног облика, има сопствене вредности $\alpha \pm \beta i$ ($\beta \neq 0$).

Лема 44. *Ако је* $\mathbf{u} + i\mathbf{v}$ *сопствени вектор матрице* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *који одговара сопственој вредности* $\alpha + \beta i$, *тада су вектори* $\mathbf{u}$ *и* $\mathbf{v}$ *линеарно независни (над* $\mathbb{R}$*).*

Доказ. Претпоставимо супротно, тј. нека је $\mathbf{u} = \lambda \mathbf{v}$ за неко $\lambda \in \mathbb{R}$. Тада је:

$$A(\mathbf{u} + i\mathbf{v}) = A(\lambda \mathbf{v} + i\mathbf{v}) = (\lambda + i)A\mathbf{v}$$

с једне стране, а

$$A(\mathbf{u} + i\mathbf{v}) = (\alpha + \beta i)(\mathbf{u} + i\mathbf{v}) = (\alpha + \beta i)(\lambda \mathbf{v} + i\mathbf{v}) = (\alpha + \beta i)(\lambda + i)\mathbf{v},$$

па је

$$(\lambda + i)A\mathbf{v} = (\alpha + \beta i)(\lambda + i)\mathbf{v},$$

што је немогуће јер и матрица A и вектор $\mathbf{v}$ имају реалне координате, и $\mathbf{v}$ је не-нула вектор.[6] □

Тврђење 45. У бази $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ матрица A има запис $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$.

Доказ. Како је

$$A(\mathbf{u} + i\mathbf{v}) = (\alpha + i\beta)(\mathbf{u} + i\mathbf{v})$$

то је:

$$A\mathbf{u} = \alpha \mathbf{u} - \beta \mathbf{v}, \quad A\mathbf{v} = \beta \mathbf{u} + \alpha \mathbf{v}.$$

□

[6] Зашто?

Запишимо сада крајњи облик решења једначине $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ у случају комплексно-конјугованих решења. Нека су $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ као горе и P матрица састављена од координата вектора $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$:

$$P := [\mathbf{u} \quad \mathbf{v}].$$

Тада је $AP = PD$, где је $D = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$. Ако, као у Примеру 31, једначину $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ помножимо са P^{-1} слева и наставимо као тамо, имамо:

$$P^{-1}\mathbf{x}' = P^{-1}\mathbf{x} = P^{-1}APP^{-1}\mathbf{x} = DP^{-1}\mathbf{x}.$$

Зато опет уводимо нове координате $\mathbf{y} := P^{-1}\mathbf{x}$. Како је решење једначине $\mathbf{y}' = D\mathbf{y}$ дато као

$$\mathbf{y}(t) = e^{\alpha t}R\mathbf{y}_0 = e^{\alpha t}RP^{-1}\mathbf{x}_0 = e^{\alpha t}R\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix},$$

па је:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t) = P\mathbf{y}(t) = [\mathbf{u} \quad \mathbf{v}]e^{\alpha t}R\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} &= [e^{\alpha t}\cos(\beta t)\mathbf{u} - e^{\alpha t}\sin(\beta t)\mathbf{v} \quad | \quad e^{\alpha t}\sin(\beta t)\mathbf{u} + e^{\alpha t}\cos(\beta t)\mathbf{v}]\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \\ &= e^{\alpha t}\left\{c_1[\cos(\beta t)\mathbf{u} - \sin(\beta t)\mathbf{v}] + c_2[\sin(\beta t)\mathbf{u} + \cos(\beta t)\mathbf{v}]\right\},\end{aligned} \tag{35}$$

где константе c_1 и c_2 одређујемо из почетних услова $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix}$.[7] Приметимо да су вектори

$$e^{\alpha t}[\cos(\beta t)\mathbf{u} - \sin(\beta t)\mathbf{v}] \quad \text{и} \quad e^{\alpha t}[\sin(\beta t)\mathbf{u} + \cos(\beta t)\mathbf{v}]$$

реални и имагинарни део вектора

$$e^{(\alpha+i\beta)t}(\mathbf{u} + i\mathbf{v}).$$

Задатак 46. Доказати да је скуп решења једначине $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, где матрица A има сопствене вредност $\alpha \pm i\beta$, са сопственим вектором $\mathbf{u} + i\mathbf{v}$, скуп

$$\left\{c_1e^{\alpha t}[\cos(\beta t)\mathbf{u} - \sin(\beta t)\mathbf{v}] + c_2e^{\alpha t}[\sin(\beta t)\mathbf{u} + \cos(\beta t)\mathbf{v}] \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R}\right\}$$

имитирајући доказ Тврђења 36. ✓

1.3. Случај двоструке сопствене вредности. 1. случај. Нека је, за почетак $A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$, $\lambda \neq 0$. Овај систем има решење

$$x = x_0e^{\lambda t}, \quad y = y_0e^{\lambda t}.$$

Фазни портрет се састоји од полуправих кроз тачку (x_0, y_0) које извиру или увиру у координатни почетак, у зависности од $\operatorname{sgn}\lambda$. Координатни почетак је једина стационарна тачка.

2. случај. Нека је сада $A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$, тј. систем једначина облика:

$$\begin{aligned} x' &= \lambda x + y \\ y' &= \lambda y. \end{aligned}$$

У овом случају, систем се експлицитно лако решава, наиме из друге једначине добијамо

$$y = y_0e^{\lambda t},$$

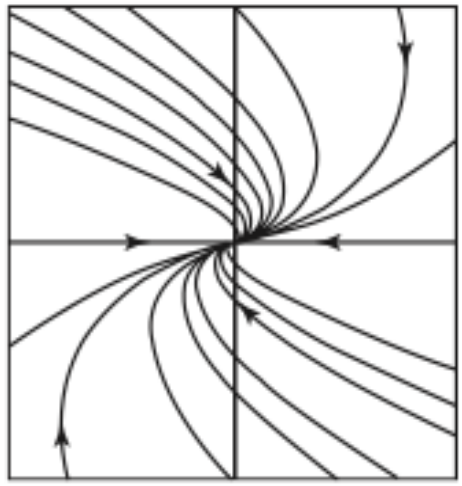
па убацивањем у прву једначину, имамо:

$$x' = \lambda x + y_0e^{\lambda t}.$$

Ово је линеарна (нехомогена) једначина из Поглавља 2.2, чије је решење:

$$x(t) = e^{\lambda t}(x_0 + y_0t),$$

[7] Зашто је то увек могуће урадити?



Слика 5. Дегенерисани чвор, $\lambda < 0$.

па је решење система:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t}\begin{bmatrix} x_0 + y_0 t \\ y_0 \end{bmatrix} = e^{\lambda t}\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}_0.$$

Фазни портрет у овом случају зове се *дегенерисани чвор* и приказан је на Слици 5.

3. случај. Нека је сада A произвољна матрица реда 2 која има двоструку сопствену вредност λ. Ако постоје два линеарно независна сопствена вектора $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ која одговарају сопственој вредности λ, тада матрица A у свакој бази има запис λE. Заиста, сваки вектор $\mathbf{w}$ је линеарна комбинација вектора $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$, па је:

$$A\mathbf{w} = A(c_1\mathbf{u} + c_1\mathbf{v}) = c_1\lambda\mathbf{u} + c_2\lambda\mathbf{w} = \lambda\mathbf{w}.$$

Претпоставимо сада да не постоје два линеарно независна сопствена вектора која одговарају сопственој вредности λ, тј. да је димензија сопственог потпростора једнака један.

Тврђење 47. Нека је $\mathbf{u}$ генератор сопственог потпростора димензије један, односно, сопствени вектор. Постоји вектор $\mathbf{v}$ за који важи:

$$A\mathbf{v} = \mathbf{u} + \lambda\mathbf{v}.$$

Вектори $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ су линеарно независни.[8]

Доказ. Нека је $\mathbf{v}_1$ произвољан вектор линеарно независан са $\mathbf{u}$. Тада је

$$A\mathbf{v}_1 = a\mathbf{u} + b\mathbf{v}_1$$

за неке реалне бројеве a и b, при чему је $a \neq 0$, јер $\mathbf{v}_1$ није сопствени вектор. Нека је $\mathbf{v} := \frac{1}{a}\mathbf{v}_1$. Имамо

$$A\mathbf{v} = \mathbf{u} + c\mathbf{v},$$

за $c = \frac{b}{a}$. У бази $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ матрица A има облик

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & c \end{bmatrix},$$

па, како је λ једина сопствена вредност матрице A, мора бити $c = \lambda$. □

У бази $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ линеарно пресликавање дефинисано матрицом A има облик из 2. случаја, будући да је

$$A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}, \quad A\mathbf{v} = \mathbf{u} + \lambda\mathbf{v}.$$

[8] Вектор $\mathbf{v}$ се зове уопштени сопствени вектор ранга 2.

Нека је, као и раније $P = [\mathbf{u} \quad \mathbf{v}]$, и $\mathbf{y} = P^{-1}\mathbf{x}$. Имамо

$$\mathbf{y}' = D\mathbf{y}, \quad S = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \quad S = P^{-1}AP,$$

и $\mathbf{y}(t) = e^{\lambda t}\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{y}_0$. Одавде је

$$\mathbf{x}(t) = P\mathbf{y}(t) = Pe^{\lambda t}\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{y}_0 = e^{\lambda t}P\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}P^{-1}\mathbf{x}_0$$
$$= e^{\lambda t}[\mathbf{u} \quad \mathbf{u}t + \mathbf{v}]\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = e^{\lambda t}\left(c_1\mathbf{u} + c_2(\mathbf{u}t + \mathbf{v})\right).$$

Задатак 48. Доказати да је скуп решења једначине $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, где матрица A има двоструку сопствену вредност λ, са сопственим вектором $\mathbf{u}$ и уопштеним сопственим вектором $\mathbf{v}$ скуп

$$\left\{e^{\lambda t}\left(c_1\mathbf{u} + c_2(\mathbf{u}t + \mathbf{v})\right) \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R}\right\}$$

имитирајући доказ Тврђења 36. ✓

Задатак 49. Написати фундаментални систем решења у случају претходног задатка. ✓

Задатак 50. У којим од описаних случајева у планарном систему кретање повећава, смањује, односно не мења површину? ✓

2. Општи случај

Да бисмо решили систем линеарних диференцијалних једначина (32) у општем случају (за произвољно n), пре свега треба да уведемо неке појмове.

2.1. Ограничени линеарни оператори. Нека су $(U, \|\cdot\|_U)$ и $(V, \|\cdot\|_V)$ нормирани векторски простори над $\mathbb{R}$ и $A : U \to V$ линеарно пресликавање (оператор).

Дефиниција 51. Ако је

$$a = \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{\|A\mathbf{x}\|_V}{\|\mathbf{x}\|_U} < +\infty,$$

тада кажемо да је A *ограничен*. Скуп свих ограничених оператора из $A : U \to V$ означавамо са $\mathcal{L}(U, V)$. Број a зовемо *нормом оператора* A, а означавамо је са $\|A\|_{\mathcal{L}(U,V)}$ или само са $\|A\|$. Норма $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(U,V)}$ се зове и *операторска норма*. ♢

У наставку текста ћемо повремено изостављати индекс код норми (тј. писаћемо $\|\cdot\|$ уместо $\|\cdot\|_U$, $\|\cdot\|_V$, $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(U,V)}$), кад год је из контекста јасно о којој се норми ради.

Задатак 52. Доказати следећи низ једнакости

$$\|A\| = \sup_{\|\mathbf{x}\|=1}\|A\mathbf{x}\| = \sup_{0<\|\mathbf{x}\|\leq 1}\frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}.$$

✓

Пример 53. Ако су U и V (или само U) коначне димензије, тада је сваки оператор непрекидан, па се $\sup_{\|\mathbf{x}\|=1}\|A\mathbf{x}\|$ достиже јер је јединична сфера компактан скуп. ✓

Тврђење 54. Нека су A и B ограничени оператори (са доменима и кодоменима таквим да доле наведено има смисла). Тада важи следеће.

(1) $\|A\mathbf{x}\| \leq \|A\|\|\mathbf{x}\|$. Одавде специјално следи да је сваки ограничен оператор непрекидан.[9]

[9] Важи и обрнуто: оператор ограничен ако и само ако је непрекидан у нули, видети [2].

(2) $\|A+B\| \leq \|A\|+\|B\|$, $\|\lambda A\| = |\lambda|\|A\|$, $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = \mathbf{0}$, сабирање оператора и множење скаларом се дефинише тачка по тачка. Одавде специјално следи да је $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U},\mathcal{V})}$ норма на векторском простору $\mathcal{L}(U,V)$.
(3) $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$.
(4) Ако је V Банахов[10] простор, тада је то и $\mathcal{L}(U,V)$.[11]

Доказ. (1) $\|A\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\| \left\|A\left(\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}\right)\right\| \leq \|\mathbf{x}\|\|A\|$.

(2) Нека је $\|\mathbf{x}\| = 1$. Имамо $\|(A+B)\mathbf{x}\| \leq \|A\mathbf{x}\| + \|B\mathbf{x}\| \leq \|A\| + \|B\|$, узимањем супремума по свим јединичним $\mathbf{x}$ добијамо тврђење, и слично за множење скаларом. Последње тврђење је очигледно.

(3) Нека је $\|\mathbf{x}\| = 1$ Како је

$$\|(AB)(\mathbf{x})\| = \|A(B\mathbf{x})\| \leq \|A\|\|B\mathbf{x}\| \leq \|A\|\|B\|\|\mathbf{x}\| = \|A\|\|B\|,$$

па узимањем супремума по јединичним векторима $\mathbf{x}$ добијамо тврђење.

(4) Нека је A_n Кошијев низ у $\mathcal{L}(U,V)$ и $\mathbf{x} \in U$ произвољан вектор. Тада је $A_n\mathbf{x}$ Кошијев низ у V јер је

$$\|A_n\mathbf{x} - A_m\mathbf{x}\| \leq \|A_n - A_m\|\|\mathbf{x}\|,$$

па је, пошто је V комплетан, он и конвергентан у V. Дефинишимо A као

$$A\mathbf{x} := \lim_{n\to\infty} A_n\mathbf{x}.$$

Из линеарности лимеса и оператора A_n следи и линеарност пресликавања A.

Остало је још да покажемо да је A ограничен, и да A_n конвергира ка A у операторској норми, тј. у простору $\mathcal{L}(U,V)$. Нека је $\varepsilon > 0$ задато. Како је A_n Кошијев, постоји n_0 тд. за свако $m, n \geq n_0$ важи $\|A_n - A_m\| < \varepsilon$. За произвољан јединични вектор $\mathbf{x}$ имамо:

$$\|A_n\mathbf{x} - A_m\mathbf{x}\| \leq \|A_n - A_m\| < \varepsilon.$$

Ако у последњој неједнакости пустимо да $m \to \infty$, добијамо[12]

$$\|A_n\mathbf{x} - A\mathbf{x}\| \leq \varepsilon, \quad \text{за свако } n \geq n_0,\ \|\mathbf{x}\| = 1. \tag{36}$$

Из неједнакости (36) ћемо закључити и да је A непрекидан и да $A_n \xrightarrow{\mathcal{L}(U,V)} A$. Заиста, из неједнакости троугла и (36) следи да је

$$\|A\mathbf{x}\| \leq \|A_{n_0}\mathbf{x} - A\mathbf{x}\| + \|A_{n_0}\mathbf{x}\| \leq \varepsilon + \|A_{n_0}\| \leq M,$$

па узимањем супремума по јединичим векторима $\|\mathbf{x}\|$ добијамо да је A ограничен.

Узимањем супремума по $\mathbf{x}$ у (36) добијамо и $\|A_n - A\| \leq \varepsilon$, за $n \geq n_0$, што значи да $A_n \xrightarrow{\mathcal{L}(U,V)} A$. □

2.2. Експонент оператора. Нека је U Банахов простор и $A \in \mathcal{L}(U,U)$. Овде има смисла говорити о $A^2 = A \circ A$, и $A^n = \underbrace{A \circ A \circ \ldots \circ A}_{n}$. Мотивисани развојем реалне функције e^x у степени ред

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

[10] Stefan Banach (1892–1945), пољски математичар.
[11] Важи и обрнуто, ако је $\mathcal{L}(U,V)$ комплетан, онда је то и V.
[12] Овде користимо да је $\lim\limits_{m\to\infty} \|\cdot\| = \|\lim\limits_{m\to\infty} \cdot\|$, што важи због непрекидности норме.

дефинишимо

$$e^A := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}, \tag{37}$$

при чемо узимамо да је $A^0 := \mathrm{Id}$. Дефиниција (37) је добра, јер је ред $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$ ковергентан за свако $A \in \mathcal{L}(U, V)$. Заиста, како је

$$\|A^n\| \le \|A^{n-1}\|\|A\| \le \|A^{n-2}\|\|A\|^2 \le \ldots \le \|A\|^n,$$

и ред $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|A\|^n}{n!}$ конвергира, то ред у (37) апсолутно конвергира. Како је U Банахов, то ред и конвергира,[13] односно e^A је добро дефинисано.

Тврђење 55. (Својства експонента.)
(1) $e^{\mathbf{0}} = \mathrm{Id}$;
(2) $AB = BA \Rightarrow e^{A+B} = e^A e^B$;
(3) $AB = BA \Rightarrow Be^A = e^A B$;
(4) $e^A = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\mathrm{Id} + \frac{A}{n}\right)^n$;
(5) за $U = \mathbb{R}^n$, тј. $A \in M_n(\mathbb{R})$ важи $\frac{d}{dt} e^{tA} = e^{tA} A = Ae^{tA}$;
(6) за $U = \mathbb{R}^n$ важи $\det e^A = e^{\operatorname{tr} A}$;
(7) за $U = \mathbb{R}^n$ важи $e^{P^{-1}AP} = P^{-1} e^A P$.

Доказ. (1) је очигледно.

(2) Ако за операторе A_n и B_n редови $\sum_{n=0}^{\infty} A_n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} B_n$ апсолутно конвергирају, тада се, на исти начин као и у случају реалних бројева, показује да важи

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \sum_{n=0}^{\infty} B_n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n$$

где је

$$C_n := \sum_{j=0}^{n} A_j B_{n-j}.$$

Код нас $A_j = \frac{A^j}{j!}$, а $B_j = \frac{B^j}{j!}$. Како је $AB = BA$, важи и биномна формула:

$$(A + B)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} A^j B^{n-j},$$

па је

$$C_k = \sum_{j=0}^{k} \frac{A^j}{j!} \frac{B^{(n-j)}}{(n-j)!} = \frac{1}{k!}(A+B)^k.$$

(3) Из $AB = BA$ следи да је $\sum_{n=0}^{N} A_n B = B \sum_{n=0}^{N} A_n$, а из непрекидности пресликавања

$$L_B, R_B : \mathcal{L}(U, U) \to \mathcal{L}(U, U), \ L_B : A \mapsto BA, \ R_B : A \mapsto AB$$

следи да је и

$$e^A B = \sum_{n=0}^{\infty} A_n B = B \sum_{n=0}^{\infty} A_n = Be^A.$$

(4) Имамо:

$$e^A - \left(\mathrm{Id} + \frac{A}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!k!} \frac{A^k}{n^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{1}{k!} - c_k^n\right] A^k,$$

[13] Нормиран простор је Банахов ако и само ако је сваки апсолутно конвергентан ред и конвергентан, видети [2].

где је

$$c_k^n = \begin{cases} \frac{1}{k!}\frac{n!}{(n-k)!n^k} = \frac{1}{k!}\frac{n}{n}\frac{n-1}{n}\cdots\frac{n-k+1}{n}, & 0 \le k \le n \\ 0, & k \ge n+1. \end{cases}$$

Како је $c_k^n \le \frac{1}{k!}$, то је

$$\left\| e^A - \left(\mathrm{Id} + \frac{A}{n}\right)^n \right\| \le \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{1}{k!} - c_k^n \right| \|A\|^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{1}{k!} - c_k^n \right] \|A\|^k =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A\|^k}{k!} - c_k^n \|A\|^k = e^{\|A\|} - \left(1 + \frac{\|A\|}{n}\right)^n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

(5) Како ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}A^n}{(n-1)!},$$

добијен формалним диференцирањем реда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}$, конвергира равномерно по t на свим сегментима у $\mathbb{R}$, и ред $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}$ конвергира за свако t, то се ред $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}$ може диференцирати члан-по-члан.[14] Имамо

$$\frac{d}{dt} e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dt} \frac{t^n A^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}A^n}{(n-1)!} = A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}A^{n-1}}{(n-1)!} = A \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} = A e^{tA} \overset{(3)}{=} e^{tA} A.$$

(6) Доказаћемо прво једно помоћно тврђење, које ће нам и касније бити од користи.

Лема 56. *За квадратну матрицу $A \in M_n(R)$ важи*

$$\det(E + \varepsilon A) = 1 + \varepsilon \operatorname{tr} A + o(\varepsilon), \quad \varepsilon \to 0.$$

Доказ. Нека је

$$\varphi(\varepsilon) := \det(E + \varepsilon A)$$

реална фунција. Напишимо Маклоренов[15] развој функције φ првог реда. Очигледно је $\varphi(0) = 0$. Да бисмо израчунали $\varphi'(0)$, напишимо $E + \varepsilon A$ као матрицу колона

$$[A_1(\varepsilon) \quad A_2(\varepsilon) \quad \ldots \quad A_n(\varepsilon)],$$

где је

$$A_j(\varepsilon) = \begin{bmatrix} \varepsilon a_{j1} \\ \varepsilon a_{j2} \\ \vdots \\ \varepsilon a_{j(j-1)} \\ \varepsilon a_{jj} + 1 \\ \varepsilon a_{j(j+1)} \\ \vdots \\ \varepsilon a_{jn} \end{bmatrix}.$$

Тада је[16]

$$\varphi'(\varepsilon) = \sum_{j=1}^{n} \det[A_1(\varepsilon) \quad \cdots \quad A_{j-1}(\varepsilon) \quad A_j'(\varepsilon) \quad A_{j+1}(\varepsilon) \quad \cdots \quad A_n(\varepsilon)],$$

[14] Видети [2].

[15] Colin Maclaurin (1698–1746), шкотски математичар.

[16] Видети [2].

па је

$$\varphi'(0)=\sum_{j=1}^{n}\det\begin{bmatrix}1&0&\cdots&0&a_{j1}&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0&a_{j2}&0&\cdots&0\\&&&&\vdots&&&\\0&0&\cdots&0&a_{jj}&0&\cdots&0\\&&&&\vdots&&&\\0&0&\cdots&0&a_{jn}&0&\cdots&1\end{bmatrix}=\sum_{j=1}^{n}a_{jj}=\operatorname{tr}A.$$

Одавде имамо:

$$\varphi(\varepsilon)=\varphi(0)+\varphi'(0)\varepsilon+o(\varepsilon)=1+\operatorname{tr}A\varepsilon+o(\varepsilon),\quad \varepsilon\to 0.$$

□

Вратимо се сада тврђењу (6). Имамо:

$$\det e^{A}=\det\lim_{n\to\infty}\left(E+\frac{A}{n}\right)^{n}\overset{(*)}{=}\lim_{n\to\infty}\det\left(E+\frac{A}{n}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left[\det\left(E+\frac{A}{n}\right)\right]^{n}\overset{\text{Лема } 56}{=}$$
$$\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{1}{n}\operatorname{tr}A+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]^{n}=\lim_{n\to\infty}e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\operatorname{tr}A+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}=\lim_{n\to\infty}e^{n\left(\frac{1}{n}\operatorname{tr}A+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}=e^{\operatorname{tr}A}.$$

Зашто важи једнакост $(*)$?
(7) Како је

$$(P^{-1}AP)^n=P^{-1}A^nP,$$

то је

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(P^{-1}AP)^n}{n!}=P^{-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{n!}\right)P.$$

□

2.3. Веза са једначином.

Тврђење 57. Једино решење једначине (32) са почетним условом $\mathbf{x}(t_0)=\mathbf{x}_0$ је $\mathbf{x}(t)=e^{A(t-t_0)}\mathbf{x}_0$.

Доказ. $e^{(At-t_0)}\mathbf{x}_0$ јесте решење једначине (32) због тачке (4) у Тврђењу 55, са почетним условом $\mathbf{x}_0$ због тачке (1) истог тврђења.

Докажимо да је ово једино решење. Нека је $\mathbf{x}(t)$ решење са почетним условом $\mathbf{x}_0$. Дефинишимо $\mathbf{y}(t):=e^{-(t-t_0)A}\mathbf{x}(t)$. Имамо:

$$\mathbf{y}'(t)=-e^{-(t-t_0)A}A\mathbf{x}(t)+e^{-(t-t_0)A}\mathbf{x}'(t)=e^{-(t-t_0)A}\left(-A\mathbf{x}(t)+\mathbf{x}'(t)\right)\equiv\mathbf{0},$$

јер је $\mathbf{x}(t)$ решење. Одавде је

$$e^{-(t-t_0)A}\mathbf{x}(t)=\mathbf{y}(t)\equiv\mathbf{y}_0=\mathbf{x}_0,$$

одакле следи

$$\mathbf{x}(t)=e^{A(t-t_0)}\mathbf{x}_0.$$

□

Последица 58. *Скуп решења система $\mathbf{x}'=A\mathbf{x}$ је векторски простор димензије n.*

Доказ. Из Тврђења 57 следи да су сва решења облика $e^{(t-t_0)A}C$, где је C нека колона константни. Заиста, ако је $\mathbf{x}$ решење, $\mathbf{x}(t)=e^{(t-t_0)A}\mathbf{x}(0)$. Како је, из тачке (6) Тврђења 55

$$\det e^{(t-t_0)A}=e^{\operatorname{tr}(t-t_0)A}\neq 0,$$

видимо су вектори чије су координате колоне матрице $e^{(t-t_0)A}$ и линеарно независни, дакле чине базу, па је димензија простора решења једнака n. □

Дефиниција 59. *Фундаментални систем решења аутономне линеарне једначине* је скуп било којих n линеарно независних решења једначине $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$. $\Diamond$

Приметимо да фундаментални систем решења аутономне линеарне једначине $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ чине вектори чије су координате колоне матрице $e^{(t-t_0)A}$.

Напомена 60. Приметимо да су трајекторије система (32) дисјунктне.[17] Заиста, за две трајекторије $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ са почетним условима $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)$ и $\mathbf{y}_0 = \mathbf{y}(s_0)$, из

$$\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{y}(s_1)$$

имамо

$$e^{A(t_1-t_0)}\mathbf{x}_0 = e^{A(s_1-s_0)}\mathbf{y}_0,$$

па је

$$\mathbf{x}_0 = e^{At_2}\mathbf{y}_0, \quad \text{за} \quad t_2 = s_1 - s_0 - t_1 + s_0$$

тј.

$$\mathbf{x}(t) = e^{A(t-t_0)}\mathbf{x}_0 = e^{A(t-t_0)}e^{A(t_2)}\mathbf{y}_0 = e^{A(t-t_0+t_2)}\mathbf{y}_0 = \mathbf{y}(t + s_0 - t_0 + t_2),$$

а ово значи да се трајекторије $\mathbf{x}(\mathbb{R})$ и $\mathbf{y}(\mathbb{R})$ поклапају. $\diamond$

Нека је $t_0 = 0$. Посматрајмо, за фиксирано $t \in \mathbb{R}$, пресликавање

$$\Phi^t : \mathbf{x}_0 \mapsto e^{tA}\mathbf{x}_0.$$

Ово је специјални случај кретања Φ^t из Напомене 27.

Задатак 61. Доказати да је Φ^t дифеоморфизам простора $\mathbb{R}^n$, за свако $t \in \mathbb{R}$. Доказати да је

$$\Phi^{t+s} = \Phi^t \circ \Phi^s, \quad \Phi^0 = \mathrm{Id}\,. \tag{38}$$

Фамилија пресликавања Φ^t која испуњава горњи услов зове се *једнопараметарска фамилија дифеоморфизама.* ✓

Задатак 62. Нека је Φ^t једнопараметарска фамилија дифеоморфизама на $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$. Доказати да је са

$$(t, \mathbf{x}) \mapsto \Phi^t(\mathbf{x})$$

дефинисано дејство групе $(\mathbb{R}, +)$ на $\mathcal{U}$. ✓

Из тачке (6) Тврђења 55 следи следеће тврђење, познато и као Лиувилова[18] теорема.

Тврђење 63. (Лиувилова теорема.) Кретање простора Φ^t дефинисано једначином

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$$

мења запремину (мерљиве) области $D \subset \mathbb{R}^n$ по правилу:

$$\mathrm{Vol}(\Phi^t(D)) = e^{t\,\mathrm{tr}\,A}\,\mathrm{Vol}(D).$$

Доказ. Како је $\Phi^t(\mathbf{x}) = e^{tA}\mathbf{x}$ и запремина области $\Phi^t(D)$ дата са

$$\mathrm{Vol}(\Phi^t(D)) = \int\limits_{\Phi^t(D)} \cdots \int dx_1 \cdots dx_n,$$

то је из формуле за смену променљиве у вишеструком интегралу:

$$\mathrm{Vol}(\Phi^t(D)) = \int\limits_{D} \cdots \int |\det d\Phi^t| dy_1 \cdots dy_n.$$

[17] Мисли се на слике скупа $\mathbb{R}$ у $\mathbb{R}^n$.

[18] Joseph Liouville (1809–1882), француски математичар.

Пошто је Φ^t у нашем случају линеарно пресликавање, важи $d\Phi^t = \Phi^t$, па је

$$|\det d\Phi^t| = |\det \Phi^t| = |\det e^{tA}| = |e^{\mathrm{tr}(tA)}| = e^{t\,\mathrm{tr}\,A}.$$

Одатле је

$$\mathrm{Vol}(\Phi^t(D)) = e^{t\,\mathrm{tr}\,A}\int\cdots\int_D dy_1\cdots dy_n = e^{t\,\mathrm{tr}\,A}\,\mathrm{Vol}(D).$$

$\square$

Задатак 64. У којим случајевима линеарних система кретање повећава, смањује или не мења запремину? Упоредити са Задатком 50. ✓

2.4. Израчунавање експонента. Случај 1. Нека је $A = \mathrm{diag}\{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\}$ дијагонална матрица. Тада индукцијом по n лако проверавамо да је

$$A^k = \mathrm{diag}\{\lambda_1^k,\ldots,\lambda_n^k\},$$

па је

$$e^{\mathrm{diag}\{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\}} = \mathrm{diag}\{e^{\lambda_1},\ldots,e^{\lambda_n}\},$$

односно

$$e^{\mathrm{diag}\{\lambda_1 t,\ldots,\lambda_n t\}} = \mathrm{diag}\{e^{\lambda_1 t},\ldots,e^{\lambda_n t}\}.$$

Одавде следи да је решење система $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ са почетним условом $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ дато са

$$\mathbf{x}(t) = \mathrm{diag}\{e^{\lambda_1(t-t_0)},\ldots,e^{\lambda_n(t-t_0)}\}\mathbf{x}_0.$$

Приметимо да смо до овог закључка дошли и раније, непосредно, видети Напомену 30.

Случај 2. Нека је $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$. Приметимо[19] да је алгебра матрица оваквог облика (са операцијама сабирања и множења матрица) поље, и то изоморфно пољу $\mathbb{C}$, при чему је изоморфизам дат са:

$$\Phi : \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix} \mapsto \alpha + \beta i.$$

Одавде следи да је

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \mathrm{Re}\,((\alpha+\beta i)^n) & \mathrm{Im}\,((\alpha+\beta i)^n) \\ -\mathrm{Im}\,((\alpha+\beta i)^n) & \mathrm{Re}\,((\alpha+\beta i)^n) \end{bmatrix},$$

па је

$$e^A = \begin{bmatrix} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{Re}\,((\alpha+\beta i)^n)}{n!} & \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{Im}\,((\alpha+\beta i)^n)}{n!} \\ -\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{Im}\,((\alpha+\beta i)^n)}{n!} & \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{Re}\,((\alpha+\beta i)^n)}{n!} \end{bmatrix} \overset{(\clubsuit)}{=} \begin{bmatrix} \mathrm{Re}\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha+\beta i)^n}{n!} & \mathrm{Im}\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha+\beta i)^n}{n!} \\ -\mathrm{Im}\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha+\beta i)^n}{n!} & \mathrm{Re}\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha+\beta i)^n}{n!} \end{bmatrix}.$$

Једнакост ($\clubsuit$) је тачна јер су операције Re и Im линеарне, па пролазе кроз коначне суме, али и непрекидне, па пролазе и кроз бесконачне редове (као лимесе коначних сума). Како је

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha+\beta i)^n}{n!} = e^{\alpha+\beta i}, \quad \mathrm{Re}\,(e^{\alpha+\beta i}) = e^{\alpha}\cos\beta,\ \mathrm{Im}\,(e^{\alpha+\beta i}) = e^{\alpha}\sin\beta,$$

имамо да је

$$e^A = e^{\alpha}\begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix},$$

односно

$$e^{(t-t_0)A} = e^{\alpha(t-t_0)}\begin{bmatrix} \cos\beta(t-t_0) & \sin\beta(t-t_0 \\ -\sin\beta(t-t_0) & \cos\beta(t-t_0) \end{bmatrix}.$$

Приметимо да смо ово већ извели директно у Потпоглављу 1.2.

[19] Проверити.

Случај 3. Нека је A матрица парног реда облика

$$A = \begin{bmatrix} D_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & D_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & D_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & D_2 \end{bmatrix},$$

где је

$$D_2 = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix},$$

а нуле представљају нула-матрице реда 2. Из

$$A^k = \begin{bmatrix} D_2^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & D_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & D_2^k \end{bmatrix}$$

и дискусије из Случаја 2 следи да је

$$e^A = \begin{bmatrix} e^{D_2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{D_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{D_2} \end{bmatrix} = e^{\alpha} \begin{bmatrix} R & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & R & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & R \end{bmatrix}, \tag{39}$$

где је

$$R = \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}.$$

Случај 4. Нека је $\lambda \in \mathbb{R}$ нека матрица A има на главној дијагонали λ, на првој горњој споредној јединице, и све остало нуле:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Хоћемо да израчунамо e^{tA} у овом случају. Приметимо да A можемо да напишемо као $\lambda E + N$, где је

$$N := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

као и да матрице λE и N комутирају. Због тога је (тачка (2) у Тврђењу 55):

$$e^{(t-t_0)A} = e^{(t-t_0)\lambda E} e^{(t-t_0)N}.$$

Како је

$$e^{(t-t_0)\lambda E} = e^{(t-t_0)\lambda} E,$$

остало је још да израчунамо $e^{(t-t_0)N}$. Индукцијом по k се лако показује да је

$$N^k = \begin{cases} \left[\begin{array}{c|c} 0 & E_{n-k} \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right], & k \leq n-1 \\ 0 & k \geq n, \end{cases}$$

где је E_m јединична квадратна матрица реда m. Зато је

$$e^{tN}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(t-t_0)^kN^k}{k!}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(t-t_0)^kN^k}{k!}=\begin{bmatrix}1 & (t-t_0) & \frac{(t-t_0)^2}{2} & \frac{(t-t_0)^3}{6} & \cdots & \frac{(t-t_0)^{n-1}}{(n-1)!}\\ 0 & 1 & (t-t_0) & \frac{(t-t_0)^2}{2} & \cdots & \frac{(t-t_0)^{n-2}}{(n-2)!}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & t\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix},$$

па је

$$e^{(t-t_0)A}=e^{(t-t_0)\lambda}Ee^{(t-t_0)N}=e^{(t-t_0)\lambda}e^{(t-t_0)N}=e^{(t-t_0)\lambda}\begin{bmatrix}1 & (t-t_0) & \frac{(t-t_0)^2}{2} & \frac{(t-t_0)^3}{6} & \cdots & \frac{(t-t_0)^{n-1}}{(n-1)!}\\ 0 & 1 & t & \frac{(t-t_0)^2}{2} & \cdots & \frac{(t-t_0)^{n-2}}{(n-2)!}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & t\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}.$$

Приметимо да смо ово већ извели елементарно за $n=2$, у Поглављу 1.3.

Случај 5. Нека је матрица A сада реда $2n$ и облика

$$A=\begin{bmatrix}D_2 & E_2 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & D_2 & E_2 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & D_2 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & D_2 & E_2\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & D_2\end{bmatrix}, \tag{40}$$

где је

$$E_2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\quad D_2=\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ -\beta & \alpha\end{bmatrix}.$$

Нуле у матрици (40) означавају нула матрицу реда 2, тј. $\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$. Поступак је сличан оном у Случају 4. Прво ћемо записати A као

$$A=D+N,$$

где је

$$D=\begin{bmatrix}D_2 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & D_2 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & D_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & D_2\end{bmatrix},\quad N=\begin{bmatrix}0 & E_2 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & E_2 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & E_2\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{c|c}0 & E_{2n-2}\\ \hline 0 & 0\end{array}\right],$$

и приметити да је

$$DN=ND\Rightarrow e^{D+N}=e^De^N.$$

Матрицу e^D смо рачунали у Случају 3, формула (39). Даље добијамо

$$N^k=\begin{cases}\left[\begin{array}{c|c}0 & E_{2(n-k)}\\ \hline 0 & 0\end{array}\right], & k\le n-1\\ 0 & k\ge n.\end{cases}$$

Коначно, имамо:

$$e^{(t-t_0)N} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t-t_0)^k N^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-t_0)^k N^k}{k!} = \begin{bmatrix} E_2 & E_2 t & \frac{(t-t_0)^2}{2}E_2 & \frac{(t-t_0)^3}{6}E_2 & \cdots & \frac{(t-t_0)^{n-1}}{(n-1)!}E_2 \\ 0 & E_2 & tE_2 & \frac{(t-t_0)^2}{2}E_2 & \cdots & \frac{(t-t_0)^{n-2}}{(n-2)!}E_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & tE_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & E_2 \end{bmatrix},$$

па је

$$e^{(t-t_0)A} = e^{(t-t_0)D} e^{(t-t_0)N} = e^{\alpha t} \begin{bmatrix} R(t) & tR(t) & \frac{(t-t_0)^2}{2}R(t) & \frac{(t-t_0)^3}{6}R(t) & \cdots & \frac{(t-t_0)^{n-1}}{(n-1)!}R(t) \\ 0 & R(t) & tR(t) & \frac{(t-t_0)^2}{2}R(t) & \cdots & \frac{(t-t_0)^{n-2}}{(n-2)!}R(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & tR(t) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & R(t) \end{bmatrix},$$

где је

$$R(t) = \begin{bmatrix} \cos\beta(t-t_0) & \sin\beta(t-t_0) \\ -\sin\beta(t-t_0) & \cos\beta(t-t_0) \end{bmatrix}.$$

Случај 6. Нека је A блок-матрица облика

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_m \end{bmatrix}, \tag{41}$$

где су A_j квадратне матрице реда l_j $(l_1 + \ldots + l_m = n)$ облика из случајева 1, 3, 4 и 5, и нека су нуле у (41) квадратне нула-матрице одговарајуће ранга. Како је

$$A^k = \begin{bmatrix} A_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_m^k \end{bmatrix},$$

то је

$$e^A = \begin{bmatrix} e^{A_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{A_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{A_m} \end{bmatrix},$$

а сваку од матрица e^{A_j} знамо да израчунамо.

Општи случај. Овде ћемо се позвати на Жорданову[20] теорему о нормалној форми матрице,[21] која каже да за сваку квадратну матрицу A постоји база у којој она има облик (41). Вредности λ_k на дијагонали и $\alpha_j + \beta_j i$ из случајева 2 и 5 су сопствене вредности матрице A. При томе:

[20] Camille Jordan (1838–1922), француски математичар.

[21] Доказ видети у [4].

- број појављивања реалне сопствене вредности λ на дијагонали Жордановој матрици, у блоковима
$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{bmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$
у збиру једнак је вишеструкости сопствене вредности λ;[22]
- број појављивања матрице $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$ Жордановој матрици, у блоковима:
$$\begin{bmatrix} D_2 & E_2 & \cdots & 0 \\ 0 & D_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & D_2 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{bmatrix} D_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & D_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & D_2 \end{bmatrix}$$
у збиру једнак је вишеструкости сопствене вредности $\alpha \pm \beta i$.

Нормална форма матрице је јединствена, до на пермутацију блокова A_j.

Приметимо да смо у Поглављу 1 доказали Жорданову теорему у специјалном случају $n = 2$.

Нека је P матрица преласка на базу из Жордановe теореме, тј. нека је
$$A = PKP^{-1},$$
где је K облика (41). Како је
$$A^j = PK^jP^{-1},$$
то је
$$e^A = \sum_{j=0}^{\infty} P\frac{K^j}{j!}P^{-1} = P\left[\sum_{j=0}^{\infty} \frac{K^j}{j!}\right]P^{-1} = Pe^KP^{-1},$$
па је решење једначине
$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} \quad \text{са почетним условом } \mathbf{x}_0$$
дато са
$$\mathbf{x}(t) = e^{(t-t_0)A}\mathbf{x}_0 = Pe^{t-t_0)K}P^{-1}\mathbf{x}_0 = Pe^{(t-t_0)K}C = Pe^{tK}\tilde{C},$$
где је $\tilde{C}$ константан вектор $\tilde{C} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$, који одређујемо из почетних услова.

Пример 65. Решити систем $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ ако је
$$A = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Како је
$$\det(A - \lambda E) = -\lambda(\lambda - 5)^2,$$

[22]Овде под вишеструкошћу сопствене вредности λ подразумевамо вишеструкост сопствене вредности нуле карактеристичног полинома. Ова вишеструкост се зове и *алгебарска вишеструкост.* Постоји и појам *геометријске вишеструкости* сопствене вредности λ, и то је димензија придруженог сопственог потпростора. Алгебарска вишеструкост је увек већа од геометријске, а на примеру матрице $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ видимо да оне не морају бити једнаке. Штавише, очигледно је да је матрица дијагонализабилна ако и само ако је алгебарска вишеструкост сваке сопствене вредности једнака њеној геометријској вишеструкости. У наставку текста, ми ћемо под вишеструкошћу сопствене вредности увек подразумевати алгебарску вишеструкост.

