8. Метрички простори

На основу искуства приликом рада са функцијама једне променљиве, видели смо да се о геометријским својствима простора $\mathbb{R}$ могу доносити закључци уколико је позната структура отворених скупова тог простора, тј. његова топологија (видети лему 2.1.5 и коментаре након ње). Сходно томе и фамилију $\mathcal{T}$ подскупова неког скупа X, која задовољава:

(1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$;

(2) за свако $n \in \mathbb{N}$, ако $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{T}$, онда $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{T}$;

(3) ако је $A_i \in \mathcal{T}$ за свако $i \in \mathcal{I}$, онда $\bigcup\limits_{i \in \mathcal{I}} A_i \in \mathcal{T}$,

називамо **топологија** на скупу X, односно пар $(X, \mathcal{T})$ се назива тополошки простор (са фамилијом отворених скупова $\mathcal{T}$). Као и у случају $\mathbb{R}$, особина (2) говори да је фамилија $\mathcal{T}$ затворена за коначне пресеке, а особина (3) да је фамилија $\mathcal{T}$ затворена за произвољне уније (овде $\mathcal{I}$ представља произвољан скуп индекса, који може бити и бесконачан).

Први (екстремни) примери тополошког простора су фамилија $\{\emptyset, X\}$, где је X непразан скуп, као и случај у ком је $\mathcal{T} = \mathcal{P}X$, где је $\mathcal{P}X$ партитивни скуп скупа X (ова топологија се назива дискретна топологија на X). Мање тривијалан пример је, рецимо, случај у ком се $\mathcal{T}$ састоји од празног скупа и од свих подскупова A скупа X за које је скуп $X \setminus A$ коначан, тзв. кофинитна топологија (на X). Уколико је X коначан, кофинитна топологија се поклапа са дискретном, но то није случај уколико је X бесконачан. Приметимо да кофинитна топологија заиста јесте топологија на X, што следи из $X \setminus \Big(\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i\Big) = \bigcup\limits_{i=1}^{n}(X \setminus A_i)$, што је коначан скуп пошто је једнак коначној унији коначних скупова, као и $X \setminus \Big(\bigcup\limits_{i \in \mathcal{I}} A_i\Big) = \bigcap\limits_{i \in \mathcal{I}}(X \setminus A_i) \subseteq X \setminus A_{i_1}$, где је i_1 произвољан индекс из $\mathcal{I}$, а последњи скуп је коначан, док сам скуп X тривијално припада уоченој фамилији (важи $X \setminus X = \emptyset$, што је формално коначан скуп).

У наставку ћемо се посветити специјалном случају добијања тополошке структуре, који је притом уопштење такве структуре у $\mathbb{R}^n$, а са скоро истим идејама доказа доводи до резултата аналогних добијеним за реалновредносне непрекидне функције реалне променљиве.

8.1. Топологија метричког простора

Дефиниција 8.1.1. Нека је X произвољан скуп и $d : X \times X \to [0, \infty)$, таква да важи

(1) $(\forall x, y \in X)\ d(x, y) = d(y, x)$;

(2) $(\forall x, y, z \in X)\ d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$;

(3) $(\forall x, y \in X)\ d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

Онда се (X, d) назива **метрички простор**, а d **функција растојања**.

Често се виђа и да се функција d назива **метрика** (а сама ознака d и потиче од речи дистанца, што је латинска реч за растојање). На истом скупу се може дефинисати више метрика, но уколико буде јасно о којој се метрици ради, наглашаваћемо само скуп на којем је она дефинисана. Особина (1) претходне дефиниције се назива симетричност метрике, а особина (2) **неједнакост троугла** (за ту метрику), због јасног геометријског тумачења. Из те две особине следи $d(x, z) - d(y, z) \leqslant d(x, y)$ и $d(y, z) - d(x, z) \leqslant d(y, x)$, тј. $|d(x, z) - d(y, z)| \leqslant d(x, y)$ за све $x, y, z \in X$ (и последње добијено ћемо, поред саме особине (2), подразумевати приликом позива на неједнакост троугла). Приметимо да из наведених особина $(1), (2), (3)$ метрике следи да за произвољне $x, y \in X$ важи $0 = d(x, x) \leqslant d(x, y) + d(y, x) = 2d(x, y)$, тј. $d(x, y) \geqslant 0$, па се често виђа и да се d дефинише као функција са вредностима у $\mathbb{R}$ (но, по управо добијеном, непосредно следи да су вредности d у $[0, \infty)$).

Пример 1. На скупу $\mathbb{R}$ је $|x - y|$ метрика, која се обично назива стандардна метрика (на $\mathbb{R}$). Ако је d_1 метрика на X и $k > 0$, тривијално су $\min\{|x - y|, k\}$ и kd_1 метрике на X, а ако је и d_2 метрика на X, онда су $d_3(x, y) = d_1(x, y) + d_2(x, y)$ и $d_4(x, y) = \max\{d_1(x, y), d_2(x, y)\}$, за $x, y \in X$, метрике на X (у случају d_4, једино је нетривијална неједнакост троугла, но она следи из $a_1 \leqslant \max\{a_1, b_1\}$ и $\max\{a_1 + b_1, a_2 + b_2\} \leqslant \max\{a_1, a_2\} + \max\{b_1, b_2\}$, за $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$). Ако је $f : X \to X$ инјективно, онда је $d_f(x, y) = d_1(f(x), f(y))$, за $x, y \in X$, метрика на X (заиста, симетричност је тривијална, неједнакост троугла следи из $d_f(x, y) = d_1(f(x), f(y)) \leqslant d_1(f(x), f(z)) + d_1(f(z), f(y)) = d_f(x, z) + d_f(z, y)$, за $x, y, z \in X$, а ако је $d_f(x, y) = 0$, следи $f(x) = f(y)$, па како је f инјективна, следи $x = y$). △

Пример 2. За разлику од добијеног у случају метрике d_4 у претходном примеру, ако су d_1, d_2 метрике на X, онда $d_3(x, y) = \min\{d_1(x, y), d_2(x, y)\}$, за $x, y \in X$, не мора бити метрика на X. Заиста, ако је $X = \{0, 1, 2\} \subseteq \mathbb{R}$ са стандардним растојањем (тј. ако је $d(0, 1) = d(1, 2) = 1$, $d(0, 2) = 2$), функције f и g на X дате таблично, са

x	0	1	2
$f(x)$	0	1	3
$g(x)$	0	2	3

,

а $d_f(x,y) = d(f(x),f(y))$, $d_g(x,y) = d(g(x),g(y))$, за $x,y \in X$, онда је $\min\{d_f(0,2),d_g(0,2)\} = \min\{3,3\} = 3 > 1+1 = \min\{1,2\} + \min\{2,1\} = \min\{d_f(0,1),d_g(0,1)\} + \min\{d_f(1,2),d_g(1,2)\}$. Takође, по резултатима претходног примера, d_f задовољава симетричност и неједнакост троугла и без захтева инјективности f, али у том случају није метрика. Рецимо, $f_1(x,y) = |\sin x - \sin y|$ на $\mathbb{R}$ задовољава особине (1) и (2) из дефиниције метрике, али не и особину (3), пошто је $f_1(0,\pi) = 0$. Слично, $f_2(x,y) = (x-y)^2$ није метрика на $\mathbb{R}$, иако задовољава особине (1) и (3) из дефиниције метрике, али није задовољена неједнакост троугла (на пример, важи $f_2(0,2) = 4 > 1+1 = f_2(0,1) + f_2(1,2)$), док $f_3(x,y) = \begin{cases} x-y, & \text{ако је } x \geqslant y \\ 2(y-x), & \text{ако је } x < y \end{cases}$ задовољава особине (2) и (3) (испуњеност особине (3) је тривијална, као и особине (2) у случају $x \geqslant y$ (онда је лева страна у (2) једнака $x-y$), док у случају $x < y$, лева страна у (2) је једнака $2(y-x)$, а у зависности од тога да ли је $z \geqslant y$, $x < z < y$ или $z \leqslant x$, десна се своди на, редом, $2(z-x)+(z-y) = 3z-2x-y$, $2(z-x)+2(y-z) = 2(y-x)$ и $(x-z)+2(y-z) = 2y+x-3z$, те непосредно следи да је неједнакост троугла испуњена у сваком од наведених случајева). Међутим, како је $f_3(1,0) = 1 \neq 2 = f_3(0,1)$, следи да f_3 не задовољава особину (1) из дефиниције метрике. Из наведених својстава функција f_1, f_2, f_3 видимо и да су особине $(1),(2),(3)$ из дефиниције метрике независне, тј. не може се једна од њих добити на основу преостале две. $\triangle$

За $x \in X$ и $r > 0$ се $K(x,r) = \{y \,|\, d(x,y) < r\}$ назива **отворена кугла** (са центром у x, полупречника r у простору (X,d)). Скуп U је **отворен** ако за свако $x \in U$ постоји кугла са центром у x која припада U (дакле, за свако x постоји r тако да је $K(x,r) \subseteq U$; напоменимо да r зависи од x, тј. не мора бити исто за све $x \in U$). Специјално, X је отворен скуп, а формално је такав и $\emptyset$. Приметимо да за $r_1 < r_2$ важи $K(x,r_1) \subseteq K(x,r_2)$, а за произвољне две тачке $x \neq y$, ако је $0 < r < \frac{d(x,y)}{2}$, важи $K(x,r) \cap K(y,r) = \emptyset$ (ако би постојало z у наведеном пресеку, онда би било $2r < d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y) < 2r$, што је контрадикција), тј. за сваке две различите тачке x и y постоје дисјунктни отворени скупови U_x и U_y који садрже x и y, редом. Скуп A је **затворен** ако и само ако је скуп $X \setminus A$ отворен (тј. ако му је комплемент (у односу на X) отворен). Приметимо да су X и $\emptyset$ затворени скупови.

Лема 8.1.1. Фамилија отворених скупова метричког простора X је топологија на X. Унија коначно много, као и пресек произвољне фамилије затворених скупова метричког простора је затворен скуп.

Доказ. Нека је $n \in \mathbb{N}$ и $U_1, \ldots, U_n$ отворени. Ако је $U_1 \cap \ldots \cap U_n = \emptyset$, уочени пресек је отворен скуп, а ако је $U_1 \cap \ldots \cap U_n \neq \emptyset$, онда су $U_1, \ldots, U_n$ непразни, те ако је $x \in U_1 \cap \ldots \cap U_n$, из отворености уочених скупова следи да постоје позитивни $r_1, \ldots, r_n$, тако да је $K(x,r_i) \subseteq U_i$ за свако $1 \leqslant i \leqslant n$. Но онда је $r = \min\{r_1, \ldots, r_n\} > 0$ и важи $K(x,r) \subseteq U_i$ за свако $1 \leqslant i \leqslant n$, па је $K(x,r) \subseteq U_1 \cap \ldots \cap U_n$, тј. $U_1 \cap \ldots \cap U_n$ је отворен.

Ако је $(U_i)_{i\in\mathcal{I}}$ произвољна фамилија отворених скупова у X, ако је $\mathcal{I}$ празна фамилија или ако је $U_i = \emptyset$ за свако $i \in \mathcal{I}$, отвореност уније је тривијална, а, иначе, за свако $x \in \bigcup\limits_{i\in\mathcal{I}} U_i$ је $x \in U_{i_1} \neq \emptyset$ за неки $i_1 \in \mathcal{I}$, па како је $U_{i_1} \neq \emptyset$ отворен, постоји $r > 0$ тако да је $K(x,r) \subseteq U_{i_1} \subseteq \bigcup\limits_{i\in\mathcal{I}} U_i$, те је и $\bigcup\limits_{i\in\mathcal{I}} U_i$ отворен. Део тврђења који се односи на затворене скупове следи из претходно доказаног и Де Морганових закона. $\square$

По претходној леми, фамилија отворених скупова метричког простора јесте топологија (говорићемо и да је генерисана (индукована) метриком тог простора). Особину поменуту непосредно пре леме, да за $x \neq y$ постоје дисјункни отворени $U_x \ni x$ и $U_y \ni y$ не задовољава свака топологија (рецимо, кофинитна на бесконачном скупу), па следи да топологија не мора бити генерисана метриком. Топологије које имају уочену особину се називају **Хауздорфове** (често се говори и да се у њој могу раздвојити тачке). Из претходног следи и да за $x \in X$ је скуп $\{x\}$ затворен у X (заиста, за свако $y \neq x$ постоји отворен U_y, тако да $x \notin U_y$ и $y \in U_y$, те је $X \setminus \{x\} = \bigcup\limits_{y\neq x} U_y$ отворен, на основу претходне леме), па је и сваки коначан подскуп метричког простора затворен.
Скуп O је **околина** тачке x, ако постоји $r > 0$ тако да је $K(x,r) \subseteq O$, а ако је O и отворен, рећи ћемо да је отворена околина (видимо да је отворен скуп отворена околина сваке своје тачке). Највећи отворен скуп (у смислу инклузије) који је садржан у скупу A назива се **унутрашњост** скупа A, у ознаци $\operatorname{int} A$. Аналогно, најмањи затворен скуп (у смислу инклузије) који садржи скуп A се назива **затворење** скупа A, у ознаци $\overline{A}$. Директно се, као и у случају $\mathbb{R}$, показује да за све $A, B \subseteq X$ важи $\operatorname{int}(\operatorname{int} A) = \operatorname{int} A$, $A \subseteq B \Rightarrow \operatorname{int} A \subseteq \operatorname{int} B$, $\operatorname{int}(A\cap B) = \operatorname{int} A \cap \operatorname{int} B$, $\operatorname{int}(A\cup B) \supseteq \operatorname{int} A \cup \operatorname{int} B$, као и $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$, $A \subseteq B \Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B}$, $\overline{A\cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, $\overline{A\cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$ (видети лему 2.1.6, као и пример 3 главе 2), а важи и $\operatorname{int}(X \setminus A) = X \setminus \overline{A}$ и $\overline{X \setminus A} = X \setminus \operatorname{int} A$. Непосредно следи и да је $A \subseteq X$ отворен ако и само ако је $A = \operatorname{int} A$, а затворен ако и само ако је $\overline{A} = A$. Тачка $a \in X$ је **тачка нагомилавања** скупа $A \subseteq X$ ако у свакој околини a постоји тачка скупа A различита од a (пошто је топологија генерисана метриком Хауздорфова, из претходног следи да свака околина a садржи бесконачно много тачака скупа A). Скуп тачака нагомилавања скупа A (у X) називамо **изведени скуп**, у ознаци A', а ако је $a \in A$ и $a \notin A'$, тачку a називамо **изолована тачка** (скупа A).

Лема 8.1.2. Нека је (X,d) метрички простор. Скуп $A \subseteq X$ је затворен ако и само ако $A' \subseteq A$.

Доказ. Ако је $a \in A' \setminus A$, не постоји отворен скуп U, тако да је $a \in U \subseteq X \setminus A$, па скуп $X \setminus A$ није отворен, а самим тим A није затворен. Ако $A' \subseteq A$ и $b \notin A$, онда b није тачка нагомилавања скупа A, па постоји отворен $U_b \subseteq X \setminus A$. Онда је $X \setminus A \subseteq \bigcup\limits_{b\in X\setminus A} U_b \subseteq X \setminus A$, па је $X \setminus A = \bigcup\limits_{b\in X\setminus A} U_b$, што је отворен скуп, пошто је унија отворених скупова. Но онда је A затворен скуп. $\square$

Из претходне леме следи да се и у случају општег метричког простора преносе особине затворености које су важиле у $\mathbb{R}$ (са стандардном метриком), односно, важи $\overline{A} = A \cup A'$, а затворен скуп можемо приказати као дисјунктну унију његових тачака нагомилавања и његових изолованих тачака (чак по неким литературама својство $A' \subseteq A$ игра улогу дефиниције затворености скупа A). Скуп A је **савршен** (перфектан) ако и само ако је $A = A'$ (затворен је и свака његова тачка је тачка нагомилавања). Скуп $A \subseteq X$ је **густ** у X ако и само ако је $\overline{A} = X$ (последње је, на основу претходног, еквивалентно са захтевом да за свако $x \in X$ и произвољну околину U тачке x важи $U \cap A \neq \emptyset$, а, по дефиницији околине, и са захтевом да за свако $x \in X$ и свако $r > 0$, важи $K(x,r) \cap A \neq \emptyset$). Уколико у X постоји највише пребројив густ подскуп, онда се X назива **сепарабилан** простор.

Наведимо и неколико директних последица претходних дефиниција. Непосредно из неједнакости троугла следи да за $x_1, \ldots, x_n$, где је $n \geqslant 3$, важи $d(x_1, x_n) \leqslant d(x_1, x_2) + \ldots + d(x_{n-1}, x_n)$ (ако је $n = 3$, у питању је неједнакост троугла из дефиниције; ако је тврђење тачно за $n-1$ тачака, онда је $d(x_1, x_n) \leqslant d(x_1, x_{n-1}) + d(x_{n-1}, x_n) \leqslant d(x_1, x_2) + \ldots + d(x_{n-1}, x_n)$, па тврђење следи индукцијом; добијена неједнакост је позната и као неједнакост многоугла). Отворена кугла је отворени скуп (ако је у питању $K(x,r)$ и $y \in K(x,r)$, за свако $z \in K(y,r')$, где је $0 < r' < r - d(x,y)$ важи $d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z) < r$, па $z \in K(x,r)$).

Пример 3. За произвољне $x, y \in X$ нека је $d(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{ако је } x \neq y \\ 0, & \text{ако је } x = y \end{cases}$.

Онда је d метрика на X. Заиста, тривијално је $d(x,y) = 0$ ако и само ако је $x = y$, као и $d(x,y) = d(y,x)$. Ако за неке $x, y, z \in X$ важи $d(x,y) > d(x,z) + d(z,y)$, како d узима вредности из скупа $\{0,1\}$, мора бити $d(x,y) = 1$, $d(x,z) = d(z,y) = 0$. Међутим, онда је $x \neq y$ и $x = z = y$, што је немогуће, па је задовољена и неједнакост троугла. За свако $x \in X$ је $K(x, \frac{1}{2}) = \{x\}$ (и више, кугле са центром у x су или $\{x\}$ или X), па је скуп $\{x\}$ отворен (а од раније знамо да је и затворен). Дакле, топологија генерисаном овом метриком је дискретна, па је уобичајно да се и ова метрика назива дискретна. $\triangle$

Ако је затворена кугла (са центром у x и полупречника r) скуп $\overline{K}(x,r) = \{y \in X \mid d(x,y) \leqslant r\}$ (јасно је да је у свакој метрици тај скуп затворен), у метричком простору из претходног примера (и ако X садржи барем две тачке) је $\overline{K(x,1)} = \overline{\{x\}} = \{x\} \neq X = \overline{K}(x,1)$, за $x \in X$, па у општем случају не мора затворење отворене кугле бити одговарајућа затворена кугла (те треба бити прилично опрезан приликом преноса сличних закључака са случаја $\mathbb{R}$ (са стандардном метриком)).

