

Геометрија 1

Задаци за вежбе и практикуме

2018.

1 Линеарне операције са векторима

1.1. Дата је коцка $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Да ли су вектори а) $\overrightarrow{BA_1}$, $\overrightarrow{C_1 B_1}$, $\frac{1}{2}\overrightarrow{D_1 C_1}$; б) $\overrightarrow{DD_1}$, $\overrightarrow{BC_1}$, $\overrightarrow{A_1 D}$; в) $\overrightarrow{C_1 B_1}$, $\overrightarrow{AB_1}$, $\overrightarrow{CD_1}$, компланарни.

1.2. Доказати да се дијагонале четвороугла полове ако и само ако је тај четвороугао паралелограм.

1.3. На страницама AB , BC , CD и AD паралелограма $ABCD$ дате су редом тачке A_1, B_1, C_1, D_1 тако да је $A_1 B_1 C_1 D_1$ паралелограм. Доказати да се праве AC , BD , $A_1 C_1$, $B_1 D_1$ секу у једној тачки.

1.4. У односу на тачку O дати су вектори положаја $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ тачака A и B ($A \neq B$). Изразити вектор положаја $\overrightarrow{OC}$ тачке C за коју је $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{CB}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

1.5. Дате су неколинеарне тачке A, B и O . Тачка C одређена са $\overrightarrow{OC} = \alpha \overrightarrow{OA} + \beta \overrightarrow{OB}$ припада правој AB ако и само ако важи $\alpha + \beta = 1$. Ако је при томе $\alpha \geq 0$ и $\beta \geq 0$, тада тачка C припада дужи AB . Доказати.

1.6. Нека су O, A, B и C четири некомпланарне тачке. Да би тачка D одређена са $\overrightarrow{OD} = \alpha \overrightarrow{OA} + \beta \overrightarrow{OB} + \gamma \overrightarrow{OC}$ припадала равни троугла ABC , потребно је и довољно да је $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Ако је при томе $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ и $\gamma \geq 0$, тада тачка D припада троуглу ABC . Доказати.

1.7. У простору је дато n тачака $A_1, \dots, A_n$ ($n \geq 2$) и тачка O . Тежиште тог скупа тачака је тачка T дефинисана са

$$\overrightarrow{OT} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \overrightarrow{OA_i}.$$

а) Доказати да дефиниција тачке T не зависи од избора тачке O .

Са $T_i, i = 1, \dots, n$ означимо тежиште скупа тачака који настаје из датог скупа избацивањем тачке A_i .

б) Доказати да се све дужи $A_i T_i$ ($1 \leq i \leq n$) секу у тачки T и да је $\overrightarrow{A_i T} : \overrightarrow{TT_i} = (n-1) : 1$.

1.8. Скицирати и доказати Задатак 1.7 за $n = 2, 3$ у равни и $n = 4$ у простору.

1.9. Доказати да се тежиште тетраедра $ABCD$ поклапа са тежиштем тетраедра $A'B'C'D'$ коме су темена A', B', C', D' редом тежишта троуглова BCD, ACD, ABD и ABC .

1.10. Дат је паралелограм $ABCD$. Ако је тачка F средиште странице BC , тачка G средиште странице CD , а тачка E пресек дужи AF и BG , одредити односе $\frac{AE}{EF}$ и $\frac{BE}{EG}$.

1.11. (Менелајева теорема, 1. век н. е.) Потребан и довољан услов да би тачке P, Q и R које леже редом на правама BC, CA и AB троугла ABC биле колинеарне, јесте да важи $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = -1$.

1.12. (Чеваова теорема) Нека су P, Q и R тачке редом на правама BC, AC и AB , троугла ABC . Доказати да је $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = 1$ ако и само ако се праве AP, BQ и CR секу у једној тачки или су паралелне.

1.13. Нека је ABC троугао и тачке P и Q такве да је $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PB}$ и $\overrightarrow{BQ} = 4\overrightarrow{QC}$, а тачка R је пресек правих AC и PQ . Израчунати однос $\overrightarrow{CR} : \overrightarrow{RA}$.