то имамо две сопствене вредности, једну просту $\lambda_1 = 0$, којој одговара сопствени вектор

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix}$$

и једну двоструку $\lambda_2 = 5$. То значи да ће Жорданова нормална форма бити облика:

$$K = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad \text{или облика} \quad K = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

Другу могућност одбацујемо јер директним рачуном добијамо да је простор решења једначине

$$\begin{bmatrix} 5 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

димензије један. Зато је

$$K = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Да бисмо одредили (уопштене) сопствене векторе $\mathbf{v}_1$ $\mathbf{v}_2$ који одговарају сопственој вредности λ_2, посматраћемо систем

$$\begin{aligned} A\mathbf{v}_1 &= \lambda_2 \mathbf{v}_1 = 5\mathbf{v}_1 \\ A\mathbf{v}_2 &= \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 + 5\mathbf{v}_2. \end{aligned}$$

Добијамо да је

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

па је матрица преласка

$$P = [\mathbf{u} \,|\, \mathbf{v}_1 \,|\, \mathbf{v}_2] = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Како је

$$e^K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{5t} & te^{5t} \\ 0 & 0 & e^{5t} \end{bmatrix},$$

долазимо до решења

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) = e^{At} = Pe^K P^{-1}\mathbf{x}_0 = Pe^K \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} &= [\mathbf{u} \quad \mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{5t} & te^{5t} \\ 0 & 0 & e^{5t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \\ &= \left[\mathbf{u} \quad e^{5t}\mathbf{v}_1 \quad te^{5t}\mathbf{v}_1 + e^{5t}\mathbf{v}_2\right] \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = c_1\mathbf{u} + c_2 e^{5t}\mathbf{v}_1 + c_3(te^{5t}\mathbf{v}_1 + e^{5t}\mathbf{v}_2) \\ &= c_1 \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -4e^{5t} \\ 0 \\ 2e^{5t} \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} (-4t+1)e^{5t} \\ e^{5t} \\ (2t+2)e^{5t} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Фундаментални систем решења је

$$\left\{ \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4e^{5t} \\ 0 \\ 2e^{5t} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} (-4t+1)e^{5t} \\ e^{5t} \\ (2t+2)e^{5t} \end{bmatrix} \right\}.$$

✓

Задатак 66. Решити систем $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ ако је

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

[Решење:

$$\mathcal{R} = e^t \left\{ c_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2\cos(2t) \\ \sin(2t) \\ 3\sin(2t) \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 2\sin(2t) \\ -\cos(2t) \\ -3\cos(2t) \end{bmatrix} \right\}$$

✓

3. Веза са једначином вишег реда

Ако имамо једначину вишег реда:

$$x^{(n)}(t) = f\left(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}\right), \tag{42}$$

тада њу можемо да сведемо на систем од n једначина првог реда сменом:

$$\varphi : x \mapsto \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} & x_1(t) := x(t) \\ & x_2(t) := x'(t) \\ & \vdots \\ & x_n(t) := x^{(n-1)}(t). \end{aligned} \quad . \tag{43}$$

Систем тада постаје

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t) \\ x_2'(t) = x_3(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}'(t) = x_n(t) \\ x_n'(t) = f(t, x_1(t), \dots, x_n(t)), \end{cases} \quad . \tag{44}$$

или, у векторском облику

$$\mathbf{x}'(t) = F(t, \mathbf{x}(t)),$$

где је

$$F(\mathbf{x}, t) = F(x_1, \dots, x_n, t) = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \\ f(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \end{bmatrix}.$$

Пресликавање φ из (43) је бијекција из скупа решење једначине (42) и (44). Заиста, његов инверз је пројекција на прву координату,

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \mapsto x_1.$$

Како су решења система (44) облика

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t) \end{bmatrix},$$

то је почетни услов $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ система који смо добили одређен почетним условом

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} x(t_0) \\ x'(t_0) \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t_0) \end{bmatrix}. \tag{45}$$

Задавање вектора (45) се назива *почетним условом у случају једначине вишег реда.*

3.1. Линеарна једначина вишег реда са константним коефицијентима. Ако функција f не зависи од t и линеарна је по осталим променљивима, добијамо *линеарну једначину реда* n *са константним кофицијентима*:

$$x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_{n-1}x'(t) + a_n x(t) = 0. \tag{46}$$

Непосредно се проверава да је, као и у случају система, скуп решења једначине (46) векторски простор. Пресликавање φ из (43) је линеарни изоморфизам векторских простора. Помоћу описане смене (43), систем (46) се непосредно решава. Наиме, сада изведени систем постаје $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, где је

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & a_{n-1} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}.$$

Ако решења $\mathbf{x}_1(t), \ldots, \mathbf{x}_n(t)$ чине фундаментални систем решења овог система, онда функције $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ чине базу скупа решења једначине (46), при чему је

$$x_j(t) = \pi_1\left(\mathbf{x}_j(t)\right)$$

пројекција на прву координату. Како су $\mathbf{x}_j$ линеарно независни, то су и x_j.

Вратимо се експлицитном решавању једначине (46). Карактеристични полином матрице A је

$$\det(A - \lambda E) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 - \lambda \end{bmatrix}.$$

Задатак 67. Доказати да је

$$\det(A - \lambda E) = \pm(\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots a_{n-1}\lambda + a_n). \tag{47}$$

[Упутство: Ако је $d_n = \det(A - \lambda E)$, развити детерминанту по првој колони и наћи рекурентну везу између d_n и d_{n-1}; или развити по последњој врсти.] ✓

Због општег облика решења линеарног система са константним коефицијентима, можемо да претпоставимо да је свако решење линеарна комбинација функција облика

- $e^{\lambda t}$, ако је $\lambda \in \mathbb{R}$ проста нула карактеристичног полинома (47);
- $e^{\lambda t}, te^{\lambda t} \ldots t^{k-1}e^{\lambda t}$ ако је $\lambda \in \mathbb{R}$ нула карактеристичног полинома (47) вишеструкости k;
- $e^{\alpha t}\cos(\beta t)$, $e^{\alpha t}\sin(\beta t)$ ако су $\alpha \pm \beta i \in \mathbb{C}$ просте нуле карактеристичног полинома (47);

- $e^{\alpha t}\cos(\beta t), e^{\alpha t}\sin(\beta t), te^{\alpha t}\cos(\beta t), te^{\alpha t}\sin(\beta t), \ldots, t^{k-1}e^{\alpha t}\cos(\beta t), t^{k-1}e^{\alpha t}\sin(\beta t)$ ако су $\alpha \pm \beta i \in \mathbb{C}$ нуле карактеристичног полинома (47) вишеструкости k.

Није тешко проверити да су горње функције линеарно независне. Строг доказ да је функција $t^m e^{\lambda t}$ решење једначине (46), за $m \in \{0, \ldots, k-1\}$ може да се изведе овако. Означимо са

$$L(x) := x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_{n-1}x'(t) + a_n x(t)$$

и са

$$P(z) := z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1}z + a_n.$$

Хоћемо да докажемо да је $L(t^m e^{\lambda t}) = 0$, за $m \in \{0, \ldots, k-1\}$. Важи да је

$$L\left(\frac{\partial^l}{\partial z^l} e^{zt}\right) = \frac{\partial^l}{\partial z^l} L\left(e^{zt}\right)$$

као и

$$L(e^{zt}) = e^{zt}P(z).$$

Зато је

$$L(t^m e^{zt}) = L\left(\frac{\partial^m}{\partial z^m} e^{zt}\right) = \frac{\partial^m}{\partial z^m} L\left(e^{zt}\right) = \frac{\partial^m}{\partial z^m}[e^{zt}P(z)].$$

Из Лајбницове[23] формуле имамо да је

$$\frac{\partial^m}{\partial z^m}[e^{zt}P(z)] = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} (e^{zt})^{(j)} P^{(m-j)}(z).$$

Како је λ нула реда m полинома $P(z)$, то је $P^{(m-j)}(\lambda) = 0$ за $j \in \{0, \ldots, m\}$, па је

$$L(t^m e^{\lambda t}) = \frac{\partial^m}{\partial \lambda^m}[e^{\lambda t}P(\lambda)] = 0.$$

За реалне λ добијамо прва два облика решења, док за комплексне вредности λ, узимањем реалног и имагинарног дела решења, добијамо друга два облика. □

Пример 68. Наћи сва решења једначине $x^{(5)} - 15x^{(4)} + 84x^{(3)} - 220x'' + 275x' - 125x = 0$, а затим наћи оно које задовољава почетни услов:

$$x(0) = 0,\ x'(0) = 1,\ x''(0) = 6,\ x^{(3)}(0) = 21,\ x^{(4)}(0) = 56. \tag{48}$$

Карактеристични полином једначине је

$$\lambda^5 - 15\lambda^4 + 84\lambda^3 - 220\lambda^2 + 275\lambda - 125 = (\lambda - 1)(\lambda - 5)^2(\lambda^2 - 4\lambda + 5),$$

па имамо $\lambda = 1$ и $\lambda = 2 \pm i$ као просте нуле и $\lambda = 5$ као двоструку нулу. Зато су сва решења облика

$$x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{5t} + c_3 t e^{5t} + c_4 e^{2t}\cos t + c_5 e^{2t}\sin t.$$

За конкретно решење са датим почетним условом решавамо систем по константама c_j који добијамо из (48) и добијамо $c_1 = 1$, $c_2 = c_3 = 0$, $c_4 = -1$, $c_5 = 2$, па је:

$$x(t) = e^t - c_4 e^{2t}\cos t + 2e^{2t}\sin t.$$

✓

[23] Gottfried Wilhelm Freiherr von Leibniz (1646-1716), немачки филозоф, математичар, научник и дипломата.

4. Нехомогена једначина

Систем једначина

$$\mathbf{x}'(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + B(t), \tag{49}$$

где је $B(t)$ колона матрица, зове се *нехомоген* систем. Приметимо да је скуп решења система (49) једнак $L^{-1}(\{B(t)\})$, где је L линеарно пресликавање

$$L : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}' - A\mathbf{x}.$$

Ако са $\mathcal{R}_h$ означимо (векторски) простор решења придруженог хомогеног система

$$\mathbf{x}'(t) = A(t)\mathbf{x}(t),$$

онда је афини простор $\mathcal{R}$ решења система (49)

$$\mathcal{R} = \mathbf{x}_p(t) + \mathcal{R}_h,$$

где је $\mathbf{x}_p(t)$ једно конкретно решење нехомогеног система (49). Заиста:

$$\mathbf{x} \in \mathcal{R} \Leftrightarrow L(\mathbf{x}) = B \Leftrightarrow L(\mathbf{x}) = L(\mathbf{x}_p) \Leftrightarrow L(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} - \mathbf{x}_p \in \mathcal{R}_h \Leftrightarrow \mathbf{x} \in \mathbf{x}_p + \mathcal{R}_h.$$

Одавде закључујемо да је $\mathcal{R}$ афини простор[24] исте димензије као и векторски простор $\mathcal{R}_h$. Осим тога, одавде видимо да је, да бисмо нашли сва решења система (49), довољно да то урадимо за придружени хомогени, и да погодимо само једно решење нехомогеног.

Исто важи и за линеарну једначину вишег реда. Наиме ако је $x_p(t)$ решење једначине:

$$x^{(n)}(t) + a_1(t)x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_{n-1}(t)x'(t) + a_0(t)x(t) = b(t), \tag{50}$$

тада је $x_h(t)$ решење придружене хомогене једначине

$$x^{(n)}(t) + a_1(t)x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_{n-1}(t)x'(t) + a_0(t)x(t) = 0$$

ако и само је $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$ решење нехомогене (50). Тако да је довољно да знамо да нађемо сва решења придружене хомогене једначине, и да погодимо једно решење нехомогене, да бисмо нашли сва решење нехомогене једначине (50).

Изведимо и једну формулу за решење нехомогеног система једначина (49), у случају да нам је познат фундаментални систем решења одговарајућег придруженог хомогеног система. И у неаутономном случају структура простора решења је иста као у аутономном. Овде ћемо то само формулисати, а доказаћемо је касније, в. Теорему 88.

Теорема 69. *Димензија простора решења хомогеног система $\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x}$ једнака n.* □

Као и у неаутономном случају, било који скуп од n линеарно независних решења једначине $\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x}$ називамо *фундаменталним системом решења.*. Означимо са $R(t)$ квадратну матрицу чије су колоне координате вектора из фундаменталног система решења. Знамо да су тада сва решења хомогеног система дата са $\mathbf{x}(t) = R(t)C$, где је C колона константи. Применимо метод варијације константи, као и у случају једне једначине. Нека је $\mathbf{x}(t) = R(t)C(t)$ решење система (49). Убацивањем у (49) добијамо:

$$\mathbf{x}'(t) = R'(t)C(t) + R(t)C'(t) = A(t)R(t)C(t) + B(t),$$

па како је

$$R'(t) = A(t)R(t),$$

добијамо

$$R(t)C'(t) = B(t),$$

тј.

$$C(t) = \int R^{-1}(t)B(t)dt,$$

[24] Ово смо могли да закључимо и из једнакости $\mathcal{R} = L^{-1}(\{B\})$, јер је инверзна слика вектора афини простор.

односно
$$\mathbf{x}(t) = R(t)\left[\int R^{-1}(t)B(t)dt + C\right].$$
Специјално, у случају нехомогеног система са константним коефицијентима:
$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + B(t)$$
добијамо формулу:
$$\mathbf{x}(t) = e^{(t-t_0)A}\left[\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-sA}B(s)ds\right].$$

5. Задаци

(1) Одредити интегралне криве векторског поља
а) $(y, -x)$ у $\mathbb{R}^2$;
б) $(y, -x, 0)$ у $\mathbb{R}^3$;
в) $x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ у $\mathbb{R}^3$;
г) $x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ у $\mathbb{R}^3$. ✓

(2) Скицирати фазне токове система $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \alpha \end{bmatrix}\mathbf{x}$ у зависности од реалног параметра α.

(3) Описати све могуће скупове стационарних тачака за планарни систем линеарних једначина са константним коефицијентима. ✓

(4) Наћи инваријантне потпросторе за оператор $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ и решити једначине $\dot{\mathbf{x}} = T\mathbf{x}$ ако је
$$\text{а) } T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \text{б) } T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 15 \\ 1 & 0 & -17 \\ 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}.$$ ✓

(5) Наћи e^A ако је
$$\text{а) } A = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}; \quad \text{б) } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \text{в) } A = \begin{bmatrix} 1+i & 0 \\ 2 & 1+i \end{bmatrix}; \quad \text{г) } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$ ✓

(6) Наћи пример матрица A и B за које не важи $e^{A+B} = e^A e^B$. ✓

(7) Доказати да не постоји реална матрица A за коју је $e^A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$. ✓

(8) Ако је потпростор $V \subset \mathbb{R}^n$ инваријантан за T, $\mathbf{x}(t)$ решење једначине $\dot{\mathbf{x}} = T\mathbf{x}$ и $\mathbf{x}(0) \in V$, онда је $\mathbf{x}(t) \in V$ за свако t. Доказати. ✓

(9) Нека матрица A има реалну сопствену вредност $\lambda < 0$. Доказати да једначина $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ има бар једно нетривијално решење са особином $\lim\limits_{t\to\infty} \|\mathbf{x}(t)\| = 0$. ✓

(10) Нека је A инвертибилна $n \times n$ матрица и n непарно. Доказати да једначина $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ има бар једно непериодично решење. ✓

(11) Када линеарни систем $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ у непарнодимензионом простору ($A : \mathbb{R}^{2k+1} \to \mathbb{R}^{2k+1}$) може имати периодично решење ($\varphi^T\mathbf{x} = \mathbf{x}$)? ✓

(12) а) Ако је $\mathbf{v}$ сопствени вектор матрице A који одговара сопственој вредности λ, онда је $\mathbf{v}$ и сопствени вектор матрице e^A који одговара сопственој вредности e^λ. Доказати.
б) Нека је A негенерисана 2×2 матрица. Доказати да су једине инваријантне праве линије планарног линеарног система $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, праве $ax + by = 0$, где је $\mathbf{v} = (-b, a)^\top$ сопствени вектор матрице A.
в) Да ли може да постоји инваријантна права линија система која не пролази кроз координатни почетак, ако се услов недегенерисаности матрице A изостави? ✓

ГЛАВА 3

Теореме о егзистенцији, јединствености, зависности од почетних услова, продужењу решења, исправљивости векторских поља, једнопараметарској фамилији...

1. Пикарова теорема о егзистенцији и јединствености решења

Нека је $I \subseteq \mathbb{R}$ отворен интервал. Кажемо да је векторско поље $F : \mathcal{U} \times I \to \mathbb{R}^k$ локално униформно (по $t \in I$) Липшицово[1] по $\mathbf{x}$ ако свака тачка из $\mathcal{U}$ има околину $\mathcal{B}$ тако да важи $\|F(\mathbf{x}, t) - F(\mathbf{y}, t)\| \leq L\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$, за неко $L > 0$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{B}$, $t \in I$.

Теорема 70. (Пикарова[2] теорема.) *Нека је $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^k$ отворен и векторско поље $F : \mathcal{U} \times I \to \mathbb{R}^k$ непрекидно и локално униформно (по t) Липшицово по $\mathbf{x}$. Тада за свако $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{U}$ и $t_0 \in I$ постоји $\delta > 0$ и јединствено решење*

$$\mathbf{x} : [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \to \mathcal{U}$$

Кошијевог проблема

$$\mathbf{x}'(t) = F(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0. \tag{51}$$

Доказ. Нека је r такво да је затворена кугла са центром у $\mathbf{x}_0$ полупречника r

$$B[\mathbf{x}_0; r] \subset \mathcal{U}$$

и F униформно Липшицово на $B[\mathbf{x}_0; r]$ са Липшицовом константом L. Нека је $a > 0$ такво да је $[t_0 - a, t_0 + a] \subset I$ и

$$M := \max_{B[\mathbf{x}_0;r] \times [t_0 - a, t_0 + a]} \|F\|$$

и $\delta < \min\left\{\frac{r}{M}, \frac{1}{L}, a\right\}$.

Дефинишимо индуктивно низ функција $\mathbf{x}_n : [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \to B[\mathbf{x}_0, r]$:

$$\mathbf{x}_0(t) \equiv \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x}_{n+1}(t) := \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t} F(\mathbf{x}_n(s), s)ds,$$

који ће нам у лимесу дати јединствено решење. Индукцијом се лако закључује да је свако од пресликавања $\mathbf{x}_n$ непрекидно.

Поделићемо остатак доказа на неколико корака.

I: Низ је добро дефинисан. Докажимо (индукцијом по n) да је $\mathbf{x}_n(t) \in B[\mathbf{x}_0; r]$ за свако $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, $n \in \mathbb{N}$ (одавде следи да је дефиниција добра, јер је F дефинисано на $\mathcal{U} \times I$, а $B[\mathbf{x}_0; r] \subset \mathcal{U}$). За $n = 0$ ово је очигледно тачно. Ако $\mathbf{x}_n(t) \in B[\mathbf{x}_0; r]$, онда је $\|F(\mathbf{x}_n(t), t)\| \leq M$, за $t \in [t_0 - a, t_0 + a]$, па имамо

$$\|\mathbf{x}_{n+1}(t) - \mathbf{x}_0\| = \left\|\int_{t_0}^{t} F(\mathbf{x}_n(s), s)ds\right\| \leq \int_{t_0}^{t} \|F(\mathbf{x}_n(s), s)\|ds \leq \int_{t_0}^{t} Mdt \leq \delta M \leq r.$$

II: Низ $\mathbf{x}_n(t)$ је равномерно Кошијев. Нека је

$$c = \max_{[t_0 - \delta, t_0 + \delta]} \|\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_0(t)\|.$$

[1] Rudolf Lipschitz (1832–1903), немачки математичар.

[2] Émile Picard (1856–1941), француски математичар.

Индукцијом доказујемо да је
$$\|\mathbf{x}_{n+1}(t)-\mathbf{x}_n(t)\| \le c(L\delta)^n. \tag{52}$$
За $n=0$ ово је тачно због избора константе c, ако претпоставимо да (52) важи, имамо:
$$\|\mathbf{x}_{n+2}(t)-\mathbf{x}_{n+1}(t)\| = \left\|\int_{t_0}^t (F(\mathbf{x}_{n+1}(s),s)-F(\mathbf{x}_n(s),s))\,ds\right\| \le \int_{t_0}^t \|F(\mathbf{x}_{n+1}(s),s)-F(\mathbf{x}_n(s),s)\|\,ds \le$$
$$\int_{t_0}^t L\,\|\mathbf{x}_{n+1}(s)-\mathbf{x}_n(s)\|\,ds \le \left|\int_{t_0}^t Lc(L\delta)^n ds\right| \le Lc(L\delta)^n\delta = c(L\delta)^{n+1}.$$
Низ $\mathbf{x}_n(t)$ је равномерно Кошијев на $[t_0-\delta, t_0+\delta]$. Заиста, како је $L\delta<1$, то $(L\delta)^{n_0}$ може бити произвољно мало за довољно велико n_0. Нека је $m>n\ge n_0$. Имамо:
$$\|\mathbf{x}_m(t)-\mathbf{x}_n(t)\| \le \|\mathbf{x}_n(t)-\mathbf{x}_{n-1}(t)\| + \|\mathbf{x}_{n-1}(t)-\mathbf{x}_{n-2}(t)\| + \ldots + \|\mathbf{x}_{n+1}(t)-\mathbf{x}_n(t)\| \le$$
$$c[(L\delta)^{m-1}+(L\delta)^{m-2}+\ldots+(L\delta)^n] = c[(L\delta)^n(L\delta)^{m-n-1}+(L\delta)^{m-n-2}+\ldots+L\delta+1)] \le$$
$$c(L\delta)^n\frac{1}{1-L\delta} \le \frac{c}{1-L\delta}(L\delta)^{n_0}.$$
Како је $\mathbb{R}^k$ комплетан, низ $\mathbf{x}_n(t)$ равномерно конвергира ка $\mathbf{x}(t)$ које је непрекидно на $[t_0-\delta, t_0+\delta]$.

III: $\mathbf{x}(t)$ је решење. Из једнакости:
$$\mathbf{x}_{n+1}(t) := \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t F(\mathbf{x}_n(s),s)ds,$$
равномерне конвергенције низа $\mathbf{x}_n$ и униформне Липшицовости поља F, добијамо, када пустимо лимес кад $n\to\infty$:
$$\mathbf{x}(t) := \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t F(\mathbf{x}(s),s)ds.$$
Одавде закључујемо да је $\mathbf{x}' = F(\mathbf{x},t)$ и $\mathbf{x}(t_0)=\mathbf{x}_0$.

IV: Решење је јединствено. Пре свега, доказаћемо да, ако је $\mathbf{y}(t)$ решење Кошијевог задатка (51) које је дефинисано на $[t_0-\delta, t_0+\delta]$, такво да је $\mathbf{y}(t)\in B[\mathbf{x}_0,r]$ за свако $t\in[t_0-\delta,t_0+\delta]$, тада мора бити $\mathbf{x}\equiv\mathbf{y}$ на $[t_0-\delta, t_0+\delta]$.

Означимо са m максимум норме разлике $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$:
$$m := \max_{[t_0-\delta,t_0+\delta]} \|\mathbf{x}(t)-\mathbf{y}(t)\| > 0.$$
Имамо
$$\|\mathbf{x}(t)-\mathbf{y}(t)\| = \left\|\int_{t_0}^t (\mathbf{x}'(s)-\mathbf{y}'(s))ds\right\| \le \int_{t_0}^t \|\mathbf{x}'(s)-\mathbf{y}'(s)\|ds$$
$$= \int_{t_0}^t \|F(\mathbf{x}(s),s)-F(\mathbf{y}(s),s)\|ds \le \int_{t_0}^t L\|\mathbf{x}(s)-\mathbf{y}(s)\|ds \le \delta Lm,$$
па је
$$m \le \delta Lm < m,$$
што је немогуће.[3]

Овиме ипак нисмо завршили доказ, јер није очигледно да је свако решење задатка (51) дефинисано на $[t_0-\delta, t_0+\delta]$ садржано у кугли $B[\mathbf{x}_0,r]$.[4] Нека је зато $\mathbf{y}$ решење дефинисано на $[t_0-\delta, t_0+\delta]$. Претпоставимо да не важи $\mathbf{y}(t)\in B[\mathbf{x}_0,r]$ за све t и (без умањења општости), да то не важи за неко $t\in(t_0,t_0+\delta)$. Нека је $t_1\in(t_0,t_0+\delta)$ прво време за које $\mathbf{y}$ излази из $B[\mathbf{x}_0,r]$, тј.
$$t_1 := \sup\{t\in[t_0,t_0+\delta] \mid \mathbf{y}(s)\in B[\mathbf{x}_0,r],\ \text{за свако } s\in[t_0,t]\}.$$

[3] У доказу Пикарове теореме до овог места читалац може препознати доказ Банаховог става о фиксној тачки.

[4] На ову финесу указала ми је Јелена Илић.

Из већ доказаног знамо да је $\mathbf{x}(t) = \mathbf{y}(t)$, за свако $t \in [t_0, t_1]$, па је и:

$$\mathbf{y}(t_1) = \mathbf{x}(t_1) \in \partial B[\mathbf{x}_0, r].$$

Можемо да поставимо нови Кошијев задатак:

$$\mathbf{x}'(t) = F(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}_1.$$

На основу већ доказаног знамо да решење овог задатка постоји, дефинисано је на неком интервалу $[t_1 - \delta_1, t_1 + \delta_1]$, и да постоји $r_1 > 0$ такво да се сва решења која припадају кугли $B[\mathbf{x}_1, r_1]$ поклапају. За довољно мало ε и $t \in (t_1, t_1 + \varepsilon)$, $\mathbf{x}(t)$ и $\mathbf{y}(t)$ припадају кугли $B[\mathbf{x}_1, r_1]$, па је $\mathbf{x}(t) = \mathbf{y}(t)$, за $t \in (t_1, t_1 + \varepsilon)$. Међутим, за овакве t важи $\mathbf{x}(t) \in B[\mathbf{x}_0, r]$, дакле то важи и за $\mathbf{y}$. Ово је контрадикција са дефиницијом броја t_1. $\square$

Пример 71. Решимо једначину $x' = ax$ (у $\mathbb{R}$) са почетним условом $x(0) = x_0$, имитирајући доказ претходне теореме. Формирајмо низ $x_n(t)$:

$$\begin{aligned}
&x_0(t) = x_0 \\
&x_1(t) = x_0 + \int_0^t a x_0(s) ds = x_0 + x_0 at \\
&x_2(t) = x_0 + \int_0^t a x_1(s) ds = x_0 + \int_0^t a(x_0 + x_0 as) ds = x_0 + x_0 at + x_0 \frac{(at)^2}{2} \\
&x_3(t) = x_0 + \int_0^t a x_2(s) ds = x_0 + \int_0^t a \left(x_0 + x_0 as + x_0 \frac{(as)^2}{2} \right) ds = x_0 + x_0 at + x_0 \frac{(at)^2}{2} + x_0 \frac{(at)^3}{6} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Индукцијом по n се лако доказује да је

$$x_n(t) = x_0 + x_0 at + x_0 \frac{(at)^2}{2} + \ldots + x_0 \frac{(at)^n}{n!},$$

па је решење задатка

$$x(t) = \lim_{n \to \infty} x_n(t) = x_0 e^{at}.$$

✓

Задатак 72. Формирати низ итерација из доказа Пикарове теореме за једначину

$$x' = x + 2, \quad x(0) = 2$$

и решити је на овај начин. ✓

Напомена 73. Ако је аутономно поље F класе C^1, онда је оно локално Липшицово (зашто?). Ако је (неаутономно) поље F класе C^1, онда је оно локално по $\mathbf{x}$ Липшицово равномерно по t на сваком сегменту. $\diamond$

Напомена 74. Из Пикарове теореме следи да решење не само да је јединствено на $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, већ где год да је дефинисано. Заиста, претпоставимо да је $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$ два различита решења дефинисана на интервалима I_1 и I_2 редом, $t_0 \in I_1 \cap I_2$. Нека је

$$t_1 := \inf\{t \in I_1 \cap I_2 \mid t > t_0, \mathbf{x}_1(t) \neq \mathbf{x}_2(t)\}.$$

Како је $\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{x}_2(t)$ на $(t_0 - \delta, t_1)$ и $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$ су непрекидне, то је $\mathbf{x}_1(t_1) = \mathbf{x}_2(t_1) =: \mathbf{x}_1$. Али ако посматрамо Кошијев задатак:

$$\mathbf{x}' = F(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}_1,$$

добићемо да су и $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$ решења, па из Пикарове теореме следи да се она поклапају на $(t_1 - \delta_1, t_1 + \delta_1)$, што је у контрадикцији са избором тачке t_1. $\diamond$

Напомена 75. Највећи интервал на ком је дефинисано решење диференцијалне једначине се зове *максимални интервал дефинисаности.* Из Напомене 74 следи да је (ако F задовољава услове Пикарове теореме) решење јединствено на максималном интервалу дефинисаности. ⋄

Задатак 76. Наћи максималне интервале дефинисаности:

(а) линеарног система са константним коефицијентима $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$;
(б) једначине $x'(t) = 1 + x^2$, $x(0) = x_0$.

✓

Задатак 77. Да ли максимални интервал дефинисаности може да не буде отворен? ✓

Важи и следеће уопштење Пикарове теореме који нам каже да постоји δ тако да решење постоји и јединствено је на $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ са било којим почетним условом $\mathbf{x}_1$ из околине $\mathbf{x}_0$ (приметимо да је δ у доказу Пикарове теореме зависило од $\mathbf{x}_0$.

Теорема 78. *Нека су испуњени услови Пикарове теореме. Тада за свако $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{U}$ постоји кугла B са центром у $\mathbf{x}_0$ и $\delta_0 > 0$ такво да једначина*

$$\mathbf{x}'(t) = F(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{y}_0$$

има јединствено решење

$$\mathbf{y} : [t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0] \to \mathcal{U}$$

за свако $\mathbf{y}_0 \in B$.

Доказ.[5] Нека су $r > 0$ такво да је $B[\mathbf{x}_0, r] \subset \mathcal{U}$ и $\delta > 0$ као у доказу Пикарове теореме, и $\mathbf{x}(t)$ јединствено решење једначине $\mathbf{x}' = F(\mathbf{x}, t)$ са почетним условом $\mathbf{x}_0$ дефинисано на $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$.

Означимо са

$$M := \max\{\|F(t, \mathbf{x})\| \mid t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta],\, \mathbf{x} \in B[\mathbf{x}_0, r]\}$$

и $\delta_0 := \min\{\delta, r/2M\}$.

Тврдимо да $B = B[\mathbf{x}_0, r/2]$ и δ_0 задовољавају услове теореме.

Нека је $\mathbf{y}_0 \in B$. Ако дефинишено низ пресликавања $\mathbf{y}_n(t)$ рекурентно:

$$\mathbf{y}_0(t) \equiv \mathbf{y}_0, \quad \mathbf{y}_{n+1}(t) := \mathbf{y}_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, \mathbf{y}_n(s)) ds,$$

тврдимо

$$n \in \mathbb{N},\, t \in [t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0] \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y}_n(t) \in B[\mathbf{x}_0, r]. \tag{53}$$

Ако ово важи онда, на исти начин као у доказу Пикарове теореме, добијамо да је униформни лимес $\mathbf{y}(t)$ низа $\mathbf{y}_n(t)$ тражено решење дефинисано на $[t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0]$.

Доказаћемо (53) индукцијом по n. За $n = 0$ (53) очигледно важи. Ако претпоставимо да важи за неко $n \in \mathbb{N}$, имамо:

$$\|\mathbf{y}_{n+1}(t) - \mathbf{y}_0\| = \left\| \int_{t_0}^{t} F(s, \mathbf{y}_n(s))\, ds \right\| \le \int_{t_0}^{t} \|F(s, \mathbf{y}_n(s))\| ds \le M\delta_0 = \frac{r}{2},$$

па је

$$\|\mathbf{y}_{n+1}(t) - \mathbf{x}_0\| \le \|\mathbf{y}_{n+1}(t) - \mathbf{y}_0\| + \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0\| \le \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r.$$

□

Напомена 79. Приметимо да смо, у доказу Теореме 78 доказали да постоје околине $\mathcal{U}_1$ и $\mathcal{U}_2 \subseteq \mathcal{U}_1$ тачке $\mathbf{x}_0$ такве да важи

$$\mathbf{y}_0 \in \mathcal{U}_2 \;\Rightarrow\; \mathbf{y}(t) \in \mathcal{U}_1,$$

за свако $t \in (t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0)$ (нпр. $\mathcal{U}_1 := B(\mathbf{x}_0, r)$, $\mathcal{U}_2 := B(\mathbf{x}_0, r/2)$). ⋄

[5] На овај (елементарнији) доказ скренула ми је пажњу Јелена Илић (видети и Пример 84).

2. Продужење решења

Пример 80. Једначина $x' = 1 + x^2$ са почетним условом $x(0) = x_0$ не може да се продужи на интервал дужине веће од π, иако је векторско поље $F(x,t) = 1 + x^2$ глатко на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Заиста, њено решење је $x(t) = \operatorname{tg}(t + \operatorname{arctg} x_0)$ и дефинисано је на $\left(-\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x_0, \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x_0\right)$. ✓

Теорема 81. *Нека је векторско поље $F : \mathcal{U} \times I \to \mathbb{R}^n$ као у Пикаровој теореми 70 и нека је решење једначине $\mathbf{x}' = F(\mathbf{x}, t)$ дефинисано на максималном интервалу J, $\sup J < \sup I$. Ако је $K \subset \mathcal{U}$ компактан, тада постоји $t_1 \in J$ такво да $\mathbf{x}(t_1) \notin K$.*

Последица 82. *Под претпоставкама из Теореме 81, ако је решење $\mathbf{x}(t)$ садржано у неком компакту $K \subset \mathcal{U}$, тада се оно може продужити на цео I.* □

Доказ Теореме 81. Претпоставимо супротно: нека је $J \subsetneq I$ максимални интервал дефинисаности за $\mathbf{x}$ и K компактан скуп такав да је $\mathbf{x}(J) \subseteq K$. Без умањења општости, претпоставимо да је $\beta := \sup J < \infty$ и нека су a и b такви да је $\beta \in [a,b] \subset I$. Како је $K \times [a,b]$ компактан, то постоји M такво да је $\|F(\mathbf{x},t)\| \le M$ за $(\mathbf{x},t) \in K \times [a,b]$. Имамо

$$\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(s)\| = \left\| \int_s^t \mathbf{x}'(u) du \right\| \le \int_s^t \|F(\mathbf{x}(u), u)\| du \le M|t - s|,$$

односно $\mathbf{x}$ задовољава Кошијев услов на $[a,b]$ па постоји

$$\lim_{t \to \beta^-} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_1 \in K.$$

Приметимо и да је

$$\mathbf{x}'(\beta^-) = \lim_{t \to \beta^-} \mathbf{x}'(t) = \lim_{t \to \beta^-} F(\mathbf{x}(t), t) = F(\mathbf{x}_1, \beta). \tag{54}$$

Нека је $\mathbf{y}(t)$ јединствено решење једначине

$$\mathbf{x}'(t) = F(\mathbf{x}(t), t), \quad \mathbf{x}(\beta) = \mathbf{x}_1, \tag{55}$$

дефинисано на на $(\beta - \delta, \beta + \delta)$ које постоји на основу Пикарове теореме. Из (54) следи да је и

$$\mathbf{y}_1(t) := \begin{cases} \mathbf{x}(t), & t \in (\beta - \delta, \beta], \\ \mathbf{y}(t), & t \in [\beta, \beta + \delta) \end{cases}$$

решење једначине (55). То значи да се $\mathbf{y}$ и $\mathbf{x}$ поклапају на $(\beta - \delta, \beta]$, односно да $\mathbf{x}$ може да се продужи на $[\beta, \beta + \delta)$. Овде долазимо до контрадикције са претпоставком да је J максимални интервал дефинисаности решења $\mathbf{x}$.

На исти начин доказујемо и за продужавање у левом крају. □

У Примеру 80 видели смо да је у крају максималног интервала дефинисаности решења x важило $|x(t)| \to +\infty$. Ово је заправо правило, о чему говори следеће тврђење.

Тврђење 83. Нека је скуп $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ отворен и неограничен, векторско поље $F : \mathcal{U} \times I \to \mathbb{R}^n$ као у Пикаровој теореми 70 и нека је $\mathbf{x}(t)$ решење дефинисано на интервалу (α, β) које не може да се продужи у $t = \beta < +\infty$, $\beta \in I$. Тада је

$$\lim_{t \to \beta^-} \|\mathbf{x}(t)\| = +\infty. \tag{56}$$

Доказ. Из Теореме 81 следи да постоји низ $t_n < \beta$, $t_n \to \beta$ такав да $\|\mathbf{x}(t_n)\| \to +\infty$. Ако претпоставимо да не важи (56), закључујемо да постоји низ $s_n < \beta$, $s_n \to \beta$, такав да је низ $\mathbf{x}(s_n)$ ограничен. Одатле закључујемо да постоји и подниз низа s_n, означићемо га исто са s_n такав да низ $\mathbf{x}(s_n) \to \mathbf{x}_1$. Посматрајмо прстен центриран у $\mathbf{x}_1$:

$$A := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid r \le \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1\| \le R\}$$

(ако треба, смањимо r и R тако да је цео A садржан у $\mathcal{U}$). Како

$$\|\mathbf{x}(t_n)\| \to \infty, \quad \mathbf{x}(s_n) \to \mathbf{x}_1$$

то крива $\mathbf{x}(t)$, $t\in[0,\beta)$ бесконачно много пута „уђе и изађе” из прстена A, па је дужина оног дела криве који је у A, $l(\{\mathbf{x}(t)\}\cap A)_{t\in[0,\beta)}$, једнака бесконачно. С друге стране, за

$$M := \max_{A\times[0,\beta]} \|F\|,$$

имамо

$$l(\{\mathbf{x}(t)\}\cap A)_{t\in[0,\beta)} \le M(\beta-0) < +\infty.$$

□

Пример 84. Из Теореме о продужењу решења може се извести још један доказ Теореме 78. Нека су $B=B[\mathbf{x}_0,r/2]$ и δ_0 као у доказу Теореме 78.

Нека је $\mathbf{y}_0\in B=B[\mathbf{x}_0,r/2]$ и нека је $\mathbf{y}(t)$ јединствено решење једначине

$$\mathbf{x}'(t)=F(t,\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(t)=\mathbf{y}_0.$$

Нека је J максимални интервал дефинисаности решења $\mathbf{y}$ и $\beta=\sup J$. Хоћемо да докажемо да је $\beta\ge t_0+\delta_0$. Претпоставимо супротно, да је $\beta<t_0+\delta_0$.

Подсетимо се конструкције решења $\mathbf{y}(t)$: то је био униформни лимес пресликавања $\mathbf{y}_n(t)$ дефинисаних рекурентно:

$$\mathbf{y}_0(t)\equiv\mathbf{y}_0, \quad \mathbf{y}_{n+1}(t):=\mathbf{y}_0+\int_{t_0}^{t}F(s,\mathbf{y}_n(s))ds.$$

Како $\mathbf{y}_n(t)\in B[\mathbf{x}_0,r]$, то $\mathbf{y}(t)\in B[\mathbf{x}_0,r]$, за $t\in[t_0,\beta)$. Пошто је $\mathbf{y}(t)$ садржано у компакту, из Теореме 81 изводимо контрадикцију са претпоставком $\beta<t_0+\delta_0$. ✓

Пример 85. Решење једначине $x'=x^2$ са почетним условом $x(0)=x_0\neq 0$ је $x(t)=\frac{x_0}{1-x_0t}$ које је дефинисано на интервалу $(-\infty,\frac{1}{x_0})$ за $x_0>0$, односно на интервалу $(\frac{1}{x_0},+\infty)$ за $x_0<0$. У оба случаја, ово је максимални интервал на ком решење може да се продужи. За $x_0=0$, решење $x(t)\equiv 0$ је дефинисано на целом $\mathbb{R}$.

Нека је $x_0\neq 0$. Изаберимо $\delta_0<\min\{1/4,1/2|x_0|\}$ и $\varepsilon=1$, тада је за свако $y_0\in B:=(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)$, решење једначине

$$x'=x^2, \quad x(0)=y_0$$

дефинисано на $(-\delta_0,\delta_0)$. Заиста

$$|1-y_0t|=|1-x_0t+(x_0-y_0)t|\ge|1-x_0t|-|(x_0-y_0)t|\ge 1-|x_0t|-|x_0-y_0||t|\ge 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4},$$

па је решење

$$y(t)=\frac{y_0}{1-y_0t}$$

добро дефинисано на $(-\delta_0,\delta_0)$.

Одредити неке B и δ_0 из Теореме 78 за $x_0=0$. ✓

3. Примена на линеарни неаутономни систем

Теорема 86. *Нека је матрица $A(t)=[a_{ij}(t)]_{i,j=1}^n$ има за елементе непрекидне функције $a_{ij}(t)$ дефинисане на неком интервалу I који садржи t_0. Тада неаутономни систем*

$$\mathbf{x}'(t)=A(t)\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(t_0)=\mathbf{x}_0 \tag{57}$$

има јединствено решење дефинисано на I.