Пример 4. Ако је V нормиран векторски простор (са нормом $\|\cdot\|$), са $d(x,y) = \|x - y\|$, за $x, y \in V$, је дефинисана метрика на V. Заиста, важи $\|x - y\| = \| -(y - x)\| = \|y - x\|$; ако је $\|x - y\| = 0$, следи $x - y = 0$, тј. $x = y$; за произвољне $x, y, z \in V$ је $d(x,y) = \|x - y\| = \|(x - z) + (z - y)\| \leqslant \|x - z\| + \|z - y\| = d(x,z) + d(z,y)$. Посебну важност за даљи рад имају векторски простор $\mathbb{R}$, где је норма функција која $x \in \mathbb{R}$ додељује $|x|$, векторски простор $\mathbb{C}$, где је норма функција која $z \in \mathbb{C}$ додељује $|z|$, векторски простор $\mathbb{R}^n$, за $n \in \mathbb{N}$, где је норма функција која $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ додељује $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$ (која се назива стандардна норма на $\mathbb{R}^n$). У поменутим примерима норма разлике два елемента доводи до „уобичајног растојања” две тачке у геометријским интерпретацијама наведених простора. Приметимо и да је сваки потпростор $\mathbb{R}^n$ (и уопште, векторског простора коначне димензије) затворен, што не мора бити тачно и у општем случају (рецимо, то је разлог због ког је у примеру 9 главе 2 захтевано да је V коначне димензије, а није тешко видети да резултат из тог примера остаје на снази и уз услов да је N затворен). $\triangle$

У случају $\mathbb{R}$ (са стандардним растојањем) $[0, 1 - \frac{1}{n}]$, за $n \in \mathbb{N}$, су затворени, а њихова унија $[0, 1)$ није затворен скуп, а $(0, 1 + \frac{1}{n})$, за $n \in \mathbb{N}$, су отворени, док њихов пресек $(0, 1]$ није отворен скуп. Следи да је у леми 8.1.1 битно ограничити се на коначне уније затворених и коначне пресеке отворених, тј. одговарајуће тврђење не мора бити тачно за произвољне уније затворених и произвољне пресеке отворених скупова.

Пример 5. Ако су (X, d_X) и (Y, d_Y) метрички простори, онда је то и $X \times Y$ са функцијом растојања $d_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d_X(x_1, x_2) + d_Y(y_1, y_2)$. Заиста, симетричност је тривијална, важи $d_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = 0$ ако и само ако је $d_X(x_1, x_2) = d_Y(y_1, y_2) = 0$, тј. ако и само ако је $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$, а важи и $d_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d_X(x_1, x_2) + d_Y(y_1, y_2) \leqslant d_X(x_1, x_3) + d_X(x_3, x_2) + d_Y(y_1, y_3) + d_Y(y_3, y_2) = d_1((x_1, y_1), (x_3, y_3)) + d_1((x_3, y_3), (x_2, y_2))$, за све $x_1, x_2, x_3 \in X$ и $y_1, y_2, y_3 \in Y$. Ако је $X = Y = \mathbb{Z}$ и $d(m, n) = |m - n|$ за $m, n \in \mathbb{Z}$, растојање тачака (m_1, n_1) и (m_2, n_2) добијено на описани начин је $|m_1 - m_2| + |n_1 - n_2|$, што одговара растојању поменутих тачака „крећући се само по правцима паралелним координатним осама” (приметимо да се сличан закључак може извести и за друге $X, Y \subseteq \mathbb{R}$). Последње се може илустровати као мапа града у ком су све улице паралелне некој од координатних оса, а из тог разлога се описана метрика назива и такси метрика (метрика такси возача). $\triangle$

Резултат претходног примера се директно преноси на случај коначног Декартовог производа. На $\mathbb{R}^n$, где је $n \in \mathbb{N}$, то доводи до метрике генерисане нормом $\|(x_1, \ldots, x_n)\|_1 = |x_1| + \ldots + |x_n|$. Како се на истом скупу може дефинисати више метрика, природно се поставља питање њиховог односа. Метрике d_1 и d_2 на X се називају **тополошки еквивалентне** ако генеришу исту топологију, а **јако еквивалентне** ако постоје $m, M \in \mathbb{R}^+$, тако да за све $x, y \in X$ важи $m d_1(x, y) \leqslant d_2(x, y) \leqslant M d_1(x, y)$ (тривијално, последње заиста дефинише релацију еквиваленције на скупу свих метрика на X). Приметимо и да се наведене еквиваленције поклапају у случају метрике индуковане нормом. Скуп A у метричком простору (X, d) је **ограничен** ако је $A \subseteq K(x, r)$ за неке $x \in X$ и $r \in \mathbb{R}$ (а лако се види да је последње еквивалентно са ограниченошћу скупа $\{d(x, y) \,|\, x, y \in A\}$ у $\mathbb{R}$ (са стандардном метриком)).

Лема 8.1.3. (а) Ако су метрике d_1 и d_2 на X јако еквивалентне, онда су и тополошки еквивалентне.
(б) Ако је (X, d_1) метрички простор и $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ строго растућа непрекидна функција, за коју је $f(0) = 0$ и $f(x + y) \leqslant f(x) + f(y)$ за све $x, y \in \mathbb{R}^+$, онда је функција $d_2(x, y) = f(d_1(x, y))$, за $x, y \in X$, метрика на X, која је тополошки еквивалентна са d_1.

Доказ. Нека $K_i(x, r)$ означава куглу са центром у x, полупречника r у метрици d_i, где је $i \in \{1, 2\}$.
(а) Ако су $m, M \in \mathbb{R}^+$ такви да је $md_1(x, y) \leqslant d_2(x, y) \leqslant Md_1(x, y)$, за све $x, y \in X$, важи $K_2(x, mr) \subseteq K_1(x, r) \subseteq K_2(x, Mr)$, те следи тврђење.
(б) Из услова следи да је $f(x) = 0$ ако и само ако је $x = 0$. Тривијално је d_2 симетрична, као и $d_2(x, y) = 0$ ако и само ако је $d_1(x, y) = 0$, тј. ако и само ако је $x = y$. Како за све $x, y, z \in X$ важи $d_1(x, y) \leqslant d_1(x, z) + d_1(z, y)$, следи $d_2(x, y) = f(d_1(x, y)) \leqslant f(d_1(x, z)) + f(d_1(z, y)) = d_2(x, z) + d_2(z, y)$, па је задовољена и неједнакост троугла.
Ако је $U \subseteq X$ отворен у метрици d_2, онда постоји $\varepsilon > 0$ тако да је $K_2(x, \varepsilon) \subseteq U$, тј. ако је $f(d_1(x, y)) < \varepsilon$, онда $y \in U$. Како је f непрекидна постоји $\delta > 0$ тако да је $f([0, \delta)) \subseteq [0, \varepsilon)$, па из претходног следи да је $K_1(x, \delta) \subseteq U$ (заправо, показано је да свака кугла у метрици d_2 садржи куглу (са истим центром) у метрици d_1). Под наведеним условима постоји f^{-1} (дефинисана на слици функције f) која је такође непрекидна, па из претходног следи и да свака кугла у метрици d_1 садржи куглу (са истим центром) у метрици d_2. □

На даље ћемо термин еквивалентност користити уколико су метрике тополошки еквивалентне. По делу (а) претходне леме, јако еквивалентне метрике су и еквивалентне. Део (б), између осталог, омогућује да се на великој класи метричких простора конструишу еквивалентне метрике. На пример, функција $f(x) = \frac{x}{x+1}$ на $[0, \infty)$ је строго растућа, непрекидна и за свако $x, y \geqslant 0$ важи $\frac{x}{x+1} + \frac{y}{y+1} \geqslant \frac{x}{x+y+1} + \frac{y}{x+y+1} = f(x+y)$, па ако је (X, d) метрички простор, онда је и $(X, \frac{d}{d+1})$ метрички простор, а $d_2(x, y) = \frac{|x-y|}{|x-y|+1}$ је метрика на $\mathbb{R}$, која је еквивалентна са стандардном метриком. Приметимо да за свако $x, y \in \mathbb{R}$ важи $d_2(x, y) < 1$, тј. сваки $A \subseteq \mathbb{R}$ је ограничен у метрици d_2, а у метрици d_1 постоје неограничени скупови. Са друге стране, јака еквивалентност метрика d_1 и d_2 повлачи да је скуп ограничен у d_1 ако и само ако је ограничен у d_2. Дакле, еквивалентне метрике не морају бити и јако еквивалентне. Такође, приметимо и да строго растућа непрекидна конкавна функција $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ задовољава услове дела (б) претходне леме. Заиста, ако је, без умањења општости, $x > y > 0$, из конкавности следи $\frac{f(x+y)-f(x)}{(x+y)-x} \leqslant \frac{f(y)-f(0)}{y-0} = \frac{f(y)}{y}$, одакле је $f(x + y) \leqslant f(x) + f(y)$ (па се претходни закључак за функцију $f(x) = \frac{x}{x+1}$, пошто је и два пута диференцијабилна на $[0, \infty)$, може добити и на основу тога што је $(f(x))'' = -\frac{2}{(x+1)^3} < 0$ за $x \geqslant 0$, а, слично, ако је $g(x) = \operatorname{arctg} x$, важи $g(0) = 0$, $g'(x) = \frac{1}{1+x^2} > 0$ и $g''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} < 0$ за $x \geqslant 0$ (па g строго

расте и конкавна је на $[0, \infty)$), те задовољава услове дела (б) претходне леме (па је и $d_3(x, y) = \operatorname{arctg} d_1(x, y)$ метрика на X, еквивалентна са d_1)).
Ако је (X, d_X) метрички простор и $Y \subseteq X$, на Y се природно може дефинисати метрика са $d_Y(y_1, y_2) = d_X(y_1, y_2)$ за све $y_1, y_2 \in Y$. Метрички простор Y са овако дефинисаном метриком се назива **метрички потпростор** простора X. Заправо, видимо и да су без потребе наведене метрике обележаване различитим симболима (те ћемо убудуће метрику на потпростору означавати на исти начин као и метрику ширег простора). Ако су (X, d_X) и (Y, d_Y) метрички простори и $f : X \to Y$ таква да је $d_Y(f(x_1), f(x_2)) = d_X(x_1, x_2)$ за све $x_1, x_2 \in X$, онда је f инјективна (ако је $x_1 \neq x_2$, онда је $d_X(x_1, x_2) \neq 0$, па је $d_Y(f(x_1), f(x_2)) \neq 0$, одакле је $f(x_1) \neq f(x_2)$), а ако је и сурјективна, назива се **изометрија** (ако није сурјективна, онда је f изометрија X на $f(X)$). Ако f није сурјективна, онда се f назива утапање (метричког простора X у метрички простор Y).
Из дефиниције је јасно да су отворени скупови у Y, који је подскуп X, скупови облика $U \cap Y$, где је U отворен у X. Топологија на Y, добијена на описани начин из топологије X, се назива наслеђена (генерисана, индукована) топологија (на потпростору Y простора X). Скуп $\mathbb{R}$ је потпростор простора $\mathbb{C}$, као и простора $\mathbb{R}^n$, где је $n \geqslant 2$ (са уобичајним метрикама). Приметимо да је скуп (a, b), где је $a < b$, отворен у $\mathbb{R}$, а није у $\mathbb{R}^2$ (са уобичајним метрикама). Слично, скуп $(0, 1]$ је потпростор $\mathbb{R}$ (са уобичајном метриком). Притом, скуп $(a, 1]$, за $a \in (0, 1)$, је отворен у $(0, 1]$, а није у $\mathbb{R}$, а скуп $(0, a]$, за $a \in (0, 1)$ је затворен у $(0, 1]$, а није у $\mathbb{R}$. Следи да су отвореност и затвореност релативне (условне) особине, тј. уколико је неки скуп отворен (затворен) у неком метричком простору, не мора бити и у ширем (тј. утапањем простора у шири простор се не морају пренети и наведене особине).

Пример 6. Простор конвергентних низова c (са реалним или комплексним члановима) је векторски простор (са реалним или комплексним скаларима). За $x = (x_n)_{n \geqslant 1} \in c$, израз $\|x\|_\infty = \sup\{|x_n| \mid n \in \mathbb{N}\}$ је норма. Заиста, за све скаларе a је $|ax_n| = |a| \cdot |x_n|$ и $|x_n + y_n| \leqslant |x_n| + |y_n|$, па се узимањем супремума добија $\|ax\|_\infty = |a|\|x\|_\infty$ и $\|x + y\|_\infty \leqslant \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$ за све $x = (x_n)_{n \geqslant 1} \in c$, $y = (y_n)_{n \geqslant 1} \in c$, а ако је $\|x\|_\infty = 0$, следи $x_n = 0$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Дакле, са $d_\infty(x, y) = \sup\{|x_n - y_n| \mid n \in \mathbb{N}\}$, за све $x = (x_n)_{n \geqslant 1} \in c$, $y = (y_n)_{n \geqslant 1} \in c$, је дефинисана метрика на простору c. Ако је $c_0 \subseteq c$ простор низова који конвергирају ка 0, са истом метриком као у c, онда је c_0 метрички потпростор простора c. $\triangle$

Пример 7. Ако је $-\infty < a < b < \infty$, онда је $C[a, b]$ векторски простор (задржаћемо се на случају реалновредносних функција, но слични закључци важе и за комплексновредносне). Израз $\|f\|_\infty = \max\limits_{x \in [a,b]} |f(x)|$ представља норму на овом простору. Пре свега, по Вајерштрасовој теореми наведени израз је добро дефинисан. Ако је $\|f\|_\infty = 0$, како је $|f(x)| \geqslant 0$, следи $|f(x)| = 0$ за свако $x \in [a, b]$, па је $f \equiv 0$. Из $|\alpha f(x)| = |\alpha| \cdot |f(x)|$ и $|f(x) + g(x)| \leqslant |f(x)| + |g(x)|$, узимањем максимума по $x \in [a,b]$, добија се $\|\alpha f\|_\infty = |\alpha|\|f\|_\infty$ и $\|f+g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$. Слично, и израз $\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|dx$ је норма на овом простору. Заиста, опет из $|\alpha f(x)| = |\alpha| \cdot |f(x)|$ и $|f(x)+g(x)| \leqslant |f(x)| + |g(x)|$, интеграцијом следи $\|\alpha f\|_1 = |\alpha|\|f\|_1$ и $\|f+g\|_1 \leqslant \|f\|_1 + \|g\|_1$, а ако је $|f(x_0)| > 0$ за неко $x_0 \in [a,b]$, онда је (због непрекидности функције $|f(x)|$) $f(x) > \frac{|f(x_0)|}{2}$ на неком интервалу I дужине $\delta > 0$ који садржи x_0, па је $\int_a^b |f(x)|dx \geqslant \int_I |f(x)|dx > \frac{|f(x_0)|\delta}{2} > 0$, те из $\|f\|_1 = 0$ следи $f \equiv 0$. Дакле, $d_\infty(f,g) = \max\limits_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|$ и $d_1(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$ су метрике на $C[a,b]$. $\triangle$

Приметимо и да је израз $\|f\|_1$ добро дефинисан и на простору $\mathcal{R}[a,b]$, Риман–интеграбилних функција на $[a,b]$, али на том простору не представља норму. Испуњено је $\|\alpha f\|_1 = |\alpha|\|f\|_1$ и $\|f+g\|_1 \leqslant \|f\|_1 + \|g\|_1$ за f,g интеграбилне и α скалар, али не важи $\|f\|_1 = 0$ ако и само ако је $f \equiv 0$ (на пример, за функцију која је једнака 1 у коначно много тачака, а на остатку скупа $[a,b]$ једнака 0, важи $\|f\|_1 = 0$), те на простору $\mathcal{R}[a,b]$ наведени израз не представља норму.

Лема 8.1.4. Нека је $d : X \times X \to [0,\infty)$ функција која задовољава $d(x,x) = 0$, $d(x,y) = d(y,x)$ и $d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y)$ за све $x,y,z \in X$ и $\sim$ релација на X, дефинисана са $x \sim y$ ако и само ако је $d(x,y) = 0$.
(а) Релација $\sim$ је релација еквиваленције.
(б) На простору $X/\sim$ је са $d^*(C_x, C_y) = d(x,y)$, где су C_x и C_y класе еквиваленције релације $\sim$ којима припадају x и y, редом, дефинисана метрика.

Доказ. (а) Важи $x \sim x$, ако је $x \sim y$, онда је $d(y,x) = d(x,y) = 0$, па је и $y \sim x$, а ако је $x \sim y$ и $y \sim z$, онда је $0 \leqslant d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z) = 0$, па је $d(x,z) = 0$, тј. $x \sim z$. Следи да је $\sim$ релација еквиваленције на X.
(б) Ако је $x_1 \in C_x$ и $y_1 \in C_y$, онда је $d(x_1,y_1) \leqslant d(x_1,x) + d(x,y) + d(y,y_1) = d(x,y)$ (како је $x \sim x_1$ и $y \sim y_1$, важи $d(x,x_1) = 0 = d(y,y_1)$), а аналогно (заменом улога x и x_1, односно y и y_1) је $d(x,y) \leqslant d(x_1,y_1)$, па је $d(x,y) = d(x_1,y_1)$. Следи да је d^* на $X/\sim$ добро дефинисана (не зависи од избора представника класе еквиваленције). Како је d (на X) симетрична и задовољава неједнакост троугла, те особине задовољава и d^* (на $X/\sim$). Ако је $d(C_x, C_y) = 0$ и $x_1 \in C_x, y_1 \in C_y$, онда је $d(x_1,y_1) = 0$, тј. $x_1 \sim y_1$, па је $C_x = C_y$. Дакле, d^* је метрика на $X/\sim$. $\square$

Већ по начину дефинисања метрике на $X/\sim$ је јасно да је идеја да се и она, колико је то могуће, поистовети са полазном метриком, а претходна лема на неки начин то и омогућава. У претходном примеру (и коментару након њега) констатовано је да d_1 није метрика на $\mathcal{R}[a,b]$, али и да су испуњени услови претходне леме, па описана конструкција дефинише метрику на одговарајућем количничком простору. Међутим, треба бити опрезан приликом тумачења резултата добијених у тој метрици. Слободније говорећи, резултати који су последица вредности интеграла ће наћи одговарајуће тумачење и у новој метрици, али, на пример, за припаднике новог простора нећемо моћи да говоримо о вредности у некој тачки (нова метрика је дефинисана на класама еквиваленција функција, а постоје функције из исте класе које узимају различите вредности у произвољној тачки).

Пример 8. Ако на $\mathbb{N}\cup\{\infty\}$ дефинишемо $d(n,m)=|\frac{1}{n}-\frac{1}{m}|$ за $m,n\in\mathbb{N}$, $d(n,\infty)=\frac{1}{n}$ за $n\in\mathbb{N}$ и $d(\infty,\infty)=0$, онда је $(\mathbb{N}\cup\{\infty\},d)$ метрички простор. Заиста, тривијално важи $d(x,y)\geqslant 0$ и $d(x,y)=d(y,x)$ за све $x,y\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$, као и $d(x,x)=0$ за свако $x\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$, а ако је $d(x,y)=0$ следи $x=y$. За $n,m,k\in\mathbb{N}$ је $|\frac{1}{n}-\frac{1}{m}|\leqslant|\frac{1}{n}-\frac{1}{k}|+|\frac{1}{k}-\frac{1}{m}|$, $|\frac{1}{n}-\frac{1}{m}|\leqslant\frac{1}{n}+\frac{1}{m}$, као и $\frac{1}{n}\leqslant|\frac{1}{n}-\frac{1}{m}|+\frac{1}{m}$, одакле следи и неједнакост троугла. За свако $n\in\mathbb{N}$ кугла $K(n,\frac{1}{(n+1)^2})$ не садржи друге тачке сем n (па на $\mathbb{N}$ ова метрика генерише исте отворене скупове као и дискретна метрика), док за свако $\varepsilon>0$ кугла $K(\infty,\varepsilon)$ садржи тачку ∞ и све $n\in\mathbb{N}$ за које је $n>\frac{1}{\varepsilon}$. Дакле, у овој метрици произвољна околина тачке ∞ садржи све природне бројеве почев од неког. Стога у овом простору постоји једна тачка нагомилавања, тачка ∞. $\triangle$

Пример 9. Нека је $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ непрекидна, строго растућа, ограничена функција (на пример, таква је $g(x)=\operatorname{arctg}x$). Онда постоје $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$ и $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)$ (у $\mathbb{R}$). Нека је $g(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$ и $g(\infty)=\lim\limits_{x\to\infty}g(x)$. Онда је функција $d:\overline{\mathbb{R}}\times\overline{\mathbb{R}}\to\mathbb{R}$, дефинисана са $d(x,y)=|g(x)-g(y)|$ за $x,y\in\overline{\mathbb{R}}$ метрика. Симетричност је тривијална, неједнакост троугла следи из неједнакости троугла у $\mathbb{R}$ (уз, по потреби, гранични процес), а како је g строго растућа, g је инјективна (на $\overline{\mathbb{R}}$). $\triangle$

Нека је (X,d) метрички простор. Фамилија $(U_i)_{i\in\mathcal{I}}$ се назива отворени покривач скупа A ако је U_i отворен за свако $i\in\mathcal{I}$ и ако важи $A\subseteq\bigcup\limits_{i\in\mathcal{I}}U_i$. Слично, фамилија отворених скупова $(B_i)_{i\in\mathcal{I}}$ се назива **база** топологије ако се сваки отворен скуп може приказати као унија скупова из $(B_i)_{i\in\mathcal{I}}$. Фамилија отворених скупова се назива **предбаза** ако фамилија добијена коначним пресецима елемената те фамилије чини базу.