1.14. У равни је дат троугао ABC . Нека тачка D припада страници AB , а тачка E страници BC , тако да је $\frac{AD}{DB} = \frac{3}{4}$ и $\frac{BE}{EC} = \frac{5}{7}$. Ако се дужи AE и CD секу у тачки F одредити у ком односу тачка F дели дужи AE и CD .

1.15. Нека је ABC троугао, P и Q тачке такве да је $3\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{BA}$ и $2\overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{BC}$. Ако је R тачка праве AC таква да се праве AQ, CP и BR секу у једној тачки, одредити однос $\overrightarrow{AR} : \overrightarrow{RC}$.

1.16. На страницама AB и AC троугла ABC дате су редом тачке K и L , такве да важи $\frac{KB}{AK} + \frac{LC}{AL} = 1$. Доказати да тежиште троугла ABC припада дужи KL .

1.17. Дат је паралелограм $ABCD$ и у његовој унутрашњости тачка O . Две праве које садрже тачку O и паралелне страницама паралелограма, секу странице паралелограма у тачкама $P \in AB, Q \in CD, U \in AD$ и $V \in BC$. Доказати да се праве PV, QU и AC секу у једној тачки или су паралелне.

1.18. Над страницама троугла ABC конструисани су паралелограми $ABB_1 A_2, BCC_1 B_2, CAA_1 C_2$. Доказати да је $\overrightarrow{A_1 A_2} + \overrightarrow{B_1 B_2} + \overrightarrow{C_1 C_2} = \vec{0}$.

1.19. Дат је паралелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Доказати да је продор T дијагонале AC_1 кроз раван одређену тачкама B, D и A_1 тежиште троугла BDA_1 .

2 Скаларни, векторски и мешовити производ

- 2.1. Доказати да је за троугао ABC испуњен услов $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$ (косинусна теорема).
- 2.2. Доказати да се висине троугла секу у једној тачки (ортоцентар).
- 2.3. а) Доказати да симетрала унутрашњег угла у троуглу дели наспрамну страну у односу суседних страна. б) Доказати да се симетрале унутрашњих углова у троуглу секу у једној тачки (центар уписаног круга). Упутство: користити Чеваову теорему.
- 2.4. а) Доказати да се нормална пројекција вектора $\vec{v}$ на вектор $\vec{x}$ може записати у облику $\vec{v}_1 = \frac{\vec{v} \cdot \vec{x}}{|\vec{x}|^2} \vec{x}$. б) Ако су $\vec{v} = (1, 1, 1)$, $\vec{x} = (1, 2, 2)$ дати координатама у ортонормираној бази одредити једнозначно разлагање $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ вектора $\vec{v}$ на пројекцију и ортогоналну допуну ($\vec{v}_2 \perp \vec{x}$).
- 2.5. Наћи вектор $\vec{x}$ ако је $\vec{x} \cdot \vec{a} = \alpha$, $\vec{x} \cdot \vec{b} = \beta$, $\vec{x} \cdot \vec{c} = \gamma$, при чему су $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ некомпланарни вектори, а $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ задати ненула скалари.
- 2.6. Одредити вектор $\vec{x}$ ако важи $\vec{u} \cdot \vec{x} = \alpha$, $\vec{u} \times \vec{x} = \vec{v}$.
- 2.7. Ако су $A(0, 1, 1)$, $B(2, 3, 5)$, $C(3, 1, 4)$ темена троугла, израчунати његову површину.
- 2.8. Ако су $A(0, 1, 1)$, $B(1, 2, 6)$, $C(0, 1, 2)$ и $D(2, 0, 2)$ темена тетраедра, израчунати његову запремину.
- 2.9. Дат је троугао ABC површине P . Нека су тачке A_1, B_1, C_1 такве да важи $\overrightarrow{CA_1} = \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC_1} = \overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{BA}$. Колика је површина троугла $A_1B_1C_1$?
- 2.10. Дате су две праве пирамиде са истом основом, квадратом $ABCD$ ивице a . Нека су V_1 и V_2 врхови датих пирамида и угао између правих AV_1 и BV_2 једнак $\frac{\pi}{4}$. Ако је висина једне пирамиде једнака a одредити висину друге пирамиде.
- 2.11. Нека је ABC произвољан троугао у равни. Доказати да је збир три вектора који су спољашње нормале на ивице троугла, а чији је интензитет једнак дужини одговарајуће ивице, једнак нули.
- 2.12. Нека је $ABCD$ тетраедар. Доказати да је збир четири вектора који су спољашње нормале на пљосни тетраедра, а интензитет им је једнак површини одговарајуће пљосни, једнак нули.
- 2.13. Ако је у правоуглом паралелепипеду $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ дијагонала AC_1 нормална на раван која садржи тачке A_1, B, D доказати да је тај паралелепипед коцка.
- 2.14. Ако су A, B, C фиксиране неколинеарне тачке и P произвољна тачка, доказати да је $\overrightarrow{PA} \times \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PB} \times \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{PC} \times \overrightarrow{CA}$ ако и само је P тежиште троугла ABC .