Доказ. Егзистенција и јединственост решења су последица Пикарове теореме (зашто су испуњени услови?). Што се тиче максималног интервала дефинисаности, претпоставимо, за почетак, да је $I=[a,b]$ ограничени интервал. Показаћемо да је решење једначине (57) ограничено, па ће из Последице 82 следити да је дефинисано на читавом I. Нека је

$$M:=\max_{t\in I}\|A(t)\|.$$

Како је пресликавање

$$t \to \|A(t)\|$$

непрекидно, број M је коначан. За доказ ћемо користити следећу лему, која даје једну априорну оцену решења.

Лема 87. *Ако је* $\|\mathbf{x}'\| \le M\|\mathbf{x}\|$, *и* $\mathbf{x}(t) \neq \mathbf{0}$, *онда је* $\|\mathbf{x}(t)\| \le e^{M|t-t_0|}\|\mathbf{x}_0\|$.

Вратимо се на доказ Теореме 86. Пре свега, приметимо да, ако $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{x}(t) \neq \mathbf{0}$ ни за једно t.[6] Ако је $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}$, теорема очигледно важи. Како је

$$\|\mathbf{x}'\| = \|A(t)\mathbf{x}\| \le M\|\mathbf{x}\|,$$

то из Леме 87 следи да је $\|\mathbf{x}(t)\| \le e^{M|t-t_0|}\|\mathbf{x}_0\|$, па је $\mathbf{x}(t) \in K$, где је K компакт

$$K := \left\{\|\mathbf{x}\| \le \|\mathbf{x}_0\| e^{Mc}\right\},$$

за неку позитивну константу c која зависи од сегмента $[a, b]$. Зато из Теореме 81 следи да $\mathbf{x}$ може да се продужи на $[a, b]$.

Ако интервал I није ограничен, применимо доказани део на сваки ограничени интервал садржан у I. $\square$

Доказ Леме 87. Дефинишимо

$$f(t) := \ln \|\mathbf{x}(t)\|^2.$$

Извод функције f је

$$f'(t) = \frac{2\langle \mathbf{x}'(t), \mathbf{x}(t)\rangle}{\|\mathbf{x}(t)\|^2}$$

па из Коши-Шварцове неједнакости имамо:

$$|f'(t)| \le \frac{|2 \cdot \|\mathbf{x}'(t)\| \cdot \|\mathbf{x}(t)\||}{\|\mathbf{x}(t)\|^2} \le 2M.$$

Одавде имамо

$$\ln \|\mathbf{x}(t)\|^2 = f(t) = f(t_0) + \int_{t_0}^{t} f'(s)ds \le f(t_0) + 2M|t-t_0| = \ln \|\mathbf{x}_0\|^2 + 2M|t-t_0|,$$

па је

$$\|\mathbf{x}(t)\|^2 \le \|\mathbf{x}_0\|^2 e^{2M|t-t_0|},$$

односно

$$\|\mathbf{x}(t)\| \le \|\mathbf{x}_0\| e^{M|t-t_0|}.$$

$\square$

Теорема 88. *Простор решења $\mathcal{R}$ једначине (57) је векторски простор димензије n.*

Доказ. Већ знамо да је $\mathcal{R}$ векторски простор. Докажимо да је он изоморфан са $\mathbb{R}^n$. За $t_0 \in I$, пресликавање

$$L_{t_0} : \mathcal{R} \to \mathbb{R}^n, \quad L_{t_0} : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}(t_0) \tag{58}$$

је изоморфизам. Заиста, линеарност је очигледна, L_{t_0} је НА на основу егзистенције решења кроз свако $\mathbf{x}_0$, а L_{t_0} је 1-1 на основу јединствености решења. $\square$

Напомена 89. Нека је пресликавање $\phi_{t_0}^t : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \to \mathcal{U}$ дефинисано са

$$\phi_{t_0}^t : \mathbf{x}_0 \mapsto \mathbf{x}(t)$$

где је $\mathbf{x}(t)$ јединствено решење диференцијалне једначине $\mathbf{x}' = F(\mathbf{x}(t), t)$ са почетним условом $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ (видети и дефиницију тока векторског поља F на страни 57). У случају кад је F

[6]Заиста, кроз тачку $\mathbf{0} = \mathbf{x}(t_1)$ пролази само једна трајекторија система са почетним условом $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{0}$, а то је $\mathbf{x} \equiv \mathbf{0}$.

линеарно по $\mathbf{x}$, тј. ако се ради о једначини (63), приметимо да је пресликавање линеарно (по $\mathbf{x}_0$). Заиста, нека су $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{y}(t)$ и $\mathbf{z}(t)$ решења система $\eta'(t) = A(t)\eta(t)$ са почетним условима

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0, \quad \mathbf{z}(t_0) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{y}_0.$$

Из јединствености решења следи да је $\mathbf{z}(t) = \mathbf{x}(t) + \mathbf{y}(t)$. Али

$$\mathbf{x}(t) = \phi_{t_0}^t(\mathbf{x}_0), \quad \mathbf{y}(t) = \phi_{t_0}^t(\mathbf{y}_0), \quad \mathbf{z}(t) = \phi_{t_0}^t(\mathbf{x}_0 + \mathbf{y}_0),$$

па је

$$\phi_{t_0}^t(\mathbf{x}_0 + \mathbf{y}_0) = \phi_{t_0}^t(\mathbf{x}_0) + \phi_{t_0}^t(\mathbf{y}_0).$$

На исти начин се доказује и да је $\phi_{t_0}^t(\lambda\mathbf{x}_0) = \lambda\phi_{t_0}^t(\mathbf{x}_0)$. ◇

3.1. Вронскијан система и Лиувилове теореме.

Дефиниција 90. *Вронскијан* или *детерминанта Вронског*[7] система n векторских функција $\mathbf{x}_j : I \to \mathbb{R}^n$, $j = 1, \ldots, n$ је детерминанта

$$W(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)(t) := \det \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{11}(t) & \cdots & \mathbf{x}_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{x}_{n1}(t) & \cdots & \mathbf{x}_{nn}(t) \end{bmatrix},$$

где је

$$\mathbf{x}_j(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{1j}(t) \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{nj}(t) \end{bmatrix}.$$

◇

Теорема 91. *Нека су $\mathbf{x}_1(t), \ldots, \mathbf{x}_n(t)$ решења неаутономног линеарног система*

$$\mathbf{x}'(t) = A(t)\mathbf{x}(t)$$

дефинисана на интервалу I. Тада су следећи услови еквивалентни.

(1) $\mathbf{x}_1(t), \ldots, \mathbf{x}_n(t)$ *чине фундаментални скуп решења.*
(2) $W(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)(t) \neq 0$ *за свако $t \in I$.*
(3) $W(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)(t_0) \neq 0$ *за неко $t_0 \in I$.*

Доказ. Еквиваленција (1) ⇔ (3): како је пресликавање L_{t_0} дефинисано у (58) изоморфизам, оно слика базу простора $\mathcal{R}$ у базу простора $\mathbb{R}^n$, па $\mathbf{x}_1(t), \ldots, \mathbf{x}_n(t)$ чине фундаментални скуп решења ако и само је $\mathbf{x}_1(t_0), \ldots, \mathbf{x}_n(t_0)$ база простора $\mathbb{R}^n$, тј. ако и само ако је $W(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)(t_0) \neq 0$.

Импликација (2) ⇒ (3) је очигледна.

Да бисмо доказали импликацију (3) ⇒ (2), претпоставимо супротно, тј. нека је $W(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)(t_0) \neq 0$ и $W(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)(t_1) = 0$ за неко $t_1 \in I$. То значи да је

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j \mathbf{x}_j(t_1) = \mathbf{0},$$

за неке $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Али, ако посматрамо Кошијев задатак

$$\mathbf{x}'(t) = A(t)\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(t_1) = \mathbf{0},$$

имамо два решења

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{j=1}^n \lambda_j \mathbf{x}_j(t) \quad \text{и} \quad \mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0},$$

[7] Jósef Maria Hoene-Wroński (1776–1853), пољски филозоф, математичар, физичар, проналазач, адвокат и економиста.

па из Пикарове теореме следи да су она једнака, односно да је

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mathbf{x}_j(t) \equiv \mathbf{0}, \quad t \in I,$$

што је у контрадикцији са претпоставком $W(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)(t_0) \neq 0$. $\square$

Теорема 92. (Лиувилова теорема.) *Вроскијан*

$$W(t) := W(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)(t)$$

скупа решења $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$ *једначине* $\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x}$ *задовољава једначину*

$$W'(t) = \operatorname{tr}(A(t)) \cdot W(t).$$

Доказ. Нека је L_{t_0} пресликавање из доказа Теореме 88. За $t_0, t_1 \in I$, пресликавање

$$L_{t_0}^{t_1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad L_{t_0}^{t_1} := L_{t_1} \circ L_{t_0}^{-1}$$

је линеарни изоморфизам простора $\mathbb{R}^n$, који пресликава стање система у ком се налазило у времену t_0 у стање у ком се налазило у времену t_1 ($L_{t_0}^{t_1} : \mathbf{x}(t_0) \mapsto \mathbf{x}(t_1)$). Прецизније, пресликавање $L_{t_0}^{t_1}$ тачки $\mathbf{x}_0$ придружи $\mathbf{x}(t_1)$ где је $\mathbf{x}(t)$ јединствено решење система $\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x}$ са почетним условом $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$. Како је

$$W(t) = \det \Phi(t), \quad \Phi(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{11}(t) & \cdots & \mathbf{x}_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{x}_{n1}(t) & \cdots & \mathbf{x}_{nn}(t) \end{bmatrix},$$

и

$$\Phi(t_0 + \Delta t) = L_{t_0}^{t_0+\Delta t} \Phi(t_0)$$

(где смо са $L_{t_0}^{t_0+\Delta t}$ означили матрицу придружену пресликавању $L_{t_0}^{t_0+\Delta t}$), то је

$$W(t_0 + \Delta t) = \det \left(L_{t_0}^{t_0+\Delta t} \right) W(t_0), \tag{59}$$

циљ нам је да одредимо $\det L_{t_0}^{t_0+\Delta t}$, односно прва два члана у Тејлоровом развоју пресликавања $\Delta t \mapsto \det L_{t_0}^{t_0+\Delta t}$. Приметимо да

$$L_{t_0}^{t_0+\Delta t} : \mathbf{x}(t_0) \mapsto \mathbf{x}(t_0 + \Delta t). \tag{60}$$

Посматрајмо пресликавање

$$\Delta t \mapsto \mathbf{x}(t_0 + \Delta t)$$

и напишимо први члан његовог Тејлоровог развоја:

$$\mathbf{x}(t_0 + \Delta t) = \mathbf{x}(t_0) + \mathbf{x}'(t_0)\Delta t + o(\Delta t) = \mathbf{x}(t_0) + \Delta t A(t_0)\mathbf{x}(t_0) + o(\Delta t), \quad \Delta t \to 0.$$

Из претходне једнакости и (60) закључујемо да, за $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ важи:

$$L_{t_0}^{t_0+\Delta t}(\mathbf{v}) = \mathbf{v} + A(t_0)\mathbf{v}\Delta t + o(\Delta t), \quad \Delta t \to 0,$$

то је

$$L_{t_0}^{t_0+\Delta t} = E + \Delta t A(t_0) + o(\Delta t) = E + \Delta t[A(t_0) + o(1)], \quad \Delta t \to 0.$$

Ако применимо Лему 56 на матрицу $L_{t_0}^{t_0+\Delta t}$, имамо

$$\det \left(L_{t_0}^{t_0+\Delta t} \right) = 1 + \Delta t \operatorname{tr} A(t_0) + o(\Delta t), \quad \Delta t \to 0,$$

па је

$$\frac{W(t_0 + \Delta t) - W(t_0)}{\Delta t} \overset{(59)}{=} \frac{\det \left(L_{t_0}^{t_0+\Delta t} \right) W(t_0) - W(t_0)}{\Delta t} =$$

$$\frac{[1 + \Delta t \operatorname{tr} A(t_0) + o(\Delta t)]W(t_0) - W(t_0)}{\Delta t} = \operatorname{tr} A(t_0) \cdot W(t_0) + o(1), \quad \Delta t \to 0,$$

одакле, преласком на $\lim\limits_{\Delta t \to 0}$, добијамо тврђење. □

Задатак 93. Доказати Теорему 91 применом Теореме 92. ✓

Вронскијан система од n функција $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ се дефинише као детерминанта

$$W(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)(t) := \det \begin{bmatrix} \varphi_1(t) & \cdots & \varphi_n(t) \\ \varphi_1'(t) & \cdots & \varphi_n'(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(t) & \cdots & \varphi_n^{(n-1)}(t) \end{bmatrix}.$$

Приметимо да је ово у складу са разматрањем на страни 41. Из Теореме 92 директно следи следећа последица.

Последица 94. *Вронскијан $W(t)$ фундаменталног система решења линеарне једначине реда n:*

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x = 0$$

једнак је

$$W(t) = e^{-\int_{t_0}^{t} a_1(s)ds}\, W(t_0). \tag{61}$$

Доказ. Видети дискусију на страни 42. □

Напомена 95. Формула (61) се зове и *Абелова*[8] *формула.* Из ње можемо да изведемо формулу за сва решења линеарне једначине:

$$x''(t) + a_1(t)x'(t) + a_2(t)x(t) = 0, \tag{62}$$

ако нам је познато једно (нетривијално) решење, $x_1(t)$. Заиста, претпоставимо да је $x_2(t)$ решење једначине (62) линеарно независно са $x_1(t)$, из Абелове формуле имамо да је:

$$x_1(t)x_2'(t) - x_1'(t)x_2(t) = e^{-\int_{t_0}^{t} a_1(s)ds}\, W(t_0).$$

Ако претходну једначину поделимо за $x_1^2(t)$, добијамо:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{x_2(t)}{x_1(t)}\right) = \frac{e^{-\int_{t_0}^{t} a_1(s)ds}\, W(t_0)}{x_1^2(t)},$$

па је

$$x_2(t) = x_1(t)\left(W(t_0)\int_{t_0}^{t} \frac{e^{-\int_{t_0}^{s} a_1(u)du}}{x_1^2(s)} ds + \frac{x_2(t_0)}{x_1(t_0)}\right).$$

Дакле, ако је познато решење $x_1(t)$, решење $x_2(t)$ тражимо у облику:

$$x_2(t) = x_1(t)\left(c_1\int_{t_0}^{t} \frac{e^{-\int_{t_0}^{s} a_1(u)du}}{x_1^2(s)} ds + c_2\right).$$

◇

[8] Niels Henrik Abel (1802–1829), норвешки математичар.

4. Непрекидна зависност од почетног услова

У наставку ћемо посматрати пресликавање $\phi_{t_0}^t$ дефинисано са

$$\phi_{t_0}^t : \mathbf{x}_0 \mapsto \mathbf{x}(t)$$

где је $\mathbf{x}(t)$ јединствено решење диференцијалне једначине $\mathbf{x}' = F(\mathbf{x}(t), t)$ са почетним условима $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$. Пошто за $t = t_0$ пресликавање $\phi_{t_0}^{t_0}$ не помера тачку $\mathbf{x}_0$, пресликавање $\phi_{t_0}^t$ је решење Кошијевног задатка

$$\frac{d\phi_{t_0}^t}{dt}(\mathbf{x}) = F(\phi_{t_0}^t(\mathbf{x}), t), \quad \phi_{t_0}^{t_0} = \mathrm{Id}.$$

Овако дефинисано пресликавање називамо и *током векторског поља* F.

Теорема 96. *Нека је I отворен интервал у $\mathbb{R}$ и $t_0 \in I$. Нека је векторско поље $F : \mathcal{U} \times I \to \mathbb{R}^n$ равномерно Липшицово са Липшицовом константом L*[9] *и нека су $\mathbf{x}(t)$ и $\mathbf{y}(t)$ решења једначине*

$$\mathbf{x}' = F(\mathbf{x}(t), t) \tag{63}$$

са почетним условима $\mathbf{x}_0$ и $\mathbf{y}_0$, таква да $\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t) \in \mathcal{U}$, за свако $t \in I$. Тада важи

$$\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)\| \le \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0\| e^{L|t-t_0|},$$

за свако $t \in I$.

Последица 97. Нека је F векторско поље као у претходној теореми. Тада је ток $\phi_{t_0}^t$ векторског поља F непрекидно пресликавање. □

За доказ Теореме 96 нам је потребно следеће тврђење, познато као Гронвалова[10] неједнакост.

Лема 98. (Гронвалова неједнакост.) *Нека је $u : [t_0, a] \to \mathbb{R}$ непрекидна и ненегативна функција таква да постоје константе $c \ge 0$ и $L \ge 0$ за које важи*

$$u(t) \le c + L \int_{t_0}^t u(s) ds,$$

за $t \in [t_0, a]$. Тада важи

$$u(t) \le c e^{L(t-t_0)},$$

за $t \in [t_0, a]$.

Доказ. Претпоставимо да је $c > 0$. Тада је

$$U(t) := c + L \int_{t_0}^t u(s) ds > 0.$$

Како је $U'(t) = Lu(t)$ и $U'(t) \le LU(t)$, то је

$$\frac{U'(t)}{U(t)} \le L,$$

па је

$$\int_{t_0}^t \frac{U'(s)}{U(s)} ds \le \int_{t_0}^t L ds,$$

тј.

$$\ln U(t) \le \ln U(t_0) + L(t - t_0) = \ln c + L(t - t_0).$$

Одавде добијамо

$$U(t) \le c e^{L(t-t_0)},$$

па је

$$u(t) \le U(t) \le c e^{L(t-t_0)}.$$

---

[9] Тј. постоји L такво да је $\|F(\mathbf{x}, t) - F(\mathbf{y}, t)\| \le L\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ за свако $t \in I$.

[10] Thomas Hakon Grönwall (1877–1932), шведски математичар.

Ако је $c = 0$, можемо применити Гронвалову неједнакост на низ $c_n = \frac{1}{n}$ и узети $\lim_{n\to\infty} c_n$. $\square$

Доказ Теореме 96. Нека је $t \geq t_0$ и $u(t) := \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)\|$. Имамо

$$\begin{aligned}
u(t) = \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)\| &= \left\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0 + \int_{t_0}^{t} \frac{d}{ds}(\mathbf{x}(s) - \mathbf{y}(s))ds\right\| \\
&\leq \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0\| + \int_{t_0}^{t} \|F(\mathbf{x}(s), s) - F(\mathbf{y}(s), s)\|ds \leq \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0\| + \int_{t_0}^{t} L\|\mathbf{x}(s) - \mathbf{y}(s)\|ds \\
&= \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0\| + L\int_{t_0}^{t} u(s)ds,
\end{aligned}$$

па тврђење следи из Гронвалове неједнакости, за $c = \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0\|$. $\square$

Напомена 99. Гронвалова неједнакост, и самим тим, Теорема 96, доказане су за $t \geq t_0$. Гронвалова неједнакост за $t < t_0$ гласи овако:

$$\exists c, L \geq 0,\ v(t) \leq c + L\int_{t}^{t_0} v(s)ds \Rightarrow v(t) \leq ce^{-L(t-t_0)}, \tag{64}$$

а неједнакости из Теореме 96:

$$t < t_0 \Rightarrow \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)\| \leq \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0\|e^{-L(t-t_0)}.$$

Користићемо следећу импликацију (која следи из Леме 98 и претходне импликације), и коју ћемо такође звати Гронваловом неједнакошћу: ако за $t_0, t \in I$ постоје константне $c, L \geq 0$ такве да важи:

$$u(t) \leq c + L\left|\int_{t_0}^{t} u(s)ds\right| \quad \Rightarrow \quad u(t) \leq ce^{L|t-t_0|},$$

за свако $t \in I$. $\diamond$

Задатак 100. Доказати импликацију (64) имитирајући доказ Лем е 98 или на неки други начин. ✓

5. Диференцијабилност решења

Теорема 101. *Нека је векторско поље F класе C^1 на $\mathcal{U} \times I$ и $\phi_{t_0}^t$ ток векторског поља F, прецизније*

$$\phi_{t_0}^t : \mathbf{x}_0 \mapsto \mathbf{x}(t)$$

где је $\mathbf{x}(t)$ јединствено решење диференцијалне једначине (63) са почетним условима $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ дефинисано на I за свако $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{U}$. Тада је $\phi_{t_0}^t$ диференцијабилно пресликавање.

Доказ. Нека је $\phi_{t_0}^t(\mathbf{x})$ је решење једначине

$$\frac{d}{dt}\phi_{t_0}^t(\mathbf{x}) = F(\phi_{t_0}^t(\mathbf{x}), t), \quad \phi_{t_0}^{t_0} = \mathrm{Id}\,. \tag{65}$$

Нека је $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{U}$ фиксирано. Означимо са $A(t) := \frac{dF}{d\mathbf{x}}(\phi_{t_0}^t(\mathbf{x}_0), t)$. Заједно са полазном једначином (65), посматраћемо и придружену *варијациону једначину*

$$\frac{d}{dt}\varphi_{t_0}^t(\xi) = A(t)\varphi_{t_0}^t(\xi) \quad \varphi_{t_0}^{t_0} = \mathrm{Id}\,. \tag{66}$$

Хоћемо да покажемо да је

$$\varphi_{t_0}^t(\xi) = \frac{d\phi_{t_0}^t}{d\mathbf{x}}(\mathbf{x}_0)(\xi).\text{[11]} \tag{67}$$

[11] Мотивација за посматрање овакве диференцијалне једначине је следећа. Ако обе стране полазне једначине (65) диференцирамо по $\mathbf{x}$, добијамо

$$\frac{d}{d\mathbf{x}}\frac{d}{dt}\phi_{t_0}^t(\mathbf{x}) = \frac{d}{d\mathbf{x}}\left[F(\phi_{t_0}^t(\mathbf{x}), t)\right].$$

Нека су

- $t_0 \in J \subset I$ ограничен интервал и
- $\mathcal{U}_1 \subseteq \mathcal{U}$ отворена околина тачке $\mathbf{x}_0$

такви да

- F је Липшицово по $\mathbf{x}$ на $\mathcal{U}_1$ са Липшицовом константом L, униформно по $t \in J$ и
- јединствено решење једначине
$$\mathbf{x}'(t) = F(\mathbf{x}(t), t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_1$$
са почетним условом $\mathbf{x}_1 \in \mathcal{U}_2$ остаје у $\mathcal{U}_1$ за свако $t \in J$ (видети Напомену 79).

Приметимо да систем (66) линеаран, па има јединствено решење (за сваки почетни услов), дефинисано на J, због Теореме 86. Нека је $\phi^t_{t_0}(\mathbf{x}_0)$ јединствено решење система $\mathbf{x}'(t) = F(\mathbf{x}(t), t)$ са почетним условом $\mathbf{x}_0$ и $\varphi^t_{t_0}$ решење система (66). Ако је $\mathbf{x}_0 + \xi \in \mathcal{U}_2$, тада је $\phi^t_{t_0}(\mathbf{x}_0 + \xi)$ јединствено решење једначине $\mathbf{x}'(t) = F(\mathbf{x}(t), t)$ са почетним условом $\mathbf{x}_0 + \xi$ које остаје у $\mathcal{U}_1$, за $t \in I$. Израз (67) ће бити доказан ако докажемо да је

$$\lim_{\xi \to \mathbf{0}} \frac{\|\phi^t_{t_0}(\mathbf{x}_0 + \xi) - \phi^t_{t_0}(\mathbf{x}_0) - \varphi^t_{t_0}(\xi)\|}{\|\xi\|} = 0, \tag{68}$$

јер је пресликавање $\varphi^t_{t_0}$ линеарно (видети Напомену 89). Како је

$$\phi^t_{t_0}(\mathbf{x}_0 + \xi) = \mathbf{x}_0 + \xi + \int_{t_0}^t F(\phi^s_{t_0}(\mathbf{x}_0 + \xi), s)ds,$$
$$\phi^t_{t_0}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t F(\phi^s_{t_0}(\mathbf{x}_0), s)ds,$$
$$\varphi^t_{t_0}(\xi) = \xi + \int_{t_0}^t \frac{dF}{d\mathbf{x}}(\phi^s_{t_0}(\mathbf{x}_0), s)\varphi^s_{t_0}(\xi)ds,$$

то је

$$\|\phi^t_{t_0}(\mathbf{x}_0 + \xi) - \phi^t_{t_0}(\mathbf{x}_0) - \varphi^t_{t_0}(\xi)\| \le \left| \int_{t_0}^t \left\| F(\phi^s_{t_0}(\mathbf{x}_0 + \xi), s) - F(\phi^s_{t_0}(\mathbf{x}_0), s) - \frac{dF}{d\mathbf{x}}(\phi^s_{t_0}(\mathbf{x}_0), s)\varphi^s_{t_0}(\xi) \right\| ds \right|.$$

Из Тејлорове формуле имамо

$$F(\phi^s_{t_0}(\mathbf{x}_0 + \xi), s) = F(\phi^s_{t_0}(\mathbf{x}_0), s) + \frac{dF}{d\mathbf{x}}(\phi^s_{t_0}(\mathbf{x}_0), s)(\phi^s_{t_0}(\mathbf{x}_0 + \xi) - \phi^s_{t_0}(\mathbf{x}_0)) + o(\phi^s_{t_0}(\mathbf{x}_0 + \xi) - \phi^s_{t_0}(\mathbf{x}_0)),$$

кад $\phi^s_{t_0}(\mathbf{x}_0 + \xi) - \phi^s_{t_0}(\mathbf{x}_0) \to 0$, па је

$$\|\phi^t_{t_0}(\mathbf{x}_0 + \xi) - \phi^t_{t_0}(\mathbf{x}_0) - \varphi^t_{t_0}(\xi)\| \le$$
$$\left| \int_{t_0}^t \left\| \frac{dF}{d\mathbf{x}}(\phi^s_{t_0}(\mathbf{x}_0), s) \left[\phi^s_{t_0}(\mathbf{x}_0 + \xi) - \phi^s_{t_0}(\mathbf{x}_0) - \varphi^s_{t_0}(\xi)\right] + o(\phi^s_{t_0}(\mathbf{x}_0 + \xi) - \phi^s_{t_0}(\mathbf{x}_0)) \right\| ds \right|.$$

Нека је задато $\varepsilon > 0$. Изаберимо δ_1 и δ_2 такве да важи:

$$\|\phi^s_{t_0}(\mathbf{x}_0 + \xi) - \phi^s_{t_0}(\mathbf{x}_0)\| < \delta_2 \Rightarrow \|o(\phi^s_{t_0}(\mathbf{x}_0 + \xi) - \phi^s_{t_0}(\mathbf{x}_0))\| \le \varepsilon \|\phi^s_{t_0}(\mathbf{x}_0 + \xi) - \phi^s_{t_0}(\mathbf{x}_0)\|$$

и

$$\|\xi\| < \delta_1 \Rightarrow \|\phi^s_{t_0}(\mathbf{x}_0 + \xi) - \phi^s_{t_0}(\mathbf{x}_0)\| < \delta_2$$

Како парцијални изводи комутирају, имамо

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{d\mathbf{x}}\phi^t_{t_0}(\mathbf{x})\right) = \frac{d}{d\mathbf{x}}\left[F(\phi^t_{t_0}(\mathbf{x}), t)\right]. \tag{$\heartsuit$}$$

Зато извод $\frac{d}{d\mathbf{x}}\phi^t_{t_0}(\mathbf{x})$ покушавамо да нађемо у облику решења диференцијалне једначине са новим векторским пољем, које се добија диференцијарњем векторског поља F по $\mathbf{x}$. Једначина ($\heartsuit$) није диференцијална једначина, односно није облика $\frac{d}{dt}\mathbf{y} = G(\mathbf{y}, t)$, зато је ово само мотивација, а не и доказ.

за свако s између t_0 и t.[12] Нека је

$$M := \max\left\{\left\|\frac{dF}{d\mathbf{x}}(\phi^s_{t_0}(\mathbf{x}_0), s)\right\| \mid s \in J\right\}.$$

Имамо

$$\|\phi^t_{t_0}(\mathbf{x}_0+\xi) - \phi^t_{t_0}(\mathbf{x}_0) - \varphi^t_{t_0}(\xi)\| \leq$$
$$M\left|\int_{t_0}^t \left\|\phi^s_{t_0}(\mathbf{x}_0+\xi) - \phi^s_{t_0}(\mathbf{x}_0) - \varphi^s_{t_0}(\xi)\right\| ds\right| + \left|\int_{t_0}^t \varepsilon\|\phi^s_{t_0}(\mathbf{x}_0+\xi) - \phi^s_{t_0}(\mathbf{x}_0)\|ds\right|.$$

Из Теореме 96 следи

$$\|\phi^s_{t_0}(\mathbf{x}_0+\xi) - \phi^s_{t_0}(\mathbf{x}_0)\| \leq \|\xi\|e^{L|s-t_0|},$$

па је

$$\|\phi^t_{t_0}(\mathbf{x}_0+\xi) - \phi^t_{t_0}(\mathbf{x}_0) - \varphi^t_{t_0}(\xi)\| \leq M\left|\int_{t_0}^t \left\|\phi^s_{t_0}(\mathbf{x}_0+\xi) - \phi^s_{t_0}(\mathbf{x}_0) - \varphi^s_{t_0}(\xi)\right\| ds\right| + c\varepsilon\|\xi\|$$

($c := \max\limits_{t\in J}\left|\int_{t_0}^t e^{L(s-t_0)}ds\right|$.) Сада, ако са $u(t)$ означимо $\|\phi^t_{t_0}(\mathbf{x}_0+\xi) - \phi^t_{t_0}(\mathbf{x}_0) - \varphi^t_{t_0}(\xi)\|$, из претходне неједнакости имамо:

$$u(t) \leq M\left|\int_{t_0}^t u(s)ds\right| + c_1\varepsilon\|\xi\|.$$

Ако применимо Гронвалову неједнакост на u добијамо:

$$u(t) \leq c_1\varepsilon\|\xi\|e^{M|t-t_0|},$$

па је

$$\|\phi^t_{t_0}(\mathbf{x}_0+\xi) - \phi^t_{t_0}(\mathbf{x}_0) - \varphi^t_{t_0}(\xi)\| \leq c_2\varepsilon\|\xi\|,$$

за $\|\xi\| < \delta_1$. Како је $\varepsilon > 0$ произвољно, важи (68).

Како је свако $t \in I$ садржано у неком ограниченом интервалу $J \subseteq I$, тврђење важи за свако $t \in I$. □

Тврђење 102. Под условима Теореме 101, изводи

$$\frac{d\phi^t_{t_0}}{dt} \quad \text{и} \quad \frac{d\phi^t_{t_0}}{d\mathbf{x}}$$

су непрекидни.

Доказ. Извод $\frac{d\phi^t_{t_0}}{dt}$ је непрекидан јер је једнак F, које је по претпоставци непрекидно.

Нека је $t \in J \subseteq I$, где је J ограничен интервал као у доказу Теореме 101.

I: за фиксирано ξ, пресликавање $\mathbf{x} \mapsto \frac{d\phi^t_{t_0}}{d\mathbf{x}}(\mathbf{x})(\xi)$ је непрекидно. Нека је $\varepsilon > 0$ и тачке $\mathbf{x}_0$ и $\mathbf{y}_0$ на растојању мањем од δ. Нека су $\mathbf{x}(t)$ и $\mathbf{y}(t)$ јединствена решења система $\mathbf{x}' = F(\mathbf{x}, t)$ са почетним условима $\mathbf{x}_0$ и $\mathbf{y}_0$ и нека је

$$A(t) := \frac{dF}{d\mathbf{x}}(\mathbf{x}(t), t), \quad B(t) := \frac{dF}{d\mathbf{x}}(\mathbf{y}(t), t).$$

Из Гронвалове неједнакости следи да, за довољно мало δ, $\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)\|$ можемо направити довољно малим, а из непрекидности $\frac{dF}{d\mathbf{x}}$ следи да је, за довољно мало δ, $\|A(t) - B(t)\| < \varepsilon$, за $t \in I$. Означимо за φ_t и ψ_t решења система

$$\frac{d\varphi^t_{t_0}}{dt}(\xi) = A(t)\varphi^t_{t_0}(\xi), \quad \frac{d\psi^t_{t_0}}{dt}(\xi) = B(t)\psi^t_{t_0}(\xi), \quad \varphi^{t^0}_{t_0} = \psi^{t_0}_{t_0} = \mathrm{Id}.$$

Подсетимо се да је

$$\frac{d}{d\mathbf{x}}\phi^t_{t_0}(\mathbf{x}_0)(\xi) = \varphi^t_{t_0}(\xi), \quad \frac{d}{d\mathbf{x}}\phi^t_{t_0}(\mathbf{y}_0)(\xi) = \psi^t_{t_0}(\xi),$$

[12] Да је овакво δ_1 могуце изабрати следи из Теореме 96.

где је $\varphi^t_{t_0}$ као у (65). Зато, да бисмо доказали да је пресликавање $\mathbf{x} \mapsto \frac{d\phi^t_{t_0}}{d\mathbf{x}}(\mathbf{x})(\xi)$ непрекидно, довољно је да докажемо да је $\|\varphi^t_{t_0}(\xi) - \psi^t_{t_0}(\xi)\|$ мало, за $\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0\|$ мало. Имамо

$$\|\varphi^t_{t_0}(\xi) - \psi^t_{t_0}(\xi)\| = \left\| \int_{t_0}^t \left[A(s)\varphi^s_{t_0}(\xi) - B(s)\psi^s_{t_0}(\xi) \right] ds \right\|$$
$$\leq \left| \int_{t_0}^t \left\| \left[A(s) - B(s) \right] \varphi^s_{t_0}(\xi) \right\| ds \right| + \left| \int_{t_0}^t \left\| B(s) \left[\varphi^s_{t_0}(\xi) - \psi^s_{t_0}(\xi) \right] \right\| ds \right| \leq$$
$$\left| \int_{t_0}^t \varepsilon M_1 ds + M_2 \int_{t_0}^t \left\| \varphi^s_{t_0}(\xi) - \psi^s_{t_0}(\xi) ds \right\| ds \right|$$
$$\leq M_1 \varepsilon a + M_2 \int_{t_0}^t \left\| \varphi_s(\xi) - \psi^s_{t_0}(\xi) \right\| ds$$

(где је $M_1 := \max\limits_{t \in J} \|\varphi^t_{t_0}(\xi)\|$, а $M_2 := \max_J \|B(s)\|$). Ако применимо Гронвалову неједнакост на функцију

$$u(t) := \|\varphi^t_{t_0}(\xi) - \psi^t_{t_0}(\xi)\|,$$

добијамо да је

$$\|\varphi^t_{t_0}(\xi) - \psi^t_{t_0}(\xi)\| \leq M_2 \varepsilon a e^{M_1 |t - t_0|} \leq c\varepsilon,$$

за неку константу c која зависи од J.

II: пресликавање $\mathbf{x} \mapsto \frac{d\phi^t_{t_0}}{d\mathbf{x}}(\mathbf{x})$ је непрекидно (у операторској норми). Нека је $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ ортонормирана база простора $\mathbb{R}^n$, и вектор $\xi \in \mathbb{S}^{n-1}$ (јединични). Тада је

$$\xi = \sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbf{e}_k, \quad |\alpha_k| \leq 1.$$

Нека је $\varepsilon > 0$ дато и $\delta > 0$ такво да је

$$\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0\| < \delta \Rightarrow \left\| \frac{d\phi^t_{t_0}}{d\mathbf{x}}(\mathbf{x}_0)\mathbf{e}_k - \frac{d\phi^t_{t_0}}{d\mathbf{x}}(\mathbf{y}_0)\mathbf{e}_k \right\| < \frac{\varepsilon}{n}, \quad k = 1, \dots, n.$$

(Овакво δ постоји због првог дела доказа.) Сада имамо, за $\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0\| < \delta$:

$$\left\| \frac{d\phi^t_{t_0}}{d\mathbf{x}}(\mathbf{x}_0)\xi - \frac{d\phi^t_{t_0}}{d\mathbf{x}}(\mathbf{y}_0)\xi \right\| \leq \sum_{k=1}^n |\alpha_k| \left\| \frac{d\phi^t_{t_0}}{d\mathbf{x}}(\mathbf{x}_0)\mathbf{e}_k - \frac{d\phi^t_{t_0}}{d\mathbf{x}}(\mathbf{y}_0)\mathbf{e}_k \right\| < \sum_{k=1}^n 1 \cdot \frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon.$$

Ако у последњој једнакости узмемо супремум по свим јединичним векторима ξ, добијамо:

$$\left\| \frac{d\phi^t_{t_0}}{d\mathbf{x}}(\mathbf{x}_0) - \frac{d\phi^t_{t_0}}{d\mathbf{x}}(\mathbf{y}_0) \right\| \leq \varepsilon.$$

□

6. Неке последице Пикарове теореме

6.1. Једнопараметарска фамилија дифеоморфизама. Нека је $t_0 = 0$. Прва последица Пикарове теореме је да кретање простора дефинисано аутономном диференцијалном једначином

$$\frac{d\phi^t_0}{dt}(\mathbf{x}) = F(\phi^t_{t_0}(\mathbf{x})), \quad \phi^0_0 = \mathrm{Id} \tag{69}$$

једнопараметарска фамилија дифеоморфизама. За $t_0 = 0$ означаваћемо са $\phi^t := \phi^t_0$.

Теорема 103. *Нека је ϕ^t решење једначине (69) дефинисано за свако $t \in \mathbb{R}$ и F задовољава услове Теореме 70. Тада важи:*

$$\phi^{s+t} = \phi^t \circ \phi^s, \quad \phi^0 = \mathrm{Id}.$$

Доказ. Посматрајмо, за фиксирано s

$$\psi^t := \phi^{s+t}, \quad \text{и} \quad \theta^t := \phi^t \circ \phi^s.$$

Приметимо да су и ψ^t и θ^t решења система

$$\frac{d\varphi}{dt}(\mathbf{x}) = F(\varphi^t(\mathbf{x})), \quad \varphi^0(\mathbf{x}) = \phi^s(\mathbf{x}).$$

Из Пикарове теореме следи да се они морају поклапати где год су дефинисани, па је

$$\phi^{s+t} = \phi^t \circ \phi^s.$$

Услов $\phi^0 = \mathrm{Id}$ је очигледно испуњен. □

Последица 104. *Пресликавање ϕ^t је дифеоморфизам.*

Доказ. Из Теореме 101 знамо да је ϕ^t диференцијабилно за свако t, а из Теореме 103 следи да је ϕ^t и бијекција, као и да му је инверз диференцијабилан. Заиста, из

$$\phi^t \circ \phi^{-t} = \phi^{-t} \circ \phi^t = \phi^0 = \mathrm{Id}$$

следи да је

$$(\phi^t)^{-1} = \phi^{-t},$$

које је такође диференцијабилно. □

Напомена 105. Претходна теорема важи и под слабијим условима, ако ϕ није дефинисано на целом $\mathbb{R}$, али ако су $t, s, t+s \in I$, где је I интевал на коме је ϕ^t дефинисано. ◇

Задатак 106. Доказати да су трајекторије система $\mathbf{x}' = F(\mathbf{x})$ дисјунткни скупови. ✓

Задатак 107. Доказати да Теорема 103 важи ако и само ако је поље F аутономно. ✓

Докажимо на крају овог поглавља и јачу верзију Лиувилове теореме.

Теорема 108. (Лиувилова теорема - јача верзија.) *Нека је векторско поље F аутономно, ϕ^t решење система (69) и $V(t) := \mathrm{Vol}(\phi^t(D))$, за неки мерљив (компактан) скуп D. Тада је*

$$\frac{dV(t)}{dt} = \int\limits_{\phi^t(D)}\cdots\int \operatorname{div} F dy_1 \cdots dy_n,$$

где је $\operatorname{div} F = \nabla \cdot F$ дивергенција векторског поља F.