Пример 10. У метричком простору (X,d) колекција $\{K(x,r)\,|\,x\in X\wedge r\in(0,\infty)\}$ чини базу, а базу чини и колекција $\{K(x,r)\,|\,x\in X\wedge r\in\mathbb{Q}^+\}$. Специјално, ако је X снабдевен дискретном метриком, свака база мора садржати $\{\{x\}\,|\,x\in X\}$ (тако да база има кардиналност не мању од кардиналности скупа X). У $\mathbb{R}$ са стандардном метриком, базу чине $\{(a,b)\,|\,a,b\in\mathbb{R},a<b\}$, али и $\{(a,b)\,|\,a,b\in\mathbb{Q},a<b\}$, а предбазу скупови облика $(-\infty,b)$ и (a,∞), где су $a,b\in\mathbb{Q}$. $\triangle$

Наравно, од интереса је изабрати базу што је могуће мање кардиналности.

Лема 8.1.5. (а) Метрички простор X има највише пребројиву базу ако и само ако је сепарабилан.
(б) Ако је X сепарабилан метрички простор, онда се из сваког отвореног покривача скупа X може издвојити највише пребројива фамилија, која је такође покривач скупа X.

Доказ. (а) Уколико X има коначну базу, тривијално је сепарабилан (ако је база састављена од $n\in\mathbb{N}$ скупова, онда отворених скупова у X

има не више од 2^n, а како је метрички простор Хауздорфов, следи да се састоји од коначно много тачака). Ако је $(B_i)_{i=1}^{\infty}$ пребројива база, нека је $A = \{b_i \,|\, i \in \mathbb{N}\}$, где је $b_i \in B_i$ за свако $i \in \mathbb{N}$. Онда је A највише пребројив, а ако је U произвољан отворен скуп, он садржи неки базни елемент B_j, па је $b_j \in B_j \subseteq U$, тј. важи $A \cap U \neq \emptyset$, односно важи $\overline{A} = X$. Са друге стране, ако је A пребројив (опет је случај у ком је A коначан тривијалан) и важи $\overline{A} = X$, онда је $\{K(a, \frac{1}{n}) \,|\, a \in A \wedge n \in \mathbb{N}\}$ база простора X. Заиста, ако је U произвољан отворен скуп и $x \in X$, онда постоји $n \in \mathbb{N}$ тако да је $K(x, \frac{1}{n}) \subseteq U$, као и $a \in A$ тако да $a \in K(x, \frac{1}{2n})$. Но онда је $x \in K(a, \frac{1}{2n}) \subseteq K(x, \frac{1}{n}) \subseteq U$ (пошто је $d(x, y) \leqslant d(x, a) + d(a, y) < \frac{1}{n}$ за свако $y \in K(a, \frac{1}{2n})$). Дакле, свако $x \in X$ припада барем једном од скупова из уочене колекције, која је пребројива.
(б) Како је X сепарабилан, у њему постоји пребројива база $(B_i)_{i=1}^{\infty}$ (опет је случај коначне базе тривијалан). Ако је $(U_i)_{i \in \mathcal{I}}$ уочени покривач, за свако $x \in X$ постоји $i \in \mathcal{I}$ и $j \in \mathbb{N}$ тако да је $x \in B_j \subseteq U_i$ (наравно, овде је $i = i(x)$, па је и $j = j(x)$). Онда је $X \subseteq \bigcup\limits_{x \in X} B_{j(x)}$, а уколико је $\mathcal{J}$ скуп свих j за које постоји $x \in X$ тако да је $j = j(x)$, последња унија је једнака $\bigcup\limits_{j \in \mathcal{J}} B_j$, која је највише пребројива унија. Уколико је U_j произвољан скуп из уоченог покривача за који је $B_j \subseteq U_j$ (по начину избора, такав скуп постоји), следи да је $(U_j)_{j \in \mathcal{J}}$ највише пребројиво покривање скупа X. $\square$

Из претходног директно следи и да се из произвољног отвореног покривача сепарабилног скупа $A \subseteq X$ може издвојити највише пребројива фамилија, која је такође покривач скупа A (довољно је посматрати A као метрички простор са генерисаном метриком из X). Уочена подфамилија се обично назива (отворени) потпокривач скупа A (добијен из полазног покривача).

8.2. Конвергенција у метричком простору

Дефиниција 8.2.1. Нека су (X, d_X) и (Y, d_Y) метрички простори, $A \subseteq X$, $f : A \to Y$ и $a \in A'$. Ако постоји $b \in Y$ и ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји $\delta > 0$, тако да за све $x \in A$ за које је $0 < d_X(x, a) < \delta$ важи $d_Y(f(x), b) < \varepsilon$, онда се b назива **гранична вредност (лимес) функције** f по скупу A, у ознаци $\lim\limits_{A \ni x \to a} f(x)$.

Претходно ћемо записивати и у облику $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ по скупу A, а ако је јасно по ком скупу се одређује гранична вредност, у облику $\lim\limits_{x \to a} f(x)$. Као и у случају реалне функције реалне променљиве, о егзистенцији и (у случају егзистенције) вредности граничне вредности функције не одлучује вредност у граничној тачки (функција не мора бити ни дефинисана у њој). Пре свега размотримо шта доноси претходна дефиниција у неким до сада виђеним ситуацијама (упоредити са уведеним појмовима у делу 4.1). Ако је $X = Y = \mathbb{R}$ (са стандардном метриком), $a \in \mathbb{R}$, $A = \mathbb{R} \setminus \{a\}$, $b \in \mathbb{R}$, претходна дефиниција доводи до класичне дефиниције $\lim\limits_{x\to a} f(x)$. Ако је $X = Y = \mathbb{R}$ (са стандардном метриком), $b \in \mathbb{R}$, у случају $A = (-\infty, a)$ претходна дефиниција доводи до $\lim\limits_{x\to a-} f(x)$, а у случају $A = (a, \infty)$ претходна дефиниција доводи до $\lim\limits_{x\to a+} f(x)$. Ако је $X = \overline{\mathbb{R}}$ са метриком из примера 9 (за неку функцију g која задовољава услове наведене у том примеру), $Y = \mathbb{R}$ са стандардном метриком, $a = \infty$, $A = \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, претходна дефиниција доводи до класичне дефиниције $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$. Аналогно, на основу истог примера, се може доћи до класичне дефиниције граничне вредности у $-\infty$, као и до дефиниције одређене дивергенције у некој тачки.

Пример 11. Ако је $X = Y = \mathbb{R}$ (оба са стандардним метрикама), $a = 0$ (приметимо да је 0 тачка нагомилавања и скупа $\mathbb{Q}$ и скупа $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$) и $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ако је } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{ако је } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$, постоји $\lim\limits_{\mathbb{Q}\ni x\to 0} f(x) = 1$, постоји $\lim\limits_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\ni x\to 0} f(x) = 0$, но не постоји $\lim\limits_{\mathbb{R}\ni x\to 0} f(x)$. △

Ако је $X = \mathbb{N}$ са метриком из примера 8, (Y, d) произвољан метрички простор, $a = \infty$ (што је и једина могућност избора, будући да је у простору из наведеног примера тачка ∞ једина тачка нагомилавања), како околине тачке ∞ у овој метрици садрже све природне бројеве почев од неког, претходна дефиниција у овом случају доводи до дефиниције конвергенције низа (са елементима у Y). Такве низове ћемо називати конвергентни (у Y, а ако је јасно у ком простору се ради, нећемо га напомињати). Специјално, ако је уочени низ $(y_n)_{n\geqslant 1}$, добија се да је $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$ ако и само ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји $n_0 \in \mathbb{N}$, тако да за $n \geqslant n_0$ важи $d(y_n, y) < \varepsilon$. Приметимо да уколико је $Y = \mathbb{R}$ са стандардном метриком, последње доводи до класичне дефиниције конвергенције низа реалних бројева.

Лема 8.2.1. Нека је $(x_n)_{n\geqslant 1}$ низ тачака метричког простора (X, d).
(а) Уколико постоји гранична вредност уоченог низа, она је јединствено одређена.
(б) Уколико је уочени низ конвергентан, он је и ограничен (у (X, d)).

Доказ. (а) Ако је $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = y$ за неке $x \neq y$, како је простор Хауздорфов, постоје дисјунктне околине U_x и U_y тачака x и y, редом, а како низ конвергира ка x, односно y, постоје n_1 и n_2, тако да је $x_n \in U_x$ за свако $n \geqslant n_1$, односно $x_n \in U_y$ за $n \geqslant n_2$, што је немогуће, пошто за $n \geqslant \max\{n_1, n_2\}$ важи $x_n \in U_x \cap U_y = \emptyset$.
(б) Ако је $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ и $\varepsilon > 0$, постоји n_0 тако да је $d(x, x_n) < \varepsilon$ за $n \geqslant n_0$, па сви чланови низа припадају кугли чији је центар x, а полупречник произвољан реалан број већи од $\max\{\varepsilon, d(x, x_1), \ldots, d(x, x_{n_0})\}$. □

Аналогно се преносе и остале особине конвергентних реалних низова (наравно, овде мислимо на особине које не користе алгебарску структуру скупа $\mathbb{R}$). На пример, уколико је a тачка нагомилавања скупа $A \subseteq X$, онда постоји низ $(a_n)_{n\geqslant 1}$ тачака из A, тако да је $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Такође, праволинијски се преносе дефиниције тачака нагомилавања низа (постоји конвергентан подниз који конвергира ка тој тачки), као и односи скупа тачака нагомилавања низа и тачака нагомилавања слике низа (скуп тачака нагомилавања низа је затворен скуп који садржи тачке нагомилавања слике низа, а садржан је у затворењу слике, при чему обе инклузије могу бити строге).

Пример 12. Ако је d дискретна метрика на скупу $X \neq \emptyset$, низ је конвергентан ако и само ако је почев од неког члана константан. Заиста, ако је $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ и $\varepsilon \in (0,1)$, постоји n_0 тако да за све $n \geqslant n_0$ важи $d(x, x_n) < 1$, но онда је $x_n = x$. $\triangle$

Лема 8.2.2. Нека су (X, d_X) и (Y, d_Y) метрички простори, $A \subseteq X$ и $a \in A'$. Онда је $\lim\limits_{A\ni x\to a} f(x) = l$ ако и само ако је $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = l$ за сваки $(x_n)_{n\geqslant 1}$ тачака скупа A, такав да је $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $x_n \neq a$ за свако $n \in \mathbb{N}$.

Доказ. Нека је $\lim\limits_{A\ni x\to a} f(x) = l$ и $(x_n)_{n\geqslant 1}$ низ са особинама описаним у условима леме (приметимо да постоји макар један такав низ). Онда за свако $\varepsilon > 0$ постоји $\delta > 0$ тако да је $d_Y(f(x), l) < \varepsilon$ ако је $x \in A$ и $d_X(x, a) \in (0, \delta)$, као и $n_0 \in \mathbb{N}$ тако да за $n \geqslant n_0$ важи $d_X(x_n, a) \in (0, \delta)$. Дакле, за $n \geqslant n_0$ је $d_Y(f(x_n), l) < \varepsilon$.

Обрнуто, ако не важи $\lim\limits_{A\ni x\to a} f(x) = l$, постоји $\varepsilon > 0$ тако да за свако $\delta > 0$ постоји $x_\delta \in A$ тако да је $d_X(x_\delta, a) \in (0, \delta)$ и $d_Y(f(x_\delta), l) \geqslant \varepsilon$. Следи $\lim\limits_{n\to\infty} x_{\frac{1}{n}} = a$, а за свако $n \in \mathbb{N}$ је $x_{\frac{1}{n}} \neq a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_{\frac{1}{n}})$ није једнак l. $\square$

Претходно тврђење се (као и у случају реалних низова и функција) везује за име Хајнеа (видети лему 4.1.1 и коментаре након ње). Из њега следи да се тврђења добијена за граничне вредности низова праволинијски преносе на граничне вредности функција. На пример, из претходна два тврђења следи да је гранична вредност функције (по неком скупу) једнозначно одређена, као и тврђење о граничној вредности композиције. Слично, уколико је кодоменски простор $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) са стандардном метриком, из тврђења о понашању граничне вредности збира (производа, количника) за граничне вредности низова се директно добијају одговарајућа тврђења за граничне вредности функција (а сличан закључак се може извести и у случају да је кодомен нека друга алгебарска структура). Стога ћемо у сличним ситуацијама, на даље, пажњу пре свега упутити на случај граничне вредности низа.

Дефиниција 8.2.2. Нека су (X, d_X) и (Y, d_Y) метрички простори и $f : X \to Y$. Онда је f **непрекидна у тачки** $a \in X$ ако и само ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји $\delta > 0$ тако да је $d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon$ за све $x \in X$ за које је $d_X(x, a) < \delta$. Функција је **непрекидна** на X уколико је непрекидна у свакој тачки скупа X (фамилију таквих функција означаваћемо са

$C(X)$). Функција $f : X \to Y$ је **равномерно (униформно) непрекидна** на $X_1 \subseteq X$ ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји $\delta > 0$ тако да је $d_Y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$ за све $x_1, x_2 \in X_1$ за које је $d_X(x_1, x_2) < \delta$.

Из дефиниције је јасно да је f непрекидна ако и само ако је $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ за произвољно $x_0 \in X$, као и да f, која је равномерно непрекидна на X_1, је и непрекидна на X_1. Такође, ако је f равномерно непрекидна на X_1 и X_2, а непрекидна на $X_1 \cup X_2$, равномерно непрекидна је на $X_1 \cup X_2$ (што се индукцијом преноси и на коначне уније), а ако је равномерно непрекидна на X_1 и $Y_1 \subseteq X_1$, равномерно непрекидна је на Y_1. Такође, непосредно следи да је $f : X \to Y$ равномерно непрекидна на $X_1 \subseteq X$ ако и само ако за произвољне низове $(a_n)_{n \geqslant 1}$ и $(b_n)_{n \geqslant 1}$ у X_1 за које $d_X(a_n, b_n) \to 0$ кад $n \to \infty$, важи $d_Y(f(a_n), f(b_n)) \to 0$ кад $n \to \infty$, као и да су Липшицове функције равномерно непрекидне (овде, по узору на дефиницију 4.3.3, $f : X \to Y$ је Липшицова на $X_1 \subseteq X$ ако постоји $L \geqslant 0$, тако да за све $x, y \in X_1$ важи $d_Y(f(x), f(y)) \leqslant L d_X(x, y)$).

Пример 13. Функција $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, дефинисана са $f(x) = x^2$, је непрекидна на $\mathbb{R}$ и равномерно непрекидна на $[-M, M]$, за свако $M > 0$, али није равномерно непрекидна на $\mathbb{R}$ (заиста, ако је $x_n = n$ и $y_n = n + \frac{1}{n}$, онда $y_n - x_n \to 0$ кад $n \to \infty$, док $f(y_n) - f(x_n) = 2 + \frac{1}{n^2} \not\to 0$ кад $n \to \infty$). △

Пример 14. Ако је (X, d) метрички простор и $z \in X$, онда је $f(x) = d(x, z)$ непрекидна функција, пошто је $|f(x) - f(y)| \leqslant d(x, y)$. И више, из добијеног следи да је f равномерно непрекидна на X. △

Као што је то био случај и у раду са реалновредносним функцијама реалне променљиве, слика непрекидне функције не мора задржавати својства отворености или затворености (на пример, посматране као функције из $\mathbb{R}$ у $\mathbb{R}$ са стандардним метрикама, $\sin x$ слика отворен скуп $(0, \pi)$ у $(0, 1]$, који није отворен, а $\operatorname{arctg} x$ затворен скуп $[0, \infty)$ у $[0, \frac{\pi}{2})$, који није затворен), но преноси се одговарајуће тврђење о понашању инверзне слике (лема 4.3.1) и на случај рада са метричким просторима.

Лема 8.2.3. Нека су X и Y метрички простори. Функција $f : X \to Y$ је непрекидна ако и само ако је $f^{-1}(U)$ отворен скуп (у X) за сваки отворен скуп U (у Y).

Доказ. Ако је f непрекидна, $U \subseteq Y$ отворен и $z \in f^{-1}(U)$, онда постоји $\varepsilon > 0$, тако да је $\{y \,|\, d_Y(f(z), y) < \varepsilon\} \subseteq U$, па постоји $\delta > 0$ тако да је $\{x \,|\, d_X(z, x) < \delta\} \subseteq f^{-1}(U)$, тј. z је унутрашња тачка скупа $f^{-1}(U)$. Како је $z \in f^{-1}(U)$ произвољна, следи да је $f^{-1}(U)$ отворен.

Са друге стране, ако је $z \in X$ и $\varepsilon > 0$, уколико је инверзна слика произвољног отвореног скупа (у Y) отворен скуп (у X), пошто је скуп $U = \{y \,|\, d_Y(f(z), y) < \varepsilon\}$ отворен, отворен је и $f^{-1}(U)$, а како последњем скупу припада z, постоји $\delta > 0$ тако да је $\{x \,|\, d_X(z, x) < \delta\} \subseteq f^{-1}(U)$, одакле следи непрекидност f у тачки z. Како је $z \in X$ произвољна, следи непрекидност f на X. □

Из претходног и особина инверзне слике директно следи да је $f : X \to Y$ непрекидна на X ако и само ако је инверзна слика произвољног затвореног скупа (у Y) затворен скуп (у X), као и да је та функција непрекидна на X ако и само ако је инверзна слика произвољног елемента неке предбазе или неке базе (у Y) отворен скуп (у X), пошто су коначни пресеци и произвољне уније отворених скупова такође отворени скупови. Такође, ако су $f : X \to Y$ и $g : Y \to Z$ непрекидне (где су X, Y, Z метрички простори), онда је $g \circ f : X \to Z$ непрекидна (за произвољан отворен $U \subseteq Z$ је $g^{-1}(U)$ отворен (у Y) на основу непрекидности g, па како је и f непрекидна, следи да је и $(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))$ отворен (у X)). Претходно нас доводи до још једне карактеризације непрекидности функције у метричком простору.