3 Трансформације координата

- 3.1. Тежиште троугла OAB је тачка O' . У равни троугла изабрана су два афина репера: репер Oxy са почетком у тачки O и координатним векторима $\vec{e}_1 = \overrightarrow{OA}$ и $\vec{e}_2 = \overrightarrow{OB}$ и репер $O'x'y'$ са почетком у тачки O' и координатним векторима $\vec{f}_1 = \overrightarrow{O'A}$ и $\vec{f}_2 = \overrightarrow{O'B}$. Одредити везу координата (x, y) и (x', y') као и координате средишта страница троугла OAB у односу на репер $O'x'y'$.
- 3.2. Нека је $ABCDEF$ правилан шестоугао. Репер Axy има координатне векторе $\vec{e}_1 = \overrightarrow{AB}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{AF}$, а репер $Sx'y'$ координатне векторе $\vec{f}_1 = \overrightarrow{CB}$, $\vec{f}_2 = \overrightarrow{CD}$. Одредити формуле које представљају везу координата (x, y) и (x', y') , њима инверзне формуле, као и координате темена шестоугла у оба репера.
- 3.3. Дат је правоугаоник $ABCD$ чије ивице имају дужине $AB = 4$, $BC = 3$, а тачка S је центар тог правоугаоника. Дата су два ортонормирана репера, исте оријентације: репер Axy има x осу у правцу вектора $\overrightarrow{AB}$ и y осу у правцу вектора $\overrightarrow{AD}$, а репер $Sx'y'$ има x' осу у правцу вектора $\overrightarrow{SC}$. Одредити везу координата (x, y) и (x', y') , као и координате темена правоугаоника у оба координатна репера.
- 3.4. Дате су координате тачака $A(2, 1)$, $B(3, 0)$ и $C(1, 4)$ у односу на афини репер Oxy у равни. У односу на нови афини репер $O'x'y'$ те исте тачке имају координате $A(1, 6)$, $B(1, 9)$ и $C(3, 1)$. Изразити координате (x, y) произвољне тачке M у реперу Oxy помоћу координата (x', y') те исте тачке у новом реперу $O'x'y'$.
- 3.5. Дат је тетраедар $OABC$. Афини репер $Oxyz$ има почетак у темену O , а координатни вектори су $\vec{e}_1 = \overrightarrow{OA}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{OB}$ и $\vec{e}_3 = \overrightarrow{OC}$. Афини репер $Ax'y'z'$ има почетак у темену A тетраедра, а његови координатни вектори су $\vec{f}_1 = \overrightarrow{AD}$, $\vec{f}_2 = \overrightarrow{AE}$ и $\vec{f}_3 = \overrightarrow{AF}$, где су D, E и F средишта ивица BC, OA и AB . Изразити координате (x, y, z) произвољне тачке M у реперу $Oxyz$ помоћу координата (x', y', z') исте тачке у реперу $Ax'y'z'$. Одредити инверзне формуле као и координате темена тетраедра у односу на репер $Ax'y'z'$.
- 3.6. Дата је коцка $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ ивице 1, са центром S . Ортонормирани репер $Axyz$ има базне векторе $\vec{e}_1 = \overrightarrow{AB}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{AD}$, $\vec{e}_3 = \overrightarrow{AA_1}$. У ортонормираном реперу $Sx'y'z'$, исте оријентације, дијагонална раван $ABC_1 D_1$ има једначину $z' = 0$, тачка C_1 је на позитивном делу x' осе, а тачка D_1 има позитивну x' и y' координату. Одредити формуле трансформација координата и координате темена коцке у оба репера.