Доказ. Из Теореме о смени променљиве у вишеструком интегралу следи:

$$V(t) = \int\limits_{\phi^t(D)}\cdots\int dy_1 \cdots dy_n = \int\limits_D\cdots\int |J_{\phi^t}| dx_1 \cdots dx_n = \int\limits_D\cdots\int \left|\det\left(\frac{d\phi^t}{d\mathbf{x}}\right)\right| dx_1 \cdots dx_n.$$

Међутим, пресликавање

$$t \mapsto \det\left(\frac{d\phi^t}{d\mathbf{x}}\right)$$

је непрекидно и није једнако нули ни за једно t, јер су ϕ^t дифеоморфизми. Како је још, за $t=0$, $\phi^0 = \mathrm{Id}$, то је $\frac{d\phi^0}{d\mathbf{x}} = \mathrm{Id}$, па је $\det \frac{d\phi^0}{d\mathbf{x}} = 1 > 0$. Из Коши-Болцановог става следи да је $\det \frac{d\phi^t}{d\mathbf{x}} > 0$ за свако t, па имамо:

$$V(t) = \int\limits_D\cdots\int \det\left(\frac{d\phi^t}{d\mathbf{x}}\right) dx_1 \cdots dx_n,$$

па је

$$V'(t) = \int\limits_D\cdots\int \frac{d}{dt}\det\left(\frac{d\phi^t}{d\mathbf{x}}\right) dx_1 \cdots dx_n.$$

Даље рачунамо

$$\frac{\det\left(\frac{d\phi^{t+\Delta t}}{d\mathbf{x}}\right)(\mathbf{x})-\det\left(\frac{d\phi^{t}}{d\mathbf{x}}\right)(\mathbf{x})}{\Delta t}=\frac{\det\left(\frac{d(\phi^{\Delta t}\circ\phi^{t})}{d\mathbf{x}}(\mathbf{x})\right)-\det\left(\frac{d\phi^{t}}{d\mathbf{x}}\right)(\mathbf{x})}{\Delta t}=$$
$$\frac{\det\left(\frac{d\phi^{\Delta t}}{d\mathbf{x}}(\phi^t(\mathbf{x}))\cdot\frac{d\phi^{t}}{d\mathbf{x}}(\mathbf{x})\right)-\det\left(\frac{d\phi^{t}}{d\mathbf{x}}\right)(\mathbf{x})}{\Delta t}=\det\left(\frac{d\phi^{t}}{d\mathbf{x}}\right)(\mathbf{x})\frac{\det\left(\frac{d\phi^{\Delta t}}{d\mathbf{x}}\right)(\phi^t(\mathbf{x}))-1}{\Delta t}.$$

Нека је

$$\varphi(t):=\frac{d\phi^t}{d\mathbf{x}}.$$

Имамо

$$\varphi^0=E,$$
$$\varphi'(0)=\frac{d}{dt}\frac{d\phi^t}{d\mathbf{x}}\bigg|_{t=0}=\frac{d}{d\mathbf{x}}\frac{d\phi^t}{dt}\bigg|_{t=0}=dF,$$

па је, по Тејлоровој формули:

$$\frac{d\phi^{\Delta t}}{d\mathbf{x}}=\varphi(\Delta t)=E+\Delta t\cdot dF+o(\Delta t),\quad \Delta t\to 0.$$

Из Леме 56 имамо:

$$\det\left(\frac{d\phi^{\Delta t}}{d\mathbf{x}}\right)=1+\Delta t\cdot\operatorname{tr}(dF)+o(\Delta t),\quad \Delta t\to 0,$$

и $\operatorname{tr}(dF)=\operatorname{div}F$, па је

$$\frac{d}{dt}\det\left(\frac{d\phi^{t}}{d\mathbf{x}}\right)(\mathbf{x})=\det\left(\frac{d\phi^{t}}{d\mathbf{x}}\right)(\mathbf{x})\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\det\left(\frac{d\phi^{\Delta t}}{d\mathbf{x}}\right)(\phi^t(\mathbf{x}))-1}{\Delta t}=\det\left(\frac{d\phi^{t}}{d\mathbf{x}}\right)(\mathbf{x})\operatorname{div}F(\phi^t(\mathbf{x})).$$

Одавде је

$$V'(t)=\int\limits_D\!\cdots\!\int\det\left(\frac{d\phi^{t}}{d\mathbf{x}}\right)(\mathbf{x})\operatorname{div}F(\phi^t(\mathbf{x}))dx_1\cdots dx_n=\int\limits_{\phi^t(D)}\!\cdots\!\int\operatorname{div}F dy_1\cdots dy_n.$$

Последња једнакост је смена промењљиве. □

Задатак 109. Нека је у $\mathbb{R}^{2n}=\{(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n)\}$ дат *Хамилтонов*[13] *систем:*

$$x_j'=\frac{\partial H}{\partial y_j},\quad y_j'=-\frac{\partial H}{\partial x_j},$$

где је $H:\mathbb{R}^{2n}\to\mathbb{R}$ глатка функција (*Хамилтонијан* система). Доказати да дифеоморфизам простора индукован овим системом чува запремину. ✓

6.2. Теорема о исправљивости векторског поља. Теорема о исправљивости векторског поља нам даје опис фазног тока (до на дифеоморфизам) у близини некритичне тачке (односно тачке у којој се векторско поље не анулира). Видећемо да нам она гарантује да је у динамичком смислу, тај ток веома једноставан у близини некритичне тачке, тј. да је он еквивалентан транслацији. Зато је у динамичком смислу занимљивије понашање тока у близини критичне тачке, односно тачке еквилибријума система (видети дефиницију на страни 81).

Уведимо прво неке појмове.

[13] William Rowan Hamilton (1805–1865), ирски физичар, астроном и математичар.

Дефиниција 110. Кажемо да су фазни токови ϕ^t и ψ^t дефинисани једначинама

$$\frac{d\phi^t}{dt} = F(\phi^t), \quad \phi^0 = \mathrm{Id}$$
$$\frac{d\psi^t}{dt} = G(\psi^t), \quad \psi^0 = \mathrm{Id}$$

диференцијално конјуговани или *диференцијално еквивалентни* ако постоји дифеоморфизам

$$\varphi : \mathcal{U} \to \mathcal{W}$$

такав да важи

$$\varphi \circ \phi^t = \psi^t \circ \varphi.$$

$\Diamond$

Дефиниција 111. За диференцијабијно пресликавање $\varphi : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$, и векторско поље $F : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$, $\varphi_*(F)$ је векторско поље дефинисано на слици пресликавања φ као:

$$\varphi_*(F)(\varphi(\mathbf{x})) = d\varphi(\mathbf{x})(F(\mathbf{x})),$$

и назива се ***push forward*** векторског поља F пресликавањем φ. $\Diamond$

Задатак 112. Доказати да важи $(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*$ и, за дифеоморфизам φ, $(\varphi_*)^{-1} = \varphi_*^{-1}$.✓

Тврђење 113. Фазни токови ϕ^t и ψ^t, генерисани векторским пољима F и G редом, диференцијално су еквивалентни помоћу дифеоморфизма φ ако и само важи $G = \varphi_* F$.

Доказ. $\Rightarrow$: Нека F генерише ϕ^t и нека је $\psi^t = \varphi \circ \phi^t \circ \varphi^{-1}$. Диференцирањем израза $\psi^t = \varphi \circ \phi^t \circ \varphi^{-1}$ по t добијамо:

$$\begin{aligned} &G(\psi^t(\mathbf{x})) = \frac{d}{dt}\psi^t(\mathbf{x}) = d\varphi(\phi^t\varphi^{-1}(\mathbf{x}))(F(\phi^t\varphi^{-1}(\mathbf{x})) = \\ &d\varphi(\varphi^{-1}\psi^t(\mathbf{x}))(F(\varphi^{-1}\psi^t(\mathbf{x}))) = \varphi_* F(\varphi\varphi^{-1}\psi^t(\mathbf{x})) = \varphi_* F(\psi^t(\mathbf{x})) \end{aligned} \tag{70}$$

па је $G = \varphi_* F$.

$\Leftarrow$: Нека је $G = \varphi_* F$ и векторска поља F и G генеришу токове ϕ^t и ψ^t редом. Означимо са $\chi^t := \varphi \circ \phi^t \circ \varphi^{-1}$. Обичним диференцирањем, исто као у (70), закључујемо да је

$$\frac{d}{dt}\chi^t(\mathbf{x}) = G(\chi^t(\mathbf{x})),$$

а како је $\chi^0 = \mathrm{Id}$, из Пикарове теореме следи да мора бити $\chi^t = \psi^t$. $\square$

Теорема 114. *Нека је векторско поље $F : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ глатко и нека је $F(\mathbf{x}^0) \neq \mathbf{0}$ за $\mathbf{x}^0 \in \mathcal{U}$. Тада постоји околина $\mathcal{V}$ тачке $\mathbf{x}^0$, $\mathbf{x}^0 \in \mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ и дифеоморфизам $\varphi : \mathcal{U} \to \varphi(\mathcal{U})$ такав да је $\varphi_*(F) = \frac{\partial}{\partial x_1}$.*

Напомена 115. Ознака $\frac{\partial}{\partial x_1}$ је ознака за константно векторско поље $(1, 0, \ldots, 0)$. $\diamond$

Доказ. Без губљења општости можемо да претпоставимо да је $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$[14].

Претпоставимо за почетак да је $F(\mathbf{x}_0) = F(\mathbf{0}) = \frac{\partial}{\partial x_1}$. Нека је B околина тачке $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ и $\delta_0 > 0$ као у Теореми 78 за систем:

$$\frac{d\phi^t}{dt} = F(\phi^t), \quad \phi^0 = \mathrm{Id}\,. \tag{71}$$

и $B_0 := B \cap \{x_1 = 0\}$. За $\mathbf{y} \in B_0$ дефинишимо

$$\psi : (-\delta_0, \delta_0) \times B_0 \to \mathbb{R}^n, \quad \psi : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \phi^{x_1}(0, x_2, \ldots, x_n).$$

[14] Ако $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{0}$, посматрајмо транслацију $T_{-\mathbf{x}_0} : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ и векторско поље $G := (T_{-\mathbf{x}_0})_* F$ Имамо:

$$G(\mathbf{x}) = (T_{-\mathbf{x}_0})_* F(\mathbf{x}) = dT_{-\mathbf{x}_0}(\mathbf{x} + \mathbf{x}_0)(F(\mathbf{x} + \mathbf{x}_0)) = F(\mathbf{x} + \mathbf{x}_0),$$

па је $G(\mathbf{0}) = F(\mathbf{x}_0)$. Дакле ако исправимо векторско поље G у околини тачке $\mathbf{0}$, помоћу дифеоморфизма φ, векторско поље F ћемо исправити у околини $\mathbf{x}_0$ помоћу дифеоморфизма $\varphi \circ T_{-\mathbf{x}_0}$.

Докажимо да је ψ локални дифеоморфизам и да је ψ^{-1} пресликавање које исправља векторско поље $\mathbf{x}$. Имамо:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_1}(0,x_2,\ldots,x_n) = F(\phi^0(\mathbf{0})) = F(\mathbf{0}) = \frac{\partial}{\partial x_1},$$

а како је

$$\psi(0,x_2,\ldots,x_n) = \phi_0(0,x_2,\ldots,x_n) = (0,x_2,\ldots,x_n), \quad \text{тј.} \quad \psi|_{\{x_1=0\}} = \mathrm{Id}$$

то је

$$d(\psi|_{\{x_1=0\}}) = d(\mathrm{Id}\,|_{\{x_1=0\}}) = \mathrm{Id}\,|_{\{x_1=0\}}.$$

Зато је

$$d\psi(0,x_2,\ldots,x_n) = \left[F(\mathbf{0}) \left| \begin{array}{c} \star \\ \mathrm{Id}\,|_{\{x_1=0\}} \end{array} \right. \right] = \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left| \begin{array}{c} \star \\ \mathrm{Id}\,|_{\{x_1=0\}} \end{array} \right. \right],$$

где је $\star$ врста неких $n-1$ функција (по $x_1,\ldots,x_n$). Одавде је $\det d\psi(0,x_2,\ldots,x_n) = 1$, па по Теореми о инверзној функцији постоји околина $\mathcal{V}$ тачке $\mathbf{0}$ на којој је ψ дифеоморфизам. Нека је $\varphi := \psi^{-1}$ дефинисано на $\psi(\mathcal{V})$. Како је

$$\psi_*\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)(\psi(x_1,\ldots,x_n)) = d\psi(x_1,\ldots,x_n)\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right) = \frac{\partial}{\partial x_1}\psi(x_1,\ldots,x_n) =$$
$$\frac{\partial\phi^{x_1}}{\partial t}(0,x_2,\ldots,x_n) = F(\phi^{x_1}(0,x_2,\ldots,x_n) = F(\psi(x_1,\ldots,x_n)),$$

тј.

$$\psi_*\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right) = F,$$

то је

$$\varphi_*(F) = \frac{\partial}{\partial x_1}.$$

Ако $F(\mathbf{x}_0) \neq \frac{\partial}{\partial x_1}$, онда можемо линеарном сменом ово лако да постигнемо. Нека је $V \cong \mathbb{R}^{n-1}$ векторски потпростор димензије $n-1$ ортогоналан на $F(\mathbf{x}_0)$ (кроз $\mathbf{x}_0$) и нека је $\mathbf{v}_2,\ldots\mathbf{v}_n$ ортонормирана база простора V. Нека је L линеарни изоморфизам простора $\mathbb{R}^n$ дефинисан на бази $\{F(\mathbf{x}_0),\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v_n}\}$ са

$$L : F(\mathbf{x}_0) \mapsto \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad L : \mathbf{v}_j \mapsto \frac{\partial}{\partial x_j},\ j=2,\ldots,n.$$

Векторско поље

$$F_1(\mathbf{x}) := L(F(\mathbf{x}))$$

испуњава претпоставке из првог дела доказа, па, ако је $\varphi_* F_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}$, тада је $\varphi \circ L$ тражено пресликавање. $\square$

Задатак 116. Доказати да из Теореме о исправљивости векторских поља следе Теорема о једнопараметарској фамилији дифеоморфизама и Пикарова теорема о егзистенцији и јединствености решења. ✓

6.3. Комутативни токови. Комутатор векторског поља. Већ знамо да су векторска поља и придружени токови потпуно одређени једни другим. Природно је питање када токови комутирају, односно шта треба да задовољавају векторска поља F и G, па да важи:

$$\phi^t \circ \psi^s = \psi^s \circ \phi^t.$$

Пре него што дођемо до одговора, морамо да уведемо неке појмове. Приметимо да векторско поље F глаткој функцији f придружује глатку функцију по правилу:

$$(Ff)(\mathbf{x}) = df(\mathbf{x})(F(\mathbf{x})).$$

Ако су $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ координате векторског поља F, онда је

$$(Ff)(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \frac{\partial f}{\partial x_j}.$$

Зато пишемо

$$F = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \frac{\partial}{\partial x_j},$$

односно уместо $\mathbf{e}_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ пишемо $\frac{\partial}{\partial x_j}$. Приметимо да важи

- (линеарност) $F(\lambda f + \mu g) = \lambda F(f) + \mu F(g)$
- (Лајбницово правило) $F(fg) = fF(g) + gF(f)$.

Ако је f глатка фунцкија, а F и G два глатка векторска поља, можемо дефинисати и

$$FG(f) := F(G(f)).$$

Израз FG не задовољава Лајбницово правило, тако да он није векторско поље.

Дефиниција 117. Комутатор векторских поља F и G дефинишемо као

$$[F, G] := FG - GF.$$

$\Diamond$

Овако дефинисан израз јесте векторско поље (проверити да важи линеарност и Лајбницово правило[15]). Директно се проверава да, ако је

$$F = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad G = \sum_{j=1}^{n} \eta_j \frac{\partial}{\partial x_j},$$

онда је

$$[F, G] = \sum_{j=1}^{n} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\partial \eta_j}{\partial x_i} - \eta_i \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} \right\} \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Тврђење 118. Својства комутатора:

(1) $[F_1 + F_2, G] = [F_1, G] + [F_2, G]$
(2) $[G, F] = -[F, G]$
(3) $[F, fG] = F(f)G + f[F, G]$
(4) Јакобијев идентитет $[[F, G], H] + [[G, H], F] + [[H, F], G] = 0$

Доказ. Непосредна провера. $\square$

Дефиниција 119. Нека су F и G два глатка векторска поља и нека F генерише ток ϕ^t. *Лијев*[16] *извод векторског поља G у правцу векторског поља F* се дефинише као

$$\mathcal{L}_F G(\mathbf{x}) := \lim_{t \to 0} \frac{G(\mathbf{x}) - \phi^t_* G(\mathbf{x})}{t} = - \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi^t_* G(\mathbf{x}).$$

$\Diamond$

Лијев извод векторских поља је заправо њихов комутатор.

Тврђење 120. $\mathcal{L}_F G = [F, G]$.

[15] Може се доказати да је пресликавање $X : C^\infty(\mathcal{U}) \to C^\infty(\mathcal{U})$ векторско поље ако и само ако задовољава својство линеарности и Лајбницово правило.

[16] Marius Sophus Lie (1842–1899), норвешки математичар.

Лема 121. *Нека је $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ отворен и $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ функција класе C^∞ таква да је $\varphi(0, \mathbf{x}) = 0$ за свако $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$. Тада постоји функција $g : (-\varepsilon, \varepsilon) \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ класе C^∞ таква да је*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(0, \mathbf{x}) = g(0, \mathbf{x}), \quad \varphi(t, \mathbf{x}) = t \cdot g(t, \mathbf{x}).$$

Доказ Леме 121. Дефинишимо

$$g(t, \mathbf{x}) := \int_0^1 \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, \mathbf{x})\big|_{u=st} ds.$$

Очигледно важи $g(0, \mathbf{x}) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(0, \mathbf{x})$, а

$$t \cdot g(t, \mathbf{x}) := \int_0^1 \frac{\partial \varphi}{\partial u}(st, \mathbf{x}) \cdot t \, ds = \int_0^t \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, \mathbf{x}) du = \varphi(t, \mathbf{x}) - \varphi(0, \mathbf{x}) = \varphi(t, \mathbf{x}).$$

□

Доказ Тврђења 120. Нека је f произвољна функција и g_t фамилија пресликавања за коју важи

$$f \circ \phi^t = f + t \cdot g_t, \quad g_0 = F(f)$$

која постоји на основу Леме 121 примењене на функцију $\varphi = f \circ \phi^t - f$.

Имамо:

$$\begin{aligned} \phi^t_* G(f)(\mathbf{x}) &= df_{\mathbf{x}}(d\phi^t_{(\phi^t)^{-1}(\mathbf{x})})(G_{(\phi^t)^{-1}(\mathbf{x})}) = d(f \circ \phi^t)_{\phi^{-t}(\mathbf{x})})(G_{\phi^{-t}(\mathbf{x})}) \\ &= G(f \circ \phi^t)(\phi^{-t}(\mathbf{x})) = G(f + t \cdot g_t)(\phi^{-t}(\mathbf{x})) \end{aligned}$$

па је

$$\begin{aligned} &\lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(G - \phi^t_* G)(f)(\mathbf{x}) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}[Gf(\mathbf{x} - G(f + t \cdot g_t)(\phi^{-t}(\mathbf{x})] = \\ &\lim_{t \to 0} \frac{1}{t}[Gf(\mathbf{x}) - Gf(\phi^{-t}(\mathbf{x}))] - \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} t(Gg_t)(\phi^{-t}(\mathbf{x})) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (Gf)(\phi^t(\mathbf{x})) - (Gg_0)(\phi^{-0}(\mathbf{x})) = \\ &d(Gf)_{\mathbf{x}}(F)_{\mathbf{x}} - GF(f)(\mathbf{x}) = (FG - GF)f(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

□

Последица 122. *Из Тврђења 120 директно следи да је $\varphi_*[F, G] = [\varphi_* F, \varphi_* G]$.* □

Теорема 123. *Нека $F \rightsquigarrow \phi^t$, $G \rightsquigarrow \psi^t$. Следећи услови су еквивалентни:*

(А) $[F, G] = 0$
(Б) $\phi^t_* G = G$
(В) $\phi^t \circ \psi^s = \psi^s \circ \phi^t$.

Доказ. (А)⇒(Б): Нека је $[F, G] = 0$, из Тврђења 120 следи да је

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \phi^t_* G = 0.$$

Али како је

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} \phi^t_* G = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\phi^{t_0 + \Delta t}_* G - \phi^{t_0}_* G}{\Delta t} = \phi^{t_0}_* \left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\phi^{\Delta t}_* G - G}{\Delta t} \right),$$

то је и

$$\frac{d}{dt} \phi^t_* G = 0$$

за свако t, па је

$$\phi^t_* G = \phi^0_* G = G.$$

(Б)⇒(В): Нека је $\phi^t_* G = G$. Из Тврђења 113 следи да, за фиксирано t, векторско поље $\phi^t_* G$ генерише ток $\phi^t \circ \psi^s \circ \phi^{-t}$, али како G генерише ψ^s добијамо

$$\phi^t \circ \psi^s \circ \phi^{-t} = \psi^s \quad \Rightarrow \quad \phi^t \circ \psi^s = \psi^s \circ \phi^t.$$

(B)⇒(A): Како је $\phi^t \circ \psi^s \circ \phi^{-t} = \psi^s$, из Тврђења 113 знамо да је $\phi^t_* G = G$, па је

$$[F, G] = -\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \phi^t_* G = 0.$$

□

7. Пеанова теорема

На крају овог дела, доказаћемо једну слабију верзију Пикарове теореме, која нам, у случају да је векторско поље F само непрекидно али не и Липшицово, гарантује егзистенцију али не и јединственост решења.

Пример 124. Кошијев задатак $x' = \sqrt{|x|}$, $x(0) = 0$ има бесконачно много решења: $x_1(t) = \operatorname{sgn} t \cdot \frac{t^2}{4}$, $x_2(t) \equiv 0$, као и

$$x_\lambda(t) := \begin{cases} 0, & t \le \lambda, \\ \frac{(t-\lambda)^2}{4}, & t > \lambda \end{cases}$$

за свако $\lambda > 0$ итд.

Ово није у контрадикцији са Пикаровом теоремом јер векторско поље (у овом случају функција) $F(x) = \sqrt{|x|}$ није Липшицово ни у једној околини нуле (зашто?). ✓

Теорема 125. (Пеанова[17] теорема) *Нека је $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^k$ отворен и векторско поље $F : \mathcal{U} \times [t_0 - a, t_0 + a] \to \mathbb{R}^k$ непрекидно. Тада за свако $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{U}$ постоји $\delta > 0$ и (не нужно јединствено) решење Кошијевог проблема*

$$\mathbf{x}'(t) = F(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \tag{72}$$

дефинисано на интервалу $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$.

Доказ. У овом доказу искористићемо Арцела–Асколијеву теорему (видети [2] за доказ):

Теорема 126. (Арцела[18]–Асколијева[19] теорема) *Низ непрекидних пресликавања $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}^k$ има подниз који равномерно конвергира на $[a, b]$ ако и само ако је равностепено непрекидан[20] и равномерно ограничен[21].* □

Конструисаћемо низ пресликавања на који ћемо да применимо Арцела–Асколијеву теорему. Те функције ће бити део-по-део линеарне чији ће нагиб (односно извод) бити вредност векторског поља F у одговарајућим тачкама.

Претпоставићемо да је $t_0 = 0$ ради поједностављивања записа (доказ је исти у општем случају).

Нека је, као и у доказу Пикарове теореме, $r > 0$ и $B[\mathbf{x}_0, r] \subset \mathcal{U}$,

$$M := \max_{B[\mathbf{x}_0, r] \times [-a, a]} \|F\|$$

и $\alpha := \min\{r/M, a\}$.

Дефинисаћемо низ $\mathbf{x}_n : [0, \alpha] \to \mathcal{U}$ полигоналних апроксимација траженог решења, индукцијом по $j \in \{0, \dots, n\}$. Нека је:

$$\begin{aligned} &\mathbf{x}_n(0) := \mathbf{x}_0 \\ &\mathbf{x}_n(t) := F(\mathbf{x}_n(j\alpha/n), j\alpha/n)(t - j\alpha/n) + \mathbf{x}_n(j\alpha/n), \text{ за } t \in [j\alpha/n, (j+1)\alpha/n), \end{aligned}$$

[17] Giuseppe Peano (1858–1932.), италијански математичар.

[18] Cesare Arzelá (1847–1912.), италијански математичар.

[19] Giulio Ascoli (1843–1896.), италијански математичар.

[20] За свако $\varepsilon > 0$ постоји $\delta > 0$ такво да важи: $\forall n \in \mathbb{N}$, $|s - t| < \delta \Rightarrow \|f_n(s) - f_n(t)\| < \varepsilon$.

[21] $\|f_n(t)\| \le M < +\infty$ за свако n и свако $t \in [a, b]$.

а у тачкама $t = j/n$ дефинишемо $\mathbf{x}_n$ тако да буду непрекидна пресликавања. Из конструкције видимо да су она и део-по-део глатка, са евентуално нарушеном глаткошћу у тачкама $t = j\alpha/n$. Прецизније, видимо да је

$$\mathbf{x}_n'(t) = F(\mathbf{x}_n((j-1)\alpha/n), (j-1)\alpha/n), \text{ за } t \in ((j-1)\alpha/n, j\alpha/n).$$

(На исти начин дефинишемо низ и на интервалу $[-\alpha, 0]$ и проверавамо сва својства на њему. Ради поједностављивања доказа, до краја све радимо на $[0, \alpha]$.)

Поново ћемо поделити остатак доказа на неколико корака.

I: Низ $\mathbf{x}_n$ је добро дефинисан. Да бисмо ово проверили, треба да покажемо да је $\mathbf{x}_n(j\alpha/n) \in \mathcal{U}$ (да би израз $F(\mathbf{x}_n(j\alpha/n), j\alpha/n)$ који се појављује у дефиницији низа имао смисла). Доказаћемо да је заправо $\mathbf{x}_n(j\alpha/n) \in B[\mathbf{x}_0, r]$. Доказ изводимо индукцијом по j. За $j = 0$ имамо $\mathbf{x}_n(0) = \mathbf{x}_0 \in B[\mathbf{x}_0, r]$. Претпоставимо да је $\mathbf{x}_n(i\alpha/n) \in B[\mathbf{x}_0, r]$, за $i = 0, \dots, j$ и $j + 1 \le n$. Имамо

$$\|\mathbf{x}_n((j+1)\alpha/n) - \mathbf{x}_0\| \le \sum_{i=1}^{j+1} \|\mathbf{x}_n(i\alpha/n) - \mathbf{x}_n((i-1)\alpha/n)\| \overset{(\spadesuit)}{=}$$
$$\sum_{i=1}^{j+1} \frac{\alpha}{n} \|F(\mathbf{x}_n((i-1)\alpha/n), (i-1)\alpha/n)\| \overset{(\diamondsuit)}{\le} \frac{\alpha}{n} \sum_{i=1}^{j+1} M = \frac{M(j+1)\alpha}{n} \le M\alpha \overset{(\heartsuit)}{\le} r,$$

Једнакост $(\spadesuit)$ важи због начина на који смо дефинисали тачке $\mathbf{x}_n(i\alpha/n)$, неједнакост $(\diamondsuit)$ важи због индукцијске хипотезе, а $(\heartsuit)$ важи јер је $\alpha \le r/M$. Закључујемо

$$\mathbf{x}_n(j\alpha/n) \in B[\mathbf{x}_0, r]. \tag{73}$$

II: Низ $\mathbf{x}_n$ је равномерно ограничен. За $t \in [(j-1)\alpha/n, j\alpha/n]$, вредност $\mathbf{x}_n(t)$ је конвексна комбинација вредности $\mathbf{x}_n((j-1)\alpha/n)$ и $\mathbf{x}_n(j\alpha/n)$. Како је кугла $B[\mathbf{x}_0, r]$ конвексан скуп, из (73) следи да је

$$\mathbf{x}_n(t) \in B[\mathbf{x}_0, r]$$

за свако $n \in \mathbb{N}$, $t \in [0, \alpha]$.

III: Низ $\mathbf{x}_n$ је равностепено непрекидан.

Означимо са Δ_n функције:

$$\Delta_n(t) := \begin{cases} \mathbf{x}_n'(t) - F(\mathbf{x}_n(t), t), & t \ne \frac{j\alpha}{n}, \\ 0 & t = \frac{j\alpha}{n}. \end{cases}$$

Докажимо да $\Delta_n(t)$ тежи нули кад $n \to \infty$ равномерно по t.

Имамо да је

$$\|\Delta_n(t)\| \le \|F(\mathbf{x}_n(j\alpha/n), j\alpha/n) - F(\mathbf{x}_n(t), t)\|,$$

за $t \in [j\alpha/n, (j+1)\alpha/n]$. За $t \in [j\alpha/n, (j+1)\alpha/n)$ важи:

$$\|\mathbf{x}_n(t) - \mathbf{x}_n(j\alpha/n)\| = \|F(\mathbf{x}_n(j\alpha/n), j\alpha/n)\|(t - j\alpha/n) \le M\alpha/n. \tag{74}$$

Како је F непрекидно, то је оно и равномерно непрекидно на $[-\alpha, \alpha] \times B[\mathbf{x}_0, r]$. За дато $\varepsilon > 0$ изаберимо $\delta > 0$ такво да важи

$$|t - s| < \delta, \ \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|F(\mathbf{x}, t) - F(\mathbf{y}, s)\| < \varepsilon.$$

Нека је n_0 такво да за важи

$$\frac{\alpha}{n_0} < \delta, \quad \frac{M\alpha}{n_0} < \delta.$$

Како је, за $n \ge n_0$ и $t \in [j\alpha/n, (j+1)\alpha/n)$

$$|t - j\alpha/n| \le \frac{\alpha}{n_0} < \delta,$$

а одатле, из (74) и

$$\|\mathbf{x}_n(j\alpha/n) - \mathbf{x}_n(t)\| < \delta,$$

следи да

$$\Delta_n(t) \le \|F(\mathbf{x}_n(j\alpha/n), j\alpha/n) - F(\mathbf{x}_n(t), t)\| < \varepsilon$$

тј. $\Delta_n(t) \rightrightarrows 0$.

Важи

$$\|\mathbf{x}_n(s) - \mathbf{x_n}(t)\| \overset{(\heartsuit)}{=} \left\| \int_t^s [F(\mathbf{x}_n(u), u) + \Delta_n(u)] du \right\| \le \int_t^s \|F(\mathbf{x}_n(u), u) + \Delta_n(u)\| du \le |t - s| \, (M + c),$$

где је c неко (униформно) горње ограничење низа Δ_n. Једнакост ($\heartsuit$) следи из непрекидности пресликавања $\mathbf{x}_n$, непрекидности интеграла по горњој граници и Њутн-Лајбницове формуле примењене на интервалима $((j-1)\alpha/n, j\alpha/n)$.

Из Арцела-Асколијеве теореме сада закључујемо да низ $\mathbf{x}_n$ има подниз (означен исто са $\mathbf{x}_n$) који равномерно конвергира ка неком пресликавању $\mathbf{x}$.

IV: x је решење једначине.

Имамо

$$\mathbf{x}_n(t) = \mathbf{x}_0 + \int_0^t [F(\mathbf{x}_n(u), u) + \Delta_n(u)] \, du.$$

Како смо већ доказали да $\Delta_n(t) \rightrightarrows 0$, $\mathbf{x}_n \rightrightarrows \mathbf{x}$ и како је F непрекидно, кад прођемо лимесом кроз горњу једнакост добијамо:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_0^t F(\mathbf{x}(u), u) du,$$

што управо значи да је $\mathbf{x}$ решење једначине (72).

□

8. Задаци

(1) Написати првих неколико чланова у Пикаровом итерационом поступку. Решити једначину на било који начин и одредити домен добијеног решења.
- $x' = x + 2$, $x(0) = 2$;
- $x' = x^{4/3}$, $x(0) = 0$;
- $x' = x^{4/3}$, $x(0) = 1$;
- $x' = \sin x$, $x(0) = 0$;
- $x' = \frac{x}{t}$, $x(t_0) = x_0$, $t_0 \neq 0$;
- $x' = \frac{1}{2x}$, $x(1) = 1$.

✓

(2) Наћи Липшицову константу за пресликавање f на скупу A, или доказати да не постоји.
- $f(x) = |x|$, $A = \mathbb{R}$;
- $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $A = [-1, 1]$;
- $f(x) = \frac{1}{x}$, $A = [1, \infty)$;
- $f(x, y) = (x + 2y, -y)$, $A = \mathbb{R}^2$;
- $f(x, y) = \frac{xy}{1+x^2+y^2}$, $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 4\}$.

✓

(3) а) Којим векторским пољем је генерисано дејство $x \mapsto x\cos t + y \sin t$, $y \mapsto -x \sin t + y \cos t$ групе $\mathbb{R}$ на $\mathcal{U} = \mathbb{R}^2$? Нацртати то поље.
б) Наћи дејство групе $\mathbb{R}$ на $\mathcal{U} = \mathbb{R}^2$ генерисано векторским пољем $F = y\frac{\partial}{\partial x} - g\frac{\partial}{\partial y}$ (g је реална константа) и нацртати његове орбите. ✓

(4) Извести доказ Леме 87 из Теореме 96. ✓

(5) Доказати да векторска поља $F = (y^2, 0)$ и $G = (0, x^2)$ у равни $\mathbb{R}^2$ генеришу једнопараметарске фамилије дифеоморфизама дефинисане за свако $t \in \mathbb{R}$, док векторско поље $F + G$ не. ✓

ГЛАВА 4

Класификација фазног тока код линеарних система са константним коефицијентима

Нека су дате области $\mathcal{U},\mathcal{W}\subset\mathbb{R}^n$ и $X:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^n$, $Y:\mathcal{W}\to\mathbb{R}^n$ глатка векторска поља на њима. Кажемо да су фазни токови ϕ^t и ψ^t дефинисани једначинама

$$\frac{d\phi^t}{dt}=X(\phi^t),\quad \phi^0=\mathrm{Id}$$
$$\frac{d\psi^t}{dt}=Y(\psi^t),\quad \psi^0=\mathrm{Id}$$

конјуговани или *еквивалентни*[1] ако постоји бијекција

$$\varphi:\mathcal{U}\to\mathcal{W}$$

таква да важи

$$\varphi\circ\phi^t=\psi^t\circ\varphi.$$

Ако је још и:

- φ линеарно, кажемо да су токови ϕ^t и ψ^t *линеарно еквивалентни*;
- φ хомеоморфизам, кажемо да су токови ϕ^t и ψ^t *тополошки еквивалентни*;
- φ дифеоморфизам, кажемо да су токови ϕ^t и ψ^t *диференцијално еквивалентни.*

Користићемо термин еквивалентни и за саме системе, а не само за токове.

Напомена 127. Ако са $\gamma_{\phi^t}(\mathbf{x})$ означимо трајекторију тачке $\mathbf{x}$:

$$\gamma_{\phi^t}(\mathbf{x}):=\{\phi^t(\mathbf{x})\mid t\in\mathbb{R}\},$$

тада је очигледно да, за еквивалнтне токове ϕ^t и ψ^t, бијекција φ слика трајекторију тачке $\mathbf{x}$ на трајекторију тачке $\varphi(\mathbf{x})$:

$$\varphi(\gamma_{\phi^t}(\mathbf{x}))=\gamma_{\psi^t}(\varphi(\mathbf{x})).$$

$\diamond$

Јасно је да су линеарно еквивалентни фазни токови и диференцијално еквивалентни, а диференцијално еквивантни - тополошки еквивалентни.

Задатак 128. Доказати да су линеарна, тополошка и диференцијална еквиваленција заиста релације еквиваленције на скупу фазних токова у $\mathbb{R}^n$.

✓

1. Линеарна класификација

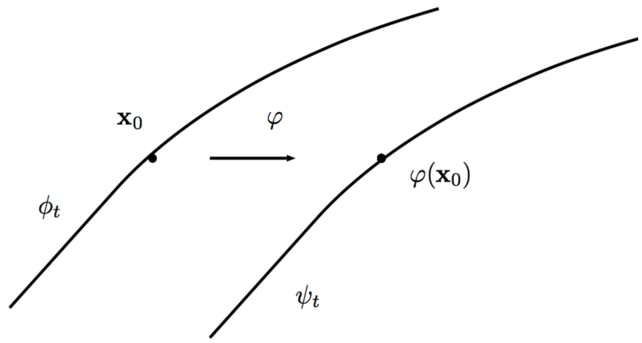
Претпоставимо да матрице A и B имају све сопствене вредности различите. Означимо са $\sigma(A)$ скуп сопствених вредности матрице A.

Теорема 129. *Фазни токови придружени линеарним системима*

$$\mathbf{x}'=A\mathbf{x}\quad \textit{и}\quad \mathbf{x}'=B\mathbf{x}$$

су линеарно еквивалентни ако и само је $\sigma(A)=\sigma(B)$.

[1] Ова терминологија није уједначена у литератури. Термин *еквивалентни* се код неких аутора користи за нешто слабији услов.



Слика 1. Еквивалентни токови

Доказ.$\Rightarrow$: Нека су ϕ^t и ψ^t линеарно еквивалентни и

$$\begin{aligned} \tfrac{d\phi^t}{dt} &= A\phi^t, \quad \phi^0 = \mathrm{Id} \\ \tfrac{d\psi^t}{dt} &= B\psi^t, \quad \psi^0 = \mathrm{Id}\,. \end{aligned}$$

То значи да је

$$\phi^t(\mathbf{x}) = e^{tA}\mathbf{x}, \quad \psi^t(\mathbf{x}) = e^{tB}\mathbf{x}$$

и да постоји линеарни изоморфизам L такав да је

$$Le^{tA}\mathbf{x} = e^{tB}L\mathbf{x}.$$

Диференцирајмо последњу једнакост по t:

$$Le^{tA}A\mathbf{x} = e^{tB}BL\mathbf{x}.$$

Ако у последњем изразу ставимо $t = 0$, како је $e^0 = E$, добијамо да је, за свако $\mathbf{x}$:

$$LA\mathbf{x} = BL\mathbf{x},$$

тј. $LA = BL$. Ово значи да су матрице A и B сличне, па су им сопствене вредности једнаке. Приметимо да за овај смер тврђења није био потребан услов различитости сопствених вредности.
$\Leftarrow$: Ако матрице A и B имају различите сопствене вредности и ако је $\sigma(A) = \sigma(B)$, онда су оне сличне (јер су обе сличне истој дијагоналној матрици, будући дијагонализабилне). Одавде имамо

$$A = P^{-1}BP \Rightarrow \phi^t(\mathbf{x}) = e^{tA}\mathbf{x} = e^{P^{-1}BPt}\mathbf{x} = P^{-1}e^{tB}P\mathbf{x},$$

па је

$$P\phi^t(\mathbf{x}) = e^{tB}P\mathbf{x} = \psi^t(P\mathbf{x}),$$

тј.

$$P\phi^t = \psi^t P,$$

па је линеарно пресликавање φ дато матрицом P. $\square$

Задатак 130. Доказати да системи

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x' = x \\ y' = x + y \end{cases}$$

нису линеарно еквивалентни иако имају исте сопствене вредности. Ово показује да се услов различитих сопствених вредности у смеру $\Leftarrow$ у Теореми 129 не може изоставити. ✓

Напомена 131. Из доказа Теореме 129 видимо да су фазни токови придружени линеарним системима
$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} \quad \text{и} \quad \mathbf{x}' = B\mathbf{x}$$
линеарно еквивалентни ако и само су матрице A и B сличне (невезано за претпоставку о различитим сопственим вредностима). $\diamond$

2. Диференцијална класификација

Теорема 132. *Фазни токови придружени системима*
$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} \quad \text{и} \quad \mathbf{x}' = B\mathbf{x}$$
су диференцијално еквивалентни ако и само ако су линеарно еквивалентни.

Доказ. Један смер је јасан. Претпоставимо зато да су фазни токови диференцијално еквивалентни, и нека је φ одговарајући дифеоморфизам. Означимо са L линеарни изоморфизам
$$L := d\varphi(\mathbf{0}).$$
Из услова еквивалентности имамо
$$\varphi \circ e^{tA} = e^{tB} \circ \varphi,$$
па ако ову једнакост диференцирамо у нули (као пресликавање из $\mathbb{R}^n$ у $\mathbb{R}^n$) добијамо на левој страни:
$$d(\varphi \circ e^{tA})(\mathbf{0}) = d\varphi(e^{tA} \cdot \mathbf{0}) d(e^{tA})(\mathbf{0}) = d\varphi(\mathbf{0}) e^{tA} = L e^{tA},$$
док на десној страни имамо:
$$d(e^{tB} \circ \varphi)(\mathbf{0}) = d(e^{tB})(\varphi(\mathbf{0})) d\varphi(\mathbf{0}) = e^{tB} L.$$
Из $Le^{tA} = e^{tB}L$ следи $L\phi^t = \psi^t L$. $\square$

3. Тополошка класификација

Пример 133. Системи
$$x' = -x \quad \text{и} \quad x' = -2x$$
су тополошки, али не и диференцијално еквивалентни (у $\mathbb{R}$). Заиста, одговарајући токови су
$$\phi^t(x) = e^{-t}x \quad \text{и} \quad \psi^t(x) = e^{-2t}x,$$
и пресликавање $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ треба да за довољава:
$$\varphi(\phi^t(x)) = \psi^t(\varphi(x)) \Leftrightarrow \varphi(x) = e^{2t}\varphi(e^{-t}x).$$
Није тешко погодити да пресликавање $\varphi(x) = x^2$ ово задовољава, међутим оно није хомеоморфизам јер није бијекција. Али ако заменимо
$$\varphi(x) := \begin{cases} x^2, & x \geq 0, \\ -x^2, & x \leq 0, \end{cases}$$
добијамо хомеоморфизам за који важи $\varphi(\phi^t(x)) = \psi^t(\varphi(x))$. Ово пресликавање, наравно, није дифеоморфизам јер његов инверз није диференцијабилан у нули. Из Теореме 132 и 129 следи да такав дифеоморфизам и не постоји. ✓

Нека је A квадратна матрица. Означимо са $m_+(A)$ број сопствених вредности λ таквих да је $\operatorname{Re}\lambda > 0$, и са $m_-(A)$ број сопствених вредности λ таквих да је $\operatorname{Re}\lambda < 0$.

Дефиниција 134. Квадратна матрица A је *хиперболичка* ако за сваку сопствену вредност λ важи $\operatorname{Re}\lambda \neq 0$.

Теорема 135. *Нека су A и B хиперболичке матрице. Тада су фазни токови придружени системима $X' = AX$ и $X' = BX$ тополошки еквивалентни ако и само је $m_+(A) = m_+(B)$.*

Доказ.$\Leftarrow$: Поделићемо доказ у неколико корака.

I **корак.** Фазни ток придружен директном производу тополошки еквивалентних система је тополошки еквивалентан, тј, ако имамо системе:

$$(*)\begin{cases} X' = A_1 X & (\spadesuit) \\ Y' = A_2 Y & (\diamondsuit) \end{cases} \quad \text{и} \quad (**)\begin{cases} X' = B_1 X & (\heartsuit) \\ Y' = B_2 Y & (\clubsuit) \end{cases}$$

такве да је $(\spadesuit) \sim (\heartsuit)$, $(\diamondsuit) \sim (\clubsuit)$, онда је $(*) \sim (**)$. Заиста, решења ових система су

$$\phi^t(X,Y) = (e^{tA_1}X, e^{tA_2}Y), \quad \psi^t(X,Y) = (e^{tB_1}X, e^{tB_2}Y),$$

па, ако је

$$\varphi_1 : (\spadesuit) \sim (\heartsuit), \quad \varphi_2(\diamondsuit) \sim (\clubsuit),$$

онда је

$$\varphi := (X,Y) := (\varphi_1(X), \varphi_2(Y)) : (*) \sim (**).$$

II **корак.** Фазни ток система $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ је еквивалентан фазном току система

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} A^+ & 0 \\ 0 & A^- \end{bmatrix} \mathbf{x}, \tag{75}$$

где је $A^+ \in M_{m+(A)}(\mathbb{R})$ матрица која има све сопствене вредности са позитивним реалним делом, а $A^- \in M_{m-(A)}(\mathbb{R})$ матрица која има све сопствене вредности са негативним реалним делом. Заиста, из Жорданове теореме о нормалној форми матрице (в. страну 38), после евентуалне пермутације базних вектора, закључујемо да постоји инвертибилна матрица P таква да је

$$PAP^{-1} = \begin{bmatrix} A^+ & 0 \\ 0 & A^- \end{bmatrix}.$$

Одавде, из Напомене 131, закључујемо да су фазни токови једначине $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ и (75) линеарно, а самим тим и тополошки еквивалентни.