Лема 8.2.4. Нека су X и Y метрички простори. Функција $f : X \to Y$ је непрекидна ако и само ако за произвољан $A \subseteq X$ важи $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

Доказ. На основу примећеног непосредно пре леме, ако је f непрекидна, како је $\overline{f(A)}$ затворен (у Y), следи да је $f^{-1}(\overline{f(A)})$ затворен (у X). По особинама инверзне слике је $A \subseteq f^{-1}(f(A)) \subseteq f^{-1}(\overline{f(A)})$, па како је $f^{-1}(\overline{f(A)})$ затворен, следи $\overline{A} \subseteq f^{-1}(\overline{f(A)})$, одакле је $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.
Са друге стране, ако f није непрекидна, постоји низ $(x_n)_{n\geqslant 1}$, тако да $x_n \to a \in X$ кад $n \to \infty$ и $x_n \neq a$ за $n \in \mathbb{N}$, а притом $f(x_n) \not\to f(a)$ кад $n \to \infty$. Последње значи да постоји $\varepsilon > 0$, тако да за бесконачно много чланова уоченог низа (односно за чланове неког његовог подниза) $(x_{n_i})_{i\geqslant 1}$ важи $d_Y(f(x_{n_i}), f(a)) \geqslant \varepsilon$. Но онда, ако је $A = \{x_{n_i} \,|\, i \in \mathbb{N}\}$, важи $a \in \overline{A}$, док $f(\overline{A})$ не садржи тачку $f(a)$. $\square$

Аналогно претходној леми се показује и да је $f : X \to Y$ (где су X и Y метрички простори) непрекидна ако и само ако за произвољан $B \subseteq Y$ важи $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\overline{B})$, као и ако и само ако за произвољан $B \subseteq Y$ важи $f^{-1}(\operatorname{int} B) \subseteq \operatorname{int}(f^{-1}(B))$. Из претходних резултата овог дела видимо и да се непрекидност и гранична вредност (у метричком простору) могу дефинисати користећи само тополошке појмове. Последње, између осталог, значи да се резултати добијени на основу непрекидности и граничних вредности не мењају уколико се пређе на тополошки еквивалентну метрику. Како ће у примеру 31 (као непосредна последица теореме 8.3.1) бити показано да на коначно димензионом векторском простору произвољне норме индукују еквивалентне метрике, приликом испитивања наведених својстава у таквим просторима се можемо ограничити на једну од норми (метрика). Пошто је један од основних циљева у наставку текста проучавање особина $\mathbb{R}^n$, где је $n \in \mathbb{N}$, посматраног као нормиран векторски простор, следи да се закључци добијени у вези са граничном вредношћу и непрекидношћу функција у $\mathbb{R}^n$ могу добити у произвољној метрици тог простора (ако је индукована неком нормом).
Ако су (X_i, d_i) метрички простори, где је $i \in \mathcal{I}$ и $\mathcal{I}$ скуп индекса, топологија на $\prod\limits_{i\in\mathcal{I}} X_i$ се дефинише као најмања (у смислу инклузије) топологија за коју су пресликавања $p_i : \prod\limits_{i\in\mathcal{I}} X_i \to X_i$, које елементу $(x_i)_{i\in\mathcal{I}}$ додељује x_i, непрекидна за свако $i \in \mathcal{I}$ (та пресликавања се називају

пројекције). Из претходног следи да је предбаза на $\prod\limits_{i\in\mathcal{I}} X_i$ дефинисана производима у којима је члан који одговара произвољном индексу $i_0 \in \mathcal{I}$ отворен скуп у X_{i_0}, а за $i \neq i_0$ су чланови једнаки X_i, а ако је $\mathcal{I}$ коначан скуп (у том случају нека је $\mathcal{I} = \{1, \ldots, n\}$, где је $n \in \mathbb{N}$), да је база одређена скуповима облика $\prod\limits_{i=1}^{n} U_i$, где је U_i отворен у X_i, за $i \in \{1, \ldots, n\}$. Специјално, ако је $X_1 = \ldots = X_n = \mathbb{R}$, тј. ако је у питању $\mathbb{R}^n$, базу чине скупови $\prod\limits_{i=1}^{n}(a_i, b_i)$, где су $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, за $i \in \{1, \ldots, n\}$ (наравно, у овом случају можемо изабрати и $a_i, b_i \in \mathbb{Q}$, па и $\mathbb{R}^n$ има пребројиву базу).

Овако добијена топологија на коначном производу метричких простора је генерисана неком метриком (ако су у питању (X_i, d_i), где је $i \in \{1, \ldots, n\}$, таква је нпр. $d(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{n} d_i(x_i, y_i)$, где је $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, \ldots, y_n)$, што је метрика, на основу показаног у примеру 5), сличан закључак важи и у случају пребројивог производа (ако су у питању (X_i, d_i), где је $i \in \mathbb{N}$, по претходним разматрањима је $\frac{d_i}{1+d_i}$ метрика на X_i еквивалентна са d_i, која је ограничена са 1, па је нпр. $d(x, y) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \sum\limits_{i=1}^{n} \Big(\frac{1}{2^i} \cdot \frac{d_i(x,y)}{1+d_i(x,y)}\Big)$, за $x, y \in \prod\limits_{i=1}^{n} X_i$, метрика која генерише описану топологију (i-ти члан последње суме је за произвољне x, y не већи од $\frac{1}{2^i}$, па је наведени супремум не већи од 1, тј. за све x, y је последњи израз добро дефинисан, а да је d метрика следи тривијалном модификацијом показаног у примеру 5)), док се егзистенција метрике која генерише овако уведену тополошку структуру не може гарантовати у случају производа непребројиво много метричких простора.

Из претходног видимо и да је $X_1 \times X_2$ сепарабилан метрички простор ако и само ако су такви X_1 и X_2 (као и да исто важи и у случају највише пребројивог производа), као и да, ако су (X_1, d_1) и (X_2, d_2) метрички простори, а метрика на $X_1 \times X_2$ дефинисана као у примеру 5, да је $X_1 \times X_2$ ограничен (у тој метрици) ако и само ако су X_1 и X_2 ограничени (у метрикама d_1 и d_2, редом; код ограничености смо морали да се ограничимо на специфичну метрику, будући да ограниченост није инваријанта тополошки еквивалентних метрика; међутим, како јесте инваријанта јако еквивалентних метрика, видимо да, између осталог, последњи закључак остаје на снази и ако на $X_1 \times X_2$ метрику дефинишемо са $d_2((a_1, b_1), (a_2, b_2)) = \sqrt{(d_{X_1}(a_1, a_2))^2 + (d_{X_2}(b_1, b_2))^2}$, за $a_1, a_2 \in X_1$, $b_1.b_2 \in X_2$, па ће нпр. последње важити и на $\mathbb{R}^2$ са стандардном метриком (а онда, индукцијом, и у $\mathbb{R}^n$, где је $n \in \mathbb{N}$)). Видимо и да је $d : X \times X \to \mathbb{R}$ непрекидно пресликавање (па, рецимо, ако $a_n \to a$ и $b_n \to b$ кад $n \to \infty$ (у X), онда $d(a_n, b_n) \to d(a, b)$ кад $n \to \infty$ (у $\mathbb{R}$)), као и да, уколико су X, Y метрички простори и $f : X \to Y$ непрекидна функција, је скуп $\{(x, f(x)) \,|\, x \in X\}$ (тзв. график функције f) затворен (у $X \times Y$). По начину увођења тополошке структуре на производу, не изненађује наредни резултат.

Лема 8.2.5. Ако су X и $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ метрички простори, $f : X \to \prod_{i=1}^{\infty} Y_i$ је непрекидно ако и само ако је $p_i \circ f : X \to Y_i$ непрекидно за свако $i \in \mathbb{N}$.

Доказ. Ако је f непрекидно, како је и p_i непрекидно за свако i, следи и да је $p_i \circ f$ непрекидно. Обрнуто, из непрекидности $p_i \circ f$ за произвољно $i \in \mathbb{N}$ и произвољан отворен $U_i \subseteq Y_i$ је $(p_i \circ f)^{-1}(U_i) = f^{-1}(p_i^{-1}(U_i))$ отворен (у X), но како је $p_i^{-1}(U_i)$ управо елемент предбазе која генерише топологију на производу уочених простора (скуп коме је на координати i у Декартовом производу U_i, а за $j \neq i$ је Y_j) и како су $i \in \mathbb{N}$ и отворен $U_i \subseteq Y_i$ произвољни, следи тврђење. $\square$

Заправо, из доказа видимо да је претходно тврђење тачно и ако није у питању највише пребројив производ, а разлог што смо се ограничили на случај пребројивости је то што у том случају на производ простору имамо структуру метричког простора. У наставку ћемо највише пажње обратити на случај у ком је кодоменски простор коначан Декартов производ (пошто ће нас, макар у првим применама технике коју развијамо у овом делу, највише интересовати пресликавања из $\mathbb{R}^m$ у $\mathbb{R}^n$, где су $m, n \in \mathbb{N}$, а, уколико се доказ праволинијски прилагођава приликом промене вредности m или n, често ћемо се задржавати на случају да је неки од њих једнак 2, а јасно је и да ћемо, из историјских разлога, где то буде потребно издвајати случајеве пресликавања из $\mathbb{R}^3$ у $\mathbb{R}^3$, као и пресликавања из $\mathbb{R}^3$ у $\mathbb{R}$). По претходном, приликом испитивања граничне вредности или непрекидности пресликавања $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, где су $n, m \in \mathbb{N}$, уколико уочено пресликавање видимо у облику $f = (f_1, \ldots, f_m)$ (овде је $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ одговарајуће координатно пресликавање), одговарајуће особине закључујемо из особина реалновредносних функција f_i (па је, нпр. f непрекидна ако и само ако су непрекидне f_i, за $1 \leqslant i \leqslant m$). Међутим, слични закључци се не могу поновити и за доменски простор (уколико се не дода неки нетривијални услов), што можемо видети из наредног примера.

Пример 15. Нека је $f_1 : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ дефинисана са $f_1(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, $f_2(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{за } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{за } (x,y) = (0,0) \end{cases}$, $f_3(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2}, & \text{за } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{за } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ и $f_4(x,y) = \begin{cases} (x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}, & \text{ако је } x,y \neq 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$. Онда је $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f_1(x,y) = \lim\limits_{y\to 0}(-1) = -1$ и $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f_1(x,y) = \lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$, тј. добијају се различите вредности, па не постоји $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f_1(x,y)$. Слично је $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f_2(x,y) = 0$ и $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f_2(x,y) = 0$, али не постоји $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f_2(x,y)$, пошто је нпр. $\lim\limits_{t\to 0} f_2(kt,t) = \frac{k}{k^2+1}$ за свако $k \in \mathbb{R}$ (што је различито од 0 за $k \neq 0$). Приметимо и да су функције $f_{2,x}(y) = f_2(x,y)$ и $f_{2,y}(x) = f_2(x,y)$ непрекидне на $\mathbb{R}$ за све $x, y \in \mathbb{R}$, док, по показаном, f_2 није непрекидна на $\mathbb{R}^2$ (има прекид у $(0,0)$). Важи $\lim\limits_{y\to 0} f_3(x,y) = 0$ за свако $x \in \mathbb{R}$, а за свако $k \in \mathbb{R}$ је $\lim\limits_{t\to 0} f_3(t,kt) = 0$ (тј. гранична вредност по сваком правцу који садржи $(0,0)$ постоји и једнака је 0), но $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f_3(x,y)$ не постоји, пошто је $\lim\limits_{t\to 0} f_3(t,t^2) = \frac{1}{2}$. Како за $x \neq 0$ и $y \neq 0$ важи $0 \leqslant |f_4(x,y)| \leqslant |x| + |y| \to 0$ кад $(x,y) \to (0,0)$ и како је $f_4(x,y) = 0$ ако је неки од x, y једнак 0, следи $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f_4(x,y) = 0$. Међутим, за $x \neq \frac{1}{k\pi}$, где је $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, не постоји $\lim\limits_{y\to 0} f_4(x,y)$, па не постоји ни $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f_4(x,y)$, а аналогно не постоји ни $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f_4(x,y)$ (f_4 је непрекидна на $\{(x,y)\,|\, x \neq 0 \wedge y \neq 0\} \cup \{(\frac{1}{k\pi}, 0), (0, \frac{1}{k\pi}) \,|\, k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}\} \cup \{(0,0)\}$). $\triangle$

Комплетност метричког простора

Дефиниција 8.2.3. Низ $(x_n)_{n\geqslant 1}$ у метричком простору (X,d) је **Кошијев** ако и само ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ тако да за све $m, n \geqslant n_0$ важи $d(x_m, x_n) < \varepsilon$.

Као и у случају реалних низова, основна мотивација је испитивање конвергенције и уколико није позната гранична вредност низа. Аналогно случају реалних низова, добија се наредно тврђење.

Лема 8.2.6. Нека је (X,d) метрички простор и $(x_n)_{n\geqslant 1}$ низ тачака из X.
(а) Ако је $(x_n)_{n\geqslant 1}$ Кошијев, онда је ограничен.
(б) Ако је $(x_n)_{n\geqslant 1}$ конвергентан, онда је Кошијев.
(в) Сваки подниз Кошијевог низа је Кошијев низ.
(г) Ако је низ $(x_n)_{n\geqslant 1}$ Кошијев и ако постоји његов конвергентан подниз, онда је $(x_n)_{n\geqslant 1}$ конвергентан.

Дефиниција 8.2.4. Метрички простор (X,d) је **комплетан** (потпун) ако и само ако је у њему сваки Кошијев низ конвергентан.

Простори $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$, са стандардном метриком, су комплетни, док $\mathbb{Q}$ то није. Ако је X метрички простор са дискретном метриком, Кошијеви низови у њему су низови који су почев од неког члана константни, па је и овај простор комплетан. Из дефиниције непосредно следи да је затворен потпростор комплетног метричког простора такође комплетан простор.

Пример 16. На основу примера 7, $d_1(f,g) = \int_{-2}^{2} |f(x) - g(x)|dx$ је метрика на простору $C[-2,2]$. Ако је $f_n(x) = \begin{cases} -1, & \text{за } x \in [-2, -\frac{1}{n}] \\ nx, & \text{за } x \in (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \\ 1, & \text{за } x \in [\frac{1}{n}, 2] \end{cases}$,

онда за $m > n$ важи $0 \leqslant d_1(f_m, f_n) \leqslant \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} 2dx \leqslant \frac{4}{n}$, па је низ $(f_n)_{n\geqslant 1}$ Кошијев у уоченом метричком простору. Ако постоји $g \in C[-2,2]$ за коју $d_1(f_n, g) \to 0$ кад $n \to \infty$, како за $m \geqslant n$ важи $f_m(x) = -1$ на $[-2, -\frac{1}{n}]$

и $f_m(x) = 1$ за $x \in [\frac{1}{n}, 2]$ и како је интеграл ненегативне непрекидне функције једнак 0 ако и само ако је функција идентички једнака 0, следи да је $g(x) = -1$ за $x \in [-2, 0)$ и $g(x) = 1$ за $x \in (0, 2]$. Међутим, онда g не може бити непрекидна у 0 (у свакој околини 0 функција узима вредности и -1 и 1). Дакле, $C[-2, 2]$ са метриком d_1 није комплетан метрички простор. $\triangle$

Лема 8.2.7. Метрички простор (X, d) је комплетан ако и само ако је пресек произвољног монотоно опадајућег низа затворених кугли (у смислу инклузије), чији полупречници теже ка 0, непразан.

Доказ. Нека је X комплетан и нека је $(\overline{K}(x_n, r_n))_{n\geqslant 1}$ низ затворених кугли, тако да је $\overline{K}(x_n, r_n) \supseteq \overline{K}(x_{n+1}, r_{n+1})$ за свако $n \in \mathbb{N}$ и $r_n \to 0$ кад $n \to \infty$. Онда за свако $m \geqslant n_0$ важи $\overline{K}(x_m, r_m) \subseteq \overline{K}(x_{n_0}, r_{n_0})$, па је $d(x_m, x_{n_0}) \leqslant r_{n_0}$, тј. за све $m, n \geqslant n_0$ важи $d(x_m, x_n) \leqslant 2r_{n_0}$, па како $r_{n_0} \to 0$ кад $n_0 \to \infty$, низ $(x_n)_{n\geqslant 1}$ је Кошијев. Пошто је X комплетан, постоји $x \in X$, тако да $x_n \to x$ кад $n \to \infty$. Како за свако $n \geqslant n_0$ важи $x_n \in \overline{K}(x_{n_0}, r_{n_0})$ и како је $\overline{K}(x_{n_0}, r_{n_0})$ затворен скуп, следи да и $x \in \overline{K}(x_{n_0}, r_{n_0})$, па x припада свим члановима низа $(\overline{K}(x_n, r_n))_{n\geqslant 1}$, односно припада и $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \overline{K}(x_n, r_n)$.

Ако X није комплетан, у њему постоји Кошијев низ $(x_n)_{n\geqslant 1}$ који није конвергентан. Како је уочени низ Кошијев, постоји његов подниз $(x_{n_i})_{i\geqslant 1}$, за који је $d(x_{n_k}, x_{n_j}) < \frac{1}{2^i}$ ако је $k, j \geqslant i$ (за произвољно $i \in \mathbb{N}$), а уочени подниз је такође Кошијев низ (који, пошто је подниз полазног низа, није конвергентан). Нека је $\overline{K}_i = \overline{K}(x_{n_i}, \frac{1}{2^{i-1}})$ за свако $i \in \mathbb{N}$. Онда је $(\overline{K}_i)_{i\geqslant 1}$ опадајући низ затворених кугли чији полупречници теже ка 0 кад $i \to \infty$ (заиста, ако је $j > i$ и $y \in \overline{K}_j$, онда је $d(y, x_{n_i}) \leqslant d(y, x_{n_j}) + d(x_{n_j}, x_{n_i}) \leqslant \frac{1}{2^{j-1}} + \frac{1}{2^i} \leqslant \frac{1}{2^{i-1}}$). Уколико је њихов пресек непразан и x тачка из тог пресека, за произвољно $j > i$ важи $d(x, x_{n_j}) \leqslant d(x, x_{n_i}) + d(x_{n_i}, x_{n_j}) \leqslant \frac{1}{2^{i-1}} + \frac{1}{2^i} = \frac{3}{2^i}$, а како $\frac{3}{2^i} \to 0$ кад $i \to \infty$, последње значи да $x_{n_i} \to x$ кад $n \to \infty$, што је контрадикција. Дакле, пресек уоченог низа кугли је празан. $\square$

Приметимо да у претходном тврђењу пресек уоченог низа затворених кугли не може садржати више од једне тачке простора X, те је захтев да је тај пресек непразан у овом случају заправо еквивалентан захтеву да је он једночлан.

Пример 17. Ако је је $d(m, n) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{m+n}, & \text{ако је } m \neq n \\ 0, & \text{ако је } m = n \end{cases}$, онда је $(\mathbb{N}, d)$ метрички простор. Заиста, $d(m, n) = d(n, m)$ и $d(m, n) = 0 \Leftrightarrow m = n$ следи директно из дефиниције, као и $d(m, n) \leqslant d(m, k) + d(k, n)$ у случају да су нека два од m, n, k једнаки, а и у случају да су m, n, k по паровима различити неједнакост троугла је задовољена, пошто је онда $d(m, n) \leqslant 2 \leqslant d(m, k) + d(k, n)$. У уоченом простору $\overline{K}(n, 1 + \frac{1}{2n})$ је скуп $\{k \,|\, k \geqslant n\}$ (заиста, јасно је да n припада уоченој кугли, а ако јој припада $m \neq n$, онда је $1 + \frac{1}{m+n} \leqslant 1 + \frac{1}{2n}$, тј. $m > n$), па је $\left(\overline{K}(n, 1+\frac{1}{2n})\right)_{n\geqslant 1}$ опадајући низ чији је пресек празан. Следи да тврђење претходне леме не мора важити уколико се изостави услов да полупречници уочених кугли теже ка 0. △

Пример 18. У $\mathbb{R}$ са стандардном метриком, ако је $F_n = [n, \infty)$ за $n \in \mathbb{N}$, онда је низ $(F_n)_{n\geqslant 1}$ опадајући низ затворених скупова, а притом је $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset$. Слично, у $(0, 2]$ са наслеђеном метриком из $\mathbb{R}$ је $G_n = (0, \frac{1}{n}]$ затворен за свако $n \in \mathbb{N}$ (у питању је и затворена кугла), па је $(G_n)_{n\geqslant 1}$ опадајући низ затворених скупова (затворених кугли чији полупречници теже ка 0), а притом је $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n = \emptyset$. △

Лема 8.2.8 (Бер). Ако је метрички простор (X, d) комплетан и $(U_i)_{i\geqslant 1}$ отворени скупови, тако да је $\overline{U_i} = X$, онда је $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} U_i$ густ у X.