- 3.7. Дата је коцка $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ ивице a . Одредити а) угао између мимоилазних правих AC и BD_1 ; б) растојање између правих AC и BD_1 ; в) угао између праве AC и равни $\alpha = BCD_1$.
- 3.8. У погодном одабраном ортонормираном реперу одредити координате темена а) правилног тетраедра ивице a ; б) правилног октаедра ивице d .

4 Тачка, права и раван

- 4.1. Одредити углове које права $p : 3x - 2y + 4 = 0$ гради са координатним осама.
- 4.2. Одредити једначину праве n која је нормална на праву $p : 2x + 3y - 4 = 0$ и која садржи пресек правих $x + y + 1 = 0$ и $x - y = 0$.
- 4.3. Праве $p : y = x - 2$ и $q : y = 3$ разлажу раван на четири угла. а) Одредити једначине обе симетрале тих углова. б) Без цртања, у сваком од четири угла одредити по једну тачку A_1, A_2, A_3, A_4 . в) Одредити која од тачака A_i је у истом углу као тачка $M(1, 4)$. Проверити цртањем.
- 4.4. Одредити једначине тангенти из тачке $M(1, 2)$ на круг $k : (x - 1)^2 + (y - 7)^2 = 9$.
- 4.5. Дати су кругови: $k_1 : (x - 7)^2 + (y - 3)^2 = r_1^2$ и $k_2 : (x - 17)^2 + (y - 3)^2 = 81$. а) У зависности од полупречника $r_1 > 0$ дискутовати број заједничких тангенти ових кругова. б) За $r_1 = 3$ одредити једначине заједничких тангенти ових кругова.
- 4.6. Координате три темена четвороугла $ABCD$ су $A(5, 5), B(1, 3), C(3, -1)$. Темена четвороугла $A_1 B_1 C_1 D_1$ су редом средишта страница AB, BC, CD, DA , а пресек дијагонала $A_1 C_1$ и $B_1 D_1$ је тачка $S_1(4, 3)$. Одредити координате темена D и однос површина ова два четвороугла.
- 4.7. У поларним координатама одредити: а) једначину праве $p : \frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$. б) Једначину праве q која са x -осом гради угао $\phi_0 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, а на растојању је $r_0 \geq 0$ од координатног почетка.
- 4.8. Одредити растојање тачака A и B преко њихових поларних координата $A(r_A, \phi_A), B(r_B, \phi_B)$.
- 4.9. Скицирати раван а) $z - 5 = 0$; б) $x = -2$; в) $y + z - 3 = 0$; г) $x + 2y + 3z - 6 = 0$.
- 4.10. Одредити једначину нормале из тачке $A(2, 3, -1)$ на раван $\alpha : 2x + y - 4z + 5 = 0$.
- 4.11. Одредити једначину равни која садржи тачку $M(-1, 0, 3)$ и нормална је на праву $q : \frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-3}{-1}$.
- 4.12. Одредити једначину равни која:
а) је паралелна са равни Oxz и садржи тачку $P(2, 3, 5)$ б) садржи z -осу и тачку $M(-3, 1, 2)$ в) паралелна је x оси и садржи тачке $A(4, 0, -2), B(5, 1, 7)$.
- 4.13. Одредити тачку Q која је симетрична тачки $P(3, -2, -4)$ у односу на раван $\alpha : 6x + 2y - 3z - 75 = 0$ као и пројекцију P' тачке P на раван α .
- 4.14. Одредити тачку Q која је симетрична тачки $P(-1, -2, 1)$ у односу на праву $l : \frac{x}{-2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-4}{1}$ као и пројекцију P' тачке P на праву l .
- 4.15. Одредити једначину равни која садржи праву $l : \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{3}$ и нормална је на раван $\alpha : 2x - 4y + z + 5 = 0$.
- 4.16. Одредити λ тако да се праве $p : \frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{5} = \frac{z-1}{-2}$ и $q : \frac{x-\lambda}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+5}{0}$ секу. Које су координате пресечне тачке?
- 4.17. Одредити заједничку нормалу и растојање између мимоилазних правих $p : \frac{x-4}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-12}{-1}$ и $q : \frac{x-3}{-7} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$.
- 4.18. Одредити једначину праве која садржи тачку $L(2, -1, 7)$ и сече праве $p : \frac{x-1}{2} = \frac{y-4}{-3} = \frac{z-3}{1}$ и $q : \frac{x-7}{-1} = \frac{y-11}{-3} = \frac{z+2}{0}$.
- 4.19. Кроз тачку $T(-3, 1, 2)$ одредити праву l која је паралелна равни $\alpha : 4x - y + 2z - 5 = 0$ и која сече праву $p : \frac{x+3}{0} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{-1}$.
- 4.20. Одредити раван α која са равни $\gamma : x - 4y - 8z + 12 = 0$ образује угао $\frac{\pi}{4}$ и садржи праву: а) $x + 5y + z = 0, x - z + 4 = 0$ б) $p : \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z}{-1}$.
- 4.21. Одредити угао између плосни правилног тетраедра.
- 4.22. Одредити угао између (свих могућих) плосни правилног октаедра.