III **корак.** Ако је $\operatorname{Re}\lambda > 0$ за сваку сопствену вредност матрице A, тада је систем $X' = AX$ еквивалентан систему $X' = X$.

Приметимо да из корака I, II, III директно следи импликација $\Leftarrow$.

Докажимо још тврђење из корака III.

Подсетимо се да је из Жорданове теореме

$$A \sim P + Q$$

при чему је

$$P = \begin{bmatrix} D_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & D_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & D_m \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & C_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & C_{m-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}. \tag{76}$$

Матрице D_j или дијагоналне или имају матрице облика

$$\begin{bmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ -\beta_j & \alpha_j \end{bmatrix}$$

на дијагонали, а матрице C_j на спољашној дијагонали имају јединице или матрице

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

и све остало нуле.

Лема 136. *За свако $\varepsilon > 0$ матрица A је слична матрици $P + \varepsilon Q$, где је $P + Q$ Жорданова нормална форма матрице A.*

Доказ. Знамо да је матрица A слична матрици $P + Q$. Докажимо зато да је матрица $P + Q$ слична матрици $P + \varepsilon Q$. Приметимо да, ако је

$$T_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \varepsilon^{k-1} \end{bmatrix},$$

тада је

$$T_k^{-1} \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix} T_k = \begin{bmatrix} \lambda & \varepsilon & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \varepsilon & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix},$$

односно

$$T_{2k}^{-1} \begin{bmatrix} D_2 & E_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & D_2 & E_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & D_2 & E_2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & D_2 \end{bmatrix} T_{2k} = \begin{bmatrix} D_2 & \varepsilon E_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & D_2 & \varepsilon E_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & D_2 & \varepsilon E_2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & D_2 \end{bmatrix},$$

где су, као и раније

$$D_2 = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Зато ако је

$$T := \begin{bmatrix} T_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & T_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & T_m \end{bmatrix},$$

имамо

$$T^{-1}(P + Q)T = P + \varepsilon Q.$$

□

Напомена 137. Лема 136 нам заправо каже да је скуп дијагонализабилних матрица густ у скупу квадратних матрица.

Из претходне леме следи да је довољно да докажемо тврђење из корака III за матрицу $A = P + \varepsilon Q$, при чему матрица A има сопствене вредности са позитивним реалним делом, а $\varepsilon > 0$ произвољно. Изаберимо

$$\varepsilon < c, \quad c := \frac{1}{2} \min \operatorname{Re}(\sigma(P)).$$

Лема 138. *За овако изабране c и ε и $A = P + \varepsilon Q$ важи:*

$$\langle A\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle > c\|\mathbf{x}\|^2.$$

Доказ. Нека су λ_j реалне, а $\alpha_j \pm i\beta_j$ комплексно–конјуговане сопствене вредности матрице A. Нека је

$$\mathbf{x} = \sum a_j \mathbf{e}_j + \sum (b_j \mathbf{f}_j + \ c_j \mathbf{g}_j),$$

при чему су базни вектори $\mathbf{e}_j$, $\mathbf{f}_j$ и $\mathbf{g}_j$ одређени условима $P\mathbf{e}_j = \lambda_j \mathbf{e}_j$, а $P(\mathbf{f}_j + i\mathbf{g}_j) = (\alpha_j + i\beta_j)(\mathbf{f}_j + i\mathbf{g}_j)$. Имамо

$$\langle P\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle = \sum \lambda_j a_j^2 + \sum (b_j^2 + c_j^2)\alpha_j \geq 2c \sum (a_j^2 + b_j^2 + c_j^2) = 2c\|\mathbf{x}\|^2.$$

Даље, из Коши – Шварцове неједнакости следи:

$$|\langle \varepsilon Q\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle| \leq \varepsilon \|Q\mathbf{x}\| \|\mathbf{x}\| \leq \varepsilon \|\mathbf{x}\|^2,$$

јер линеарно пресликавање Q очигледно не повећава норму вектора.

Коначно, добијамо:

$$\langle A\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle = \langle P\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle + \langle \varepsilon Q\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle \geq 2c\|\mathbf{x}\|^2 - \varepsilon\|\mathbf{x}\|^2 > c\|\mathbf{x}\|^2. \tag{77}$$

□

Из претходне леме следи да норма сваког решења $\mathbf{x}(t)$ система $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ строго расте по t. Заиста

$$\frac{d}{dt}\|\phi^t(\mathbf{x})\|^2 = 2\left\langle \frac{d}{dt}\phi^t(\mathbf{x}), \phi^t(\mathbf{x})\right\rangle = 2\langle A\phi^t(\mathbf{x}), \phi^t(\mathbf{x})\rangle \geq c\|\phi^t(\mathbf{x})\|^2 > 0. \tag{78}$$

Лема 139. *Ако је* $\operatorname{Re}\lambda > 0$ *за свако* $\lambda \in \sigma(A)$, *онда је* $\lim\limits_{n\to+\infty} \|\phi^t(\mathbf{x})\| = \infty$ *за свако* $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

Доказ. Ако са $f(t)$ означимо реалну фукцију $f(t) = \log\|\phi^t(\mathbf{x})\|$, за $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, из (77) видимо да је $f'(t) \geq c$, па је $f(t) \geq f(0) + ct$. □

Задатак 140. Ако је $\operatorname{Re}\lambda < 0$ за свако $\lambda \in \sigma(A)$, онда је $\lim\limits_{n\to+\infty} \|\phi^t(\mathbf{x})\| = 0$ за свако $\mathbf{x}$. Ако је $\operatorname{Re}\lambda > 0$ за свако $\lambda \in \sigma(A)$, онда је $\lim\limits_{n\to-\infty} \|\phi^t(\mathbf{x})\| = 0$ за свако $\mathbf{x}$. Ако је $\operatorname{Re}\lambda < 0$ за свако $\lambda \in \sigma(A)$, онда је $\lim\limits_{n\to-\infty} \|\phi^t(\mathbf{x})\| = \infty$ за свако $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Доказати. ✓

Сада можемо да дефинишемо тражени хомеоморфизам φ. Нека је

$$S := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\| = 1\}.$$

Дефинишимо φ на следећи начин:

- $\varphi(\mathbf{0}) := \mathbf{0}$;
- за $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ постоје јединствени $\mathbf{x}_0 \in S$ и $t_0 \in \mathbb{R}$ такви да је $\phi^{t_0}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}$. Заиста, из Леме 139 и Задатка 140 имамо

  $$\lim_{t\to-\infty} \|\phi^t(\mathbf{x})\| = 0, \quad \lim_{t\to+\infty} \|\phi^t(\mathbf{x})\| = +\infty$$

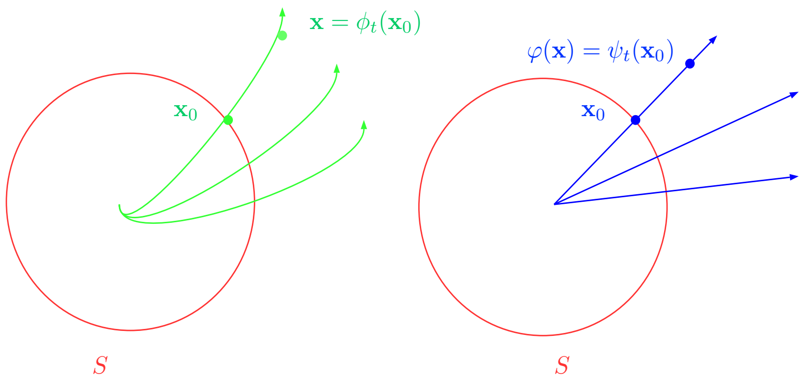
  и пресликавање

  $$t \mapsto \|\phi^t(\mathbf{x})\|$$

  је строго монотоно, ако ϕ^t није константна трајекторија. Како је оно и непрекидно, то постоји јединствено t_0 тдј. $\phi^{-t_0}(\mathbf{x}) \in S$. За такво t_0, означимо са $\mathbf{x}_0 := \phi^{-t_0}(\mathbf{x})$ и дефинишимо

  $$\varphi(\mathbf{x}) := \psi^{t_0}(\mathbf{x}_0)$$

  (видети Слику 2).



Слика 2. Конструкција пресликавања φ

Проверимо да φ има тражене особине.

• Пре свега, φ је бијекција. Заиста, инверз пресликавања φ се дефинише слично, за $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ постоји јединствено $\mathbf{y}_0 \in S$, $t_0 \in \mathbb{R}$ за које је $\psi^{t_0}(\mathbf{y}_0) = \mathbf{y}$, па је $\varphi^{-1}(\mathbf{y}) = \phi^{t_0}(\mathbf{y}_0)$.

• Како су φ и φ^{-1} дефинисани на исти начин, да бисмо доказали да је φ хомеоморфизам, довољно је да покажемо да је φ непрекидно.

• Докажимо прво непрекидност у тачки $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Нека је су $\mathbf{x}$ и t_0 фиксирани и такви да је

$$\phi^{t_0}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}, \quad \text{за} \quad \mathbf{x}_0 \in S.$$

Приметимо да је довољно да докажемо следеће

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \quad d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \delta \Rightarrow |s_0 - t_0| < \varepsilon, \tag{$\clubsuit$}$$

где су s_0 и $\mathbf{y}_0$ такви да је

$$\phi^{s_0}(\mathbf{y}_0) = \mathbf{y}, \quad \text{за} \quad \mathbf{y}_0 \in S.$$

Заиста, ако важи ($\clubsuit$), имамо $d(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = d(\phi^{-t_0}(\mathbf{x}), \phi^{-s_0}(\mathbf{y}))$, па, ако је s_0 довољно близу t_0 и тачка $\mathbf{y}$ довољно близу тачки $\mathbf{x}$, због непрекидности пресликавања $\phi^t(\mathbf{x})$ у тачки $(\mathbf{x_0}, -t_0)$ (по $(\mathbf{x}, t)$), и растојање $d(\phi^{-t_0}(\mathbf{x}), \phi^{-s_0}(\mathbf{y}))$ је произвољно мало. Сада, из $d(\varphi(\mathbf{x}), \varphi(\mathbf{y})) = d(\psi^{t_0}(\mathbf{x}_0), \psi^{s_0}(\mathbf{y}_0))$ и непрекидности пресликавања ψ^t у тачки $(\mathbf{x_0}, t_0)$ закључујемо да је φ непрекидно. Докажимо зато ($\clubsuit$).

Из једнакости (77) следи да је

$$\frac{d}{dt}\|\phi^t(\mathbf{z})\| = \frac{\left\langle \frac{d\phi^t(\mathbf{z})}{dt}, \phi^t(\mathbf{z}) \right\rangle}{\|\phi^t(\mathbf{z})\|} = \frac{\langle A\phi^t(\mathbf{z}), \phi^t(\mathbf{z})\rangle}{\|\phi^t(\mathbf{z})\|} \geq c\|\phi^t(\mathbf{z})\|$$

и, ако је $\|\phi^t(\mathbf{z})\| \in [1-\delta_1, 1+\delta_1]$, за довољно мало δ_1, имаћемо

$$\frac{d}{dt}\|\phi^t(\mathbf{z})\| \geq \frac{c}{2} \tag{$\heartsuit$}.$$

Нека је $\varepsilon > 0$ дато. Изаберимо $\delta > 0$ такво да важи

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \delta \Rightarrow |\|\phi^{-t_0}(\mathbf{x})\| - \|\phi^{-t_0}(\mathbf{y})\|| < \frac{c\varepsilon}{2} \tag{$*$}$$

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \delta, \ \|\phi^{-t_0}(\mathbf{x})\| = 1 \Rightarrow \|\phi^{-t_0}(\mathbf{y})\| \in [1-\delta_1, 1+\delta_1]. \tag{$**$}$$

Сада имамо

$$\frac{c\varepsilon}{2} \overset{(*)}{>} |\|\phi^{-t_0}(\mathbf{y})\| - \|\phi^{-t_0}(\mathbf{x})\| = |\|\phi^{-t_0}(\mathbf{y})\| - 1| = |\|\phi^{-t_0}(\mathbf{y})\| - \|\mathbf{y}_0\|| =$$
$$|\|\phi^{-t_0}(\mathbf{y})\| - \|\phi^{-s_0}(\mathbf{y})\|| = \left|\int_{-s_0}^{-t_0} \frac{d}{d\tau}\|\phi^{\tau}(\mathbf{y})\| d\tau\right| \overset{(**)+(\heartsuit)}{\geq} \frac{c}{2}|s_0 - t_0|,$$

па је $|s_0 - t_0| < \varepsilon$.

• Докажимо сада непрекидност у координатном почетку. Нека је $\varepsilon > 0$ дато. Како је $\lim\limits_{t\to-\infty} \psi^t(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, то постоји t_1 такво да је

$$\psi^{-t}(S) \subset B(\mathbf{0}, \varepsilon), \quad t \geq t_1.$$

Изаберимо

$$\delta := \min_S \|\phi^{-t_1}\|.$$

Имамо:

$$\|\mathbf{x}\| < \delta,\ \mathbf{x}_0 = \phi^{t_2}(\mathbf{x}) \in S \quad \overset{(\spadesuit)}{\Longrightarrow} \quad t_2 > t_1 \quad \Rightarrow \quad \|\varphi(\mathbf{x})\| = \|\psi^{-t_2}(\mathbf{x}_0)\| < \varepsilon.$$

Импликација ($\spadesuit$) важи, јер ако би било $t_2 \leq t_1$, имали бисмо $-t_2 \geq -t_1$, па како норма расте дуж трајекторија система:

$$\delta > \|\mathbf{x}\| = \|\phi^{-t_2}(\mathbf{x}_0)\| \geq \|\phi^{-t_1}(\mathbf{x}_0)\| \geq \delta,$$

што је контрадикција.

• Остало је још да да докажемо да је

$$\varphi \circ \phi^t(\mathbf{x}) = \psi^t \circ \varphi(\mathbf{x}).$$

За $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ово је очигледно тачно. Нека $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ и нека је t_0 такво да је $\phi^{t_0}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}$, $\mathbf{x}_0 \in S$. Знамо да је $\varphi(\mathbf{x}) = \psi^{t_0}(\mathbf{x}_0)$ и $\phi^{t+t_0}\mathbf{x}_0 = \phi^t(\mathbf{x})$. Зато је

$$\varphi(\phi^t(\mathbf{x})) = \varphi(\phi^{t+t_0}(\mathbf{x}_0)) = \psi^{t+t_0}(\mathbf{x}_0) = \psi_t(\psi^{t_0}(\mathbf{x}_0)) = \psi^t(\varphi(\mathbf{x})).$$

$\Rightarrow$: Нека су системи $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ и $\mathbf{x}' = B\mathbf{x}$ тополошки еквивалентни.

Дефинишимо скупове:

$$W^s(A) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \lim_{t\to+\infty} e^{tA}\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$$
$$W^u(A) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \lim_{t\to-\infty} e^{tA}\mathbf{x} = \mathbf{0}\}.$$

Скупови $W^s(A)$ и $W^u(A)$ се зову редом *стабилна и нестабилна многострукост* придружене матрици A.

За почетак, приметимо да тополошки еквивалентни системи имају хомеоморфне стабилне и нестабилне многострукости. Пре свега, ако је φ хомеоморфизам за који важи $\varphi \circ \phi^t = \psi^t \circ \varphi$, тада мора бити $\varphi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Заиста, ако претпоставимо да је $\varphi(\mathbf{0}) = \mathbf{c}$, имамо

$$\mathbf{c} = \varphi(\mathbf{0}) = \varphi \circ \phi^t(\mathbf{0}) = \psi^t \circ \varphi(\mathbf{0}) = \psi^t(\mathbf{c}),$$

па видимо да је $\mathbf{c}$ еквилибријум система $\mathbf{x}' = B\mathbf{x}$. Ово је могуће само ако је $\mathbf{c} = \mathbf{0}$, јер је систем хиперболички, односно матрица B је недегенерисана.

Одавде ћемо закључити да је

$$\varphi : W^s(A) \xrightarrow{\approx} W^s(B).$$

Заиста

$$\mathbf{x} \in W^s(A) \Leftrightarrow \phi^t(\mathbf{x}) \overset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbf{0} \Leftrightarrow \varphi \circ \phi^t(\mathbf{x}) \overset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbf{0} \Leftrightarrow \psi^t \circ \varphi(\mathbf{x}) \overset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbf{0} \Leftrightarrow \varphi(\mathbf{x}) \in W^s(B).$$

Из претходне дискусије и Корака II у доказу смера $\Leftarrow$ закључујемо да су $W^s(\widetilde{A})$ и $W^s(\widetilde{B})$ хомеоморфни, где су

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} A^+ & 0 \\ 0 & A^- \end{bmatrix}, \quad \widetilde{B} = \begin{bmatrix} B^+ & 0 \\ 0 & B^- \end{bmatrix}$$

као у Кораку II.

Доказаћемо да су стабилна и нестабилна многострукост матрице $\widetilde{A}$ изоморфне просторима $\mathbb{R}^{m_-(A)}$ и $\mathbb{R}^{m_+(A)}$, тј. да су стабилна и нестабилна многострукост матрице A хомеоморфне просторима $\mathbb{R}^{m_-(A)}$ и $\mathbb{R}^{m_+(A)}$.

Ако је ϕ^t решење система

$$\frac{d\phi^t}{dt} = \widetilde{A}\phi^t, \quad \phi^0 = \mathrm{Id},$$

тада је

$$\phi^t(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(e^{tA^+}\mathbf{x}, e^{tA^-}\mathbf{y}\right),$$

па је

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \ W^s(\widetilde{A}) \Leftrightarrow \left(e^{tA^+}\mathbf{x}, e^{tA^-}\mathbf{y}\right) \to \mathbf{0} \overset{(\star)}{\Leftrightarrow} \mathbf{x} = \mathbf{0},$$

одакле закључујемо да је

$$W^s(\widetilde{A}) \cong \mathbb{R}^{m_-(A)}.$$

Еквиваленција $(\star)$ следи из Леме 139 и Задатка 140.

Одавде добијамо

$$\mathbb{R}^{m_-(A)} \approx W^s(\widetilde{A}) \approx W^s(A) \approx W^s(B) \approx W^s(\widetilde{B}) \approx \mathbb{R}^{m_-(B)},$$

где $\approx$ означава хомеоморфне просторе.

На крају, позваћемо се на један тополошки (нееелементарни) резултат који каже да су простори $\mathbb{R}^k$ и $\mathbb{R}^l$ хомеоморфни ако и само ако је $k = l$. □

Пример 141. (Планарни случај.) У Глави 2 смо описали фазне потрете линеарних система у равни. На основу претходних теорема можемо дати њихову потпуну класификацију.

Свака два седла су тополошки еквивалентна јер је код седла увек $m_+(A) = m_-(A) = 1$. С друге стране, седло није тополошки еквивалентно ниједном чвору јер је код чвора $m_+(A) = 2$ или $m_+(A) = 0$.

Свака два стабилна чвора су тополошки еквивалентна, као и сваки стабилни чвор са стабилном спиралом ($\alpha < 0$), као и сваке две стабилне спирале. Исто важи и за нестабилне чворове и спирале ($\alpha > 0$). С друге стране, стабилни чвор (спирала) није тополошки еквивалентан нестабилном чвору. Стабилна и нестабилна спирала нису тополошки еквивалентне.

Што се тиче центара, два центра (која одговарају матрицама A и B) су линеарно (односно диференцијабилно) еквивалентна ако и само је $\sigma(A) = \sigma(B)$.[2] Може се доказати да је ово неопходан и довољан услов и за тополошку еквивалентност два центра. С друге стране, центар није тополошки еквивалентан ниједном другом фазном портрету, јер су трајекторије у случају центра компактни скупови, док су код свих осталих портрета некомпактни (видети Напомену 127).

Да ли је систем $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ такав да је $\lambda = 0$ сопствена вредности матрице A тополошки еквивалентан систему $\mathbf{x}' = B\mathbf{x}$, ако су сопствене вредности матрице B различите од нуле?

✓

Пример 142. (Стабилне и нестабилне многострукости у планарном случају.) У случају седла стабилна и нестабилна многострукост су праве кроз координатни почетак (в. Слику 1.1 на страни 23). У овом случају је $m_+(A) = m_-(A) = 1$.

[2] Са $\sigma(A)$ означавамо спектар, односно скуп сопствених вредности матрице A.

У случају стабилних чворова и стабилне спирале стабилна многострукост је цела раван, а нестабилна само координатни почетак (в. Слику 1.1 на страни 24 и Слику 1.2 на страни 26). Овде је $m_+(A) = 0$, $m_-(A) = 2$.

У случају нестабилних чворова и нестабилне спирале стабилна многострукост је само координатни почетак, а нестабилна цела раван (в. Слику 1.1 на страни 24 и Слику 1.2 на страни 26). Овде је $m_+(A) = 2$, $m_-(A) = 0$. ✓

На крају наводимо (без доказа) једну теорему која се бави тополошком класификацијом нелинеарног система у околини тзв. хиперболичког еквилибријума (видети Напомену 159). У њој видимо још један значај линеаризације нелинеарних система. Прецизније, она каже да је нелинеарни систем тополошки еквивалентан својој линеаризацији у околини хиперболичког еквилибријума. За скицу доказа читаоца упућујемо на [5], а за комплетан доказ на [6].

Теорема 143. (Хартмен[3]-Гробман[4]) *Нека је* $F(\mathbf{x}_*) = \mathbf{0}$ *и нека је* $A = dF(\mathbf{x}_*)$ *хиперболичка матрица. Тада постоји околина* $\mathcal{U}$ *тачке* $\mathbf{x}_*$ *на којој су токови система*

$$\mathbf{x}' = F(\mathbf{x}) \quad \text{и} \quad \mathbf{x}' = A\mathbf{x}$$

тополошки еквивалентни. □

4. Задаци

(1) Доказати да су системи

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = x^2 + y \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$$

диференцијабилно еквивалентни. ✓

[3] Philip Hartman (1915–2015), амерички математичар

[4] Д. М. Гробман (???), руски математичар.

ГЛАВА 5

Стабилност еквилибријума

У претходној глави смо видели да се у околини несингуларне тачке ($F(\mathbf{x}_0) \neq \mathbf{0}$) систем $\mathbf{x}' = F(\mathbf{x})$ понаша предвидљиво, прецизније да је он у неким координатама обична транслација. Заиста, ово је садржај Теореме о исправљивости векторског поља (Теорема 114). Због тога нам је интересантније да изучавамо понашење система у околини сингуларне тачке, односно тачке $\mathbf{x}_*$ за коју је $F(\mathbf{x}_*) = \mathbf{0}$, коју зовемо и стацинарном, тачком равнотеже, или еквилибријумом система. Приметимо да је константна трајекторија једина трајекторија која пролази кроз еквилибријум, ако је поље F као у Пикаровој теореми (што у целој овој глави претпостављамо). Приметимо и да је, из Тејлоровог развоја

$$F(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}_*) + dF(\mathbf{x}_*)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*) + o(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*) = dF(\mathbf{x}_*)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*) + o(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*),$$

кад је $\mathbf{x}$ близу $\mathbf{x}_*$, и да је једначина

$$\mathbf{x}' = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_*)' = dF(\mathbf{x}_*)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*)$$

линеарна по $\mathbf{x} - \mathbf{x}_*$, тако да можемо да очекујемо да ће се и нелинеарни систем $\mathbf{x}' = F(\mathbf{x})$ у близини еквилибријума понашати слично његовој линеаризацији $\mathbf{x}' = dF(\mathbf{x}_*)(\mathbf{x})$, а линеарне системе смо детаљно изучили.

Пре свега уведимо неке појмове.

Дефиниција 144. Нека је $\mathbf{x}_*$ еквилибријум система $\mathbf{x}' = F(\mathbf{x})$, $F : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$. Кажемо да је $\mathbf{x}_*$

- *стабилни еквилибријум* ако за сваку околину $\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}$ тачке $\mathbf{x}_*$ постоји околина $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_0 \ni \mathbf{x}_*$, таква да важи
$$\mathbf{x} \in \mathcal{U}_0 \Rightarrow \phi^t(\mathbf{x}) \in \mathcal{U}_1, \quad t \geq 0,$$
где је ϕ^t решење система
$$\frac{d\phi^t}{dt} = F(\phi^t), \quad \phi^0 = \mathrm{Id};$$
- *асимптотски стабилни еквилибријум* ако је стабилни еквилибријум и ако још важи:
$$\mathbf{x} \in \mathcal{U}_0 \Rightarrow \lim_{t \to +\infty} \phi^t(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_*;$$
- *нестабилини еквилибријум* ако није стабилни.

$\diamondsuit$

Пример 145. Координатни почетак је увек еквилибријум линеарног система $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$. Знамо да је решење овог система са почетном вредношћу $\mathbf{x}$ дато са $\phi^t(\mathbf{x}) = e^{At}\mathbf{x}$, као и да у матрици e^{tA} фигуришу линеарне комбинације функција $e^{\lambda t}$, $t^k e^{\lambda t}$, $e^{\alpha t}\cos(\beta t)$, $e^{\alpha t}\sin(\beta t)$, $t^k e^{\alpha t}\cos(\beta t)$, $t^k e^{\alpha t}\sin(\beta t)$ где су λ, $\alpha \pm i\beta$ сопствене вредности матрице A. Ако су све сопствене вредности такве да им је реални део строго негативан, еквилибријум је асимптотски стабилан. Ако матрица A има неку сопствену вредност са строго позитивним реалним делом, координатни почетак је нестабилни еквилибријум (зашто?). А ако су све сопствене вредности са реалним делом мањим или једнаким нули, тада постоји дискусија по вишеструкости сопствене вредности чији је реални део нула. Нпр. центар у планарном случају је стабилни али не и асимптотски стабилни еквилибријум, док, у вишим димензијама, ако је вишеструкост сопствене вредности $i\beta$ већа од један, можемо имати и нестабилни еквилибријум. У примеру матрице

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \beta & 1 & 0 \\ -\beta & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & -\beta & 0 \end{bmatrix}$$

имамо нестабилни еквилибријум у координатном почетку.

У случају планарног система, који фазни портрети имају координатни почетак за стабилни, нестабилни, односно асимптотски стабилни еквилибријум? Размотрити и случај $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$. ✓

Задатак 146. Доказати да су асимптотски стабилни еквилибријуми изоловане тачке. Да ли исто важи за стабилни (нестабилни) еквилибријум? ✓

1. Стабилност еквилибријума - метод функције Љапунова

Било која функција V која задовољава услове следеће теореме се зове *функција Љапунова*[1].

Теорема 147. (Теорема Љапунова.) *Нека је $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ отворен скуп, $F : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ класе C^1 и $\mathbf{x}_* \in \mathcal{U}$ такво да је $F(\mathbf{x}_*) = \mathbf{0}$. Означимо са ϕ^t решење једначине*

$$\frac{d}{dt}\phi^t(\mathbf{x}) = F(\phi^t(\mathbf{x})), \quad \phi^0 = \mathrm{Id}\,.$$

Претпоставимо да постоји функција $V : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ таква да важи

- *V је класе C^1 на $\mathcal{U} \setminus \{\mathbf{x}_*\}$*
- *$V(\mathbf{x}) > 0$ за $\mathbf{x} \in \mathcal{U} \setminus \{\mathbf{x}_*\}$, $V(\mathbf{x}_*) = 0$.*

Тада важи

(а) *ако V опада дуж решења ϕ^t, тада постоји околина $\mathcal{U}_0$ тачке $\mathbf{x}_*$ таква да је за свако $\mathbf{x} \in \mathcal{U}_0$, решење $\phi^t(\mathbf{x})$ дефинисано за свако $t \geq 0$; осим тога, $\mathbf{x}_*$ је стабилни еквилибријум;*

(б) *ако V строго опада дуж решења система, тада постоји околина $\mathcal{U}_0$ тачке $\mathbf{x}_*$ таква да је за свако $\mathbf{x} \in \mathcal{U}_0$, решење $\phi^t(\mathbf{x})$ дефинисано за свако $t \geq 0$; осим тога, $\mathbf{x}_*$ је асимптотски стабилни еквилибријум;*

(в) *ако V строго расте дуж решења система, тада је $\mathbf{x}_*$ нестабилни еквилибријум.*

Напомена 148. Ако уведемо ознаку

$$V'(\mathbf{x}) := \frac{d}{dt}\big[V(\phi^t(\mathbf{x})\big]_{t=0},$$

из

$$\frac{d}{dt}\big[V(\phi^t(\mathbf{x})\big]_{t=s} = \frac{d}{dt}\big[V(\phi^{t+s}(\mathbf{x})\big]_{t=0} = V'(\phi^{\mathrm{s}}(\mathbf{x}))$$

видимо да је

- услов (а) из Теореме 147 еквивалентан услову $V'(\mathbf{x}) \leq 0$, за $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$;
- услов (б) из Теореме 147 еквивалентан услову $V'(\mathbf{x}) < 0$, за $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$;
- услов (в) из Теореме 147 еквивалентан услову $V'(\mathbf{x}) > 0$, за $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$;.

Како је

$$V'(\mathbf{x}) = dV(\phi^t(\mathbf{x}))(F(\phi^t(\mathbf{x}))|_{t=0} = \langle \nabla V(\mathbf{x}), F(\mathbf{x}) \rangle,$$

закључујемо да провера да ли нека глатка функција испуњава неки од три услова (а), (б) или (в) из Теореме 147 не захтева експлицитно решавање једначине. ◇

[1] Алекса́ндр Миха́йлович Ляпуно́в (1857–1918), руски математичар и физичар.

Доказ Теореме 147. (а). Нека важе претпоставке из тачке (а). Нека је $\mathcal{U}_1 \subseteq \mathcal{U}$ произвољна околина тачке $\mathbf{x}_*$ и $r > 0$ такво да $B[\mathbf{x}_*, r] \subset \mathcal{U}_1$. Нека је

$$m := \min_{\partial B[\mathbf{x}_*, r]} V(\mathbf{x}) > 0$$

и

$$\mathcal{U}_0 := \{\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_*, r) \mid V(\mathbf{x}) < m\}.$$

Приметимо да је $\mathcal{U}_0$ отворен скуп и да $\mathbf{x}_* \in \mathcal{U}_0$.

Доказаћемо да је за свако $\mathbf{x} \in \mathcal{U}_0$, $\phi^t(\mathbf{x})$ дефинисано за свако $t \geq 0$, као и да је $\mathcal{U}_0$ тражена околина тачке $\mathbf{x}_*$ из дефиниције стабилног еквилибријума. Нека је $\mathbf{x} \in \mathcal{U}_0$. Докажимо прво да је $\phi^t(\mathbf{x}) \in B(\mathbf{x}_*, r)$ за свако $t \geq 0$ (одавде, на основу теореме о продужењу решења, следи да је $\phi^t(\mathbf{x})$ дефинисано за све $t \geq 0$, видети Последицу 82). Претпоставимо супротно, да је $\phi^{t_1}(\mathbf{x}) \notin B(\mathbf{x}_*, r)$ за неко $t_1 > 0$. Из непрекидности пресликавања $\phi^t(\mathbf{x})$ по t следи да је $\phi^{t_2}(\mathbf{x}) \in \partial B\left[\mathbf{x}_*, r\right]$ за неко $t_2 \in (0, t_1)$. Али, како функција V опада дуж трајекторија ϕ^t, добијамо

$$m \leq V(\phi^{t_2}(\mathbf{x})) \leq V(\phi^0(\mathbf{x})) = V(\mathbf{x}) < m,$$

што је контрадикција.

Из

$$V(\phi^t(\mathbf{x}_0)) \leq V(\phi^0(\mathbf{x}_0)) = V(\mathbf{x}_0) < m$$

закључујемо да је $V(\phi^t(\mathbf{x}_0)) < m$, кадгод је $t \geq 0$ и $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{U}_0$. Одавде имамо

$$t \geq 0,\ \mathbf{x}_0 \in \mathcal{U}_0 \Rightarrow \phi^t(\mathbf{x}_0) \in \mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}_1,$$

што завршава доказ.

(б). Нека је $\mathcal{U}_0$ као у претходној тачки. Хоћемо да докажемо да је $\lim_{t \to +\infty} \phi^t(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_*$, за свако $\mathbf{x} \in \mathcal{U}_0$. Претпоставимо да то није случај, односно, претпоставимо да постоји $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{U}_0$ и низ $t_n \to +\infty$ (можемо да претпоставимо да је строго растући) такви да не важи

$$\lim_{n \to \infty} \phi^{t_n}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_*.$$

Како је низ $\phi^{t_n}(\mathbf{x}_0)$ из конструкције садржан у кугли $B\left[\mathbf{x}_*, r\right]$, то он има конвергентан подниз, означимо га исто са $\phi^{t_n}(\mathbf{x}_0)$ који тежи ка $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_*$, за неко $\mathbf{x}_1 \in B[\mathbf{x}_*, r] \subset \mathcal{U}$. Јасно је да је $\lim_{n \to \infty} V(\phi^{t_n}(\mathbf{x}_0)) = V(\mathbf{x}_1)$. Приметимо да је и $\lim_{t \to +\infty} V(\phi^t(\mathbf{x}_0)) = V(\mathbf{x}_1)$, пошто је функција $t \mapsto V(\phi^t(\mathbf{x}_0))$ монотона. Приметимо да из монотоности ове функције следи и

$$V(\phi^t(\mathbf{x}_0)) > V(\mathbf{x}_1), \quad \text{за свако} \quad t \geq 0. \tag{79}$$

Како функција V строго опада дуж трајекторија система (осим у $\mathbf{x}_*$, а $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_*$ по претпоставци), то је

$$V(\phi^1(\mathbf{x}_1)) < V(\mathbf{x}_0).$$

(Овде користимо да $\phi^1(\mathbf{x}_1)$ остаје у околини $\mathcal{U}_0 \subseteq \mathcal{U}$ што је тачно јер је $\mathbf{x}_*$ стабилни еквилибријум.) Како је пресликавање $\mathbf{x} \mapsto V(\phi^1(\mathbf{x}))$ непрекидно, то постоји околина $\mathcal{V}$ тачке $\mathbf{x}_0$ таква да је

$$V(\phi^1(\mathbf{x})) < V(\mathbf{x}_1), \tag{80}$$

за свако $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$.

Изаберимо n_0 такво да је $\phi^{t_k}(\mathbf{x}_0) \in \mathcal{V}$, за $k \geq n_0$. Имамо

$$V(\mathbf{x}_1) \overset{(79)}{<} V(\phi^{t_k+1}(\mathbf{x}_0)) = V(\phi_1(\phi^{t_k}(\mathbf{x}_0))) \overset{(80)}{<} V(\mathbf{x}_1),$$

што је контрадикција.

(в). Нека је $R > 0$ такво да је $B[\mathbf{x}_*, R] \subset \mathcal{V}$. Доказаћемо да за свако $\varepsilon > 0$, за свако $\mathbf{x} \in \partial B(\mathbf{x}_*, \varepsilon)$, важи $\phi^t(\mathbf{x}) \notin B(\mathbf{x}_*, R)$, за неко $t > 0$. Одавде следи да је $\mathbf{x}_*$ нестабилни еквилибријум.

Претпоставимо супротно, тј. претпоставимо да је задато $\varepsilon > 0$ такво да је $\phi^t(\mathbf{x}_0) \in B(\mathbf{x}_*, R)$, за свако $t > 0$ и неко $\mathbf{x}_0 \in \partial B(\mathbf{x}_*, \varepsilon)$. Одавде специјално знамо да је $\phi^t(\mathbf{x}_0)$ дефинисано за свако $t \geq 0$

Нека је

$$m := \min_{\partial B(\mathbf{x}_*,\varepsilon)} V.$$

Нека је $\delta > 0$ такво да је $V < m/2$ на $B(\mathbf{x}_*, \delta)$. Приметимо да важи

$$\mathbf{x}_0 \in \partial B(\mathbf{x}_*, \varepsilon) \Rightarrow \phi^t(\mathbf{x_0}) \notin B(\mathbf{x}_*, \delta), \text{ за } t \geq 0 \tag{81}$$

јер функција V расте дуж трајекторија система (па је $V(\phi^t(\mathbf{x}_0)) > V(\mathbf{x}_0) \geq m$). Нека је

$$l := \inf\{\langle \nabla V(\mathbf{x}), F(\mathbf{x})\rangle \mid \mathbf{x} \in (B(\mathbf{x}_*, \delta))^c \cap B[\mathbf{x}_*, R]\} > 0$$

и

$$M := \max_{B[\mathbf{x}_*,R]} V.$$

Нека је $\mathbf{x}_0 \in \partial B(\mathbf{x}_*, \varepsilon)$. Имамо:

$$M \geq V(\phi^t(\mathbf{x}_0)) = V(\mathbf{x}_0) + \int_0^t \frac{d}{dt} V(\phi^s(\mathbf{x}_0))ds \geq m + \int_0^t dV(F(\phi^s(\mathbf{x}_0))ds \overset{(81)}{\geq} m + lt,$$

за свако $t \geq 0$, што је немогуће јер је $l > 0$. □

Пример 149. (Планарни линеарни систем.) Знамо да је координатни почетак еквилибријум линеарног система, и то: асимптотски стабилни у случају стабилних чворова и спирале за $\alpha < 0$, стабилни али не и асимптотски стабилни у случају центра и нестабилни у случају седла, нестабилних чворова и спирале за $\alpha > 0$. У сваком од ових случајева, осим у случају седла, као функција Љапунова из Теореме 147 може послужити квадрат норме, $V(x, y) := x^2 + y^2$.

Пример 150. Потражимо функцију Љапунова у облику $V(x, y, z) = ax^2+by^2+cz^2$ за систем

$$\begin{aligned} x' &= (z + 1)(2y - x) \\ y' &= -(z + 1)(x + y) \\ z' &= -z^3 \end{aligned}$$

и докажимо да је тачка $(0, 0, 0)$ асимптотски стабилни еквилибријум.

Како је $\nabla V(x, y, z) = 2(ax, by, cz)$, а $F(x, y, z) = ((z + 1)(2y - x), -(z + 1)(x + y), -z^3)$, то је

$$\langle \nabla V(x, y, z), F(x, y, z)\rangle = 2[(z + 1)(-ax^2 + (2a - b)xy - by^2) - cz^4],$$

закључујемо да за избор:

$$a = 1, \quad b = 2, \quad c = 1$$

важи

$$V(0, 0, 0) = 0, \quad V(x, y, z) > 0, (x, y, z) \neq (0, 0, 0), \quad V'(\mathbf{x}) < 0,$$

односно да $(0, 0, 0)$ јесте асимптотски стабилни еквилибријум. ✓

Пример 151. (Лагранж–[2]Дирихлеова[3] теорема.) Други Њутнов закон $F = m\mathbf{a}$ у $\mathbb{R}^3$, за конзервативни систем ($F(\mathbf{x}) = -\nabla U(\mathbf{x})$) је еквивалентан систему у $\mathbb{R}^6$ ($\mathbf{v}$ је вектор брзине $\mathbf{x}'$):

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{v} \\ \mathbf{v}' = -\frac{1}{m}\nabla U(\mathbf{x}). \end{cases}$$

Једина тачка еквилибријума горњег система је тачка $(\mathbf{x}_*, \mathbf{v}_*)$ за коју важи

$$\nabla U(\mathbf{x}_*) = 0, \quad \mathbf{v}_* = \mathbf{0}.$$

Потражимо функцију Љапунова у облику функције енергије

$$E(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = U(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}m\|\mathbf{v}\|^2.$$

[2]Joseph-Louis Lagrange (1736–1813), италијански математичар и астроном.

[3]Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet, (1805–1859), немачки математичар.

Како је $E(\mathbf{x}_*, \mathbf{0}) = U(\mathbf{x}_*)$, изменимо мало (потенцијалну) функцију Љапунова у

$$V(\mathbf{x}, \mathbf{v}) := E(\mathbf{x}, \mathbf{v}) - U(\mathbf{x}_*) = U(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}m\|\mathbf{v}\|^2 - U(\mathbf{x}_*).$$

Сада вредност функције у тачки $(\mathbf{x}_*, \mathbf{0})$ јесте једнака нули, а из Закона очувања енергије (Пример 4) имамо:

$$\frac{d}{dt}E(\phi^t(\mathbf{x})) = 0 \leq 0.$$

Овиме смо доказали *Лагранж–Дирихлеову теорему: ако је $\mathbf{x}_*$ строги локални минимум потенцијалне енергије U, тада је тачка $(\mathbf{x}_*, \mathbf{0})$ стабилни еквилибријум конзервативног система.* Заиста, услов да је $\mathbf{x}_*$ строги локални минимум потенцијалне енергије U нам обезбеђује позитивност функције Љапунова у околини тачке $(\mathbf{x}_*, \mathbf{0})$ као и $V(\mathbf{x}, \mathbf{v}) > 0$ за $(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \neq (\mathbf{x}_*, \mathbf{0})$.