Доказ. Нека је X комплетан, а $x \in X$ и $\varepsilon > 0$ произвољни. Како је U_1 отворен и густ у X, постоје $x_1 \in X$ и $r_1 > 0$ тако да је $\overline{K}(x_1, \frac{r_1}{2}) \subseteq K(x_1, r_1) \subseteq U_1 \cap K(x, \varepsilon)$. Нека је $K_1 = \overline{K}(x_1, \frac{r_1}{2})$. Ако су конструисани $K_1, \ldots, K_{n-1}$ за неко $n \geqslant 2$, како је U_n отворен и густ у X, постоје x_n и $r_n < \frac{r_{n-1}}{2}$, тако да је $\overline{K}(x_n, \frac{r_n}{2}) \subseteq K(x_n, r_n) \subseteq U_n \cap K(x_{n-1}, \frac{r_{n-1}}{2})$. Нека је $K_n = \overline{K}(x_n, \frac{r_n}{2})$. Јасно је да је $K_n \supseteq K_{n+1}$ за свако $n \in \mathbb{N}$.
На претходно описан начин дефинисан је опадајући низ затворених кугли чији полупречници теже ка 0, па како је X комплетан, на основу леме 8.2.7 постоји $\tilde{x} \in X$, тако да је $\tilde{x} \in \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} K_i$, а на основу конструкције следи да је $\tilde{x} \in \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} U_i \cap K(x, \varepsilon)$. Пошто су $x \in X$ и $\varepsilon > 0$ произвољни, последње значи да је $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} U_i$ густ у X. □

Специјално, на основу претходне леме следи да је пресек отворених густих скупова комплетног метричког простора непразан, као и да се комплетан метрички простор не може приказати као највише пребројива унија затворених скупова којима је унутрашњост празна.

Лема 8.2.9. Ако је (X, d) комплетан метрички простор који не садржи изоловане тачке, онда је његова кардиналност барем $\mathfrak{c}$.

Доказ. Ако је X коначан, састоји се од изолованих тачака. Ако је $X = (x_n)_{n\geqslant 1}$, за свако $n \in \mathbb{N}$ су скупови $X \setminus \{x_n\}$ отворени (пошто је скуп $\{x_n\}$ затворен у X) и густи (пошто x_n није изолована тачка), па је $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (X \setminus \{x_n\}) = \emptyset$, што противречи претходној леми. □

Дакле, уколико се комплетан метрички простор не састоји од изолованих тачака, онда садржи барем $\mathfrak{c}$ тачака. Специјално, ако је X комплетан и $\emptyset \neq A \subseteq X$ савршен, онда је A комплетан (као затворен потпростор комплетног простора), па савршени скупови садрже барем $\mathfrak{c}$ тачака. На пример, у $\mathbb{R}$ затворени интервали и Канторов скуп, на основу претходног, садрже $\mathfrak{c}$ тачака. Слободније говорећи, комплетан метрички простор који се не састоји од изолованих тачака мора

бити „довољно велики” у смислу кардиналности (тј. садржати макар c тачака), иако може бити мале мере (како је показано у коментарима пре и након теореме 6.2.4, Канторов скуп је Лебегове мере 0, а његова карактеристична функција је Риман интеграбилна на $[0,1]$ и њен интеграл је једнак 0).
Пратећи идеју конструкције реалних бројева на основу рационалних, можемо спровести аналогну конструкцију и у случају произвољног некомплетног метричког простора (заправо, технички део конструкције је овде једноставнији, пошто је већ показана комплетност $\mathbb{R}$).

Теорема 8.2.1. Ако је (X,d) некомплетан метрички простор, постоји јединствен (до на изометрију) комплетан метрички простор X^*, тако да је $\overline{X} = X^*$.

Доказ. За два Кошијева низа $(x_n)_{n\geqslant 1}$ и $(y_n)_{n\geqslant 1}$ простора X дефинишимо $(x_n)_{n\geqslant 1} \sim (y_n)_{n\geqslant 1}$ ако и само ако $d(x_n,y_n) \to 0$ кад $n \to \infty$. На простору свих Кошијевих низова простора X релација $\sim$ је релација еквиваленције. Заиста, како низ чији су сви чланови једнаки 0 тежи ка 0, релација је рефлексивна, како се низови $(d(x_n,y_n))_{n\geqslant 1}$ и $(d(y_n,x_n))_{n\geqslant 1}$ поклапају, релација је симетрична, а како из $d(x_n,y_n) \to 0$ и $d(y_n,z_n) \to 0$ кад $n \to \infty$ следи да $d(x_n,z_n) \to 0$ кад $n \to \infty$ (пошто је $0 \leqslant d(x_n,z_n) \leqslant d(x_n,y_n) + d(y_n,z_n)$), релација је и транзитивна.
Нека је $\mathcal{X}$ простор класа еквиваленција простора свих Кошијевих низова простора X у односу на релацију $\sim$. За класе C_x и C_y, са представницима класа $(x_n)_{n\geqslant 1}$ и $(y_n)_{n\geqslant 1}$, редом, нека је $d^*(C_x,C_y) = \lim\limits_{n\to\infty} d(x_n,y_n)$. Како је $|d(x_n,y_n) - d(x_m,y_m)| = |d(x_n,y_n) - d(x_n,y_m) + d(x_n,y_m) - d(x_m,y_m)| \leqslant |d(x_n,y_n) - d(x_n,y_m)| + |d(x_n,y_m) - d(x_m,y_m)| \leqslant d(y_n,y_m) + d(x_n,x_m)$, а како су $(x_n)_{n\geqslant 1}$ и $(y_n)_{n\geqslant 1}$ Кошијеви низови, последњи израз је произвољно близак 0 за довољно велике m и n, па је низ (ненегативних) реалних бројева $(d(x_n,y_n))_{n\geqslant 1}$ Кошијев низ. Пошто је поље реалних бројева комплетно, следи да постоји $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n,y_n)$ (и ненегативан је реалан број). Ако су $(x'_n)_{n\geqslant 1}$ и $(y'_n)_{n\geqslant 1}$ представници класа C_x и C_y, онда је $|d(x_n,y_n) - d(x'_n,y'_n)| = |d(x_n,y_n) - d(x_n,y'_n) + d(x_n,y'_n) - d(x'_n,y'_n)| \leqslant |d(x_n,y_n) - d(x_n,y'_n)| + |d(x_n,y'_n) - d(x'_n,y'_n)| \leqslant d(y_n,y'_n) + d(x_n,x'_n)$, а како $(x_n)_{n\geqslant 1}$ и $(x'_n)_{n\geqslant 1}$, као и $(y_n)_{n\geqslant 1}$ и $(y'_n)_{n\geqslant 1}$, припадају истој класи еквиваленције простора Кошијевих низова, важи $d(x_n,x'_n) \to 0$ и $d(y_n,y'_n) \to 0$ кад $n \to \infty$, па је $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n,y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} d(x'_n,y'_n)$. Дакле, функција d^* је добро дефинисана (додељује класама ненегативан реалан број чија вредност не зависи од изабраних представника класа).
Нека су $(x_n)_{n\geqslant 1}$, $(y_n)_{n\geqslant 1}$, $(z_n)_{n\geqslant 1}$ представници класа C_x, C_y, C_z, редом. Важи $d^*(C_x,C_y) = 0$ ако и само ако $d(x_n,y_n) \to 0$ кад $n \to \infty$, тј. ако и само ако $(x_n)_{n\geqslant 1}$ и $(y_n)_{n\geqslant 1}$ припадају истој класи еквиваленције, односно ако и само ако је $C_x = C_y$. Како је $d(x_n,y_n) = d(y_n,x_n)$, важи $d^*(C_x,C_y) = \lim\limits_{n\to\infty} d(x_n,y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} d(y_n,x_n) = d^*(C_y,C_x)$. Аналогно, важи

$d^*(C_x, C_y) + d^*(C_y, C_z) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) + \lim_{n\to\infty} d(y_n, z_n) = \lim_{n\to\infty}(d(x_n, y_n) + d(y_n, z_n)) \geqslant \lim_{n\to\infty} d(x_n, z_n) = d^*(C_x, C_z)$ (приметимо да егзистенција свих граничних вредности које се појављују у овом делу следи из закључака претходног пасуса). Дакле, функција d^* на $\mathcal{X}$ јесте метрика.

Ако је $x \in X$, низ $(x_n)_{n\geqslant 1}$ за који је $x_n = x$ за свако $n \geqslant 1$ је Кошијев и у горе описаној конструкцији је представник једне од класа. Такође, ако нека класа садржи константан низ, та константа је елемент простора X, а ако су C_x, односно C_y, класе којима припадају низови константно једнаки x, односно y, онда је $d^*(C_x, C_y) = \lim_{n\to\infty} d(x, y) = d(x, y)$, тј. простор $X^\sharp$, класа еквиваленција које садрже неки константан низ је изометричан простору X. За довршетак доказа довољно је још показати да је $\overline{X^\sharp} = \mathcal{X}$ и да је $\mathcal{X}$ комплетан (заиста, комплетирање простора $X^\sharp$ мора садржати све његове тачке нагомилавања, а ако је тако добијен простор комплетан, следи целокупно тврђење (изометрија је релација еквиваленције на класи метричких простора)). Нека је $C_x \in \mathcal{X}$ и $(x_n)_{n\geqslant 1}$ представник те класе. Како је уочени низ Кошијев, за свако $\varepsilon > 0$ постоји n_0, тако да је $d(x_n, x_{n_0}) < \varepsilon$, па ако је $C_{x_{n_0}}$ класа чији је представник низ који је константно једнак x_{n_0} (те стога припада $X^\sharp$), важи $d^*(C_x, C_{x_{n_0}}) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n_0}) \leqslant \varepsilon < 2\varepsilon$, а како је $\varepsilon > 0$ произвољно, следи да је $X^\sharp$ густ у $\mathcal{X}$.

Ако је $(C_{x_n})_{n\geqslant 1}$ Кошијев низ у $\mathcal{X}$, пошто је $X^\sharp$ густ у $\mathcal{X}$, за свако $n \in \mathbb{N}$ постоји $C_{y_n} \in X^\sharp$ (при чему класи C_{y_n} припада низ који је константно једнак y_n), тако да је $d^*(C_{x_n}, C_{y_n}) < \frac{1}{n}$, а како је $d^*(C_{y_m}, C_{y_n}) \leqslant d^*(C_{y_n}, C_{x_n}) + d^*(C_{x_n}, C_{x_m}) + d^*(C_{x_m}, C_{y_m}) < \frac{1}{n} + d^*(C_{x_n}, C_{x_m}) + \frac{1}{m}$ за свако $m, n \in \mathbb{N}$, следи и да је $(C_{y_n})_{n\geqslant 1}$ Кошијев низ у $\mathcal{X}$, па је $(y_n)_{n\geqslant 1}$ Кошијев низ у X. Ако је C_y класа којој припада низ $(y_n)_{n\geqslant 1}$, онда за свако $n \in \mathbb{N}$ важи $d^*(C_{x_n}, C_y) \leqslant d^*(C_{x_n}, C_{y_n}) + d^*(C_{y_n}, C_y) \leqslant \frac{1}{n} + d^*(C_{y_n}, C_y)$, па пошто је $(y_n)_{n\geqslant 1}$ Кошијев, за свако $\varepsilon > 0$ постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ тако да за $n \geqslant n_0$ важи $d^*(C_{x_n}, C_y) \leqslant \frac{1}{n} + \varepsilon$, одакле, за довољно велико n (пошто $\frac{1}{n} \to 0$ кад $n \to \infty$) следи $d^*(C_{x_n}, C_y) < 2\varepsilon$. Дакле, у $\mathcal{X}$ низ $(C_{x_n})_{n\geqslant 1}$ конвергира ка C_y, па је $\mathcal{X}$ комплетан простор. □

Уобичајно је да се метрика d и метрика d^* добијена претходном конструкцијом (дефинисана на ширем простору) обележавају на исти начин. Наравно, произвољан метрички простор се може утопити у бесконачно много комплетних метричких простора, но по резултату претходне теореме јединствен је простор у којем је полазни простор густ (на пример, $\mathbb{Q}$ са стандардном метриком се може утопити у $\mathbb{R}^n$, за свако $n \geqslant 1$, али је само у $\mathbb{R}$ простор $\mathbb{Q}$ и густ). Приметимо да уколико се конструкција из доказа претходне теореме спроведе на простору који је већ комплетан, резултујући простор ће му бити изометричан. Иако претходни доказ идејно прати конструкцију реалних бројева на основу рационалних (видети одговарајуће поглавље у делу 3.1), он није и уопштење те конструкције, пошто смо у њему битно користили комплетност поља $\mathbb{R}$ (а видимо и да сличне конструкције имају смисла и ако би уместо метрике посматрали функцију са вредностима у неком другом комплетном простору). Поставља се и питање употребне вредности претходног резултата будући да у општем случају рад са класама еквиваленција апстрактних објеката није пријатан, те се често виђа да се „погоди” шта је комплетирање, тако што се уочи комплетан простор у којем је полазни простор густ.

Пример 19. У примеру 16 је показано да простор $C[-2,2]$ са d_1 метриком није комплетан. Како за свако $\varepsilon > 0$ и свако $f \in \mathcal{R}[-2,2]$ постоји $g \in C[-2,2]$, тако да је $\int_{-2}^{2} |f(x) - g(x)|dx < \varepsilon$, комплетирање тог простора садржи $\mathcal{R}[-2,2]$, а пошто наведена метрика има смисла само са такве функције, следи да је комплетирање наведеног простора $\mathcal{R}[-2,2]/\sim$, где је $\sim$ релација (еквиваленције) на $\mathcal{R}[-2,2]$, где је $f \sim g$ ако и само ако је $\int_{-2}^{2} |f(x) - g(x)|dx = 0$. $\triangle$

Пример 20. Ако је $X = (0,\infty)$ са стандардном метриком наслеђеном из $\mathbb{R}$, онда је низ $(\frac{1}{n})_{n\geqslant 1}$ Кошијев, функција $f(x) = \frac{1}{x}$ непрекидна, а низ $(f(\frac{1}{n}))_{n\geqslant 1} = (n)_{n\geqslant 1}$ није Кошијев. Међутим, за произвољне метричке просторе (X, d_X) и (Y, d_Y), ако је $f : X \to Y$ равномерно непрекидна на X и $(a_n)_{n\geqslant 1}$ Кошијев низ у X, онда је $(f(a_n))_{n\geqslant 1}$ Кошијев низ у Y. Заиста, на основу равномерне непрекидности следи да за произвољно $\varepsilon > 0$ постоји $\delta > 0$ тако да из $d_X(x_1, x_2) < \delta$ следи $d_Y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$, а како је $(a_n)_{n\geqslant 1}$ Кошијев, постоји n_0 тако да за $m, n \geqslant n_0$ важи $d_X(a_m, a_n) < \delta$, па за $m, n \geqslant n_0$ важи $d_Y(f(a_m), f(a_n)) < \varepsilon$.
Из претходног можемо закључити и да је $f : X \to Y$ равномерно непрекидна на X ако и само ако за произвољне низове $(a_n)_{n\geqslant 1}$, $(b_n)_{n\geqslant 1}$ у X, такве да $d_X(a_n, b_n) \to 0$ кад $n \to \infty$, важи $d_Y(f(a_n), f(b_n)) \to 0$ кад $n \to \infty$. Заиста, први смер следи из претходног разматрања, а, обрнуто, уколико f није равномерно непрекидна на X, онда постоје $\varepsilon > 0$, $x \in X$ и низ $(b_n)_{n\geqslant 1}$ у X, тако да је $d_X(x, b_n) < \frac{1}{n}$ и $d_Y(f(x), f(b_n)) \geqslant \varepsilon$ за свако $n \in \mathbb{N}$, па ако је $a_n = x$ за $n \in \mathbb{N}$, онда $d_X(a_n, b_n) \to 0$ кад $n \to \infty$, док је $d_Y(f(a_n), f(b_n)) \geqslant \varepsilon$ за свако $n \in \mathbb{N}$, што противречи претпоставци. Из добијеног непосредно следи и да ако је $f : A \to Y$ равномерно непрекидна на $A \subseteq X$, где је X метрички, а Y комплетан метрички простор, постоји јединствена равномерно непрекидна екстензија функције f, дефинисана на $\overline{A}$.
Приметимо и да је $\mathbb{R}$ (са стандардном метриком) комплетан, $f(x) = \operatorname{arctg} x$ непрекидна функција на $\mathbb{R}$ и важи $f(\mathbb{R}) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, што није комплетан простор, те у општем случају непрекидна слика комплетног простора не мора бити комплетан простор. $\triangle$

Из претходног примера видимо да низ $(n)_{n\geqslant 1}$ није Кошијев у стандардној метрици $\mathbb{R}$, а јесте у $\mathbb{R}$ са метриком $d'(x,y) = \operatorname{arctg}(x,y)$ (сличан закључак важи и за метрику $d''(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$), а последње су, на основу резултата леме 8.1.3 и коментара након ње, еквивалентне, те низ који је Кошијев у некој метрици, не мора бити такав и у метрици која јој је еквивалентна. Са друге стране, тривијално, ако је Кошијев у некој метрици, такав је и у метрици која јој је јако еквивалентна. Сличан закључак се добија за равномерну непрекидност неке функције. Последње, по претходним резултатима и коментарима, даје прилично добар резултат у случају рада са нормираним векторским просторима коначне димензије (за метрику индуковану нормом). На основу дефиниције топологије на производ простору, директно следи да је $X_1 \times X_2$ комплетан ако и само ако су комплетни метрички простори X_1 и X_2, где је метрика на производу дефинисана као у примеру 5 (а како је та метрика јако еквивалентна са метриком d_2, дефинисаном непосредно пре леме 8.2.5, претходно се преноси и на ту метрику). Наравно, претходно се директно преноси и на производ коначно много метричких простора, а није тешко видети да се преноси и на пребројив производ, са метриком дефинисаном на начин описан приликом дефинисања тополошке структуре на производу простора (видети коментаре дате пре леме 8.2.5).

Егзистенција фиксне тачке пресликавања

Решење једначине $f(x) = x$, где је $f : X \to X$, а (X, d) метрички простор, се (из јасних разлога) назива **фиксна тачка** те функције, а таква функција се назива **контракција** (сажимање) (на X) ако постоји $q \in (0, 1)$, тако да за све $x, y \in X$ важи $d(f(x), f(y)) \leqslant qd(x, y)$ (уколико се жели нагласити вредност „коефицијента сажимања", обично се претходно пресликавање назива и q-контракција).

Теорема 8.2.2 (Банахов став о фиксној тачки). Нека је (X, d) комплетан метрички простор и $f : X \to X$ контракција. Онда постоји јединствена тачка $\tilde{x} \in X$ за коју је $f(\tilde{x}) = \tilde{x}$.