5 Криве другог реда

- 5.1. а) Доказати да средишта тетива паралелних дијаметру p елипсе (хиперболе) припадају некој правој q која пролази кроз центар елипсе (хиперболе). б) Доказати да су тангенте у крајевима дијаметра p паралелне правој q . в) Доказати да су (у случају елипсе) тангенте у крајевима дијаметра q паралелне дијаметру p .
- 5.2. Доказати да средишта паралелних тетива параболе припадају правој која је паралелна оси параболе.
- 5.3. Тангенте у тачкама M_1 и M_2 елипсе секу се у тачки P . Доказати да тачка P припада дијаметру који полови тетиву M_1M_2 .
- 5.4. Доказати да је геометријско место тачака из којих се елипса види под правим углом круг (еквивалентно: кад елипса клизи додирујући координатне осе њени центар се креће по кругу).
- 5.5. Шта је геометријско место тачака из којих се парабола види под правим углом?
- 5.6. Произволна права l сече хиперболу у тачкама P и Q , а асимптоте хиперболе у тачкама M и N . Доказати да је $MP = NQ$.
- 5.7. Доказати да је површина троугла чије су странице асимптоте хиперболе и тангента на хиперболу, константна.
- 5.8. Нека су дужи OA и OB два узајамно нормална полудијаметра елипсе. Доказати да је растојање центра O елипсе од тетиве AB константа која не зависи од избора полудијаметара.
- 5.9. Доказати да површина паралелограма који је разапет коњугованим полудијаметрима елипсе не зависи од избора полудијаметара.
- 5.10. Доказати да се елипса и хипербола које имају заједничке жиже (конфокалне криве) секу под правим углом.
- 5.11. Одредити једначину криве другог реда који садржи тачке $A(-2, -1)$ и $B(0, -2)$ и којој су праве $x+y+1=0$ и $x-y+1=0$ осе симетрије.
- 5.12. Одредити једначину параболе која садржи тачку $A(2, 1)$, ако су дате њена директриса $x-2y-5=0$ и оса симетрије $2x+y-1=0$.
- 5.13. Одредити једначину криве другог реда чија једна директриса има једначину $l: x+y-1=0$, а жиже су јој тачке $F_1(1, 1)$ и $F_2(-2, -2)$.
- 5.14. Одредити једначину праве која садржи тачку $A(3, 4)$ и додирује криву $2x^2 - 4xy + y^2 - 2x + 6y - 3 = 0$.
- 5.15. Свести криву другог реда $xy + x + y = 0$ на канонски облик изометријском трансформацијом координата и написати формуле трансформације. Одредити основне елементе криве (центар, осе симетрије, жиже, ексцентрицитет, асимптоте - ако постоје). Скицирати криву.
- 5.16. Свести криву другог реда $4x^2 - 4xy + y^2 + x + 12y + 6 = 0$ на канонски облик изометријском трансформацијом координата и написати формуле те трансформације. Која је то крива и колики јој је ексцентрицитет. Скицирати криву.