О функцији Љапунова можемо размишљати као о уопштењу енергије, као што је то овај пример показао. Касније ћемо видети да је функција Љапунова једно уопштење и норме (као што је то био случај у Примеру 149 и 150). ✓

Напомена 152. [4] Ако постоји функција Љапунова V за коју је $V'(\mathbf{x}) = 0$, тада је тачка $\mathbf{x}_*$ стабилни еквилибријум по Теореми 147. Можемо да закључимо и да $\mathbf{x}_*$ није асимптотски стабилни еквилибријум. Заиста, ако би $\mathbf{x}_*$ био асимптотски стабилан, све трајекторије које почињу у околини $\mathcal{U}_0$ тачке $\mathbf{x}_*$ тежиле би ка $\mathbf{x}_*$, па би, пошто је V непрекидна и константна дуж трајекторија, важило

$$0 = V(\mathbf{x}_*) = \lim_{t\to\infty} V(\phi^t(\mathbf{x})) = V(\mathbf{x})$$

за свако $\mathbf{x} \in \mathcal{U}_0$ (што није у складу са дефиницијом функције Љапунова). ◇

Пример 153. (Градијентни систем.) Посматрајмо (негативни) градијентни систем, тј. систем у ком је $F = -\nabla f$, за неку глатку функцију f. Приметимо да f опада дуж решења негативне градијентне једначине $\mathbf{x}' = -\nabla f(\mathbf{x})$:

$$f(\mathbf{x}(t_2)) - f(\mathbf{x}(t_1)) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}f(\mathbf{x}(t))dt = \int_{t_1}^{t_2} df(\mathbf{x}'(t))dt = \int_{t_1}^{t_2} \langle \nabla f, -\nabla f\rangle dt < 0,$$

уколико трајекторија није еквилибријум. Зато важи: ако је $\mathbf{x}_*$ изолована тачка строгог локалног минимума функције f, тада је она асимптотски стабилни еквилибријум градијентног система. Заиста, за функцију Љапунова можемо изабрати

$$V(\mathbf{x}) := f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_*),$$

како је $\nabla V = \nabla f$, тврђење следи. ✓

2. Функција Љапунова као специјална норма

У овом делу ћемо доказати помоћно тврђење, које је једноставна последица Леме 138 из Главе 4, а које нам гарантује постојање једне посебне норме, придружене оператору L, норме која ће нам бити веома згодна на неким местима. Сама ова норма се понекад назива и функција Љапунова придружена оператору L (видети Теорему 157).

Лема 154. *Нека је $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ линеарни оператор за које важи $\operatorname{Re}\lambda > 0$ за сваку сопствену вредност λ оператора L. Тада постоји скаларни производ $\langle\cdot,\cdot\rangle$ на $\mathbb{R}^n$ и константа $c > 0$ такви да важи*

$$\langle L\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle \geq c\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle$$

за свако $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

[4] На ову чињеницу ми је указао Душан Дробњак.

Доказ. Ово тврђење је заправо варијанта Леме 138 на страни 75 (у оном случају смо причали о сличним матрицама и фиксираном скаларном производу, а у овом о операторима и погодном избору скаларног производа).

Нека је

$$0 < \varepsilon < c, \quad c := \frac{1}{2} \min \mathrm{Re}\,(\sigma(L)). \tag{82}$$

Нека је $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ база у којој оператор L има матрични запис $P + \varepsilon Q$, оваква база увек постоји, в. Лему 136 на страни 75.

Дефинишимо скаларни производ тако да је $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ ортонормирана, тј. да је

$$\langle \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_k \rangle = \begin{cases} 1, & k = j \\ 0, & k \neq j \end{cases}$$

и проширимо га по линеарности на $\mathbb{R}^n$. Нека је L_P оператор којем у овој бази одговара матрица P и слично L_Q, односно, нека је $L = L_P + \varepsilon L_Q$. Тада је

$$\langle L\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \langle (L_P + \varepsilon L_Q)\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \langle L_P\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \varepsilon \langle L_Q\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle.$$

Ако је

$$\mathbf{x} = \sum a_j \mathbf{e}_j + \sum (b_j \mathbf{f}_j + c_j \mathbf{g}_j),$$

при чему су $\mathbf{e}_j \in \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ вектори који одговарају реалним сопственим вредностима λ_j, а $\mathbf{f}_j \in \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ и $\mathbf{g}_j \in \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ парови вектора који одговарају комплексно конјугованим сопственим вредностима $\alpha_j \pm \beta_j i$, тада је

$$\langle L_P\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \sum \lambda_j a_j^2 + \sum (b_j^2 + c_j^2)\alpha_j \overset{(82)}{\geq} 2c \sum (a_j^2 + b_j^2 + c_j^2) = 2c\|\mathbf{x}\|^2.$$

С друге стране, из Коши – Шварцове неједнакости (која важи за сваки скаларни производ) имамо:

$$\varepsilon \langle L_Q\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \leq \varepsilon \|L_Q\mathbf{x}\| \|\mathbf{x}\| \leq \varepsilon \|\mathbf{x}\|^2$$

односно:

$$\langle L\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \langle L_P\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \varepsilon \langle L_Q\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 2c\|\mathbf{x}\|^2 - \varepsilon\|\mathbf{x}\|^2 > c\|\mathbf{x}\|^2.$$

□

Дефиниција 155. Норму дефинисану помоћу скаларног производа из Леме 154 називамо и *нормом Љапунова придруженом оператору* L. ◊

Напомена 156. Користићемо и овај облик Леме 154: нека је $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$ за сваку сопствену вредност λ оператора L. Тада постоји скаларни производ $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на $\mathbb{R}^n$ и константа $c > 0$ такви да важи

$$\langle L\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \leq -c \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$$

за свако $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Ово тврђење следи директно из Леме 154, примењене на оператор $-L$. ⋄

У следећем поглављу ћемо видети зашто се ова норма зове и Функција Љапунова.

3. Стабилност еквилибријума - метод сопствених вредности

Већ смо споменули да је природно очекивати да се у близини еквилибријума систем понаша слично придруженом линеарном систему ($\mathbf{x}' = dF(\mathbf{x}_*)\mathbf{x}$). Следећа теорема је једна илустрација тога.

Теорема 157. *Нека је* $L := dF(\mathbf{x}_*)$ *линеарни оператор такав да је* $\mathrm{Re}\,(\lambda) < 0$*, за сваку сопствену вредност* λ *и нека је*

$$V(\mathbf{x}) := \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_*\|^2,$$

где је $\|\cdot\|$ *норма Љапунова придружена оператору* L *као у Напомени 156. Тада је* V *строга функција Љапунова из тачке (в) Теореме 147, па је* $\mathbf{x}_*$ *асимптотски стабилни еквилибријум* *система* $\mathbf{x}' = F(\mathbf{x})$, *штавише, важи и следећа априорна оцена: постоје* $c_1, c_2 > 0$ *и околина* $\mathcal{U}_0$ *тачке* $\mathbf{x}_*$ *такви да важи*

$$\|\phi^t(\mathbf{x}) - \mathbf{x}_*\| \leq c_2 e^{-c_1 t}\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_*\|,$$

за свако $t \geq 0$, $\mathbf{x} \in \mathcal{U}_0$.

Доказ. Очигледно је да је V глатка и строго позитивна функција (осим у $\mathbf{x} = \mathbf{x}_*$), као и да је $V(\mathbf{x}_*) = 0$.

Докажимо да V строго опада дуж решења:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}V(\phi^t\mathbf{x}) &= \frac{d}{dt}\|\phi^t(\mathbf{x}) - \mathbf{x}_*\|^2 = \frac{d}{dt}\langle \phi^t(\mathbf{x}) - \mathbf{x}_*, \phi^t(\mathbf{x}) - \mathbf{x}_*\rangle \\ &= 2\left\langle \frac{d\phi^t}{dt}(\mathbf{x}), \phi^t(\mathbf{x}) - \mathbf{x}_*\right\rangle = 2\langle F(\phi^t(\mathbf{x})), \phi^t(\mathbf{x}) - \mathbf{x}_*\rangle.\end{aligned} \tag{83}$$

Како је

$$F(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}_*) + L(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*) + o(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*) = L(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*) + o(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*),$$

имамо:

$$\langle F(\mathbf{x}), \mathbf{x} - \mathbf{x}_*\rangle = \langle L(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*) + o(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*), \mathbf{x} - \mathbf{x}_*\rangle \leq -c\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_*\|^2 + \varepsilon(\mathbf{x})\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_*\|^2 \leq -c_1\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_*\|^2, \tag{84}$$

за $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_*\| < \delta$, и $c_1 := c/2$. Из последње неједнакости и (83) добијамо:

$$\frac{d}{dt}V(\phi^t(\mathbf{x})) < 0$$

за свако $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_*, \delta) \setminus \{\mathbf{x}_*\}$. Одавде специјално следи да је, ако је $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_*, \delta)$, онда је и $\phi^t(\mathbf{x}) \in B(\mathbf{x}_*, \delta)$, за $t \geq 0$.

Претпоставимо да је $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_*, \delta)$ ($\Rightarrow \phi^t(\mathbf{x}) \in B(\mathbf{x}_*, \delta)$, за $t \geq 0$). Из (83) и (84) добијамо

$$\frac{d}{dt}\|\phi^t(\mathbf{x}) - \mathbf{x}_*\| = \frac{\langle F(\phi^t(\mathbf{x})) - \mathbf{x}_*, \phi^t(\mathbf{x}) - \mathbf{x}_*\rangle}{\|\phi^t(\mathbf{x}) - \mathbf{x}_*\|} \leq -c_1\|\phi^t(\mathbf{x}) - \mathbf{x}_*\|,$$

па имамо

$$\frac{\frac{d}{dt}\|\phi^t(\mathbf{x}) - \mathbf{x}_*\|}{\|\phi^t(\mathbf{x}) - \mathbf{x}_*\|} = \frac{d}{dt}\ln\|(\phi^t(\mathbf{x}) - \mathbf{x}_*\| \leq -c_1.$$

Одавде је

$$\ln\|\phi^t(\mathbf{x}) - \mathbf{x}_*\| = \ln\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_*\| + \int_0^t \frac{d}{ds}\ln\|\phi^s\mathbf{x} - \mathbf{x}_*\|ds \leq \ln\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_*\| - c_1 t,$$

па је

$$\|\phi^t(\mathbf{x}) - \mathbf{x}_*\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_*\|e^{-c_1 t}.$$

Горња норма је специјална норма Љапунова, али све норме у $\mathbb{R}^n$ су еквивалентне, што значи да је

$$a\|\cdot\| \leq \|\cdot\|_E \leq b\|\cdot\|,$$

за неке позитивне константе a и b, где смо са $\|\cdot\|_E$ означили стандардну еуклидску норму. Одавде следи тврђење. □

Важи и следећи обрат Теореме 157.

Теорема 158. *Ако је* $\mathbf{x}_*$ *стабилни еквилибријум, тада не постоји сопствена вредност матрице* $dF(\mathbf{x}_*)$ *чији је реални део строго позитиван.*

Доказ претходне теореме је сличан доказу Теореме 157, али технички много сложенији. Зато га овде изостављамо, а читаоца упућујемо на [4].

Напомена 159. Еквилибријум $\mathbf{x}_*$ за који важи $\operatorname{Re}\lambda \neq 0$, за сваку сопствену вредност λ матрице $dF(\mathbf{x}_*)$ се назива *хиперболичким еквилибријумом.* Видели смо да су хиперболички еквилибријуми или асимптотски стабилни или нестабилни. Код хиперболичких еквилибријума увек можемо једноставно - методом сопствених вредности - закључити о његовој стабилности, док код еквилибријума који нису хиперболички, ово може бити много деликатиније питање. $\diamond$

Дефиниција 160. Функција $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ за коју важи

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \Rightarrow \det d^2 f(\mathbf{x}) \neq 0$$

(односно, за коју су све критичне тачке недегенерисане), зове се *Морсова функција.* $\Diamond$

Задатак 161. Доказати да су еквилибријуми градијентног система (видети Пример 153) Морсове функције хиперболички. ✓

Задатак 162. Дат је градијентни систем $\mathbf{x}' = -\nabla f(\mathbf{x})$, где је $f(x,y) = (x-1)^2x^2 + y^2$.

(а) Наћи све еквилибријуме и испитати њихову стабилност.
(б) Доказати да f опада дуж трајекторија система и да је $\nabla f \perp \{f = const.\}$.
(в) Скицирати трајекторије система.

✓

Подсетимо се да нам теорема Хартмен-Гробана (Теорема 143) даје тополошку класификацију нелинеарних система у околини околини хиперболичког еквилибријума. Прецизније, она каже да је нелинеарни систем у околини хиперболичког еквилибријума тополошки еквивалентан својој линеаризацији у еквилибријуму.

4. Примери из екологије

4.1. Модел раста популације једне врсте. Најједноставнији модел раста популације врсте је експоненцијални модел. То је случај кад је брзина раста популације пропорционална тренутном броју јединки:

$$x'(t) = ax(t).$$

Иако је број популације природан, ми га моделирамо реалним позитивним бројем.[5] Овде је a реална константа која се зове стопа раста и која зависи од врсте, ситуације, ресурса (рецимо од воде, хране, светла или другог неопходног услова за опстанак врсте). Стопа раста a може и бити и негативна (ако је нпр. недовољно хране, па број јединки опада).

Ову једначину наравно знамо да решимо:

$$x(t) = x_0 e^{at}.$$

Приметимо да је, за $a \neq 0$, $x_* = 0$ једини еквилибријум, који је асимптотски стабилни за $a < 0$, а нестабилни за $a > 0$.

Нешто сложенији (и реалнији) модел раста популације једне врсте је тзв. *логистиички модел* који је самоограничавајући у смислу да се повећањем броја јединки на неки начин и смањује брзина раста популације, будући да постоји већа потрошња неопходних ресурса. Овај аспект нисмо узимали у обзир у горњем, најједноставнијем примеру. Како је јасно да брзина раста популације мора бити на известан начин пропорционална броју јединки, то се у логистичом моделу узима да је је брзина раста пропорционална и тренутном броју јединки и количини преосталих ресурса, тј:

$$x'(t) = ax\left(1 - \frac{x}{K}\right),$$

где се реалан број $a > 0$ поново зове стопа раста, а реалан број $K > 0$ ниво засићености.

[5] На $\mathbb{R}$ имамо развијен диференцијални рачун, а на $\mathbb{N}$ не.

Приметимо да су у овом случају еквилибријуми $x_* = 0$ и $x_* = K$. Њихову стабилност можемо испитати помоћу методе сопствених вредности:

$$F(x) = ax\left(1 - \frac{x}{K}\right) \Rightarrow F'(x) = a\left(1 - \frac{2x}{K}\right), \quad F'(0) = a > 0,\ F'(K) = -a < 0,$$

што значи да је $x_* = 0$ нестабилни, а $x_* = K$ асимптотски стабилни еквилибријум.

До истог закључка смо могли да дођемо и непосредним решавањем једначине:

$$x(t) = \frac{Kx_0e^{at}}{K + x_0(e^{at} - 1)}.$$

Овај закључак о стабилности еквилибријума можемо да интерпретирамо овако: ма колико био мали почетни број јединки, он ће се брзо увећати и одвојити од нуле. Међутим ако је почетни број јединки близак нивоу засићености, он ће њему близак и остати, штавише, приближаваће му се са растом времена.

4.2. Нулклинације. У ситуацији у којој хоћемо да скицирамо (без решавања) планарни динамички систем, може нам бити корисно једно веома једноставно опажање, скицирање нулклинација. *Нулклинације* система

$$\begin{aligned} x'(t) &= P(x, y) \\ y'(t) &= Q(x, y) \end{aligned}$$

су криве у равни

$$P(x, y) = 0 \quad \text{и} \quad Q(x, y) = 0.$$

Зашто нам је корисно да скицирамо ове криве у равни:

- Дуж нулклинација трајекторије система су или вектикалне или хоризонталне. Заиста, дуж криве $P(x, y) = 0$ имамо да је $x' = 0$ па је тангентни вектор (односно крива) вертикалан и то усмерен нагоре ако је $Q(x, y) > 0$ односно надоле ако је $Q(x, y) < 0$. Слично резонујемо и за нулклинације $Q(x, y) = 0$, у овом случају су криве хоризонталне. Дакле, трајекторије система секу нулклинације или хоризонтално или вертикално.[6]
- У пресеку нулклинација проналазимо еквилибријуме.
- Нулклинације деле раван на неколико области (које се зову и *басени*). У свакој од тих области (уколико су P и Q непрекидне функције) су знаци извода x' и y' (односно функција P и Q) константни. То значи да се у свакој од тих области криве крећу „на исти начин”, или нагоре и надесно, или нагоре и налево, или надоле и надесно, или надоле и налево.
- Ако не обратимо пажњу на усмереност кривих, него само на њихов облик, у сваком од претходно споменутих области криве или опадају или расту. Заиста

  $$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$$

  је сталног знака у свакој од области одређеној нулклинацијама.

4.3. Лотка–Волтерин систем. Лотка[7]–Волтерин[8] систем је једноставан еколошки модел раста популације предатора и плена (неких животињских врста). Нека x означава број животиња које су плен (нпр. зечева). Претпостављамо да се, ако нема спољашњег непријатеља, број

[6] Ово резоновање не можемо да применимо на случај када је нулклинација истовремено и инваријантан скуп система, јер је ниједна трајекторија не сече. Пример овакве ситуације су фазни портрети чвора и седла, док нам за сучајеве центра или спирале могу помоћи скице нулклинација.

[7] Alfred James Lotka (1880–1949), амерички математичар, физикохемичар, биофизичар и статистичар.

[8] Vito Volterra, (1860–1940) италијански математичар и физичар.

животиња увећава (а не опада) сразмерно тренутном броју јединки,[9] тј, да нема предатора, имали бисмо једначину са почетка поглавља:

$$x' = ax, \quad \text{за} \quad a > 0.$$

Ако је, међутим, присутан и предатор (нпр. лисица), означимо га са y, онда узимамо да је брзина опадања плена сразмерна броју сусрета предатора и плена, што је производ $x \cdot y$. Зато је једначина по x коју узимамо за модел

$$x' = x(a - by), \quad \text{за} \quad a, b > 0.$$

Што се тиче брзине раста броја предатора y, у одсуству плена, он ће опадати брзином сразмерном тренутном броју јединки (ово би била популација са негативном стопом раста, будући да нема услова за живот, односно хране):

$$y' = -dy, \quad \text{за} \quad d > 0.$$

Ако је предатор присутан, онда је, као и малочас, брзина раста популације предатора сразмерна броју сусрета предатора и плена, па једначина по y коју посматрамо постаје:

$$y' = y(cx - d), \quad \text{за} \quad c, d > 0.$$

Мотивисани овом дискусијом, посматрајмо систем

$$\begin{aligned} x' &= x(a - by) \\ y' &= y(cx - d), \end{aligned}$$

где су $a, b, c, d > 0$ са почетним условом (x_0, y_0) у првом квадранту. Приметимо да цело решење остаје у првом квадранту јер не може да пресече координатне осе које су такође решења (за $x_0 = 0$ или $y_0 = 0$). То је и очекивано у оваквом моделу јер број јединки не може да буде негативан.

Нулклинације овог система су праве:

$$x = 0, \; y = \frac{a}{b}, \; y = 0 \text{ и } x = \frac{d}{c}.$$

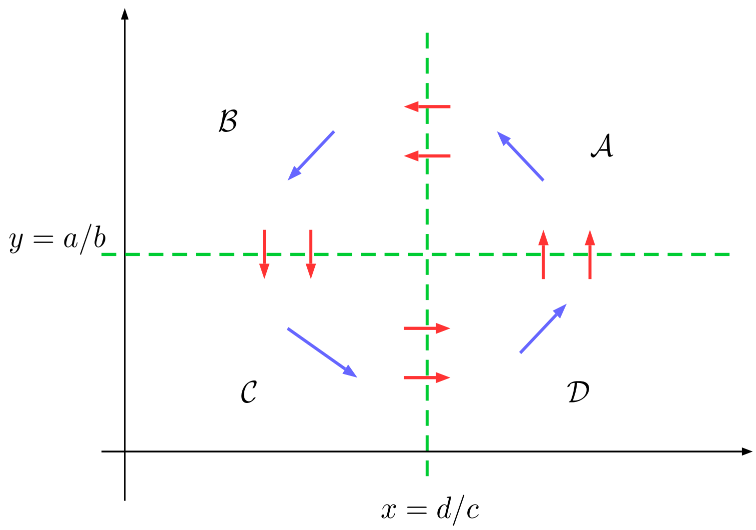
Праве $x = 0$ и $y = 0$ су и инваријантне, тј. полуправе $x = 0$, $y > 0$ и $y = 0$, $x > 0$ су трајекторије система, тако да на њих не примењујемо описане резоне. Што се тиче правих (односно делова правих у првом квадранту) $x = a/b$ и $y = d/c$ (зелене праве на Слици 1) закључујемо следеће. Праву $x = d/c$ трајекторије секу хоризонтално, и то усмерене су надесно у делу равни $y < a/b$, а налево у делу равни $y > a/b$. Праву $y = a/b$ трајекторије секу вертикално и нагоре то у делу равни $x > d/c$, а надоле у делу $x < d/c$ (црвене стрелице на Слици 1).

Нулклинације деле први квадрант на четири дела:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &:= \left\{ (x, y) \mid x > \frac{d}{c}, y > \frac{a}{b} \right\} \\ \mathcal{B} &:= \left\{ (x, y) \mid 0 < x < \frac{d}{c}, y > \frac{a}{b} \right\} \\ \mathcal{C} &:= \left\{ (x, y) \mid 0 < x < \frac{d}{c}, 0 < y < \frac{a}{b} \right\} \\ \mathcal{D} &:= \left\{ (x, y) \mid x > \frac{d}{c}, 0 < y < \frac{a}{b} \right\}. \end{aligned}$$

У сваком од ових делова знакови извода x' и y' су константи, тако да нам кретање система сугерише правац (и смер) векторског поља приказан плавим стрелицама на Слици 1. Можемо да

[9] Овде претпостављамо да хране за плен, нпр. траве, има у изобиљу.



Слика 1. Лотка–Волтерин модел предатор–жртва: нуклинације и правци дуж њих и у областима $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$.

наслутимо, на основу свега описаног да ће трајекторије система „кружити” око тачке $(d/c, a/b)$, у смислу да важи:

$$
\begin{aligned}
(x,y) \in \mathcal{A} &\Rightarrow \phi^t((x,y)) \in \mathcal{B}, \quad \text{за неко} \quad t > 0\\
(x,y) \in \mathcal{B} &\Rightarrow \phi^t((x,y)) \in \mathcal{C}, \quad \text{за неко} \quad t > 0\\
(x,y) \in \mathcal{C} &\Rightarrow \phi^t((x,y)) \in \mathcal{D}, \quad \text{за неко} \quad t > 0\\
(x,y) \in \mathcal{D} &\Rightarrow \phi^t((x,y)) \in \mathcal{A}, \quad \text{за неко} \quad t > 0.
\end{aligned}
$$

Докажимо прво од наведених тврђења. Нека је $(x_0, y_0) \in \mathcal{A}$. Докле год је $(x(t), y(t)) \in \mathcal{A}$, $x(t)$ опада, а $y(t)$ расте. Приметимо такође да је решење дефинисано за све t док је $(x(t), y(t)) \in \mathcal{A}$. Заиста,

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = cx(t) - d < cx_0 - d,$$

па је[10]

$$y(t) \leq y_0 e^{(cx_0+d)t},$$

тј. можемо га продужити на сваки сегмент. Што је тиче x координате, имамо

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = a - by(t) < a - by_0 < 0,$$

па је

$$x(t) \leq x_0 e^{(a-by_0)t}. \qquad (\heartsuit)$$

Одавде закључујемо и да се x може продужити докле год је у $\mathcal{A}$. Из $(\heartsuit)$ следи и да ће, за довољно велико t бити $x(t) < d/c$. Заиста, кад би било $x(t) \geq d/c$ за свако $t \geq 0$, неједнакост $(\heartsuit)$ не би важила.

Како y расте, то је $y(t) > y_0 > a/b$, па је $(x(t), y(t)) \in \mathcal{B}$.

У пресеку нуклинација налазимо еквилибријуме $(x_*, y_*) = (0, 0)$ и $(x_*, y_*) = (d/c, b/a)$.

Покушајмо методом сопствених вредности да испитамо стабилност еквилибријума. Имамо два еквилибријума $(0,0)$ и $(d/c, a/b)$. добијамо

$$dF(0,0) = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -d \end{bmatrix}, \quad dF\left(\frac{d}{c}, \frac{a}{b}\right) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-bd}{c} \\ \frac{ac}{b} & 0 \end{bmatrix},$$

[10] Овде користимо резоновање примењено више пута до сад.

одакле закључујемо да је $(0,0)$ нестабилни еквилибријум, док о тачки $(d/c, a/b)$ немамо закључак.

Потражимо, зато, функцију Љапунова која ће нам дати одговор за $\mathbf{x}_* = (d/c, a/b)$. Покушајемо да је потражимо у облику $V(x,y) = f(x) + g(y)$ и са претпоставком да је она константна дуж решења. То би значило да је

$$\frac{d}{dt}V(x(t), y(t)) = 0 \Rightarrow \langle \nabla V, F \rangle = 0,$$

одакле читамо

$$f'(x)x(a-by) + g'(y)y(cx-d) = 0 \Rightarrow \frac{f'(x)x}{cx-d} = -\frac{g'(y)y}{a-by}.$$

Како лева страна последње једнакости не зависи од y, а десна од x, закључујемо да су обе константе. Ако ставимо да су обе једнаке јединици (било која друга константа ће само да рескалира функцију V), добијамо:

$$f(x) = cx - d\ln x + const, \quad g(y) = by - a\ln y + const.$$

Како се строги локални минимум функције

$$h(x,y) := cx - d\ln x + by - a\ln y$$

достиже у тачки $(d/c, a/b)$ бирамо:

$$V(x,y) := f(x) + g(y) = cx - d\ln x + by - a\ln y - h\left(\frac{d}{c}, \frac{a}{b}\right).$$

Ова функција сада јесте функција Љапунова која нам обезбеђује да је тачка $\mathbf{x}_* = (d/c, a/b)$ стабилни еквилибријум.

Може се показати и више, да су трајекторије Лотка – Волтериног система у ствари периодичне,[11] али то нећемо радити на овом курсу. Одавде специјално следи да $(x_*, y_*) = (d/c, a/b)$ није асимптотски стабилни еквилибријум.

4.4. Компетитивне врсте. Као последњи пример из екологије наводимо модел раста популација двеју врста које користе заједничке ресурсе за живот (компетитивне су). Природно је да модификујемо логистички модел, и то тако да брзина раста популације постаје негативна када збир јединки обе врсте превазиђе неки ниво. Систем једначина који моделује ову ситуацију је:

$$\begin{aligned} x'(t) &= r_1\left(1 - \frac{x}{K_1} - \beta_1 y\right)x \\ y'(t) &= r_2\left(1 - \frac{y}{K_2} - \beta_2 x\right)y. \end{aligned} \tag{85}$$

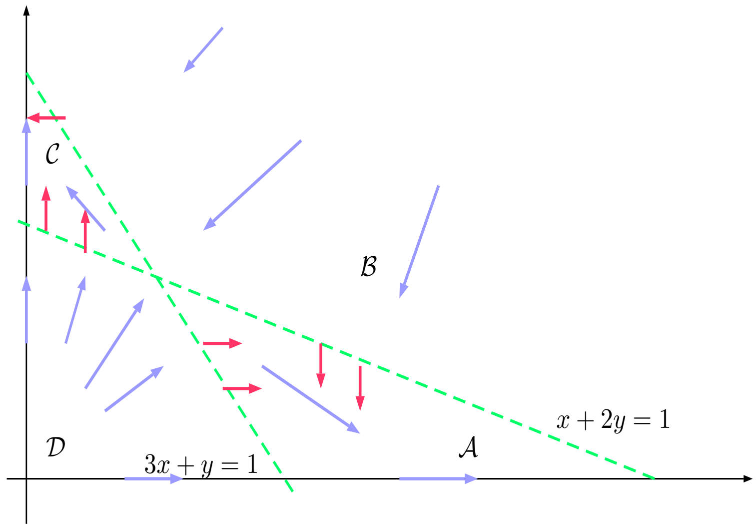
Приметимо да се у случају $\beta_1 = 0$ прва једначина своди на логистичку једначину. Описаћемо кретање система за специјални избор параметара, да бисмо поједноставили рачун.

Пример 163. (Изумирање врсте.) Нека је $r_1 = r_2 = K_1 = K_2 = 1$, $\beta_1 = 2$, $\beta_2 = 3$. Тада систем постаје:

$$\begin{aligned} x'(t) &= (1 - x - 2y)\,x \\ y'(t) &= (1 - y - 3x)\,y. \end{aligned}$$

Нулклинације система су праве $x = 0$ и $y = 0$ које су инваријантни скупови, и праве $x+2y = 1$ и $3x + y = 1$, означене су зеленом испрекиданом линијом на Слици 2. Праву $x + 2y = 1$ трајекторије секу вертикално и усмерене су као на Слици 2, а праву $3x + y = 1$ трајекторије секу хоризонтално и означене су црвеним стрелицама на Слици 2. Нулклинације деле први

[11] Какву еколошку интерпретацију има ова чињеница?



Слика 2. Компетитивне врсте у случају истребљења: нуклинације и правци дуж њих и у областима $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$.

квадрант на четири дела $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$, означена на Слици 2. Плаве стрелице представљају правац и смер векторског поља у ове четири области. Еквилибријуми система су тачке

$$\left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right), \quad (0,1), \quad (1,0), \quad \text{и} \quad (0,0).$$

Матрица извода векторског поља

$$F(x,y) = x(1-x-2y)\mathbf{i} + y(1-y-3x)\mathbf{j}$$

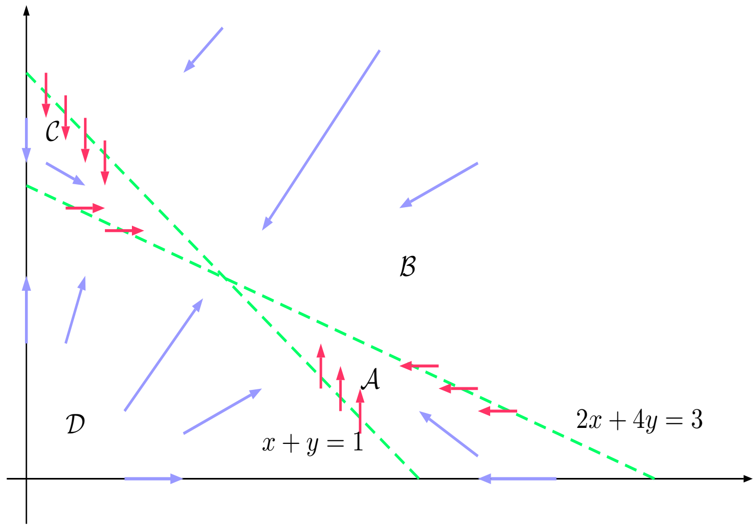
је

$$dF(x,y) = \begin{bmatrix} 1-2x-2y & -2x \\ -3y & 1-2y-3x \end{bmatrix},$$

одакле, помоћу методе сопствених вредности одмах закључујемо да су тачке $(0,1)$ и $(1,0)$ асимтотски стабилни еквилибријуми, а да су $(0,0)$ и $(1/5, 2/5)$ нестабилни еквилибријуми.

Шта можемо да закључимо о кретању овог система? Приметимо да, због усмерености правца вектоског поља дуж нуклинација, трајекторије не могу да напусте области $\mathcal{A}$ и $\mathcal{C}$. Може се показати (ово превазилази оквире овог курса) да постоји једнодимензиона стабилна многострукост[12] тачке $(1/5, 2/5)$ која пролази кроз области $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$, односно по једна трајекторија у свакој од ових области која „увире” у $(1/5, 2/5)$. Све остале трајекторије које почињу у $\mathcal{B}$ или $\mathcal{D}$ увиру у $\mathcal{A}$ или $\mathcal{C}$. Може се показати (и ово је ван оквира овог курса) да у овом систему, као и у сваком систему типа (85), постоји $\lim_{t\to\infty} \phi^t(x,y)$, за свако (x,y), као и да је тај лимес еквилибријум. На основу смера и правца векторског поља у областима $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ закључујемо да све тачке из $\mathcal{A}$ теже ка $(0,1)$, а све из $\mathcal{C}$ ка $(1,0)$. Како све трајекторије из области $\mathcal{B}$ и $\mathcal{D}$ (осим по једне из сваке) заврше у $\mathcal{A}$ или $\mathcal{C}$, закључујемо да, осим горе споменуте стабилне многострукости, свака трајекторија тежи ка једном од еквилибријума $(0,1)$ или $(1,0)$. Еколошка интерпретација овог закључка је да, у компетитивном систему са овако изабраним параметрима, за скоро сваку почетну вредност двеју врста, у далекој будућности можемо да очекујемо истребљење једне од њих. ✓

[12] Стабилна многострукост еквилибријума $\mathbf{x}_*$ је скуп свих тачака $\mathbf{x}$ за које важи $\lim_{t\to+\infty} \phi^t(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_*$.



Слика 3. Компетитивне врсте у случају коегзистенције: нулклинације и правци дуж њих и у областима $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$.

Пример 164. (Коегзистирајуће врсте.) Нека је сада $r_1 = K_1 = \beta_1 = 1$, $r_2 = 3/4$, $K_2 = 3/4$ и $\beta_2 = 2/3$, тј. посматрајмо систем:

$$x'(t) = (1 - x - y)\, x$$
$$y'(t) = \frac{3}{4}\left(1 - \frac{4}{3}y - \frac{2}{3}x\right) y.$$

Нулклинације система су праве $x = 0$, $y = 0$ које су и инваријантни скупови, као и праве $x + y = 1$ и $2x + 4y = 3$. Трајкторије система секу нулклинације као што је приказано на Слици 3. Еквилибријуми система су тачке

$$(1,0), \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad (0,0), \quad \text{и} \quad \left(0, \frac{3}{4}\right).$$

Извод векторског поља

$$F(x,y) = (1 - x - y)\, x\mathbf{i} + \frac{3}{4}\left(1 - \frac{4}{3}y - \frac{2}{3}x\right) y\mathbf{j}$$

је

$$dF(x,y) = \begin{bmatrix} 1 - 2x - y & -x \\ -1/2y & 3/4 - 2y - 1/2x \end{bmatrix}.$$

Помоћу сопствених вредности линеаризације закључујемо да су тачке $(0,0)$, $(1,0)$ и $(0,3/4)$ нестабилни еквилибријуми, док је $(1/2,1/2)$ асимптотски стабилни еквилибријум.

Слика 3 приказује нулклинације (зелене праве), правца векторског поља дуж нулклинација (црвене стрелице) басене $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ и усмереност трајекторија унутар њих (плаве стрелице). Сличним резоновањем као у Примеру 163, закључујемо да трајекторије не напуштају области $\mathcal{A}$ нити $\mathcal{C}$, као и да све трајекторије (осим једне која увире у еквилибријум $(1/2,1/2)$) које почињу у $\mathcal{B}$ или $\mathcal{D}$ увиру у $\mathcal{A}$ или $\mathcal{C}$. Због чињенице да све трајекторије увиру у еквилибријуме (коју смо споменули у Примеру 163) и усмерености векторског поља у областима $\mathcal{A}$ и $\mathcal{C}$, закључујемо да све трајекторије увиру у асимптотски стабилни еквилибријум $(1/2,1/2)$. ✓

Сви претходни модели су специјални случај шире класе система који се зове Колмогоревљев систем и облика је

$$x_j'(t) = x_j f_j(x_1, \ldots, x_n), \quad j = 1, \ldots, n,$$

где је n број врста, а функције f_j представљају стопу раста по глави становника. Шта можемо да кажемо (на основу облика Колмогоровљевог система) о трајекторији са почетним условом у хиперравни $x_j = 0$? Која је еколошка интерпретација ове чињенице? Шта можемо да кажемо о трајекторији са почетним условом у делу простора $\{x_j \geq 0 \mid j = 1, \dots n\}$? Која је еколошка интерпретација ове чињенице?

5. Задаци

(1) Дат је Хамилтонов динамички систем у равни

$$x' = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad y' = -\frac{\partial H}{\partial x},$$

за $H(x, y) = xy(1 - x - y)$.
а) Наћи све критичне тачке функције H (еквилибријуме система).
б) Доказати да су праве $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$ инваријантни скупови.
в) Одредити бесконачан инваријантан компактан скуп система. ✓

(2) Доказати да је Хамилтонијан $H : \mathbb{R}^{2n}$ константан дуж решења

$$(x_1(t), \dots, x_n(t), y_1(t), \dots, y_n(t))$$

Хамилтоновог система

$$\begin{cases} \dot{x_j} = \dfrac{\partial H}{\partial y_j} \\ \dot{y_j} = -\dfrac{\partial H}{\partial x_j} \end{cases} \tag{86}$$

у $\mathbb{R}^{2n}$ (Закон одржања енергије). ✓

(3) Доказати да је Хамилтонова кретања, тј. решења система:

$$\frac{d\phi^t}{dt}(\mathbf{x}) = X_H(\phi^t(\mathbf{x}))$$

где је

$$X_H = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = \left(\frac{\partial H}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial y_n}, -\frac{\partial H}{\partial x_1}, \dots, -\frac{\partial H}{\partial x_n}\right)$$

у $\mathbb{R}^{2n}$ чувају запремину (Лиувилова теорема). ✓

(4) Нека је систем

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{r}'' = F \tag{$\clubsuit$}$$

конзервативан, тј. нека је $F = -\nabla V$. Нека је Хамилтонијан $H : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ укупна енергија (збир потенцијалне и кинетичке енергије):

$$H(\mathbf{r}, \mathbf{v}) := V(\mathbf{r}) + \frac{m\|\mathbf{v}\|^2}{2}.$$

Доказати да су пројекције на $\mathbf{r}$-раван трајекторија Хамилтоновог система управо трајекторије система ($\clubsuit$). ✓

(5) Систем *ортогоналан* на систем

$$x' = P(x, y),\ y' = Q(x, y) \tag{$\spadesuit$}$$

се дефинише као

$$x' = Q(x, y),\ y' = -P(x, y). \tag{$\heartsuit$}$$

Доказати да је систем ($\spadesuit$) Хамилтонов ако и само ако је систем ($\heartsuit$) градијентни (тј. одређен градијентним пољем $F = \nabla H$). Скицирати у равни трајекторије Хамилтоновог система одређеног Хамилтоновом функцијом H и трајекторије њему ортогоналног система ако је
а) $H(x, y) = x^2 + 2y^2$;
б) $H(x, y) = x^2 - y^2$;
в) $H(x, y) = x^2 - y^2 - 2x + 4y + 5$;

г) $H(x,y) = x^2 - 2xy - y^2 + 2x - 2y + 2.$ ✓

(6) Наћи Хамилтонијан система

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x + x^2 \end{aligned}$$

и скицирати трајекторије система. ✓

(7) Одредити еквилибријуме система

$$\begin{aligned} x' &= \beta x - y - (x^2+y^2)x, \\ y' &= x + \beta y - (x^2+y^2)y. \end{aligned}$$

и испитати њихову стабилност у зависности од $\beta \neq 0$. ✓

(8) Доказати да је координатни почетак тачка стабилног еквилибријума динамичког система у $\mathbb{R}^2$, дефинисаног једначинама:

$$\theta' = 1, \quad r' = \begin{cases} r^2 \sin \frac{1}{r}, & r > 0, \\ 0, & r = 0 \end{cases}$$

у поларним координатама. ✓

(9) Доказати да је координатни почетак стабилна али не и асимптотски стабилна тачка равнотеже линераног система

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

Помоћу функције Љапунова $f(x,y) = x^2 + y^2$ доказати следеће.

(а) Координатни почетак је асимптотски стабилна тачка равнотеже система

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} -x^3 - xy^2 \\ -y^3 - x^2 y \end{bmatrix}.$$

✓

(б) Координатни почетак је нестабилна тачка равнотеже система

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} x^3 + xy^2 \\ y^3 + x^2 y \end{bmatrix}.$$

✓

(в) Координатни почетак је стабилна, али не и асимптотски стабилна тачка равнотеже система

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} -xy \\ x^2 \end{bmatrix}.$$

Показати да у сва је у три случаја матрица $dF(\mathbf{0})$ једнака и да метод сопствених вредности не даје одговор. ✓

(10) Показати да је $V(x,y) = x^4 + y^4$ функција Љапунова за систем

$$\begin{aligned} x' &= -y^3 \\ y' &= x^3. \end{aligned}$$

Да ли је $(0,0)$ асимптотски стабилни еквилибријум? На којим кривама леже решења система? ✓

(11) Наћи функцију Љапунова у облику $V(x,y,z) = ax^2 + by^2 + cz^2$ за еквилибријум $\mathbf{x}_* = (0,0,0)$ система

$$\begin{aligned} x' &= -2y + yz \\ y' &= x - xz \\ z' &= xy. \end{aligned}$$

Да ли је $(0,0,0)$ асимптотски стабилни еквилибријум? На којим површима леже решења система? ✓

(12) Доказати да је $(0,0,0)$ асимптотски стабилни еквилибријум система

$$\begin{aligned} x' &= -2y + yz - x^3 \\ y' &= x - xz - y^3 \\ z' &= xy - z^3. \end{aligned}$$

✓

(13) Доказати да решење градијентног динамичког система ($\frac{d\varphi^t}{dt} = \nabla f(\varphi^t)$) не може бити периодично. ✓

ГЛАВА 6

Гранични проблеми код линеарне једначине другог реда

У овом поглављу описаћемо један метод за решавање граничног проблема у случају линеарне једначине другог реда. *Гранични проблем* или *гранични задатак* у овом случају је нехомогена линеарна једначина

$$L(y) := y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x) \tag{87}$$

заједно са условима

$$B_a(y) = 0, \quad B_b(y) = 0, \tag{88}$$

где је

$$B_a(y) := \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a), \quad B_b(y) := \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b)$$

и $\alpha_j^2 + \beta_j^2 > 0$ (да не бисмо имали празан услов). Гранични услови могу бити и нехомогени:

$$B_a(y) = A, \quad B_b(y) = B.$$

Гранични услови који су специјалног облика имају и неке друге називе. Нпр.