Доказ. Нека је $x_0 \in X$ и $x_{n+1} = f(x_n)$ за $n \in \mathbb{N}_0$. Ако је $f(x)$ контракција (са фактором q), за $n \in \mathbb{N}$ важи $d(x_{n+2}, x_{n+1}) = d(f(x_{n+1}), f(x_n)) \leqslant qd(x_{n+1}, x_n)$, па за $n \in \mathbb{N}$ важи $d(x_{n+1}, x_n) \leqslant q^n d(x_1, x_0)$.

Следи да за $n \geqslant n_0$, $k \in \mathbb{N}$ важи $d(x_{n+k}, x_n) \leqslant \sum\limits_{i=n}^{n+k-1} d(x_i, x_{i+1}) \leqslant \sum\limits_{i=n}^{n+k-1} q^i d(x_1, x_0) \leqslant \sum\limits_{i=n_0}^{\infty} q^i d(x_1, x_0) = \frac{q^{n_0}}{1-q} \cdot d(x_1, x_0)$, па како последњи израз тежи ка 0 кад $n_0 \to \infty$, следи да је низ $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ Кошијев у X. Како је X комплетан, следи да постоји $\tilde{x}$, тако да $x_n \to \tilde{x}$ кад $n \to \infty$.

Приметимо да је свака контракција и непрекидна функција. Пуштањем $n \to \infty$ у $x_{n+1} = f(x_n)$, добија се $\tilde{x} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim\limits_{n\to\infty} x_n) = f(\tilde{x})$, тј. $\tilde{x}$ задовољава тражени услов. Ако би постојала $\bar{x} \neq \tilde{x}$ која би задовољавала $f(\bar{x}) = \bar{x}$, из услова контракције би следило $d(\tilde{x}, \bar{x}) = d(f(\tilde{x}), f(\bar{x})) \leqslant qd(\tilde{x}, \bar{x})$, па како је $d(\tilde{x}, \bar{x}) \neq 0$, добили би да је $1 \leqslant q$, што је немогуће, па је уочена тачка и јединствена. $\square$

Јасно је да ће претходна теорема служити приликом утврђивања егзистенције решења једначина, пре свега у случајевима у којима је непријатно или немогуће експлицитно их решити. Њена велика предност је јасна интуиција (обично се, приликом првог презентовања, мотивише тако што се карта неког подручја, у мањој размери, постави тако да у потпуности припада карти у већој размери и постави питање да ли постоји тачка која на обе карте означава исто место), велика могућност примене и уопштавања (део тога ћемо видети у наставку текста), али и могућност приближног одређивања решења одговарајуће једначине, пошто конструисани низ $(x_n)_{n\geqslant 1}$ конвергира ка решењу $\tilde{x}$ (а по показаном у теореми, $d(x_n, \tilde{x})$ се процењује изразом облика $C\cdot q^n$, где је C константа која зависи од почетног члана низа и коефицијента контракције q, тј. грешка тежи ка 0 експоненцијалном брзином при $n\to\infty$).

Пример 21. Ако је $a_0=\alpha\geqslant 0$ и $a_{n+1}=f(a_n)$ за $n\geqslant 0$, где је $f(x)=\frac{1}{2}\cdot(x+\frac{\alpha}{x})$, односно ако је у питању низ из примера 10 главе 3, по показаном у том примеру је $a_n\in[\sqrt{\alpha},\infty)$ за $n\geqslant 1$, а како је $f'(x)=\frac{1}{2}(1-\frac{\alpha}{x^2})$, што на $[\sqrt{\alpha},\infty)$ узима вредности из $[0,\frac{1}{2})$, на основу Лагранжове теореме следи $|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{|x-y|}{2}$ за $x,y\in[\sqrt{\alpha},\infty)$. На основу Банаховог става о фиксној тачки, следи да низ $(a_n)_{n\geqslant 0}$ конвергира. △

Видимо да претходна теорема даје одговор и у случајевима у којима је могуће експлицитно одредити граничну вредност низа, али, са једнаким напором, и у случајевима у којима је то непријатно урадити.

Пример 22. Нека је $x_0>0$ и $x_{n+1}=\frac{1}{\sqrt{1+x_n}}$. Сви чланови низа су ненегативни, а ако је $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}$, за $x,y\geqslant 0$, на основу Лагранжове теореме важи $|f(x)-f(y)|\leqslant|f'(\xi)|\cdot|x-y|$ за неко ξ између x и y. Како је $f'(x)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(1+x)^{\frac{3}{2}}}$, важи $|f'(x)|\leqslant\frac{1}{2}$ за $x\in(0,\infty)$. Следи да је $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ контракција, па на основу Банаховог става о фиксној тачки следи да је низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ конвергентан. △

Пример 23. Докажимо да једначина $y+\varepsilon\sin y=x$, где је $\varepsilon\in(0,1)$ (Кеплерова једначина) за свако $x\in\mathbb{R}$ има јединствено решење. Ако је $F(y)=x-\varepsilon\sin y$, онда $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ и важи $|F(y_1)-F(y_2)|=\varepsilon\cdot|\sin y_1-\sin y_2|=\varepsilon\cdot|\cos\xi\cdot(y_2-y_1)|\leqslant\varepsilon\cdot|y_2-y_1|$ (примењена је Лагранжова теорема на функцију $\sin x$), па како је $\varepsilon\in(0,1)$, пресликавање F је контракција на $\mathbb{R}$. Како је $\mathbb{R}$ комплетан, на основу Банаховог става о фиксној тачки, следи да једначина $F(y)=y$ има јединствено решење, а то решење је и решење уочене једначине. △

Пример 24. Ако је $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ дефинисана са $f(x)=\sqrt{x^2+1}$, онда за $x\neq y$ важи $|f(x)-f(y)|=|\sqrt{x^2+1}-\sqrt{y^2+1}|=\frac{|x^2-y^2|}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}}=|x-y|\cdot\frac{x+y}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}}<|x-y|$ (јер је $\sqrt{x^2+1}>x$). Дакле, у метричком простору $[0,\infty)$, са метриком d наслеђеном из $\mathbb{R}$ (у тој метрици ово је комплетан простор), важи $d(f(x),f(y))<d(x,y)$. Међутим, једначина $f(x)=x$ нема решења. Следи да не постоји $q\in(0,1)$, тако да је $d(f(x),f(y))\leqslant qd(x,y)$ за свако $x,y\in[0,\infty)$, иначе би, на основу Банаховог става, постојала фиксна тачка пресликавања f. △

Претходни пример показује да се услов из дефиниције контракције (са коефицијентом q), односно услов $d(f(x), f(y)) \leqslant qd(x, y)$, за неко $q \in (0, 1)$ и свако x, y, у општем случају не може заменити условом $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$, а да притом тврђење Банаховог става о фиксној тачки остане на снази (по литератури се често виђа да се последњи услов назива „слаба контракција", а услов q-контракције „јака контракција").

Пример 25. Ако је $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ дефинисана са $f(x) = \frac{x}{1+x}$, важи $|f(x) - f(y)| = \frac{|x-y|}{(1+x)(1+y)} < |x - y|$, за $x, y \geqslant 0$, $x \neq y$, а како $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{1}{x+1} \to 1$ кад $x \to 0+$, не постоји $q \in (0, 1)$, тако да је $|f(x)-f(y)| \leqslant q|x-y|$ за све $x, y \in [0, \infty)$. Ипак, једначина $f(x) = x$ има решење. $\triangle$

Норма на простору линеарних пресликавања

У глави 7 је дефинисан простор $L(U, V)$, где су U и V векторски простори (над истим пољем скалара $\mathbb{P}$) и описана његова алгебарска структура. У дефиницији 2.3.1 је дефинисан појам норме (уколико $\mathbb{P} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{P} = \mathbb{C}$), те се поставља питање да ли се, у случају да су U и V и нормирани (над истим пољем скалара), на $L(U, V)$ може „на природан начин" дефинисати норма (наравно, норма се може дефинисати на више начина, рецимо, као у примеру 8 главе 2). Такође, ако су U и V нормирани векторски простори, на њима је дефинисана и метрика (индукована том нормом), те се поставља питање и непрекидности пресликавања из U у V, а по резултатима добијеним при раду са функцијама једне реалне променљиве (део 4.3), очекујемо да су линеарна пресликавања (равномерно) непрекидна (у случају таквих пресликавања на нормираном векторском простору коначне димензије).

Дефиниција 8.2.5. Ако су U и V нормирани векторски простори коначне димензије (над истим пољем скалара) и $A \in L(U, V)$, нека је $\|A\| = \sup\limits_{\|u\| \leqslant 1} \|Au\|$.

Приметимо да за $u \neq 0$ важи $\left\|A\left(\frac{u}{\|u\|}\right)\right\| = \frac{\|Au\|}{\|u\|}$, па је $\|A\| = \sup\limits_{u \neq 0} \frac{\|Au\|}{\|u\|}$, тј. $\|A\|$ је најмања ненегативна константа за коју је $\|Au\| \leqslant \|A\|\|u\|$ за свако $u \in U$ (наравно, у последњој вези $\|u\|$ представља норму у простору U, а $\|Au\|$ у простору V). Такође је $\|A\| = \sup\limits_{\|u\|=1} \|Au\|$.

Лема 8.2.10. Нека су $m, n, k \in \mathbb{N}$ и U, V, W нормирани векторски простори (над истим пољем скалара), тако да је $\dim U = n$, $\dim V = m$, $\dim W = k$.
(а) Ако је $A \in L(U, V)$, онда је $\|A\| < \infty$ и A је равномерно непрекидно.
(б) Ако је $A, B \in L(U, V)$ и α скалар, онда је $\|A + B\| \leqslant \|A\| + \|B\|$ и $\|\alpha A\| = |\alpha| \cdot \|A\|$.
(в) Ако је $A \in L(V, W)$ и $B \in L(U, V)$, онда је $\|AB\| \leqslant \|A\| \cdot \|B\|$.

Доказ. (а) Ако је $(e_i)_{i=1}^{n}$ база простора U и $u = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$, тако да је $\|u\| \leqslant 1$, онда је $|\alpha_i| \leqslant 1$ за $1 \leqslant i \leqslant n$, па је $\|Au\| = \left\|\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i A e_i\right\| \leqslant$

$\sum\limits_{i=1}^{n} |\alpha_i| \|Ae_i\| \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} \|Ae_i\|$, те је $\|A\| \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} \|Ae_i\| < \infty$. Како је $\|Au_1 - Au_2\| = \|A(u_1-u_2)\| \leqslant \|A\| \cdot \|u_1-u_2\|$ за све $u_1, u_2 \in U$, следи да је A равномерно непрекидно.
(б) Како је $\|(A+B)u\| = \|Au + Bu\| \leqslant \|Au\| + \|Bu\| \leqslant (\|A\| + \|B\|)\|u\|$ за свако $u \in U$, узимањем супремума по $\{u \,|\, \|u\| \leqslant 1\}$, следи $\|A+B\| \leqslant \|A\| + \|B\|$, док тривијално важи $\|\alpha A\| = |\alpha| \cdot \|A\|$.
(в) Како је $\|(AB)u\| = \|A(Bu)\| \leqslant \|A\| \cdot \|Bu\| \leqslant \|A\| \cdot \|B\| \cdot \|u\|$ за свако $u \in U$, узимањем супремума по $\{u \,|\, \|u\| \leqslant 1\}$, следи $\|AB\| \leqslant \|A\| \cdot \|B\|$. $\square$

Како је $\|A\| = 0$ ако и само ако је A идентички једнак 0, на основу дела (б) претходне леме следи да је претходном дефиницијом добија норма на простору $L(U,V)$ (што, између осталог, оправдава ознаку из те дефиниције). Наравно, онда је дефинисана и метрика индукована том нормом (растојање пресликавања A и B у тој метрици је $\|A-B\|$).

Пример 26. Ако су $A, B : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ дефинисани са $A(x,y) = (x,0)$, $B(x,y) = (0,y)$, за $x, y \in \mathbb{R}$, онда је $A, B \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ и $\|A\| = \|B\| = 1$ (при чему на $\mathbb{R}^2$ посматрамо стандардну норму), док је $\|BA\| = 0$, те се у делу (в) претходне леме може добити строга неједнакост. $\triangle$

Приметимо да се појам норме пресликавања уведен у претходној дефиницији може разматрати и у случају да су U и V произвољни векторски простори (над истим пољем скалара), без захтева да су посматрани простори коначне димензије (како је у главама 9, 10 и 11 основни циљ рад са пресликавањима на просторима коначне димензије, у овом тексту тај случај има посебну важност, те је издвојен). Наравно, онда израз $\|A\| = \sup\limits_{\|u\| \leqslant 1} \|Au\| = \sup\limits_{\|u\|=1} \|Au\|$ не мора бити коначан (рецимо, ако је $u \in c_K(\mathbb{P})$, где је $c_K(\mathbb{P})$ простор из примера 4 главе 7, онда је $u = \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_{n_i} e^{n_i}$, за неко $k \in \mathbb{N}$ и неке $\alpha_{n_1}, \ldots, \alpha_{n_k} \in \mathbb{P}$, није тешко проверити да је $\|u\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{k} |\alpha_{n_i}|$ норма на $c_K(\mathbb{P})$; ако је D линеарно пресликавање, одређено са $D(e^n) = ne^n$ (скуп $(e^n)_{n \geqslant 1}$ је база $c_K(\mathbb{P})$), важи $\frac{\|De^n\|_1}{\|e^n\|_1} = n \to \infty$, кад $n \to \infty$), те се намеће потреба издвајања скупа свих линеарних пресликавања из U у V за које је посматрани израз коначан. Тај скуп се назива простор **ограничених линеарних пресликавања** (из U у V), у ознаци $B(U,V)$ (као и у случају линеарних оператора, у случају $U = V$, користи се ознака $B(U)$), а оваква ознака потиче од речи (енглеског порекла) која означава ограниченост (bounded). Заправо, кључно код таквих пресликавања је што представљају непрекидна пресликавања (тј. важи $A \in B(U,V)$ ако и само ако је A линеарно и $A \in C(U,V)$; заиста, ако је A ограничено, онда је $\|Au - Av\| = \|A(u-v)\| \leqslant \|A\| \cdot \|u-v\|$ (заправо, видимо да је пренет закључак дела (а) претходне леме), док, ако је A непрекидно и $\varepsilon > 0$, постоји $\delta > 0$, тако да за $\|u\| \leqslant \delta$ важи $\|Au\| = \|Au - A0\| < \varepsilon$, па за u, тако да је $\|u\| = 1$, важи $\|A(\delta u)\| < \varepsilon$, одакле је $\|Au\| < \frac{\varepsilon}{\delta}$, тј.

$\|A\| \leqslant \frac{\varepsilon}{\delta}$). Дакле, ако је $A \in B(U, V)$, преносе се закључци добијени у случају простора коначне димензије, који су добијени на основу непрекидности, попут делова (б) и (в) претходне леме (заправо, видимо да кључна измена настаје ако је $\dim U = \infty$, пошто, иначе, можемо посматрати пресликавање из X у $A(X)$), те је и $B(U, V)$ нормиран векторски простор, са горе описаном нормом, па је оправдано што је и тај скуп назван простор (а у случају $\dim U < \infty$ се тај простор поклапа са $L(U, V)$). Због наведених разлога ћемо и у доказима наставка овог дела акценат бацити на случај простора коначне димензије.

Лема 8.2.11. Нека је U нормиран векторски простор и $\dim U = n \in \mathbb{N}$.
(а) Ако су $A, B \in L(U)$, при чему је A инвертибилан и $\|B - A\| \cdot \|A^{-1}\| < 1$, онда је и B инвертибилан.
(б) Скуп инвертибилних оператора је отворен (у метрици индукованој нормом простора $L(U)$).
(в) Пресликавање дефинисано на скупу инвертибилних оператора у $L(U)$, које оператору A додељује A^{-1}, је непрекидно (у метрици индукованој нормом простора $L(U)$).

Доказ. (а) По условима је $b = \|B - A\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|} = a$, па за свако $u \in U$ важи $a\|u\| = a\|A^{-1}Au\| \leqslant a\|A^{-1}\| \cdot \|Au\| = \|Au\| \leqslant \|(A - B)u\| + \|Bu\| \leqslant b\|u\| + \|Bu\|$, односно $(a - b)\|u\| \leqslant \|Bu\|$. Како је $a - b > 0$, следи $Bu \neq 0$ за $\|u\| \neq 0$, па је B инјективан, а како је $\dim U = n < \infty$, на основу леме 7.1.6 је B и инвертибилан.
(б) Како закључак дела (а) важи за све B за које је $\|B - A\| < \frac{1}{a}$, следи да је скуп инвертибилних оператора отворен.
(в) Заменом $u = B^{-1}v$ у везу добијену у доказу дела (а) добија се $(a - b)\|B^{-1}v\| \leqslant \|v\|$, за свако $v \in U$, па је $\|B^{-1}\| \leqslant \frac{1}{a-b}$. Из $B^{-1} - A^{-1} = B^{-1}(A - B)A^{-1}$ следи $\|B^{-1} - A^{-1}\| \leqslant \|B^{-1}\| \cdot \|A - B\| \cdot \|A^{-1}\| \leqslant \frac{b}{a(a-b)}$, одакле следи тврђење дела (в), пошто $b = \|A - B\| \to 0$ кад $B \to A$. $\square$

Приметимо и да, ако су $U = \mathbb{R}^m$ и $V = \mathbb{R}^n$, са стандардном метриком (видети пример 4), $(e_i)_{i=1}^n$ и $(f_i)_{i=1}^m$ базе простора U и V, редом, $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, при чему је $(A)_{e,f} = (a_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant m}$ (матрично представљање A у уоченим базама), на основу неједнакости Коши–Шварц–Буњаковског (видети део (б) леме 7.5.1), следи да за произвољно $u = \sum\limits_{i=1}^n \alpha_i e_i \in U$ важи $\|Au\|^2 = \sum\limits_{i=1}^m \Big(\sum\limits_{j=1}^n a_{i,j}\alpha_j\Big)^2 \leqslant \sum\limits_{i=1}^m \Big(\sum\limits_{j=1}^n a_{i,j}^2 \cdot \sum\limits_{j=1}^n \alpha_j^2\Big) = \|u\|_2^2 \cdot \sum\limits_{i,j} a_{i,j}^2$, па је $\|A\| \leqslant \Big(\sum\limits_{i,j} a_{i,j}^2\Big)^{\frac{1}{2}}$, тј. у овом случају добијамо процену $\|A\|$ преко елемената матрице која репрезентује то пресликавање. Из последње процене следи и да, ако је X метрички простор, а $a_{i,j} : X \to \mathbb{P}$ непрекидне за све $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant m$ (где је $\mathbb{P} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ поље скалара), пресликавање $A(x) = (a_{i,j}(x))_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant m}$ је непрекидно (из X у $L(U, V)$).

Како је $L(U, V)$ нормиран векторски простор, у наставку ће природно настати потреба за разматрањем $L(W, L(U, V))$, где су U, V, W нормирани векторски простори (над истим пољем скалара), посматраног као пресликавање одговарајућих нормираних простора (као и сложенијим варијантама претходног израза), где на простору линеарних пресликавања подразумевамо норму дефинисану на претходно описан начин. У поменутом случају, последње значи да је дефинисано $A(w, u)$, за све $w \in W$, $u \in U$, тако да је $A_w(u) = A(w, u) : U \to V$ линеарно пресликавање (за свако фиксно $w \in W$). По питању норме, дефинисане на горе описани начин, важи $\|A_w\| = \sup\limits_{\|u\|=1} \|A(w, u)\|$, па је норма уоченог пресликавања из $L(W, L(U, V))$ једнака $\sup\limits_{\|u\|=1, \|w\|=1} \|A(u, w)\|$ (због хомогености, претходно је једнако $\sup\limits_{\|w\|\neq 0, \|u\|\neq 0} \frac{\|A(w,u)\|}{\|w\|\cdot\|u\|}$; наравно, у бројиоцу претходног израза делује норма простора V, а на векторе u, w норме простора U, W, редом, но и овде и на даље ћемо изостављати то наглашавање у случајевима у којима је јасно која је норма у питању). Претходно мотивише наредну дефиницију и наредно тврђење.