6 Афина пресликавања

- 6.1. а) Одредити афино пресликавање које тачке $A_0(0, 0)$, $B_0(1, 0)$, $C_0(0, 1)$ пресликава редом у тачке $A_1(5, 3)$, $B_1(6, 2)$, $C_1(4, 5)$. б) Да ли је пресликавање изометрија, чува ли оријентацију и површину? в) Одредити му инверзно пресликавање.
- 6.2. а) Одредити афино пресликавање које троугао $A_1B_1C_1: A_1(5, 3)$, $B_1(6, 2)$, $C_1(4, 5)$ пресликава троугао $A_2B_2C_2: A_2(1, 1)$, $B_2(-1, 0)$, $C_2(0, -3)$. б) чува ли пресликавање оријентацију. Скицирати. в) Одредити површину троугла $A_2B_2C_2$ ако се зна да је површина троугла $A_1B_1C_1$ једнака $\frac{1}{2}$.
- 6.3. а) Одредити формуле ротације око тачке $S(2, 2)$ за угао од $\phi = \frac{\pi}{4}$. б) Шта је слика праве $y = -x$ при том пресликавању. Нацртати!
- 6.4. а) Одредити формуле ротације око тачке $S(2, 5)$ за угао од $\phi = \frac{\pi}{2}$. б) Шта је слика круга $(x-2)^2 + y^2 = 4$ при том пресликавању. Нацртати!
- 6.5. Одредити формуле рефлексije у односу на праву $p: x = 6$.
- 6.6. Одредити формуле хомотетије са коефицијентом 2 у односу на тачку $S(4, 3)$. шта је слика круга $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 9$ при тој хомотетији?
- 6.7. а) Одредити формуле рефлексije простора у односу на раван $\alpha: 2x + 2y - z + 1 = 0$. б) Шта је слика сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ при тој рефлексiji? Скицирати!
- 6.8. Одредити бар једно афино пресликавање равни које које круг $k: x^2 + y^2 - 8x - 10y + 16 = 0$ пресликава на елипсу $e: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

- 6.9. Доказати да су све параболе међусобно сличне.
- 6.10. Одредити формуле афиног пресликавања простора које представља централну симетрију у односу на тачку $S(-1, 1, 3)$. Да ли пресликавање чува оријентацију простора?
- 6.11. а) Одредити формуле рефлексије простора у односу на раван $\alpha : y - z = 3$. б) Шта је слика праве $p : y = 0, z = 0$ при тој рефлексији? Нацртати!
- 6.12. Одредити формуле хомотетије којом се сфера $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ пресликава на сферу $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 + (z - 3)^2 = 3$. Наћи сва решења.