- гранични услов облика $y(a) = A$, $y(b) = B$ се зове Дирихлеов или прве врсте;
- гранични услов облика $y'(a) = A$, $y'(b) = B$ се зове Нојманов или друге врсте;
- гранични услов облика $y(a) = y(b)$, $y'(a) = y'(b)$ се зове периодични гранични услов.

За разлику од Кошијевог задакта, са почетним условом

$$y(a) = y_1, \quad y'(a) = y_2,$$

за који знамо да има јединствено решење (ако су функције $a(x)$, $b(x)$ и $f(x)$ довољно добре), гранични проблем не мора уопште да има решење, или може да их има бесконачно много, као што показују следећи примери.

Задатак 165. Једначина $y'' + y = 0$ са граничним условима

- $y(0) = y(\frac{\pi}{2}) = 1$ има јединствено решење;
- $y(0) = y(\pi) = 1$ нема решења;
- $y(0) = y(2\pi) = 1$ има бесконачно много решења.

Доказати. ✓

Пример 166. Посматрајмо гранични проблем

$$y'' + y = f(x), \quad y(0) = y(\pi) = 0.$$

Ако горњу једнакост помножимо са $\sin x$ и интегралимо од 0 до π добијамо

$$\begin{aligned}\int_0^\pi f(x)\sin x\,dx &= \int_0^\pi y''(x)\sin x\,dx + \int_0^\pi y(x)\sin x\,dx \\ &= y'(x)\sin x\Big|_0^\pi - \int_0^\pi y'(x)\cos x\,dx + \int_0^\pi y(x)\sin x\,dx \\ &= -y(x)\cos x\Big|_0^\pi - \int_0^\pi y(x)\sin x\,dx + \int_0^\pi y(x)\sin x\,dx = 0.\end{aligned}$$

Међутим, за било коју функцију за коју је $\int_0^\pi f(x)\sin x\,dx \neq 0$ ово не важи, тј. гранични проблем нема решења. ✓

1. Метод функције Грина

Да бисмо описали једну ситуацију у којој гранични задатак има решења и извели поступак решавања, описаћемо прво метод варијације константи за решавање нехомогене линеарне једначине другог реда.

1.1. Метод варијације константи за линеарну једначину другог реда. Посматрајмо једначину (87) и њој придружену хомогену једначину

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0. \tag{89}$$

Ако су $y_1(x)$ и $y_2(x)$ два линеарно независна решења хомогене једначине (89), тада знамо да су сва решења облика

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) \qquad (*).$$

Као и случају методе варијације константи код једначине првог реда, потражимо решење нехомогене једначине (87) у облику

$$y(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x),$$

где су $c_1(x)$ и $c_2(x)$ глатке функције. Наметнућемо још и додатни услов (испоставиће се да је ово могуће урадити):

$$c_1'y_1 + c_2'y_2 = 0 \qquad (**).$$

Диференцирањем $(*)$ и коришћењем $(**)$ добијамо

$$y' = c_1y_1' + c_2y_2',$$

одакле, поновним диференцијрањем добијамо:

$$y'' = c_1'y_1' + c_2'y_2' + c_1y_1'' + c_2y_2'',$$

одакле видимо да је

$$L(y) = c_1L(y_1) + c_2L(y_2) + c_1'y_1' + c_2'y_2'.$$

Како је $L(y_1) = L(y_2) = 0$, једначина $L(y) = f(x)$ постаје

$$c_1'y_1' + c_2'y_2' = f(x),$$

што нам, заједно са $(**)$, даје систем

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1' \\ c_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f \end{bmatrix},$$

одакле добијамо

$$\begin{bmatrix} c_1' \\ c_2' \end{bmatrix} = \frac{1}{y_1y_2' - y_2y_1'} \begin{bmatrix} y_2' & -y_2 \\ -y_1' & y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ f \end{bmatrix} = \frac{1}{W(y_1, y_2)} \begin{bmatrix} y_2' & -y_2 \\ -y_1' & y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ f \end{bmatrix}$$

тј.

$$c_1' = -\frac{y_2f}{W(y_1, y_2)}, \quad c_2' = \frac{y_1f}{W(y_1, y_2)}.$$

1.2. Функција Грина за хомогене граничне услове. Описаћемо један метод решавања једначине (87) са хомогеним граничним условима (88). Знамо да су сва решења једначине (87) облика

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + y_P(x), \tag{90}$$

где су y_1 и y_2 два линеарно независна решења једначине хомогене једначине $L(y) = 0$, а y_P једно конкретно решење једначине (87).

Овде ћемо претпоставити и мало више, наиме, претпоставићемо да постоје два линеарно независна решења, y_1 и y_2, таква да је y_1 решење једначине са **почетним** условом:

$$L(y) = 0, \quad y(a) = \beta_1,\ y'(a) = -\alpha_1 \tag{91}$$

а да је y_2 решење једначине са **почетним** условом:

$$L(y) = 0, \quad y(b) = \beta_2,\ y'(b) = -\alpha_2. \tag{92}$$

Приметимо да важи

$$B_a(y_1) = 0, \quad B_b(y_2) = 0. \tag{93}$$

Следећа лема нам каже да су y_1 и y_2, до на множење скаларом, једина два решења хомогене једначине $L(y) = 0$ са овим граничним условима.

Лема 167. *Функција y задовољава једначину са граничним условом*

$$L(y) = 0, \quad B_a(y) = 0 \tag{94}$$

ако и само је $y = \lambda y_1$ за неко $\lambda \in \mathbb{R}$. Слично, y задовољава једначину са граничним условом

$$L(y) = 0, \quad B_b(y) = 0$$

ако и само је $y = \lambda y_2$ за неко $\lambda \in \mathbb{R}$.

Доказ. Један смер се проверава директно. Нека је y решење једначине (113). Како је

$$0 = B_a(y_1) = \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = -y_1'(a)y(a) + y_1(a)y'(a) = W(y, y_1)(a),$$

то из Теореме 91 закључујемо да су функције y и y_1 линеарно зависне, а како је $y_1(x) \neq 0$, то постоји λ тдј. $y(x) = \lambda y_1(x)$.

На исти начин се доказује и други део тврђења. □

Последица 168. *Решења y_1 и y_2 једначина (91) и (92) су линеарно независна ако и само ако је $B_a(y_2) \neq 0$ ако и само ако је $B_b(y_1) \neq 0$.* □

Сада тражимо једно конкретно решење y_P нехомогене једначине (87) помоћу метода варијације константи описаног у Поглављу 1.1. Имамо

$$y_P(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x),$$

где је

$$c_1(x) = -\int_a^x \frac{y_2(t)f(t)}{W(y_1,y_2)(t)}dt, \quad c_2(x) = \int_a^x \frac{y_1(t)f(t)}{W(y_1,y_2)(t)}dt.$$

Одавде је

$$y_P(x) = -\int_a^x \frac{y_2(t)f(t)}{W(y_1,y_2)(t)}dt\, y_1(x) + \int_a^x \frac{y_1(t)f(t)}{W(y_1,y_2)(t)}dt\, y_2(x) = \int_a^x \frac{(y_1(t)y_2(x) - y_2(t)y_1(x))f(t)}{W(y_1,y_2)(t)}dt.$$

Да бисмо одредили контанте c_1 и c_2 у (90) тако да y задовољава граничне услове, поставићемо једначине

$$B_a(c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + y_P) = 0, \quad B_b(c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + y_P) = 0. \tag{95}$$

Овде ће нам се појавити изрази $B_a(y_P)$ и $B_b(y_P)$, које ћемо прво да израчунамо. Како је

$$y_P'(x) = \\ \frac{y_1(x)f(x)}{W(y_1,y_2)(x)}y_2(x) + \int_a^x \frac{y_1(t)f(t)}{W(y_1,y_2)(t)}dt\, y_2'(x) - \frac{y_2(x)f(x)}{W(y_1,y_2)(x)}y_1(x) - \int_a^x \frac{y_2(t)f(t)}{W(y_1,y_2)(t)}dt\, y_1'(x) = \\ \int_a^x \frac{[y_1(t)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(t)]f(t)}{W(y_1,y_2)(t)}dt,$$

то је $y_P(a) = y_P'(a) = 0$, па је $B_a(y_P) = 0$. С друге стране:

$$B_b(y_P) = \int_a^b \frac{[y_1(t)B_b(y_2) - B_b(y_1)y_2(t)]f(t)}{W(y_1,y_2)(t)}dt = -B_b(y_1)\int_a^b \frac{y_2(t)f(t)}{W(y_1,y_2)(t)}dt. \tag{$*$}$$

Сада рачунамо c_1 и c_2 из (95) Како је $B_a(y_1) = B_a(y_P) = 0$, $B_a(y_2) \neq 0$, то мора бити $c_2 = 0$. Из $B_b(y) = 0$, $B_b(y_2) = 0$, $B_b(y_1) \neq 0$ имамо:

$$c_1 B_b(y_1) + B_b(y_P) = 0 \overset{(*)}{\Longrightarrow} c_1 = \int_a^b \frac{y_2(t)f(t)}{W(y_1,y_2)(t)}dt.$$

Убацивањем вредности c_1 и c_2 у (90) добијамо

$$\begin{aligned} y &= \int_a^b \frac{y_1(x)y_2(t)f(t)}{W(y_1,y_2)(t)}dt + \int_a^x \frac{[y_1(t)y_2(x) - y_1(x)y_2(t)]f(t)}{W(y_1,y_2)(t)}dt \\ &= \int_a^x \frac{y_1(t)y_2(x)f(t)}{W(y_1,y_2)(t)}dt + \int_x^b \frac{y_1(x)y_2(t)f(t)}{W(y_1,y_2)(t)}dt. \end{aligned}$$

Долазимо до следећег закључка. *Гринову*[1] *функцију* за гранични задатак (87), (88) дефинишемо као функцију две променљиве

$$G(x,t) := \begin{cases} \dfrac{y_1(t)y_2(x)}{W(y_1,y_2)(t)}, & a \le t \le x \le b, \\ \dfrac{y_1(x)y_2(t)}{W(y_1,y_2)(t)}, & a \le x \le t \le b. \end{cases}$$

Решење граничног задатка (87), (88), под претпоставком о постојању решења y_1 и y_2 са наведеним својствима, дато је формулом:

$$y(x) = \int_a^b G(x,t)f(t)\,dt. \tag{96}$$

Напомена 169. Два линеарно независна решења једначина (91) и (92) не морају увек да постоје, као што ни решење граничног задатка не постоји увек. Кострукција Гринове функције је могућа под претпоставком да постоје. У Примеру 166, свака два решења придружене хомогене једначине, са почетним условима (91) и (92) су линеарно зависна. Заиста, сва решења једначине $y'' + y' = 0$ су облика

$$y(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x.$$

Из услова (93) добијамо:

$$y_1(0) = 0,\ y_2(\pi) = 0 \quad \Rightarrow \quad y_1(x) = c_1 \sin x,\ y_2(x) = \tilde{c}_1 \sin x.$$

$\diamond$

Пример 170. Решимо гранични задатак

$$y'' = f(x), \quad y(0) = 0,\ y(1) = 0,$$

а потом нађимо решење у конкретном случају $f(x) = x^2$. Фундаментални систем решења придружене хомогене једначине $y'' = 0$ је $\{1, x\}$, односно, свако решење је облика $y = c_1 + c_2 x$. Из граничног услова имамо:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 1, \quad \beta_1 = \beta_2 = 0,$$

па услови (91) и (92) постају:

$$y_1(0) = 0,\ y_1'(0) = -1, \quad y_2(1) = 0,\ y_2'(1) = -1.$$

Одавде видимо да је

$$y_1(x) = -x, \quad y_2(x) = 1 - x.$$

Рачунамо Вронскијан система:

$$W(y_1,y_2)(x) = \det \begin{bmatrix} y_1(x) & y_1'(x) \\ y_2(x) & y_2'(x) \end{bmatrix} = 1,$$

[1] George Green (1793–1841), енглески математички физичар.

па је Гринова функција

$$G(x,t) = \begin{cases} -t(1-x), & 0 \le t \le x \le 1, \\ -x(1-t), & 0 \le x \le t \le 1. \end{cases}$$

Решење задатка је дато формулом (96), а специјално, за $f(x) = x^2$, имамо

$$y(x) = \int_0^x t(x-1)t^2\,dt + \int_x^1 x(t-1)t^2\,dt = \frac{1}{12}(x^4 - x).$$

✓

Пример 171. Одредимо Гринову функцију за гранични задатак

$$y'' + y = f(x), \quad y(0) = 0,\ y'(1) = 0.$$

Сва решења хомогеног система су облика

$$y(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x.$$

Гранични услови $y(0) = 0$, $y'(1) = 0$ нам дају

$$\alpha_1 = \beta_2 = 1, \quad \alpha_2 = \beta_1 = 0.$$

Одавде рачунамо:

$$y_1 = -\sin x, \quad y_2 = \sin 1 \sin x + \cos 1 \cos x = \cos(x-1).$$

Вронскијан система једнак је

$$W(y_1, y_2)(x) = \sin x \sin(x-1) + \cos x \cos(x-1) = \cos 1,$$

па је Гринова функција дата са

$$G(x,t) = \begin{cases} -\dfrac{\sin t \cos(x-1)}{\cos 1}, & 0 \le t \le x \le 1, \\ -\dfrac{\sin x \cos(t-1)}{\cos 1}, & 0 \le x \le t \le 1. \end{cases}$$

✓

1.3. Нехомогени гранични услови. У претходном разматрању смо описали метод решавања једначине (87) са **хомогеним** граничним условима (88). Ако уместо (88) имамо нехомогене граничне услове:

$$B_a(y) = A, \quad B_b(y) = B, \tag{97}$$

тада једноставном сменом сводимо проблем на хомогени гранични задатак облика (87) са условима (88). Наиме, ако је y решење једначине (87) са граничним условима (97), и ако је $y_0(x)$ било која два пута диференцијабилна функција која задовољава услове (97), тада је

$$z(x) := y(x) - y_0(x)$$

решење једначине

$$z'' + a(x)z' + b(x)z = \tilde{f}(x) := f(x) - (y_0''(x) + a(x)y_0'x + b(x)y_0(x))$$

са хомогеним граничним условима (88). Заиста, имамо:

$$L(z) = L(y) - L(y_0) = f(x) - (y_0''(x) + a(x)y_0'x + b(x)y_0(x)) = \tilde{f}(x)$$

и:

$$B_a(z) = B_a(y) - B_a(y_0) = A - A = 0, \quad B_b(z) = B_b(y) - B_b(y_0) = B - B = 0.$$

Пример 172. Решимо једначину $y'' = f(x)$ са граничним условима

$$y(0) = 0, \quad y(1) + y'(1) = 2.$$

Специјално, нађимо решење једначине $f(x) = x^2$ са истим граничним условима.

Приметимо да $y_0(x) := x$ задовољава граничне услове. Уведимо зато смену $z = y - x$. Дати проблем сводимо на гранични задатак са хомогеним граничним условима:

$$z'' = f(x), \quad z(0) = 0, \; z(1) + z'(1) = 0.$$

Одавде видимо да је

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_2 = 1, \quad \beta_1 = 0.$$

Сва решења придружене хомогене једначине су облика $c_1 + c_2 x$, па добијамо

$$z_1(x) = -x, \quad z_2(x) = 2 - x,$$

и $W(z_1, z_2)(x) = 2$, па је

$$G(x,t) = \begin{cases} \dfrac{t(x-2)}{2} & 0 \le t \le x \le 1, \\ \dfrac{x(t-2)}{2}, & 0 \le x \le t \le 1, \end{cases}$$

а

$$z(x) = \int_0^x (1-t) f(t)\, dt + (1-x) \int_x^1 f(t)\, dt.$$

Специјално, за $f(t) = t^2$, добијамо

$$z(x) = \frac{x^4}{12} - \frac{5x}{24},$$

одакле добијамо:

$$y(x) = z(x) + x = \frac{x^4}{12} + \frac{19x}{24}.$$

✓

Извели смо једну конструкцију решења граничног проблема. Следећа теорема нам говори о јединствености решења, као и неопходним условима за постојање (јединственог решења).

Теорема 173. *Следећи услови су еквивалентни:*

(1) *Решење нехомогеног граничног задатка (87), (97) има јединствено решење за сваке две константе A и B;*

(2) *Решење придруженог хомогеног граничног задатка $L(y) = 0$, са хомогеним граничним условима (88) има само тривијално решење;*

(3) *Постоје два линеарно независна решења u_1 и u_2 једначине $L(y) = 0$ за која важи*

$$\det \begin{bmatrix} B_a(u_1) & B_a(u_2) \\ B_b(u_1) & B_b(u_2) \end{bmatrix} \neq 0. \tag{98}$$

(4) *Постоје два линеарно независна решења v_1 и v_2 једначине $L(y) = 0$ за која важи*

$$B_a(v_1) = 0, \quad B_b(v_2) = 0.$$

(5) *Постоје два линеарно независна решења y_1 и y_2 једначине $L(y) = 0$ за која важи*

$$y_1(a) = \beta_1, \; y_1'(a) = -\alpha_1, \quad y_2(b) = \beta_2, \; y_2'(b) = -\alpha_2. \tag{99}$$

Доказ. (1) $\Leftrightarrow$ (3): Знамо да су сва решења једначине $L(y) = f$ облика

$$y(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) + y_p(x).$$

Зато гранични проблем са нехомогеним граничним условима (97) има јединствено решење ако и само ако систем

$$B_a(y) = A, \quad B_b(y) = B$$

има јединствено решење по c_1 и c_2. Међутим, овај систем је систем:

$$\begin{aligned} c_1 B_a(u_1) + c_2 B_a(u_2) &= A - B_a(y_P) \\ c_1 B_b(u_1) + c_2 B_b(u_2) &= B - B_b(y_P), \end{aligned}$$

а он има јединствено решење за било који избор константи A и B ако и само ако важи (98).

(2) $\Leftrightarrow$ (3) се доказује исто као већ доказани део, само су $f(x) = y_P(x) = 0$, $A = B = 0$.

(4) $\Rightarrow$ (3) важи јер је $B_a(y_2) \neq 0$ и $B_b(y_1) \neq 0$ (видети Последицу 168).

(3) $\Rightarrow$ (4): Нека је

$$v_1(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x)$$

где су d_1 и d_2 јединствена решења једначине

$$\begin{aligned} c_1 B_a(u_1) + c_2 B_a(u_2) &= 0 \\ c_1 B_b(u_1) + c_2 B_b(u_2) &= 1. \end{aligned}$$

Слично, нека је

$$v_2(x) = d_1 u_1(x) + d_2 u_2(x)$$

где су d_1 и d_2 јединствена решења једначине

$$\begin{aligned} d_1 B_a(u_1) + d_2 B_a(u_2) &= 1 \\ d_1 B_b(u_1) + d_2 B_b(u_2) &= 0. \end{aligned}$$

Очигледно је

$$B_a(v_1) = 0, \quad B_b(v_2) = 0,$$

а како је $B_b(v_1) \neq 0$, $B_a(v_2) \neq 0$, то су v_1 и v_2 линеарно независни (Лема 167).

(5) $\Rightarrow$ (3) се добија провером.

(4) $\Rightarrow$ (5): Нека су v_1 и v_2 таква да је

$$B_a(v_1) = 0, \quad B_b(v_2) = 0.$$

Тада из Леме 167 следи да је

$$B_a(v_2) \neq 0, \quad B_b(v_2) \neq 0.$$

Ако је $y_1(x) = c_1 v_1(x) + c_2 v_2(x)$ тада y_1 задовољава почетне услове (99) ако важи

$$\begin{aligned} c_1 v_1(a) + c_2 v_2(a) &= \beta_1 \\ c_1 v_1'(a) + c_2 v_2'(a) &= -\alpha_1, \end{aligned}$$

а видимо да ова једначина има решења

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{W(v_1, v_2)(a)} \begin{bmatrix} v_2'(a) & -v_2(a) \\ -v_1'(a) & v_1(a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ -\alpha_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{W(v_1, v_2)(a)} \begin{bmatrix} B_a(v_2) \\ 0 \end{bmatrix},$$

тј.

$$y_1(x) = \frac{B_a(v_2)}{W(v_1, v_2)(a)} v_1(x).$$

И слично

$$y_2(x) = \frac{-B_b(v_1)}{W(v_1, v_2)(b)} v_2(x)$$

задовољава почетне услове (99). Решења $y_1(x)$ и $y_2(x)$ су очигледно линеарно независна.

Услови (99) су често оперативнији, тј. дају нам поступак за налажење y_1 и y_2 (уместо да их погађамо). □

Да резимирамо, решење граничног задатка тражимо кроз следеће кораке:

- ако гранични услови нису хомогени, погодимо једну функцију y_0 за коју важи:
$$B_a(y_0) = A, \quad B_b(y_0) = B$$
и направимо смену $z' := y - y_0$, тиме смо свели проблем на задатак
$$L(y) = \tilde{f}(x) = f(x) - (y_0''(x) + a(x)y_0'(x) + b(x)y_0(x))$$
са **хомогеним граничним условом**
$$B_a(y_0) = 0, \quad B_b(y_0) = 0;$$
- сада су гранични услови хомогени; пронађемо два линеарно независна решења y_1 и y_2 **хомогене једначине** $L(y) = 0$ која задовољавају **почетне услове**:
$$\begin{array}{l} y_1(a) = \beta_1, \quad y_1'(a) = -\alpha_1 \\ y_2(b) = \beta_2, \quad y_2'(b) = -\alpha_2; \end{array}$$
ако не постоје таква два линеарно независна решења, гранични задатак нема јединствено решење - видети Задатак (3) на крају главе;
- формирамо функцију Грина:
$$G(x,t) := \begin{cases} \dfrac{y_1(t)y_2(x)}{W(y_1,y_2)(t)}, & a \le t \le x \le b, \\ \dfrac{y_1(x)y_2(t)}{W(y_1,y_2)(t)}, & a \le x \le t \le b; \end{cases}$$
- решење граничног задатка је: $y(x) = \int_a^b G(x,t)f(t)\,dt$.

2. Штурм–Лиувилови проблеми

Штурм[2]*–Лиувилов проблем* или *Штурм –Лиувилов задатак* је гранични задатак са хомогеним граничним условима
$$-(p(x)y')' + q(x)y = \lambda y, \quad B_a(y) = 0,\ B_b(y) = 0, \tag{100}$$
где су p, q и p' непрекидне функције дефинисане на интервалу $[a,b]$ и $p(x) > 0$.

Пример 174. Једначина
$$y''(x) + \lambda y(x) = 0, \quad y(0) = y(l) = 0$$
је пример Штурм–Лиувиловог проблема за $p(x) = 1$, $q(x) = 0$. ✓

Скалар λ није задат, већ представља део задатка. Задатак је пронаћи све скаларе λ за које постоји нетривијално решење y. Свако такво нетривијално решење проблема (100) за вредност скалара λ зовемо *сопственом функцијом* задатка (100), док λ зовемо *сопственом вредношћу* задатка (100). Ово су заиста сопствене вредности и сопствени вектори оператора
$$L(y) = -(p(x)y')' + q(x)y. \tag{101}$$

Означимо са $C^2_{a,b}(a,b)$ скуп двапут непрекидно диференцијабилних функција y на интервалу $[a,b]$ са вредностима у $\mathbb{C}$ које задовољавају граничне услове $B_a(y) = B_b(y) = 0$ (а приори не можемо очекивати да сопствене вредности и сопствени вектори оператора који има реалне коефицијенте буду реални). Приметимо да је $C^2_{a,b}(a,b)$ векторски простор. Дефинишимо на њему ермитски производ:
$$\langle y_1, y_2\rangle := \int_a^b y_1(x)\overline{y_2(x)}dx. \tag{102}$$

Тврђење 175. (Лагранжев идентитет.) Оператор (101) је симетричан на простору $C^2_{a,b}(a,b)$, тј. важи
$$\langle Ly_1, y_2\rangle = \langle y_1, Ly_2\rangle.$$

[2]Jacques Charles François Sturm (1803–1855), француски математичар.

Доказ. У следећем рачуну примењујемо парцијалну интеграцију два пута:

$$\begin{aligned}\langle -(p(x)y_1'(x))', y_2(x)\rangle &= -\int_a^b (p(x)y_1'(x))'\overline{y_2(x)}dx \\ &= -p(x)y_1'(x)\overline{y_2(x)}\Big|_a^b + \int_a^b p(x)y_1'(x)\overline{y_2'(x)}dx \\ &= -p(x)y_1'(x)\overline{y_2(x)}\Big|_a^b + -p(x)\overline{y_2'(x)}y_1(x)\Big|_a^b - \int_a^b (p(x)y_1'(x))'\overline{y_2(x)}dx \\ &= p(x)\left[\overline{y_2'(x)}y_1(x) - y_1'(x)\overline{y_2(x)}\right]_a^b - \int_a^b \left(p(x)\overline{y_2'(x)}\right)' y_1(x)dx.\end{aligned}$$

Даље рачунамо

$$\left[\overline{y_2'(x)}y_1(x) - y_1'(x)\overline{y_2(x)}\right]_a^b = \overline{y_2'(b)}y_1(b) - y_1'(b)\overline{y_2(b)} - \overline{y_2'(a)}y_1(a) + y_1'(a)\overline{y_2(a)} =$$

$$\det\begin{bmatrix}\overline{y_2'(b)} & \overline{y_2(b)} \\ y_1'(b) & y_1(b)\end{bmatrix} - \det\begin{bmatrix}\overline{y_2'(a)} & \overline{y_2(a)} \\ y_1'(a) & y_1(a)\end{bmatrix}.$$

Обе детерминанте у последњем изразу су једнаке нули. Заиста, вектори $(y_1(a), y_1'(a))$ и $(\overline{y_2(a)}, \overline{y_2'(a)})$ су линеарно зависни, пошто једначина

$$\begin{bmatrix}\overline{y_2'(a)} & \overline{y_2(a)} \\ y_1'(a) & y_1(a)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x \\ y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 \\ 0\end{bmatrix}$$

има нетривијално решење (α_1, β_1), јер је $B_a(y_1) = B_a(\overline{y_2}) = 0$ (и слично за другу детерминанту). То значи да је

$$-\int_a^b (p(x)y_1'(x))'\overline{y_2(x)}dx = -\int_a^b \left(p(x)\overline{y_2'(x)}\right)' y_1(x)dx = -\int_a^b y_1(x)\left(\overline{p(x)y_2'(x)}\right)' dx,$$

(јер је $p(x) \in \mathbb{R}$) одакле директном провером добијамо да је

$$\langle Ly_1'(x), y_2(x)\rangle = \langle y_1'(x), Ly_2(x)\rangle.$$

□

Последица 176. Сопствене вредности Штурм–Лиувиловог задатка су реалне.

Доказ. Нека је $Ly = \lambda y$, $y \neq 0$. Имамо

$$\lambda\langle y, y\rangle = \langle \lambda y, y\rangle = \langle Ly, y\rangle = \langle y, Ly\rangle = \langle y, \lambda y\rangle = \overline{\lambda}\langle y, y\rangle \quad \Rightarrow \quad \overline{\lambda} = \lambda.$$

□

Одавде следи да можемо да претпоствимо да су и сопствене функције Штурм–Лиувиловог задатка са вредностима у $\mathbb{R}$. Заиста, ако је $y = u + iv$ сопствена функција, из $Ly = \lambda y$, $\lambda \in \mathbb{R}$ добијамо

$$Lu = \lambda u \quad \text{и} \quad Lv = \lambda v.$$

Из Лагранжевог идентитета такође следи да различитим сопственим вредностима одговарају ортогоналне сопствене функције. Заиста, из

$$Lu = \lambda u, \quad Lv = \mu v$$

имамо

$$\lambda\langle u, v\rangle = \langle Lu, v\rangle = \langle u, Lv\rangle = \langle u, \mu v\rangle,$$

па је $(\mu - \lambda)\langle u, v\rangle = 0$, што значи да је $\langle u, v\rangle = 0$.

Тврђење 177. Сопствени простори који одговарају једној сопственој вредности Штурм–Лиувиовог проблема су једнодимензиони.

Доказ. Нека је
$$L(y_1) = \lambda y_1, \quad L(y_2) = \lambda y_2, \quad B_a(y_j) = B_b(y_j) = 0,\ j = 1, 2.$$
Ово значи да су y_1 и y_2 два решења линеарне једначине другог реда:
$$-(p(x)y')' + (q(x) - \lambda)y = 0.$$
Приметимо да из $B_a(y_1) = B_a(y_2) = 0$ (и $\alpha_1^2 + \beta_1^2 > 0$) следи да је
$$y_1(a)y_2'(a) - y_1'(a)y_2(a) = W(y_1, y_2)(a) = 0.$$
Из Теореме 91 следи да је $W(y_1, y_2)(x) = 0$ за свако $x \in [a, b]$, што значи да су функције y_1 и y_2 линеарно зависне. □

Пример 178. Одредимо сопствене вредности и функције за Штурм–Лиувилов задатак из Примера 174. Разликујемо три могућности.

$\underline{\lambda < 0.}$ Знамо да је опште решење хомогене једначине $y'' + \lambda y = 0$ облика
$$y(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}.$$
Замењивањем у гранични услов $y(0) = y(l) = 0$ добијамо да је $y(x) \equiv 0$, односно да не постоје сопствене вредности и функције.

$\underline{\lambda = 0.}$ Опште решење хомогене једначине $y'' + \lambda y = 0$ је сада облика
$$y(x) = c_1 x + c_2,$$
па из граничног услова $y(0) = y(l) = 0$ поново добијамо да је $y(x) \equiv 0$, тј. немамо сопствене вредности и функције ни у овом случају.
$\underline{\lambda > 0.}$ Сада је опште решење хомогене једначине $y'' + \lambda y = 0$
$$y(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x).$$
Из граничног услова $y(0) = 0$ добијамо $c_1 = 0$, а из граничног услова $y(l) = 0$ добијамо $c_2 = 0$ (дакле $y \equiv 0$) или
$$\sqrt{\lambda}l = n\pi,\ n \in \mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{n^2\pi^2}{l^2},\ n \in \mathbb{Z}.$$
Овим сопственим вредностима одговарају сопствене функције
$$\sin\left(\frac{\pi x}{l}\right),\ \sin\left(\frac{2\pi x}{l}\right),\ \sin\left(\frac{3\pi x}{l}\right),\ \ldots$$
које знамо да представљају ортогонални тригонометријски Фуријеов[3] систем на $[0, l]$. ✓

Резултат из претходног примера важи у општијој ситуацији. Наводимо овде својства сопствених вредности и функија Штурм–Лиувиловог задатка без доказа:

- сопствене вредности Штурм–Лиувиловог задатка су просте и могу се поређати у растући низ
$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \cdots$$
који тежи ка $+\infty$ кад $n \to \infty$;
- одговарајуће сопствене функције $e_1(x), e_2(x), \ldots$ чине потпун систем вектора у простору део-по-део глатких[4] функција на $[a, b]$, тј. ако су c_n Фуријеови коефицијенти функције f у овом систему:
$$c_n = \frac{\langle f, e_n\rangle}{\langle e_n, e_n\rangle}$$

[3] Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768–1830), француски математичар и физичар.
[4] Или општије, квадрат-интеграбилних.

и $S_N(f,x)$ одговарајуће парцијалне суме

$$S_N(f,x) = \sum_{n=1}^{N} c_n e_n(x),$$

тада S_N тежи ка f, кад $N \to \infty$, у L^2-норми индукованој скаларним производом (102). Ако је f још и део-по-део глатка, тада $S_N(x)$ конверира и обично у свакој тачки, и то ка вредности

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}.$$

Задатак 179. (Лежандрови[5] полиноми.) Нека је $n \in \mathbb{N}$. Доказати да је

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$$

Штурм–Лиувилов задатак и да је са

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

дефинисано његово решење које задовољава услов $L_n(1) = 1$.
[Упутство: Ако је $u(x) = (x^2-1)^n$, тада је $(x^2-1)u'(x) = 2nxu(x)$. Диференцирати обе стране претходне једнакости $(n+1)$ пута и искористити Лајбницову формулу за n-ти извод производа.]

Полиноми $L_n(x)$ се зову Лежандрови полиноми. Доказати да је систем $\{L_n\}$ ортогоналан у односу на скаларни производ (102) на интервалу $[-1,1]$. Да ли је овај систем и нормиран? ✓

3. Задаци

(1) Методом варијације константи решити једначину

$$y'' + y = \operatorname{tg} x.$$

✓

(2) Доказати да услов (98) важи за неки пар линеарно независних решења хомогене једначине $L(y) = 0$ ако и само ако важи за сваки пар линерано независних решења. ✓

(3) Доказати да услов (98) важи за неки пар линеарно независних решења хомогене једначине $L(y) = 0$ ако и само ако постоје линеарно независна решења y_1 и y_2 једначине $L(y) = 0$ која задовољавају услов (93). ✓

(4) Решити гранични задатак $y'' + 2y' - 3y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(1) = 0$. ✓

(5) Решити гранични задатак $y'' + 2y' - 3y = 3x$, $y(0) = 0$, $y'(1) = 2$. ✓

(6) Наћи Гринову функцију за гранични задатак $y'' + \lambda y = f(x)$, $y(0) = y(l) = 0$, за $l > 0$, $\sin(\lambda l) \neq 0$. ✓

(7) Решити гранични задатак $y'' + y = x$, $y(0) = 0$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. ✓

(8) Наћи сопствене вредности и сопствене функције Штурм–Лиувиловог задатка:

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = y'(L) = 0$$

и проверити да оне задовољавају својства наведена на страни 108. ✓

(9) Наћи сопствене вредности и сопствене функције Штурм–Лиувиловог задатка:

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0,\ y(1) + y'(1) = 0.$$

Доказати да сопствене вредности образују растући низ који тежи $+\infty$. ✓

[5] Adrien-Marie Legendre (1752–1833), француски математичар.

(10) Доказати да се свака линеарна једначина другог реда
$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$$
своди на Штурм–Лиувилов облик
$$-(p(x)y')' + q(x)y = 0$$
после множења интеграционим фактором
$$\mu(x) = e^{\int a(x)dx}.$$

✓

ГЛАВА 7

Парцијалне једначине првог реда

Парцијална диференцијална једначина садржи парцијалне изводе, што значи да је непозната функција - функција више променљивих. Са неким парцијалним једначинама смо се (можда) већ сусрели, на курсу Комплексне анализе, нпр. са Лапласовом[1] једначином (другог реда)

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$$

(чија су решења хармонијске функције) или са Коши–Римановим[2] једначинама (првог реда)

$$u_x = v_y, \quad v_x = -u_y$$

(чија решења чине реални и имагинарни део комплексно диференцијалне функције). На овом курсу смо решавали једноставну парцијалну једначину код једначине са тоталним диференцијалом (која се појављивала и на курсу Анализе 2 у вези са независношћу криволинијског интеграла од путање). Чувени примери парцијалних једначина су једначина провођења топлоте ($u_t = k\Delta u$), таласна једначина ($u_{tt} = c^2\Delta u$), Шредингерова једначина, ($i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\mathbf{r},t) = \hat{H}\Psi(\mathbf{r},t)$) итд.

Најопштији облик парцијалне једначине првог реда је

$$F\left(x_1, \ldots, x_n, u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}, u\right) = 0,$$

где је $u = u(x_1, \ldots, x_n)$ непозната функција, а $F : \mathbb{R}^{2n+1} \to \mathbb{R}$ нека функција.

1. Квазилинеарна једначина и метод карактеристика

Посматрајмо нехомогену *квазилинеарну једначину*:

$$a(x,y,u)u_x + b(x,y,u)u_y = c(x,y,u), \tag{103}$$

где су a, b и c непрекидне функције три променљиве.

Означимо са

$$\mathcal{S} := \{(x,y,u(x,y)\} \subset \mathbb{R}^3$$

график решења u. Циљ нам је, наравно, да одредимо функцију u, али свака информација о њеном графику $\mathcal{S}$ јесте корисна.

Из Анализе 2 знамо да је нормала на површ $\mathcal{S}$ у тачки $(x,y,u(x,y))$ дата са

$$\mathbf{n} = (u_x(x,y), u_y(x,y), -1).$$

Али, како је u решење једначине (103), то је

$$\langle (a(x,y,u), b(x,y,u), c(x,y,u)), \mathbf{n}\rangle = 0 \quad \text{па је} \quad (a(x,y,u), b(x,y,u), c(x,y,u)) \perp \mathbf{n}.$$

Зато је природно да очекујемо да крива

$$\gamma(t) = (x(t), y(t), u(t)) \in \mathbb{R}^3$$

која задовољава једначину

$$\begin{aligned} x'(t) &= a(x,y,u) \\ y'(t) &= b(x,y,u) \\ u'(t) &= c(x,y,u) \end{aligned} \tag{104}$$

[1] Pierre-Simon Laplace (1749–1827), француски математичар, физичар, астроном и статистичар.

[2] Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866), немачки математичар.

лежи на површи $\mathcal{S}$. Приметимо пре свега да је систем (104) систем **обичних** диференцијалних једначина о којима већ доста знамо.

Дефиниција 180. Једначина (104) се зове *карактеристистична једначина* или *систем карактеристика* за линеарну парцијалну једначину (103). Векторско поље $F(x,y,u(x,y)) := (a(x,y,u), b(x,y,u), c(x,y,u))$ се зове *поље карактеристика.* Сама крива, тј. решење једначине (104) се зове *карактеристика.* $\diamondsuit$

Докажимо да је $\mathcal{S}$ заиста састављена од карактеристика.

Теорема 181. *Нека је $\gamma(t)$ карактеристика кроз тачку A (тј. решење једначине (104) са почетним условом $\gamma(0) = A$) и нека је тачка A на површи $\mathcal{S}$. Тада је цела карактеристика γ на $\mathcal{S}$. Одавде следи да је површ $\mathcal{S}$ унија карактеристика.*

Доказ. Нека је $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Дефинишимо криву

$$\alpha(t) := (x(t), y(t), u(x(t), y(t))).$$

Крива α припада површи $\mathcal{S}$ због своје дефиниције. Она је график функције u рестриковане на криву $\pi \circ \gamma$, где је π пројекција на раван Oxy. Како пројекција тачке A на раван Oxy има координате $(x(0), y(0))$ и како $A \in \mathcal{S}$, то је $\alpha(0) = A$. Међутим

$$\frac{d}{dt}\alpha(t) = (x'(t), y'(t), u_x x'(t) + u_y y'(t)) =$$
$$(a(x,y,u), b(x,y,u), u_x a(x,y,u) + u_y b(x,y,u)) = (a(x,y,u), b(x,y,u), c(x,y,u)),$$

и

$$\alpha(0) = A = \gamma(0),$$

односно пресликавања γ и α задовољавају исти Кошијев проблем, па морају бити једнака. Како α лежи на $\mathcal{S}$, то и γ лежи на $\mathcal{S}$. $\square$

Напомена 182. Горња дискусија и дефиниција важи и за општију једначину по функцији u од n променљивих:

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(x_1, \ldots, x_n, u) u_{x_j} = c(x_1, \ldots, x_n, u).$$

Систем карактеристика је овде

$$x_j'(t) = a_j(x_1, \ldots, x_n, u), \quad u'(t) = c(x_1, \ldots, x_n, u).$$

за линеарну парцијалну једначину (103). $\diamond$

Видели смо да се тражена хиперповрш која је график функције $u(x_1, \ldots, x_n)$ у $\mathbb{R}^{n+1}$ може добити као унија карактеристика. Без икаквог почетног услова ми ову унију можемо добити на много начина. Један од начина за одређивање конкретне уније (конкретног графика, тј. конкретне функције u) је метод првих интеграла.

1.1. Хомогени линеарни случај – метода првих интеграла. Ако функције a, b и c у (103) зависе само од (x, y):

$$a = a(x,y), \quad b = b(x,y) \quad c = c(x,y),$$

тада се једначина (103) зове *линеарна* парцијална једначина првог реда. Ако је $c(x,y) = 0$, тада се она зове *хомогена.*

Пример 183. Посматрајмо једначину транспорта:

$$u_\tau + a u_x = 0,$$

$u = u(\tau, x)$. Овде је $a(\tau, x) = 1$, $b(\tau, x) = a$, $c(\tau, x) = 0$. Ако њој придружимо одговарајући систем карактеристика, добијамо:

$$\begin{aligned} \tau'(t) &= 1 \\ x'(t) &= a \\ u'(t) &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \tau(t) &= t + t_0 \\ x(t) &= at + x_0 \\ u(t) &= u_0. \end{aligned}$$

Како карактеристика $\gamma(t) = (\tau(t), x(t), u(t))$ лежи на графику $\mathcal{S}$ функције $u(\tau, x)$, тада у овом примеру имамо да права

$$\begin{aligned} \tau(t) &= t + t_0 \\ x(t) &= at + x_0 \\ u(t) &= u_0. \end{aligned}$$

припада $\mathcal{S}$. То значи да је u константно, кадгод је $\tau(t) = t + t_0$ и $x(t) = at + x_0$, односно кадгод је $x - a\tau$ константно. Зато тражимо решење у облику:

$$u(\tau, x) = g(x - a\tau),$$

за произвољну диференцијабилну функцију g. Провером добијамо да је овакво u заиста решење једначине $u_\tau + au_x = 0$:

$$u_\tau + au_x = g'(x - a\tau)(-a) + ag'(x - a\tau) \cdot 1 = 0.$$

✓

Пример 184. Систем карактеристика придружен парцијалној једначини

$$yu_x - xu_y = 0$$

јесте

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -x \\ u' &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x(t) &= x_0 \cos t + y_0 \sin t \\ y(t) &= y_0 \cos t - x_0 \sin t \\ u(t) &= u_0. \end{aligned}$$

Видимо да су карактеристике кругови $x^2 + y^2 = const$ у равни $u = u_0$, односно да је површ $\mathcal{S}$ ротациона површ, тј. да је u зависи само од $x^2 + y^2$, $u = g(x^2 + y^2)$, за произвољну диференцијабилну функцију g. Можемо и проверити да је ово тачно:

$$yu_x - xu_y = yg'(x^2 + y^2) \cdot 2x - xg'(x^2 + y^2) \cdot 2y = 0.$$

✓

Шта смо у радили у претходна два примера, која су оба били **хомогена линеарна** једначина

$$a(x, y)u_x + b(x, y)u_y = 0?$$

Пронашли смо једначину карактеристике, и на неки начин изразили x и y, тако да добијемо функцију која је константна дуж карактеристике (у Примеру 183 то је био израз $x - a\tau$, а у Примеру 184 израз $x^2 + y^2$). Затим смо тражили решење у облику функције тог израза (у Примеру 183 $g(x - a\tau)$, а у Примеру 184 $g(x^2 + y^2)$). Формализујмо сада овај поступак.