Дефиниција 8.2.6. Ако су $U_1, \ldots, U_n, V$, где је $n \in \mathbb{N}$, векторски простори над истим пољем скалара, коначне димензије, пресликавање $A : U_1 \times \ldots \times U_n \to V$ се назива **мултилинеарно** (вишелинеарно) ако су, за свако $1 \leqslant k \leqslant n$, линеарна пресликавања из U_k у V, за произвољне фиксне вредности преосталих $n-1$ променљивих. Простор таквих пресликавања означавамо са $L(U_1, \ldots, U_n, V)$, а израз $\sup\limits_{\|u_i\|=1, 1\leqslant i\leqslant n} \frac{\|A(u_1,\ldots,u_n)\|}{\|u_1\|\cdot\ldots\cdot\|u_n\|}$ се назива **норма** уоченог мултилинеарног пресликавања.

Директно се преносе коментари аналогни датим у случају линеарних пресликавања (заправо, видимо да се у случају $n = 1$ простор из претходне дефиниције поклапа са $L(U_1, V)$, што и правада што је у овом случају изабрана иста ознака). Рецимо, претходни супремум се могао узети по скупу $\{(u_1, \ldots, u_n) \,|\, u_k \neq 0,\ 1 \leqslant k \leqslant n\}$, ни овај пут није наглашавано која норма делује на који вектор, а праволинијски се (по угледу на доказ леме 8.2.10) показује да $L(U_1, \ldots, U_n, V)$ представља векторски простор (са истим пољем скалара као и у наведеним просторима), а да горе уведени израз заиста представља норму. Такође, преносе се и коментари везани за уопштења везана у случају да неки од простора $U_1, \ldots, U_n$ није коначне димензије, те се у том случају простор мултилинеарних пресликавања за које је посматрани супремум коначан назива простор **ограничених** мултилинеарних пресликавања, у ознаци $B(U_1, \ldots, U_n, V)$. И овде је кључно што су таква пресликавања непрекидна (припадају $C(U_1 \times \ldots \times U_n, V)$, а скуп мултилинераних пресликавања из $C(U_1 \times \ldots \times U_n, V)$ је управо $B(U_1, \ldots, U_n, V)$). Уколико се жели нагласити број чинилаца у мултилинеарном пресликавању, користи се и назив n-линеарно пресликавање (за припаднике простора $L(U_1, \ldots, U_n, V)$), а за 2-линеарна (тј. пресликавања из $L(U_1, U_2, V)$) се користи и назив билинеарна.

Пример 27. На основу делова (в), (г) и (д) теореме 7.3.1 (видети и коментаре након ње), детерминанта је мултилинеарно пресликавање (заиста, детерминанта матрице из $M_n(\mathbb{P})$, где је $n \in \mathbb{N}$ и $\mathbb{P} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, је такво пресликавање, за $U_1 = \ldots = U_n = \mathbb{P}^n$ и $V = \mathbb{P}$), а ако се $\mathbb{P}$ и $\mathbb{P}^n$ посматрају као нормирани векторски простори, има смисла испитивати норму тог пресликавања. Урадимо то у случају $\mathbb{P} = \mathbb{R}$, где се на $\mathbb{R}^n$ посматра стандардна норма (тј. $\|(x_1, \ldots, x_n)\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$). Докажимо да важи $|\det A| \leqslant \prod\limits_{i=1}^{n} \|A_i^{(k)}\|_2$, где је $A \in M_n(\mathbb{R}^2)$, а $A_i^{(k)}$, за $1 \leqslant i \leqslant n$, су колоне матрице A. Ако је A сингуларна, наведена неједнакост је тривијална. Иначе, $(A_i^{(k)})_{i=1}^n$ је база $\mathbb{R}^n$, па се спровођењем Грам–Шмитовог поступка (теорема 7.5.1) добија ортонормирана база $(u_i)_{i=1}^n$, тако да је $\mathscr{L}(\{u_1, \ldots, u_j\}) = \mathscr{L}(\{A_1^{(k)}, \ldots, A_j^{(k)}\})$, за свако $1 \leqslant j \leqslant n$. Ако је $U \in M_n(\mathbb{R})$ матрица чије су колоне $u_1, \ldots, u_n$, тим редом, последње значи да је U ортогонална, а $B = U^{-1}A$ горње троугаона (заиста, за свако $1 \leqslant j \leqslant n$ се првих j вектора стандардне базе слика у $\mathscr{L}(\{u_1, \ldots, u_j\}) = \mathscr{L}(\{A_1^{(k)}, \ldots, A_j^{(k)}\})$, па наведена веза између линеала говори да је слика тих j вектора матрицом $U^{-1}A$ опет у њиховом линеалу; заправо, елемент матрице $U^{-1}A$ на месту (i,j), где је $1 \leqslant i,j \leqslant n$, је $\langle A_j^{(k)}, u_i \rangle$ и једнак је 0 за $i > j$, тј. важи $A_j^{(k)} = \sum\limits_{i=1}^{j} \langle A_j^{(k)}, u_i \rangle u_i$, за свако $1 \leqslant j \leqslant n$). Следи $|\det A|^2 = |\det A^T A| = \det |B^T U^T U B| = |\det B^T B| = |\det B|^2$, а како је B горње троугаона матрица, важи $|\det A|^2 = \prod\limits_{j=1}^{n} |\langle A_j^{(k)}, u_j \rangle|^2 \leqslant \prod\limits_{j=1}^{n} \Big(\sum\limits_{i=1}^{j} |\langle A_i^{(k)}, u_i \rangle|^2 \Big) = \prod\limits_{j=1}^{n} \|A_j^{(k)}\|_2^2$ (из претходног следи и да се једнакост достиже ако и само ако је $\langle A_i^{(k)}, A_j^{(k)} \rangle = 0$, за све $i \neq j$). Но, из показаног следи да је детерминанта ограничено мултилинеарно пресликавање, норме једнаке 1. △

Неједнакост показана у претходном примеру се назива неједнакост **Адамара** (заправо, за то име се обично везује и варијанта те неједнакости у $\mathbb{C}^n$, као и нека уопштења). Последње значи да се исти закључак о норми преноси и на случај $A \in M_n(\mathbb{C})$ (а овде је приказан доказ који се праволинијски прилагођава случају рада са комплексним скаларним производом; поменимо и да се, уз помоћ одговарајућих закључака линеарне алгебре, поменути доказ може упростити). У случају приказаном у претходном примеру (тј. $A \in M_n(\mathbb{R})$) наведена неједнакост заправо представља тврђење да је запремина паралелопипеда (у $\mathbb{R}^n$) чије су странице фиксне дужуне највећа у случају квадра (тј. ако су међусобно нормалне). Наравно, може се разматрати сличан проблем (одређивања норме детерминанте матрице из $M_n(\mathbb{P})$, посматране као мултилинеарно пресликавање) и за друге норме на $\mathbb{P}^n$ (рецимо, ако се посматра детерминанта на $M_2(\mathbb{C})$, као билинеарно пресликавање из $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2$ у $\mathbb{C}$, при чему се на $\mathbb{C}^2$ (у обе компоненте производа) посматра норма $\|(z_1, z_2)\|_\infty = \max\{|z_1|, |z_2|\}$, а на $\mathbb{C}$ стандардна норма, није тешко видети да је норма тог пресликавања једнака 2).

Лема 8.2.12. Ако су $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n$, а $U_1, \dots, U_n, V$ нормирани векторски простори коначне димензије (над истим пољем скалара), онда постоји изоморфизам F простора $X_1 = L(U_1, \dots, U_m, L(U_{m+1}, \dots, U_n, V))$ и $X_2 = L(U_1, \dots, U_n, V)$, тако да је $\|F(x)\|_{X_2} = \|x\|_{X_1}$, за $x \in X_1$.

У претходној леми се подразумевају норме на X_1 и X_2 уведене у претходној дефиницији, а доказ у случају $m = 1$, $n = 2$ је приказан приликом њене припреме (видети коментаре пре претходне дефиниције), а како је доказ општег случаја праволинијско прилагођавање том случају, изостављамо га (но, главни разлог због ког је изабрано да доказ претходи леми је да се покаже да тврђење настаје природно).

Лема 8.2.13. Ако су U, V нормирани векторски простори (над истим пољем скалара) и V комплетан (у метрици индукованој његовом нормом), онда је $B(U, V)$ комплетан (у метрици индукованој одговарајућом генерисаном нормом).

Доказ. Ако је $(A_i)_{i \geqslant 1}$ Кошијев низ у $B(U, V)$, за свако $u \in U$ и све $i, j \in \mathbb{N}$ је $\|A_i u - A_j u\| = \|(A_i - A_j)u\| \leqslant \|A_i - A_j\| \cdot \|u\|$, па је $(A_i u)_{i \geqslant 1}$ Кошијев (у V), па како је V комплетан, постоји његова гранична вредност (у V). Нека је та гранична вредност Au. Довољно је још показати да је $A \in B(U, V)$. Како је $A_i(\alpha u_1 + \beta u_2) = \alpha A_i u + \beta A_i u_2$ за све $i \in \mathbb{N}$, $u_1, u_2 \in U$ и све скаларе α, β (на основу линеарности A_i) и како $A_i u \to Au$, кад $i \to \infty$, за све $u \in U$, пуштањем $i \to \infty$ у добијену везу, следи $A(\alpha u_1 + \beta u_2) = \alpha A u_1 + \beta A u_2$ (тј. линеарност A). Као је $(A_i)_{i \geqslant 1}$ Кошијев, следи да за произвољно $\varepsilon > 0$ поостоји $i_0 \in \mathbb{N}$, тако да за $i, j \geqslant i_0$ важи $\|A_i - A_j\| < \varepsilon$, па је $\|A_i u - A_j u\| = \|(A_i - A_j)u\| < \varepsilon\|u\|$, за свако $u \in U$ и све $i, j \geqslant i_0$. Пуштањем $j \to \infty$ у последњој вези, следи $\|(A_i - A)u\| = \|A_i u - Au\| \leqslant \varepsilon\|u\|$, те за $i \geqslant i_0$ важи $\|A_i - A\| \leqslant \varepsilon$, односно $\|A\| \leqslant \|A_i\| + \varepsilon$. Дакле, A је и ограничен (и важи $A_i \to A$, кад $i \to \infty$, где је последња конвергенција у метрици индукованој нормом простора $B(U, V)$). ☐

Опет је, зарад лакшег техничког записа, доказ спроведен у случају $B(U, V)$, но јасно је (из самог доказа и претходних коментара), да тврђење остаје на снази и у случају простора $B(U_1, \dots, U_n, V)$ (тј. ако је V комплетан, онда је комплетан и $B(U_1, \dots, U_n, V)$).

8.3. Компактност у метричком простору

Дефиниција 8.3.1. Скуп A у метричком простору (X, d) је **компактан** ако се из произвољног отвореног покривача скупа A може издвојити коначан покривач, тј. ако за отворен покривач $(U_i)_{i \in \mathcal{I}}$ постоје $i_1, \dots, i_n \in \mathcal{I}$ за неко $n \in \mathbb{N}$, тако да је $A \subseteq \bigcup\limits_{k=1}^{n} U_{i_k}$.

Ако је A потпростор метричког простора X, онда је A метрички простор (са отвореним скуповима облика $U \cap A$, где је U отворен у X), па ако је $(V_i)_{i \in \mathcal{I}}$ отворен покривач скупа A, гледајући A као метрички простор, следи да постоје U_i, који су отворени у X, тако да је $V_i = U_i \cap A$ за свако $i \in \mathcal{I}$, па је $(U_i)_{i\in\mathcal{I}}$ отворен покривач скупа A у метричком простору X. Следи да се у претходној дефиницији могло дефинисати својство компактности само за цео простор, а да је произвољан скуп $A \subseteq X$ компактан ако је компактан као метрички простор (са наслеђеном топологијом из X). Из претходног следи и да се својство компактности неког скупа не мења уколико се скуп утопи у шири простор (ако је $A \subseteq X \subseteq Y$ и X потпростор простора Y, онда је A компактан у X ако и само ако је компактан у Y). Последње значи да (за разлику од нпр. особина отворености и затворености), компактност није релативна особина, тј. уколико се утврди у ужем простору, не мења се и уколико се тај простор утопи у шири, што даје посебну важност испитивању ове особине.

Пример 28. Из саме дефиниције је јасно да је било који коначан метрички простор (коначан подскуп метричког простора) компактан, као и да је унија коначно много компактних скупова такође компактан скуп. Ако је X бесконачан метрички простор са дискретном метриком, онда он није компактан. На основу Борел–Лебегове леме, у $\mathbb{R}$ (са стандардном метриком) затворени интервали су компактни. $\triangle$

Лема 8.3.1. Нека је (X, d) метрички простор.
(а) Ако је $A \subseteq X$ компактан, онда је и затворен.
(б) Ако је X компактан и $A \subseteq X$ затворен, онда је A компактан.
(в) Ако је X компактан, за свако $\varepsilon > 0$ постоји $n \in \mathbb{N}$ и $x_1, \ldots, x_n \in X$, тако да је $X \subseteq \bigcup\limits_{k=1}^{n} K(x_k, \varepsilon)$.

Доказ. (а) Ако A није затворен, постоји $b \in A' \setminus A$. Како је X Хаусдорфов, за свако $a \in A$ постоје отворени U_a и V_a, тако да $a \in U_a$, $b \notin U_a$ и $b \in V_a$, $a \notin V_a$. Онда је $(U_a)_{a\in A}$ отворен покривач скупа A, па уколико би био компактан, постоји $n \in \mathbb{N}$ и $a_1, \ldots, a_n \in A$, тако да је $A \subseteq \bigcup\limits_{k=1}^{n} U_{a_k}$. Међутим, онда је $V = \bigcap\limits_{k=1}^{n} V_{a_k}$ отворен (пошто је коначан пресек отворених), а важи $b \in V$ и $V \cap A = \emptyset$, што је немогуће, пошто је $b \in A'$.
(б) Нека је $(U_i)_{i\in\mathcal{I}}$ произвољан отворен покривач скупа A. Како је A затворен, онда је $X \setminus A$ отворен, па скупови $(U_i)_{i\in\mathcal{I}}$ и $X \setminus A$ чине отворен покривач скупа X. Како је X компактан, постоји $n \in \mathbb{N}$ и $i_1, \ldots, i_n$, тако да скупови $(U_{i_k})_{k=1}^{n}$ и $X \setminus A$ чине покривач скупа X. Но онда је $(U_{i_k})_{k=1}^{n}$ коначан отворен покривач скупа A, па следи да је A компактан.
(в) Фамилија $(K(x, \varepsilon))_{x\in X}$ је отворен покривач скупа X, па како је X компактан, постоји коначан потпокривач, што је наведено тврђење. $\square$

По делу (а) претходне леме, утврђивање компактности има смисла само за затворене скупове, па је од интереса, уколико скуп A није затворен, заправо испитати компактност скупа $\overline{A}$. Скупови за које је $\overline{A}$ компактан се називају **релативно** (условно) **компактни**. Из дела (б) директно следи да, уколико је $K \subseteq X$ компактан, а $A \subseteq X$ затворен, онда је $K \cap A$ компактан, као и да је произвољан подскуп компактног скупа релативно компактан. Из дела (в) претходне леме директно следи да компактан скуп у метричком простору мора бити ограничен (дакле, компактан скуп је затворен и ограничен). Ако је $e^{(n)} = e_k^{(n)} = \begin{cases} 1, & \text{ако је } k = n \\ 0, & \text{ако је } k \neq n \end{cases}$, за $n \in \mathbb{N}$, скуп $\{e^{(n)} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ у простору c из примера 6 је ограничен (ако је 0 нула низ, онда је $d_\infty(0, e^{(n)}) = 1$ за свако $n \in \mathbb{N}$) и затворен (састоји се од изолованих тачака у метрици d_∞), али није компактан (за све $m \neq n$ је $d_\infty(e^{(m)}, e^{(n)}) = 1$, па кугла са центром у $e^{(n)}$ полупречника $\frac{1}{2}$ не садржи $e^{(m)}$ за $m \neq n$, те се из покривања скупа $\{e^{(n)} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ куглама $K(e^{(n)}, \frac{1}{2})$, за $n \in \mathbb{N}$, не може издвојити коначан покривач), па у општем случају затворен и ограничен скуп не мора бити компактан. За $\varepsilon > 0$ скуп $M_\varepsilon \subseteq X$ назива се **ε-мрежа** (ε-покривање) скупа A ако је $A \subseteq \bigcup\limits_{x \in M_\varepsilon} K(x, \varepsilon)$ (видимо да, у општем случају, за уочено ε скуп M_ε није јединствено одређен; на пример, сам скуп A је ε-мрежа тог скупа, али је јасно да је у интересу одредити ε-мрежу што је могуће мање кардиналности). У делу (в) претходне леме показано је да је скуп $M_\varepsilon = \{x_1, \ldots, x_n\}$ ε-мрежа компактног скупа X, тј. да за свако $\varepsilon > 0$ компактан скуп има коначну ε-мрежу, што је јачи услов од ограничености и назива се **тотална ограниченост**. Такође, из дела (в) следи и да је скуп $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} M_{\frac{1}{n}}$ густ у X (заиста, за произвољно x и произвољно $\varepsilon > 0$, ако је $\frac{1}{n} < \varepsilon$, постоји $y \in M_{\frac{1}{n}}$, тако да је $d(x, y) < \varepsilon$), и притом је претходни скуп највише пребројив (као пребројива унија коначних скупова). Дакле, компактни простори су сепарабилни.

Претходне особине се могу добити и уколико простор задовољава друге особине. Метрички простор се назива **секвенцијално** (низовно) **компактан** ако и само ако произвољан бесконачан $A \subseteq X$ има тачку нагомилавања (у A). Директно (како је то рађено и у случају $\mathbb{R}$) следи да је претходно еквивалентно са захтевом да сваки низ тачака из A има конвергентан подниз у A (заиста, за уочени низ $(a_n)_{n \geqslant 1}$ у A, ако је нека тачка члан низа бесконачно пута, подниз одређен тим члановима конвергира ка тој тачки, а, иначе, слика низа је бесконачан скуп у A, па на основу секвенцијалне компактности има тачку нагомилавања, а она је и тачка нагомилавања уоченог низа; обрнуто, како је A бесконачан, постоји низ састављен од различитих његових елемената, па ако тај низ има конвергентан подниз који конвергира ка $a \in A$, онда је a тачка нагомилавања скупа A). Како је сваки Кошијев низ неког простора X конвергентан ако и само ако је простор комплетан, а у секвенцијално компактном простору сваки низ има тачку нагомилавања (а у случају Кошијевог низа у комплетном простору, то је онда и гранична вредност тог низа), следи да је секвенцијално компактан простор и комплетан, док обрнуто не мора бити тачно (по резултатима дела 3, $\mathbb{R}$ је комплетан, али није секвенцијално компактан). Из претходног следи и да је секвенцијално компактан скуп затворен.

Лема 8.3.2. Нека је (X, d) комплетан метрички простор. Онда је он секвенцијално компактан ако и само ако је тотално ограничен.