7 Површи

- 7.1. Круг k који настаје ротацијом тачке $A(1, 2, 3)$ око праве $p : \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{1}$ написати као: а) пресек равни и сфере којој центар припада равни б) пресек равни и кружног цилиндра в) пресек две сфере полупречника 2.
- 7.2. Одредити једначине равни које садрже праву $l : \frac{x-13}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{4}$ и додирују сферу $\mathcal{S} : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 67 = 0$. Одредити затим једначине симетралних равни диједара између ове две равни назначивши ону која сече дату сферу.
- 7.3. Одредити једначину сфере полупречика 3 која је уписана у конус $x^2 + y^2 - z^2 = 0$. Скицирати.
- 7.4. Шта се добија (објаснити и написати једначину) ротацијом праве p око Oz осе, ако је права p : а) $x = 0, y = z$; б) $y = 0, x = 1$ в) $z = 0, x = y$; г) $z = 0, x = 2$; д) $x = 1, y = z$.
- 7.5. Шта је геометријско место тачака простора које су једнако удаљене од: а) две паралелне праве; б) две праве које се секу; в) две паралелне равни г) две равни које се секу?
- 7.6. Шта је геометријско место тачака простора које су једнако удаљене од: а) две тачке; б) тачке и праве; в) тачке и равни; г) две мимоилазне праве?
- 7.7. Одредити једначину геометријског места тачака које су једнако удаљене од мимоилазних правих $p : x = 0, y = 0$, и $q : z = 0, x = a$. Свести површ на канонски облик. О којој се површи ради?
- 7.8. Одредити једначину цилиндра који је описан око сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ чије су изводнице паралелне вектору $(1, 1, -2)$.
- 7.9. (291.) Одредити једначину цилиндра чије су изводнице паралелне правој $p : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{4}$, а који садржи параболу $x^2 = 2y, z = 0$.
- 7.10. Одредити једначину конуса чији је врх тачка $V(0, 1, 1)$ и који садржи елипсу $x^2 + 3y^2 = 4, z = 0$.
- 7.11. Одредити једначину кружног конуса коме је права $o : x - y = 0, 4x - z = 0$ оса и коме је раван $\alpha : x + y + z = 0$ тангентна раван.
- 7.12. (298.) Одредити једначину конуса чије је теме тачка $M(1, 4, 5)$ и који додирује сферу $\sigma : (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 4$. Ако је извор светлости у тачки M одредити која је крива контура сенке сфере σ на раван Oxz .
- 7.13. Дат је параболоид $\mathcal{S} : z + 2 = x^2 + y^2$ и раван $\pi_1 : y - z = 4$. а) Одредити једначину равни π_2 која садржи тачку $M_0(0, \frac{1}{2}, -\frac{7}{4})$ а ортогонална је на раван Oyz и раван π_1 . б) Пресечну криву L равни π_2 и површи $\mathcal{S}$ пројектовати редом на све три координатне равни, одредити једначине тих пројекција и прецизно утврдити које су криве те пројекције.
- 7.14. Свести једначину површи на канонски облик изометријском трансформацијом и написати формуле трансформације 1) $3x^2 + 3y^2 - 2xy - 8, +8y - z + 10 = 0$; 2) $12x^2 + 6y^2 + 9z^2 - 12xz - 12yz - 4 = 0$.

8 Сферна геометрија

- 8.1. Одредити полупречник круга k на јединичној сфери који садржи тачке $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$. Упоредити растојање између тачака A и B мерено по кругу k , са растојањем по великом кругу између A и B .
- 8.2. На јединичној сфери одредити растојање између тачака $A(60^\circ N, 105^\circ W)$ и $B(30^\circ S, 45^\circ W)$.
- 8.3. Одредити (приближно) растојање између тачака на планети Земљи између градова $A(45^\circ N, 20^\circ E)$ и $B(30^\circ S, 25^\circ W)$. Узети да је Земља сфера полупречника $r = 6340 km$.
- 8.4. а) На јединичној сфери одредити неки сферни троугао (тј. координате темена) који има три права угла. Колики му је обим, а колика површина? б) Одредити фамилију троуглова чији збир углова тежи ка 3π .
- 8.5. На јединичној сфери одредити једнакостранични сферни троугао ABC (тј. координате темена) чији је унутрашњи угао $\alpha > \frac{\pi}{3}$, а теме A је северни пол. Колики му је обим, а колика површина?
- 8.6. Сферни троугао ABC на јединичној сфери има два угла једнака $\alpha = \frac{\pi}{3} = \beta$ и површину $P = \frac{\pi}{6}$. Израчунати ивице тог троугла.
- 8.7. Описати прецизно геометријско место тачака које су за $d > 0$ удаљене од северног пола сфере. Које су могуће вредности константе d ?