Посматрајмо **хомогену линеарну** једначину

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(x_1, \ldots, x_n) u_{x_j} = 0 \tag{105}$$

и њој придужене карактеристике

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= a_1(x_1, \ldots, x_n) \\ &\vdots \\ x_n'(t) &= a_n(x_1, \ldots, x_n) \\ u'(t) &= 0. \end{aligned} \tag{106}$$

У случају хомогеног система, где се u не мења дуж карактеристике, уместо горње криве посматраћемо *пројектовану карактеристику* (тј. њену пројекцију на раван $u = 0$), која представља решење једначине:

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= a_1(x_1, \ldots, x_n) \\ &\vdots \\ x_n'(t) &= a_n(x_1, \ldots, x_n). \end{aligned} \tag{107}$$

Дефиниција 185. Функција $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ се зове *први интеграл* система (107) ако је f константна дуж сваког решења система (107). $\Diamond$

Пример 186. Укупна енергија је први интеграл система

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a},$$

који је еквивалентан систему

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= \mathbf{v} \\ \mathbf{v}' &= \tfrac{1}{m}\mathbf{F}, \end{aligned}$$

ако је систем конзервативан. Заиста, ово је Закон одржања енергије, видети Пример 4. ✓

Пример 187. Хамилтонова функција H је први интеграл Хамилтоновог система (86). ✓

Дефиниција 188. Кажемо да су фукције $f_1, \ldots, f_k$ линеарно независне у тачки $\mathbf{x}_0$ ако су вектори $\nabla f_1(\mathbf{x}_0), \ldots, \nabla f_k(\mathbf{x}_0)$ линеарно независни. $\Diamond$

Теорема 189. *За сваких $n-1$ првих интеграла $f_1, \ldots, f_{n-1}$ система (107), и за произвољну диференцијабилну функцију*

$$g : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R},$$

функција

$$u(x_1, \ldots, x_n) = g(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_{n-1}(x_1, \ldots, x_n))$$

решење једначине (105). Ако су $f_1, \ldots, f_{n-1}$ линеарно независни први интеграли (на неком скупу $\mathcal{U}$) тада су сва решења једначине (105) су локално овог облика (за свако $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$ постоји околина $\mathcal{U}_\mathbf{x}$ на којој је решење овог облика).

Доказ. Прво ћемо доказати да, за произвољну глатку функцију g, и прве интеграле f_j, $g(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_{n-1}(x_1, \ldots, x_n))$ јесте решење једначине (105). Пре свега, имамо:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} g(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_{n-1}(x_1, \ldots, x_n)) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial g}{\partial y_k} \frac{\partial f_k}{\partial x_j}.$$

Како је f_j константно дуж карактеристике, имамо да је

$$0 = \frac{d}{dt} f_j(x_1(t), \ldots, x_n(t)) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_k} x_k' = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_k} a_k(x_1, \ldots, x_n),$$

када је $(x_1(t), \ldots, x_n(t))$ карактеристика. Зато је

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \frac{\partial}{\partial x_k} g(f_1, \ldots, f_{n-1}) = \sum_{k,j} a_k \frac{\partial g}{\partial y_j} \frac{\partial f_j}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^{n-1} \left[\frac{\partial g}{\partial y_j} \sum_{k=1}^{n} a_k \frac{\partial f_j}{\partial x_k} \right] = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial g}{\partial y_j} \cdot 0 = 0,$$

па $g(f_1, \ldots, f_{n-1})$ јесте решење.

Што се тиче другог смера Теореме 189 наводимо доказ који је сугерисао Лука Петковић.

Претпоставимо да је $u(x_1, \ldots, x_n)$ једно решење једначине (105).

Из услова да су први интеграли, као и u константни дуж карактеристике лако следи да су $\nabla f_1, \ldots, \nabla f_{n-1}$ и ∇u ортогонални на γ' (где је γ карактеристика). Како је γ недегенерисана крива следи да су вектори $\nabla f_1, \ldots, \nabla f_{n-1}$ и ∇u линеарно зависни, а како су $\nabla f_1, \ldots, \nabla f_{n-1}$

линеарно независни на $\mathcal{U}$, следи да је ранг матрице састављене од вектора $\nabla f_1, \ldots, \nabla f_{n-1}$ и ∇u једнак $n-1$.

Једна од последица Теореме о рангу је следеће тврђење.

Теорема 190. *Нека су $\varphi, \ldots, \varphi_m$ глатке функције дефисане на неком подскупу скупа $\mathbb{R}^n$ и нека на неком отвореном скупу $\mathcal{U} \subset \mathrm{R}^n$ важи:*

- *за свако $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$ ранг матрице $\left[\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(\mathbf{x})\right]$, је једнак k*
- *за свако $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$ вектори $\nabla\varphi_1(\mathbf{x}), \ldots, \nabla\varphi_k(\mathbf{x})$ су линеарно независни.*

Тада за сваку тачку $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{U}$ постоји околина $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}$ и $m-k$ глатких функција $g_{k+1}, \ldots, g_m$ таквих да важи

$$\varphi_j(\mathbf{x}) = g_j(\varphi_1(\mathbf{x}), \ldots, \varphi_k(\mathbf{x})), \quad \text{za } j \in \{k+1, \ldots, m\}.$$

$\square$

За доказ претходне Теореме видети [2]. Ако применимо претходну теорему на функције $f_1, \ldots, f_{n-1}, u$, добијамо да је

$$u(\mathbf{x}) = g(f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_{n-1}(\mathbf{x})).$$

$\square$

1.2. Нехомогени квазилинеарни случај – метода првих интеграла. Општи случај квазилинеарне једначине се лако своди на хомогени линеарни. Посматрајмо једначину

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(x_1, \ldots, x_n, u) u_{x_j} = c(x_1, \ldots, x_n, u) \tag{108}$$

и њој придружену карактеристику

$$x_j'(t) = a_j(x_1, \ldots, x_n, u), \quad u'(t) = c(x_1, \ldots, x_n, u). \tag{109}$$

Теорема 191. *Нека су $f_1, \ldots, f_n$ први интеграли система (109) и нека је $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ произвољна диференцијабилна функција таква да је*

$$\frac{\partial}{\partial u} g(f_1(x_1, \ldots, x_n, u), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_n, u)) \neq 0 \tag{110}$$

на скупу

$$\mathcal{P} := \{(x_1, \ldots, x_n, u) \mid g(f_1(x_1, \ldots, x_n, u), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_n, u)) = 0 \mid (x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{U}\} \subset \mathbb{R}^{n+1},$$

за неки отворен скуп $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$. Тада је са

$$g(f_1(x_1, \ldots, x_n, u), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_n, u)) = 0 \tag{111}$$

дефинисано имплицитно решење и једначине (108) на $\mathcal{U}$.

Приметимо да је услов (110) природан јер нам даје могућност да из једначине (111) изразимо u као функцију по $(x_1, \ldots, x_n)$ (барем локално).

Доказ. Нека је $\mathcal{U}$ отворен скуп који садржи $\mathcal{P}$ на ком је такође испуњен услов (110).

Из једначине (110) добијамо

$$0 \neq \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial y_j} \frac{\partial f_j}{\partial u} \tag{112}$$

у свакој тачки из скупа $\mathcal{U}$. За свако $(x_1, \ldots, x_n) \in \pi(\mathcal{U})$, где је $\pi : (x_1, \ldots, x_n, u) \mapsto (x_1, \ldots, x_n)$ пројекција, имамо да важи (111), па је

$$0 = \frac{\partial}{\partial x_i} g(f_1(x_1, \ldots, x_n, u), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_n, u)) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial y_j} \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i} + \frac{\partial f_j}{\partial u} u'_{x_i} \right). \tag{113}$$

Како је f_j први интеграл, слично као у доказу Теореме 189 имамо да важи

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_i} a_i(x_1, \ldots, x_n, u) + \frac{\partial f_j}{\partial u} c(x_1, \ldots, x_n, u) = 0,$$

односно

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_i} a_i(x_1, \ldots, x_n, u) = -\frac{\partial f_j}{\partial u} c(x_1, \ldots, x_n, u) \tag{114}$$

Ако једначину (113) помножимо са $a_i(x_1, \ldots, x_n, u)$ и просумирамо по i, добијамо:

$$0 = \sum_{i,j} \frac{\partial g}{\partial y_j} a_i \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i} + \frac{\partial f_j}{\partial u} u'_{x_i} \right) = \sum_j \frac{\partial g}{\partial y_j} \left(\sum_i a_i \frac{\partial f_j}{\partial x_i} + \frac{\partial f_j}{\partial u} \sum_i a_i u'_{x_i} \right).$$

Убацивањем (114) у претходну једначину добијамо

$$0 = \sum_j \frac{\partial g}{\partial y_j} \left(-\frac{\partial f_j}{\partial u} c(x_1, \ldots, x_n, u) + \frac{\partial f_j}{\partial u} \sum_i a_i(x_1, \ldots, x_n, u) u'_{x_i} \right) =$$

$$\sum_j \frac{\partial g}{\partial y_j} \frac{\partial f_j}{\partial u} \left(-c(x_1, \ldots, x_n, u) + \sum_i a_i(x_1, \ldots, x_n, u) u'_{x_i} \right).$$

Из услова (112) закључујемо да мора бити

$$-c(x_1, \ldots, x_n, u) + \sum_i a_i(x_1, \ldots, x_n, u) u'_{x_i} = 0,$$

односно да u јесте решење. □

Теорема 192. *Ако постоји n функционално независних првих интеграла $f_1, \ldots, f_n$ система (109), и ако је једначином*

$$f(x_1, \ldots, x_n, u) = 0$$

задато имплицитно решење једначине (108) тада постоји локално дефинисана[3] *глатка функција g таква да је*

$$f(x_1, \ldots, x_n, u) = g(f_1(x_1, \ldots, x_n, u), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_n, u)).$$

Доказ. Пођимо од имплицитне везе између u и $x_1, \ldots, x_n$:

$$f(x_1, \ldots, x_n, u) = 0$$

и диференцирајмо ову једначину по x_j. Добијамо:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} + \frac{\partial f}{\partial u} u_{x_j} = 0 \quad \text{тј.} \quad \frac{\partial f}{\partial x_j} = -\frac{\partial f}{\partial u} u_{x_j}.$$

Одавде је

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial u} \sum_{j=1}^{n} -u_{x_j} a_j = -c \frac{\partial f}{\partial u}$$

ако је u решење једначине (108). Одавде видимо да је $f = f(x_1, \ldots, x_n, u)$ решење **линеарне хомогене** једначине

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} + c \frac{\partial f}{\partial u} = 0,$$

а из Теореме 189 знамо да су та решења локално облика

$$f(x_1, \ldots, x_n, u) = g(f_1(x_1, \ldots, x_n, u), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_n, u)).$$

□

[3]Дефинисана у околинит тачке $\mathbf{y}_0 := (f_1(\mathbf{x}_0, u_0), \ldots, f_n(\mathbf{x}_0, u_0))$.

Пример 193. Једначина карактеристике придружена једначини $u_\tau + au_x = u^2$ је

$$\begin{array}{lcl} \tau'(t) = 1 & & \tau(t) = \tau_0 + t \\ x'(t) = a & \Rightarrow & x(t) = at + x_0 \\ u'(t) = u^2 & & u(t) = \frac{u_0}{1-tu_0}. \end{array}$$

Одавде налазимо два линеарно независна прва интеграла:

$$f_1(\tau, x, u) = a\tau - x, \quad f_2(\tau, x, u) = \frac{1}{u} + \tau,$$

па је решење дато имплицитно са

$$g\left(a\tau - x, \frac{1}{u} + \tau\right) = 0$$

за неку глатку функцију g. ✓

1.3. Кошијев задатак – метода карактеристика.

Пример 194. Посматрајмо, као у Примеру 183, једначину транспорта $u_\tau + au_x = 0$, али сада тражимо сва решења која задовољавају почетни услов

$$u(0, x) = \phi(x).$$

Како смо задатак већ решили, имамо $u(\tau, x) = g(x - a\tau)$. Заменом почетног услова добијамо:

$$\phi(x) = u(0, x) = g(x),$$

па је решење задатка:

$$u(\tau, x) = \phi(x - a\tau).$$

Геометријски гледано, површ $\mathcal{S} = \mathrm{Graf}(u)$ је унија правих

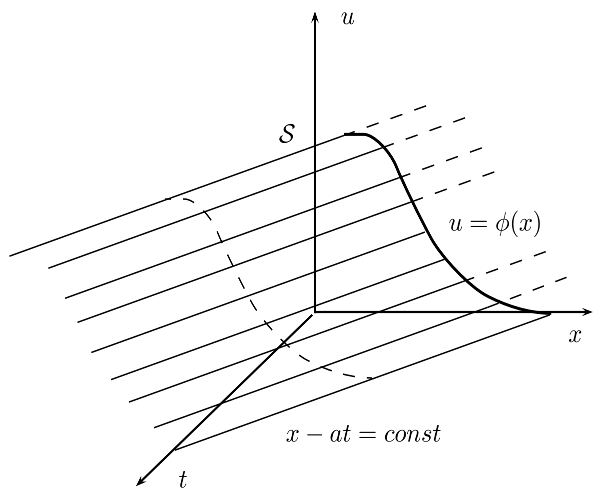
$$\tau(t) = t + t_0, \quad x(t) = at + t_0, \quad u(t) = u_0 \qquad (\star)$$

(јер су то карактеристике). Праве $(\star)$, међутим, за разне вредности τ_0, x_0, u_0, попуњавају цео простор. Ми смо овде одредили оно решење, тј. узели смо оне праве које пролазе кроз криву $u = \phi(x)$ у равни $\tau = 0$ (видети Слику 1). Овако заиста добијамо једну површ. ✓

Проблем описан у претходном примеру се назива *Кошијев проблем* или *Кошијев задатак*. Крива C која задаје почетни услов (конкретно, у претходном примеру: $\tau = 0, u = \phi(x)$) се зове *некарактеристика*. Захтеваћемо да се некарактеристика на неки начин разликује од карактеристике, да бисмо кроз сваку њену тачку могли да провучемо тачно једну карактеристику (видети и Напомену 197). То заправо овде радимо. Почетни услов нам је крива, а онда кроз сваку тачку A криве узимамо једно решење обичне диференцијалне једначине (то буде једначина са почетним условом A). Унија ових кривих нам даје површ $\mathcal{S}$ – график функције u.

Напомена 195. У Примеру 194 нашли смо решење Кошијевог задатка методом првих интеграла. То је, међутим, случајно испало тако једноставно. У општем случају, ако нам је задат почетни услов, дешава се да није лако да нађемо конкретно решење помоћу метода првих интеграла.[4] Зато ћемо код Кошијевог задатка да поступамо на други начин. Одмах ћемо тражити јединствену карактеристику кроз фиксирану тачку некарактеристике и тако добити график функције u као унију ових кривих. Видети следеће примере. ◇

[4] Да би се уверио у ово, читалац може да проба да реши Кошијеве проблеме у наставку методом првих интеграла.



Слика 1. Површ $\mathcal{S}$ као унија карактеристика (правих) кроз некарактеристику (дебља линија).

Пример 196. Нађимо оно решење парцијалне једначине:

$$xyu_x - y^2 u_y = x$$

које пролази кроз криву:

$$C : 2ayu = a^2 + 2, \quad x = a.$$

Потражимо једначину површи која представља унију карактеристика кроз криву C. Пре свега, напишимо некарактеристику C у параметарском облику $(x_0(s), y_0(s), u_0(s))$. Ако узмемо да је $y_0(s) = s$, добијамо:

$$x_0(s) = a, \quad y_0(s) = s, \quad u_0(s) = \frac{a^2+2}{2as}.$$

Сада фиксирамо s и тражимо карактеристику као криву са почетним условом $(x_0(s), y_0(s), u_0(s))$. Једначина карактеристике је дата са

$$\begin{aligned} x'(t) &= xy \\ y'(t) &= -y^2 \\ u'(t) &= x. \end{aligned} \tag{$\star$}$$

Имајмо у виду да је, за $t = 0$

$$x_0 = x(0,s) = x_0(s), \quad y_0 = y(0,s) = y_0(s), \quad u_0 = u(0,s) = u_0(s)$$

и да ово третирамо као почетни услов.

Из друге једначине у $(\star)$ добијамо да је

$$y(t,s) = \frac{y_0(s)}{y_0(s)t + 1},$$

па, убацивањем у прву, имамо:

$$x(t,s) = x_0(s)(y_0(s)t + 1),$$

и на крају, из треће добијамо:

$$u(t,s) = u_0(s) + x_0(s)\left(\frac{y_0(s)t^2}{2} + t\right).$$

Из параметризације некарактеристике добијамо да је решење у параметарском облику дато са:

$$\begin{aligned} x(t,s) &= a(st+1) \\ y(t,s) &= \frac{s}{st+1} \\ u(t,s) &= \frac{a^2+2}{2as} + a\left(\frac{st^2}{2}+t\right). \end{aligned}$$

Елиминацијом параметара добијамо

$$u(x,y) = \frac{2+x^2}{2xy}.$$

✓

Напомена 197. У претходном примеру смо параметризовали некарактеристику C као

$$(x_0(s), y_0(s), u_0(s)),$$

а затим смо тражили решење у параметарском облику

$$(x(t,s), y(t,s), u(t,s)).$$

Кад фиксирамо s, решавамо систем обичних диференцијалних једначина

$$\begin{aligned} \tfrac{dx}{dt} &= a(x,y,u) \\ \tfrac{dy}{dt} &= b(x,y,u) \\ \tfrac{du}{dt} &= c(x,y,u) \end{aligned} \tag{115}$$

са почетним условом

$$x(0,s) = x_0(s), \quad y(0,s) = y_0(s), \quad u(0,s) = u_0(s). \tag{116}$$

Затим изразимо (t,s) преко (x,y) и добијемо експлицитно решење $u(x,y)$. Ово јесте решење једначине (103), јер је

$$c(x,y,u) = u_t = u_x\frac{\partial x}{\partial t} + u_y\frac{\partial y}{\partial t} = a(x,y,u)u_x + b(x,y,u)u_y.$$

Да бисмо могли (барем локално) да изразимо (t,s) преко (x,y) захтевамо да важи

$$\det\begin{bmatrix} x_0'(s) & a(x,y,u) \\ y_0'(s) & b(x,y,u) \end{bmatrix} \neq 0 \tag{117}$$

на некарактеристици C. То нам, из Теореме о инверзној функцији обезбеђује да је $(t,s) \mapsto (x,y)$ барем локално инвертибилно, јер је

$$\frac{d(x,y)}{d(t,s)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_0}{\partial s} & a(x_0(s), y_0(s), u_0(s)) \\ \frac{\partial y_0}{\partial s} & b(x_0(s), y_0(s), u_0(s)) \end{bmatrix},$$

па је ова матрица инвертибилна на некарактеристици C ако важи услов (117). Услов (117) се зове *услов некарактеристике* и он нам даје прецизну дефинифицију некарактеристике.[5] ◇

Пример 198. Решимо Кошијев задатак

$$u_\tau + au_x = u^2, \quad u(x,0) = \cos x.$$

Дата некарактеристика је параметризована са

$$(0, s, \cos s).$$

[5] То је произвољна крива за коју важи (117).

Једначина карактеристике је

$$\begin{array}{lcl} \frac{d\tau}{dt} = 1 & & \tau(t,s) = t + \tau_0(s) \\ \frac{dx}{dt} = a & \text{па је} & x(t,,s) = at + x_0(s) \\ \frac{du}{dt} = u^2 & & u(t,s) = \frac{u_0(s)}{1-tu_0(s)}. \end{array}$$

Замењивањем у почетни услов добијамо

$$(\tau(0,s), x(0,s), u(0,s)) = (\tau_0(s), x_0(s), u_0(s)) = (0, s, \cos s),$$

па је

$$\tau_0(s) = 0, \quad x_0(s) = s, \quad u_0(s) = \cos s.$$

Одавде добијамо да је решење, у параметарском облику дато са:

$$\begin{array}{l} \tau(t,s) = t \\ x(t,s) = a\tau + s \\ u(t,s) = \frac{\cos(s)}{1-t\cos s}. \end{array}$$

Елиминацијом параметара t и s добијамо решење у експлицитном облику:

$$u(\tau, x) = \frac{\cos(x - a\tau)}{1 - \tau\cos(x - a\tau)}.$$

✓

Пример 199. Решићемо једначину $u_x + xu_y = u$ са почетним условом $u(1,y) = h(y)$. Параметризована једначина некарактеристике је

$$\begin{array}{l} x_0(s) = 1 \\ y_0(s) = s \\ u_0(s) = h(s). \end{array}$$

Једначина карактеристике је

$$\begin{array}{lclcl} \frac{dx}{dt} = 1 & & x(t,s) = t + x_0(s) & & x(t,s) = t + 1 \\ \frac{dy}{dt} = x & \Rightarrow & y(t,s) = \frac{t^2}{2} + t + y_0(s) & \Rightarrow & y(t,s) = \frac{t^2}{2} + t + s \\ \frac{du}{dt} = u & & u(t,s) = u_0(s)e^t & & u(t,s) = h(s)e^t. \end{array}$$

Елиминацијом параметара добијамо експлицитно решење:

$$u(x,y) = h\left(y - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\right) e^{x-1}.$$

✓

Напомена 200. У општем случају једначине

$$\varphi\left(x_1, \ldots, x_n, u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}, u\right) = 0,$$

Кошијев услов је дат са

$$u|_{\mathcal{P}} = \Phi,$$

где је $\mathcal{P}$ дата хиперповрш у $\mathbb{R}^n$, а Φ дата функција. ◇

2. Лагранж–Шарпијев метод

Сада посматрамо парцијалну једначину

$$F(x, y, u, p, q) = 0, \tag{118}$$

где је

$$p = u_x, \quad q = u_y$$

(ове ознаке користимо до краја поглавља). Почетни услов и у овом случају је дата крива (кроз коју наша површ треба да пролази):

$$u(x_0(s), y_0(s)) = u_0(s). \tag{119}$$

Инспирисани методом карактеристика, желимо да поставимо систем сличан систему карактеристика (115) са почетним условом (116). Хоћемо да тај систем буде систем обичних диференцијалних једначина (по t) са пет непознатих функција: $x(t,s)$, $y(t,s)$, $u(t,s)$, $p(t,s)$, $q(t,s)$, и почетним условом, за $t = 0$: $x_0(s)$, $y_0(s)$, $u_0(s)$, $p_0(s)$, $q_0(s)$. Наравно, изрази x, y, u, p, q нису независни (иако ћемо, у мотивацији, понекад тако да их третирамо) – зато ћемо морати све то на крају да оправдамо.

У претходном поглављу функција F је била линеарна по p и q, тј:

$$F(x, y, u, p, q) = ap + bq - c = 0, \tag{120}$$

и тамо смо имали:

$$\begin{aligned} x'(t) &= a \\ y'(t) &= b. \end{aligned}$$

Приметимо да је у (120)

$$a = F_p, \quad b = F_q.$$

Мотивисани овим, поставимо прве две једначине да буду:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= F_p \\ \frac{dy}{dt} &= F_q. \end{aligned}$$

Даље, имамо

$$u_t = u_x x_t + u_y y_t = pF_p + qF_q$$

и ово је трећа једначина (за u_t). Остало је још да напишемо једначину за p_t и q_t. Имамо:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}u_x = u_{xx}\frac{dx}{dt} + u_{xy}\frac{dy}{dt} = u_{xx}F_p + u_{xy}F_q.$$

Не одговара нам, међутим, да нам се у систему појављују u_{xx} и u_{xy} (јер то онда неће бити систем обичних диференцијалних једначина). Да бисмо избацили ове изразе, диференцирајмо израз (118) по x:

$$0 = F_x + F_p p_x + F_q q_x + F_u u_x = F_x + F_p u_{xx} + F_q u_{xy} + F_u p$$

одакле следи

$$F_p u_{xx} + F_q u_{xy} = -F_x - pF_u.$$

Одавде добијамо четврту једначину

$$\frac{dp}{dt} = -F_x - pF_u,$$

и на потпуно исти начин (заменом y уместо x и q уместо p) и пету:

$$\frac{dq}{dt} = -F_y - qF_u.$$

Ових пет једначина нам дају *Лагранж–Шарпијев*[6] *систем*:

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= F_p\\
\frac{dy}{dt} &= F_q\\
\frac{du}{dt} &= pF_p + qF_q\\
\frac{dp}{dt} &= -F_x - pF_u\\
\frac{dq}{dt} &= -F_y - qF_u.
\end{aligned} \tag{121}$$

Следећи проблем са којим се суочавамо је почетни услов за ових пет функција. Наиме, почетни услов (119) који нам је задат је крива $(x_0(s), y_0(s), u_0(s))$ у $\mathbb{R}^3$. Ми треба, пре свега, да дођемо до $p_0(s)$ и $q_0(s)$. Ако претпоставимо да је $(x(t,s), y(t,s), u(t,s), p(t,s), q(t,s))$ параметрско решење једначине (118) и ако у једначину

$$F(x(t,s), y(t,s), u(t,s), p(t,s), q(t,s)) = 0,$$

ставимо $t = 0$ добијамо прву једначину за $p_0(s)$, $q_0(s)$:

$$F(x_0(s), y_0(s), u_0(s), p_0(s), q_0(s)) = 0 \tag{122}$$

Из:

$$\frac{du}{ds} = u_x\frac{dx}{ds} + u_y\frac{dy}{ds},$$

за $t = 0$ добијамо

$$u_0'(s) = p_0(s)x_0'(s) + q_0(s)y_0'(s). \tag{123}$$

Из (122) и (123) добијамо $p_0(s)$ и $q_0(s)$.

Пре него што докажемо да нас читав овај поступак води до решења Лагранж–Шарпијевог проблема, урадимо пар примера.

Пример 201. Решићемо парцијалну једначину $u - px - qy - 3p^2 + q^2 = 0$ са почетним условом $x = 0$, $u = y^2$. Имамо да је $F(x,y,u,p,q) = u - px - qy - 3p^2 + q^2$, па је Лагранж–Шарпијев систем:

$$\begin{aligned}
x_t &= F_p = -x - 6p\\
y_t &= F_q = -y + 2q\\
u_t &= pF_p + qF_q = -xp - 6p^2 - yq + 2q^2\\
p_t &= -F_x - pF_u = 0\\
u_t &= -F_y - qF_u = 0.
\end{aligned}$$

Из последње две једначине имамо да је

$$p(t,s) = p_0(s), \quad q(t,s) = q_0(s),$$

а одавде, убацивањем у прве две једначине добијамо:

$$x(t,s) = (x_0(s) + 6p_0(s))e^{-t} - 6p_0(s), \quad y(t,s) = (y_0(s) - 2q_0(s))e^{-t} + 2q_0(s).$$

Из треће једначине сада добијамо:

$$u(t,s) = (x_0(s)p_0(s) + y_0(s)q_0(s) + 6p_0^2(s) - 2q_0^2(s))(e^{-t} - 1) + u_0(s).$$

Треба да одредимо почетне вредности

$$x_0(s),\ y_0(s),\ u_0(s),\ p_0(s),\ q_0(s).$$

Параметризацијом почетног услова $x = 0$, $u = y^2$ имамо

$$x_0(s) = 0. \quad y_0(s) = s, \quad u_0(s) = s^2.$$

[6] Paul Charpit (?–1784), француски математичар.

Једну једначину по $p_0(s)$, $q_0(s)$ добијамо из

$$F(x_0(s), y_0(s), u_0(s), p_0(s), q_0(s)) = 0 \Rightarrow u_0(s) - p_0(s)x_0(s) - q_0(s)y_0(s) - 3p_0^2(s) + q_0^2(s) = 0$$

односно:

$$s^2 - q_0(s)s - 3p_0^2(s) + q_0^2(s) = 0 \qquad (*).$$

Другу једначину по $p_0(s)$, $q_0(s)$ добијамо из (123)

$$u_0'(s) = p_0(s)x_0'(s) + q_0(s)y_0'(s),$$

тј:

$$2s = q_0(s) \qquad (**).$$

Из $(*)$ и $(**)$ добијамо:

$$p_0(s) = s, \quad q_0(s) = 2s.$$

Одавде имамо решење у параметарском облику:

$$\begin{aligned} x(t,s) &= 6s(e^{-t} - 1) \\ y(t,s) &= s(4 - 3e^{-t}) \\ u(t,s) &= s^2, \end{aligned}$$

одакле, елиминацијом параметара добијамо

$$u(x,y) = \left(\frac{x}{2} + y\right)^2.$$

✓

Пример 202. Решимо парцијалну једначину $p^2 + q^2 = 1$ са почетним условом $x = y = s$, $u = \lambda s$, за $|\lambda| < \sqrt{2}$. Како је $F(x,y,u,p,q) = p^2 + q^2 - 1$, то је Лагранж–Шарпијев систем:

$$\begin{aligned} x_t &= F_p = 2p \\ y_t &= F_q = 2q \\ u_t &= pF_p + qF_q = 2(p^2 + q^2) \\ p_t &= -F_x - pF_u = 0 \\ u_t &= -F_y - qF_u = 0. \end{aligned}$$

Крива која задаје почетни услов је већ параметризована:

$$x_0(s) = y_0(s) = s, \quad u_0(s) = \lambda s,$$

а једначине по $p_0(s)$ и $q_0(s)$ добијамо из (122) и (123):

$$p_0^2(s) + q_0^2(s) = 1 \quad p_0(s) + q_0(s) = \lambda. \qquad (\star)$$

Из Лагранж–Шарпијевог система добијамо:

$$p(t,s) = p_0(s),\ q(t,s) = q_0(s) \Rightarrow u_t = 2 \Rightarrow u(t,s) = u_0(s) + 2t = 2t + \lambda s,$$

као и

$$x_t = 2p_0(s) \Rightarrow x(t,s) = 2p_0(s)t + x_0(s) = 2p_0(s)t + s$$

и слично

$$y(t,s) = 2q_0(s)t + s.$$

Треба још да одредимо $p_0(s)$ и $q_0(s)$ из $(\star)$. Видимо да је тачка $(p_0(s), q_0(s))$ пресек јединичног круга и праве $x + y = \lambda$. Означимо

$$p_0 = \cos\alpha, \quad q_0 = \sin\alpha.$$ [7]

Решење једначине у параматарском облику је дато са

$$\begin{aligned} x(t,s) &= 2t\cos\alpha + s \\ y(t,s) &= 2t\sin\alpha + s \\ u(t,s) &= \lambda s + 2t, \end{aligned}$$

[7] Имамо две могућности за избор α због могућих вредности параметра λ.

одакле, елиминацијом параметара добијамо

$$u(x,y) = \frac{\lambda(y\cos\alpha - x\sin\alpha) + x - y}{\cos\alpha - \sin\alpha}.$$

✓

Сада ћемо да докажемо да нас овај потупак заиста води до решења.

Пре свега, да бисмо могли (барем локално) да нађемо експлицитно решење, довољно је да можемо (барем локално) да изразимо t и s преко x и y. То нам и сад обезбеђује *услов некарактерситике* који нам сад гласи

$$\det\begin{bmatrix} x_0'(s) & F_p \\ y_0'(s) & F_q \end{bmatrix} \neq 0 \tag{124}$$

на кривој која представља почетни услов. Заиста, ако је $x(t,s)$, $y(t,s)$ задовољавају прве две једнакости Лагранж–Шарпијевог система:

$$x_t = F_p, \quad y_t = F_q,$$

онда нам услов (124) заједно са Теоремом о инверзној функцији гарантује да је пресликавање

$$(t,s) \mapsto (x,y)$$

локални дифеоморфизам.

Нека је $(x(t,s), y(t,s), u(t,s), p(t,s), q(t,s))$ решење Лагранж–Шарпијевог система са датим почетним условом:

$$(x(0,s), y(0,s), u(0,s), p(0,s), q(0,s)) = (x_0(s), y_0(s), u_0(s), p_0(s), q_0(s)),$$

при чему је

$$(x_0(s), y_0(s), u_0(s))$$

дат почетни услов, а p_0 и q_0 задовољавају једначине (122) и (123). Треба да докажемо две ствари:

(А) $F(x(t,s), y(t,s), u(t,s), p(t,s), q(t,s)) = 0$;
(Б) $p = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial u}{\partial y}$.

Доказ дела (А). Нека је

$$G(t,s) := F(x(t,s), y(t,s), u(t,s), p(t,s), q(t,s)).$$

Хоћемо да докажемо да је G идентички једнако нули. Ако диференцирамо G по t, имамо

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial t} &= F_x\frac{\partial x}{\partial t} + F_y\frac{\partial y}{\partial t} + F_u\frac{\partial u}{\partial t} + F_p\frac{\partial p}{\partial t} + F_q\frac{\partial q}{\partial t} \\ &= F_xF_p + F_yF_q + F_u(pF_p + qF_q) + F_p(-F_x - pF_u) + F_q(-F_y - qF_u) = 0.\end{aligned}$$

То значи да је[8] $G(t,s) = G(0,s)$. Али

$$G(0,s) = F(x_0(s), y_0(s), u_0(s), p_0(s), q_0(s)) = 0$$

јер су $p_0(s)$ и $q_0(s)$ решења (122).

Доказ дела (Б). Довољно је да докажемо да је

$$H(t,s) := \frac{\partial u}{\partial s} - p(t,s)\frac{\partial x}{\partial s} - q(t,s)\frac{\partial x}{\partial s} \equiv 0 \tag{$\clubsuit$}$$

Заиста, ако би то било тачно, како већ имамо:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = pF_p + qF_q, \tag{$\diamondsuit$}$$

[8] Претпостављамо додатно да је скуп параметара (t,s) конвексан.

биће:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial u}{\partial s} \end{bmatrix} \overset{(\diamondsuit)+(\clubsuit)}{=} \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial u}{\partial s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial t}{\partial x} & \frac{\partial s}{\partial x} \\ \frac{\partial t}{\partial y} & \frac{\partial s}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial u}{\partial s} \end{bmatrix},$$

па је

$$p = \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}$$
$$q = \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y},$$

што је и требало доказати. Докажимо, зато ($\clubsuit$). Резонујемо слично као у доказу дела (A). Имамо да је

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial s} - \frac{\partial p}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial s} - p\frac{\partial^2 x}{\partial t \partial s} - \frac{\partial q}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial s} - q\frac{\partial^2 y}{\partial t \partial s} \\ &\overset{(121)}{=} \frac{\partial}{\partial s}(pF_p + qF_q) + (F_x + pF_u)\frac{\partial x}{\partial s} - p\frac{\partial}{\partial s}F_p + (F_y + qF_u)\frac{\partial y}{\partial s} - q\frac{\partial}{\partial s}F_q \qquad (\heartsuit) \\ &= \frac{\partial p}{\partial s}F_p + \frac{\partial q}{\partial s}F_q + (F_x + pF_u)\frac{\partial x}{\partial s} + (F_y + qF_u)\frac{\partial y}{\partial s}. \end{aligned}$$

Да бисмо изразили

$$\frac{\partial p}{\partial s}F_p + \frac{\partial q}{\partial s}F_q$$

диференцирајмо израз

$$G(t,s) = F(x(t,s), y(t,s), u(t,s), p(t,s), q(t,s)) \equiv 0$$

по s. Имамо

$$0 = F_x\frac{\partial x}{\partial s} + F_y\frac{\partial y}{\partial s} + F_u\frac{\partial u}{\partial s} + F_p\frac{\partial p}{\partial s} + F_q\frac{\partial q}{\partial s},$$

па је

$$F_p\frac{\partial p}{\partial s} + F_q\frac{\partial q}{\partial s} = -F_x\frac{\partial x}{\partial s} - F_y\frac{\partial y}{\partial s} - F_u\frac{\partial u}{\partial s}.$$

Одавде добијамо, убацивањем у ($\heartsuit$):

$$\frac{dH}{dt} = -F_x\frac{\partial x}{\partial s} - F_y\frac{\partial y}{\partial s} - F_u\frac{\partial u}{\partial s} + (F_x + pF_u)\frac{\partial x}{\partial s} + (F_y + qF_u)\frac{\partial y}{\partial s} = -F_u\left(\frac{\partial u}{\partial s} - p\frac{\partial x}{\partial s} - q\frac{\partial y}{\partial s}\right) = -F_u H.$$

Одавде следи да је

$$H(t,s) = c(s)e^{-\int F_u dt}.$$

Међутим,

$$H(0,s) = u_0'(s) - p_0(s)x_0'(s) - q_0(s)y_0'(s) = 0,$$

јер p_0 и q_0 задовољавају (123), па је

$$0 = H(0,s) = c(s)e^{\left[-\int F_u(t,s)dt\right]_{t=0}} \quad \Rightarrow \quad c(s) = 0 \quad \Rightarrow \quad H(t,s) \equiv 0.$$

Овим смо завршили доказ. □

3. Задаци

(1) Скуп глатких функција $\{f_1, \ldots, f_k\}$ зове функционално зависан у тачки $\mathbf{x}_0$ ако постоји глатка функција $g : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ која није идентички једнака нули ни у једној околини тачке $\mathbf{y}_0 = (f_1(\mathbf{x}_0), \ldots, f_k(\mathbf{x}_0))$ таква да је

$$g(f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_k(\mathbf{x})) \equiv 0$$

у некој околини тачке $\mathbf{x}_0$. Овде је $\mathcal{U}$ неки подскуп од $\mathbb{R}^k$ који садржи $\mathbf{y}_0$. Скуп глатких функција $\{f_1, \ldots, f_k\}$ функционално независан у тачки $\mathbf{x}_0$ ако није функционално зависан. Доказати да из линеарне независности вектора $\nabla f_1(\mathbf{x}_0), \ldots, \nabla f_n(\mathbf{x}_0)$, $f_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ следи функционална независност. ✓

(2) Доказати да је свака функција првих интеграла и сама први интеграл. ✓

(3) Решити једначину $xu_x + yu_y + zu_z = 0$.
[Решење: $u(x,y,z) = \varphi\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right) = 0$.] ✓

(4) Решити једначину $yuu_x + xuu_y = -2xy$.
[Решење: $\varphi(x^2 - y^2, 2x^2 + y^2) = 0$.] ✓

(5) Решити једначину $xu_x + zu_y + yu_z = 0$.
[Решење: $u = \varphi\left(y^2 - z^2, \frac{x}{y+z}\right)$.] ✓

(6) Решити Кошијев задатак $4u_x + u_y = 0$, $u(x,0) = \frac{1}{1+x^2}$.
[Решење: $u(x,y) = \frac{1}{1+(x-4y)^2}$.] ✓

(7) Решити Кошијев задатак $xyu_x + u_y = 0$, $u(x,0) = \sin x$.
[Решење: $u(x,y) = \sin(xe^{-y^2/2})$.] ✓

(8) Решити Кошијев задатак $4u_x + u_y = u^2$, $u(x,0) = \frac{1}{1+x^2}$.
[Решење: $u(x,y) = \frac{1}{(x-4y)^2+1-y}$.] ✓

(9) Решити Кошијев задатак $9yu_x - 4xu_y = \frac{xy}{u}$, $u(x,0) = x^2$. ✓

(10) Решити Кошијев задатак $xu_x + uu_y = y$, $u(1,y) = 2y$. ✓

(11) Решити једначину $u_t + xu_x = 0$, са почетним условом $u(0,x) = \phi(x)$.
[Решење: $u(t,x) = \phi(xe^{-t})$.] ✓

(12) Решити једначину $xu_x + yu_y + xyu_z = 0$ са почетним условом $u(x,y,0) = x^2 + y^2$. ✓

(13) Решити једначину $u_t + u_x u = 0$ са почетним условом $u(0,x) = \phi(x)$.
[Решење: $u(t,x) = \phi(x - ut)$.] ✓

(14) Решити једначину $u_x u_y = u$ са почетним условом $u = s^2$, $x = s$, $y = s + 1$.
[Решење: $u(x,y) = x(y-1)$.] ✓

(15) Решити једначину $u_x^2 + u_y^2 = 1$ са почетним условом $u|_{\{x^2+y^2=1\}} = 0$.
[Решење: $u(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} - 1$.] ✓

Литература

[1] V. I. Arnold, *Ordinary Differential Equations*, MIT Press, 1973.

[2] Д. Милинковић, *Анализа 2*, скрипта Математичког факултета 9, 13, 14, 16, 7, 1.1

[3] Д. Милинковић, *Увод у диференцијалне једначине*, скрипта Математичког факултета, `http://poincare.matf.bg.ac.rs/~milinko/skripta/dj.pdf`

[4] M. W. Hirsch and S. Smale, *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*, Academic Press, 1974. 21, 3

[5] L. Perko, *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer, 1991. 3

[6] E. Zehnder, *Lectures on Dynamical systems*, European Mathematical Society, 2010. 3

Индекс