Доказ. Нека је X комплетан и тотално ограничен, а $A \subseteq X$ његов бесконачан подскуп. Како сваки бесконачан подскуп садржи пребројив подскуп, без умањења општости се може претпоставити да је $A = (a_i)_{i \geqslant 1}$ низ различитих елемената из X, а како је тотално ограничен, за свако $\varepsilon > 0$ постоји коначна ε-мрежа M_ε. Специјално, нека је $M_{\frac{1}{n}} = \{x_1^{(n)}, \ldots, x_{k_n}^{(n)}\}$ за $n \in \mathbb{N}$. Следи да сви чланови низа припадају $\bigcup\limits_{i=1}^{k_1} K(x_i^{(1)}, 1)$, па макар један од $K(x_i^{(1)}, 1)$, где је $1 \leqslant i \leqslant k_1$, садржи бесконачно много чланова низа. Ако су $(a_n^{(1)})_{n \geqslant 1}$ чланови који припадају једној од кугли која садржи бесконачно много чланова низа, нека је $b_1 = a_1^{(1)}$ и $A_1 = (a_n^{(1)})_{n \geqslant 2}$. Уколико је познато $(b_i)_{i=1}^n$ и $A_n = (a_j^{(n)})_{j \geqslant 2}$, скуп A_n је бесконачан и садржан у $\bigcup\limits_{i=1}^{k_{n+1}} K(x_i^{(n+1)}, \frac{1}{n+1})$, па макар један од $K(x_i^{(n+1)}, \frac{1}{n+1})$, где је $1 \leqslant i \leqslant k_{n+1}$, садржи бесконачно много чланова низа. Ако су $(a_j^{(n+1)})_{j \geqslant 1}$ чланови који припадају некој од кугли која садржи бесконачно много чланова низа, нека је $b_{n+1} = a_1^{(n+1)}$ и $A_{n+1} = (a_j^{(n+1)})_{j \geqslant 2}$. Јасно је да је овако описан алгоритам коректан и дефинише низ $(b_n)_{n \geqslant 1}$ различитих елемената скупа A, при чему за $m, n \geqslant n_0$ важи $d(b_m, b_n) < \frac{2}{n_0}$ (пошто сви чланови низа чији је индекс не мањи од n_0 припадају кугли полупречника $\frac{1}{n_0}$). Дакле, низ $(b_n)_{n \geqslant 1}$ је Кошијев, па како је X комплетан, постоји $b \in X$ тако да $b_n \to b$ кад $n \to \infty$, односно X је секвенцијално компактан.
Ако је X комплетан и није тотално ограничен, постоји $\varepsilon > 0$ за које не постоји коначна ε-мрежа. Нека је $a_1 \in X$ произвољан. Ако су познати $a_1, \ldots, a_n$, онда X није садржан у $\bigcup\limits_{i=1}^{n} K(a_i, \varepsilon)$ (пошто не постоји коначна ε-мрежа), па постоји $a_{n+1} \in X \setminus \Big(\bigcup\limits_{i=1}^{n} K(a_i, \varepsilon)\Big)$, тј. на описани начин је добро дефинисан низ $(a_n)_{n \geqslant 1}$, при чему за све $m, k \in \mathbb{N}$ за које је $m \neq k$ важи $d(a_m, a_k) \geqslant \varepsilon$. Следи да добијени низ нема конвергентан подниз. $\square$

Из претходног тврђења следи да је затворење неког скупа у комплетном метричком простору секвенцијално компактан скуп ако и само ако је тај скуп тотално ограничен. Како из тоталне ограничености неког простора следи његова сепарабилност, секвенцијално компактни простори су и сепарабилни. По до сада утврђеним особинама компактности и секвенцијалне компактности, не изненађује наредни резултат.

Лема 8.3.3. Метрички простор (X, d) је компактан ако и само ако је секвенцијално компактан.

Доказ. Претпоставимо да је X компактан и да постоји бесконачан $A \subseteq X$ који нема тачку нагомилавања. Онда за свако $x \in X$ постоји $K(x, \varepsilon_x)$ која садржи или једну или ниједну тачку скупа A (једну ако $x \in A$,

а иначе ниједну), па је $\{K(x,\varepsilon_x)\,|\,x \in X\}$ отворен покривач скупа X. Како је X компактан, из њега се може издвојити коначно покривање, а како је $A \subseteq X$, добијена коначна унија садржи и скуп A, што је немогуће (скуп A је бесконачан, а свака од кугли које учествују у добијеном коначном покривачу садржи највише једну тачку скупа A). Из добијене контрадикције следи да је X секвенцијално компактан.
Нека је X секвенцијално компактан и нека је $\{U_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ произвољан отворен покривач скупа X. По претходном је X и сепарабилан, па по делу (б) леме 8.1.5 следи да се може издвојити највише пребројив потпокривач $\{U_{\alpha_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ скупа X. Уколико X није компактан, постоји покривач $\{U_{\alpha_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ из ког се не може издвојити коначан потпокривач. Онда је $X\setminus\Big(\bigcup\limits_{j=1}^{n} U_{\alpha_j}\Big)$ непразан за свако $n\in\mathbb{N}$, тј. за свако $n\in\mathbb{N}$ постоји $x_n \in X\setminus\Big(\bigcup\limits_{j=1}^{n} U_{\alpha_j}\Big)$. На описани начин је конструисан низ $(x_n)_{n\geqslant 1}$, који има својство да скупу $X\setminus\Big(\bigcup\limits_{j=1}^{n} U_{\alpha_j}\Big)$ не припадају чланови низа x_m за које је $m \geqslant n$, тј. скупу $\bigcup\limits_{j=1}^{n} U_{\alpha_j}$ припада највише коначно много чланова уоченог низа. Како је X секвенцијално компактан, низ $(x_n)_{n\geqslant 1}$ има бар једну тачку нагомилавања (нека је то $\tilde{x}$). Дакле, постоји подниз $(x_{n_i})_{i\geqslant 1}$ тако да $x_{n_i} \to \tilde{x}$ кад $i \to \infty$. Међутим, важи $\tilde{x} \in X \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} U_{\alpha_i}$, па је $\tilde{x} \in U_{\alpha_j}$ за неко j, а како је U_{α_j} отворен, постоји $\varepsilon > 0$ тако да је $K(\tilde{x},\varepsilon) \subseteq U_j$. Међутим, последње значи да сви чланови уоченог подниза, почев од неког, припадају $K(\tilde{x},\varepsilon)$, па они припадају и U_{α_j}, што значи да скупу $\bigcup\limits_{i=1}^{j} U_{\alpha_i}$ припада бесконачно много чланова низа, што је у контрадикцији са начином конструкције низа $(x_n)_{n\geqslant 1}$. □

По резултату претходног тврђења, на даље у метричком простору не морамо разликовати компактност и секвенцијалну компактност (и приликом употребе било које од ових особина ћемо се позивати на својство компактности; напоменимо да у општем тополошком простору ове две особине не морају бити еквивалентне). Из претходних резултата следи и да је метрички простор компактан ако и само ако је затворен и тотално ограничен.

Лема 8.3.4. Нека је (X,d) метрички простор и $K_1, K_2 \subseteq X$ компактни.
(а) Ако је $x \in X \setminus K_1$, постоје дисјунктни отворени $U, V \subseteq X$, тако да је $x \in U$ и $K_1 \subseteq V$.
(б) Ако су K_1 и K_2 дисјунктни, постоје дисјунктни отворени $U, V \subseteq X$, тако да је $K_1 \subseteq U$ и $K_2 \subseteq V$.

Доказ. (а) За свако $y \in K_1$ постоје дисјунктни отворени U_y и V_y, тако да $x \in U_y$ и $y \in V_y$. Онда је $\{V_y\,|\,y \in K_1\}$ отворен покривач скупа K_1, а како је K_1 компактан, постоји његов коначан потпокривач $V_{y_1}, \ldots, V_{y_n}$. Међутим, онда $V = V_{y_1} \cup \ldots \cup V_{y_n}$ и $U = U_{y_1} \cap \ldots \cap U_{y_n}$ задовољавају наведене услове.

(б) На основу дела (а), за свако $x \in K_1$ постоје U_x и V_x, који су дисјунктни отворени и важи $x \in U_x$ и $K_2 \subseteq V_x$. Фамилија $\{U_x \,|\, x \in K_1\}$ је отворен покривач скупа K_1, па како је K_1 компактан, постоји коначан потпокривач $U_{x_1}, \ldots, U_{x_n}$ скупа K_1. Онда $V = V_{x_1} \cap \ldots \cap V_{x_n}$ и $U = U_{x_1} \cup \ldots \cup U_{x_n}$ задовољавају наведене услове. $\square$

Дакле, компактни скупови метричког простора се могу раздвојити отвореним околинама, као што је то био случај и са тачкама (метрички простор задовољава Хауздорфово својство, које је битно коришћено у доказу претходне леме).

Пример 29. На основу доказа претходне леме видимо да ће она важити и у општем тополошком простору у којем се могу раздвојити тачке (коришћено је то својство топологије индуковане метриком, али не и специфична својства метрике). Заправо, у метричком простору можемо добити и јаче тврђење. Приметимо да је са $f(x) = d(x, A) = \inf\limits_{a \in A} d(x, a)$, где је $a \in X$ и $A \subseteq X$, дефинисана непрекидна функција $f : X \to \mathbb{R}$ (како за свако $x, y \in X$, по неједнакости троугла, важи $|d(x,a) - d(y,a)| \leqslant d(x,y)$, следи да је $|f(x) - f(y)| \leqslant d(x,y)$, одакле следи непрекидност f; из јасних разлога се f обично назива „растојање тачке x од скупа A”), као и да је $f(x) \geqslant 0$, при чему је $f(x) = 0$ ако и само ако $x \in \overline{A}$ (ако је $f(x) = 0$, онда постоји низ $(a_n)_{n \geqslant 1}$ у A, тако да $d(x, a_n) \to 0$ кад $n \to \infty$). Ако су $F_1, F_2 \subseteq X$ дисјунктни непразни затворени скупови, онда је функција $g(x) = \frac{d(x,F_1)}{d(x,F_1)+d(x,F_2)}$ непрекидна и добро дефинисана (ако је $d(x, F_1) + d(x, F_2) = 0$, следи $d(x, F_1) = d(x, F_2) = 0$, па по претходном важи $x \in \overline{F_1} = F_1$ и $x \in \overline{F_2} = F_2$, пошто су F_1 и F_2 затворени, а како су и дисјунткни, последње је немогуће; заправо, видимо и да је $g(X) \subseteq [0, 1]$). Следи да су $U_1 = g^{-1}[0, \frac{1}{2})$ и $U_2 = g^{-1}(\frac{1}{2}, 1]$ скупови са наведеним особинама. $\triangle$

Пример 30. Аналогно урађеном у претходном примеру, уколико је (X, d) метрички простор и $A, B \subseteq X$, можемо дефинисати $f(A, B) = \inf\limits_{x \in A, y \in B} d(x, y)$ (које се, по аналогији, често назива „растојање скупова A и B”). По показаном, уколико су A и B затворени, они се могу „раздвојити” отвореним скуповима, иако се може десити да је $d(A, B) = 0$ (рецимо, како су $f_1(x) = 0$ и $f_2(x) = e^{-x}$ непрекидне функције (из $\mathbb{R}$ у $\mathbb{R}$, са стандардном метриком), по коментарима пре леме 8.2.5 су графици ових функција, тј. скупови $A = \{(x, 0) \,|\, x \in \mathbb{R}\}$ и $B = \{(x, e^{-x}) \,|\, x \in \mathbb{R}\}$, затворени; међутим, важи $d_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}((x, 0), (x, e^{-x})) = d(0, e^{-x}) \to 0$ кад $x \to \infty$, па је $d(A, B) = 0$). Претходно се не може десити ако је неки од A, B компактан. Заиста, ако је нпр. A компактан, B затворен и $d(A, B) = 0$, онда постоје низ $(a_n)_{n \geqslant 1}$ тачака скупа A и $(b_n)_{n \geqslant 1}$ тачака скупа B, тако да $d(a_n, b_n) \to 0$ кад $n \to \infty$. Како је A компактан, постоји $(a_{n_i})_{i \geqslant 1}$, тако да $a_{n_i} \to \tilde{a} \in A$ кад $i \to \infty$, а како $d(a_{n_i}, b_{n_i}) \to 0$ кад $i \to \infty$, следи да и $b_{n_i} \to \tilde{a}$ кад $i \to \infty$. Међутим, како је B затворен, последње значи да је $\tilde{a} \in B$, што је немогуће, пошто су A и B дисјунктни. $\triangle$

Лема 8.3.5. Ако је (X, d) компактан метрички простор и $X \supseteq F_1 \supseteq F_2 \supseteq \ldots$ непразни затворени скупови. Онда је $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$.

Доказ. Како су затворени подскупови компактног простора и сами компактни, следи да су F_n компактни за $n \geqslant 1$. Ако је уочени пресек празан, фамилија $\{X \setminus F_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ је отворен покривач скупа X. Пошто је X компактан, из њега се може издвојити коначан потпокривач, тј. постоје $n_1 < \ldots < n_k$, тако да је $\{X \setminus F_{n_i} \,|\, 1 \leqslant i \leqslant k\}$ покривач скупа X. Међутим, онда је унија тих скупова једнака $X \setminus F_{n_k}$, а како је F_{n_k} непразан, последње не може бити једнако X. Из добијене контрадикције следи тврђење. $\square$

Ако у претходној леми и $\operatorname{diam} F_i = \sup\limits_{x,y \in F_i} d(x, y) \to 0$ кад $i \to \infty$, онда је назначени пресек једночлан (уочимо сличност са тврђењем леме 8.2.7). Специјално, ако је низ $(x_i)_{i \geqslant 1}$ Кошијев у компактном простору X, онда $F_i = \overline{\{x_k \,|\, k \geqslant i\}}$ задовољавају наведене услове, па и на овај начин можемо утврдити да је компактан метрички простор и комплетан (приметимо да је $\operatorname{diam} A = \operatorname{diam} \overline{A}$ за произвољно $A \subseteq X$). Приметимо да тврђење претходне леме остаје на снази и у случају да X није компактан, уколико је неки од F_n компактан (онда претходно тврђење применимо на простор F_n и низ $F_n \supseteq F_{n+1} \supseteq \ldots$), па се претходно тврђење може видети као уопштење Канторове теореме о опадајућим интервалима (видети лему 2.1.7 и њене последице).
Скуп $\mathbb{R}$ са стандардном метриком није компактан. Међутим, по Архимедовом својству у $\mathbb{R}$ је скуп ограничен ако и само ако је тотално ограничен, па је у $\mathbb{R}$ скуп компактан ако и само ако је затворен и ограничен. Како је за Кошијев низ $(x_n)_{n \geqslant 1}$ скуп $\overline{\{x_n \,|\, n \geqslant i\}}$ затворен и ограничен, одавде следе и тврђења показана за Кошијеве низове у $\mathbb{R}$ у глави 3. Како је компактност еквивалентна секвенцијалној компактности, одавде можемо закључити и компактност затвореног и ограниченог скупа у $\mathbb{R}^n$, где је $n \in \mathbb{N}$, у произвољној од метрика d_1, d_2, d_∞. Заиста, у свакој од ових метрика је скуп $[a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ компактан, пошто је конвергенција у њима еквивалентна са координатном конвергенцијом, а на свакој од координата се конвергенција своди на компактност затвореног интервала у $\mathbb{R}$. Како је сваки ограничен скуп у $\mathbb{R}^n$ затворен подскуп неког од скупова облика $[a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$, следи тврђење и за овакве скупове. Специјално, $\mathbb{C}$ са стандардном метриком је изометричан са $\mathbb{R}^2$ са метриком d_2, па су и у њему скупови компактни ако и само ако су затворени и ограничени.

Лема 8.3.6. Нека је $\{K_\alpha \,|\, \alpha \in \mathcal{A}\}$ фамилија компактних скупова у метричком простору (X, d), тако да је пресек њене произвољне коначне подколекције непразан. Онда је $\bigcap\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} K_\alpha \neq \emptyset$.

Доказ. Нека је K_β произвољан члан уочене фамилије и $U_\alpha = X \setminus K_\alpha$ за $\alpha \neq \beta$. Ако је наведени пресек празан, онда је $\{U_\alpha \,|\, \alpha \neq \beta\}$ отворен покривач скупа K_β, па постоје $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ тако да $K_\beta \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}$. Међутим, онда је $K_\beta \cap \bigcap\limits_{i=1}^{n} K_{\alpha_i} = \emptyset$, тј. постоји коначна колекција чији је пресек празан. $\square$

Компактност и непрекидност

Из саме дефиниције компактности видели смо (и користили) да је утапање компактног метричког простора компактан скуп. Природно се поставља питање да ли се сличан закључак може добити и за ширу класу функција.

Теорема 8.3.1. Нека је $f : X \to Y$ непрекидно пресликавање метричког простора X у метрички простор Y. Ако је $K \subseteq X$ компактан, онда је $f(K)$ компактан.

Доказ. Нека је $\{V_\alpha \,|\, \alpha \in \mathcal{A}\}$ отворен покривач скупа $f(K)$. Онда је $\left\{f^{-1}(V_\alpha) \,|\, \alpha \in \mathcal{A}\right\}$ покривач скупа K, а како је f непрекидна, следи да је $f^{-1}(V_\alpha)$ отворен за свако $\alpha \in \mathcal{A}$. Како је K компактан, из њега се може издвојити коначан потпокривач, тј. постоје $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ тако да је $K \subseteq \bigcup\limits_{k=1}^{n} f^{-1}(V_{\alpha_k})$. Међутим, како је $f(f^{-1}(V_\alpha)) \subseteq V_\alpha$ за свако $\alpha \in \mathcal{A}$, из добијеног следи $f(K) \subseteq f\Big(\bigcup\limits_{k=1}^{n} f^{-1}(V_{\alpha_k})\Big) = \bigcup\limits_{k=1}^{n} f(f^{-1}(V_{\alpha_k})) \subseteq \bigcup\limits_{k=1}^{n} V_{\alpha_k}$, па скупови $V_{\alpha_1}, \ldots, V_{\alpha_n}$ чине коначан отворен потпокривач скупа $f(K)$. Дакле, из произвољног отвореног покривача скупа $f(K)$ се може издвојити коначан потпокривач, па је $f(K)$ компактан. $\square$

Ако је $Y = \mathbb{R}$ са стандардном метриком и $K \subseteq X$ компактан, следи да је $f(K)$ компактан у $\mathbb{R}$, па је затворен и ограничен. Дакле, у овом случају f достиже своју најмању и највећу вредност (пошто је $\mathbb{R}$ и уређено поље), тј. постоје $x_m, x_M \in K$, тако да је $f(x_m) \leqslant f(x) \leqslant f(x_M)$ за свако $x \in K$, па претодно тврђење, између осталог, представља уопштење Вајерштрасове теореме (теорема 4.3.2). Слично, ако је $Y = \mathbb{C}$ са стандардном метриком и $K \subseteq X$ компактан, следи да је $f(K)$ затворен и ограничен у $\mathbb{C}$, па постоје $x_m, x_M \in K$, тако да је $|f(x_m)| \leqslant |f(x)| \leqslant |f(x_M)|$ за свако $x \in K$.
Из претходног можемо добити и закључак примера 30. Заиста ако су A и B скупови из тог примера, по показаном у примеру 29, функција $f : A \to \mathbb{R}$ дефинисана са $f(x) = d(x, B)$ је непрекидна и узима позитивне вредности (пошто су A и B затворени и дисјунктни), па достиже најмању вредност (пошто је A компактан), тј. постоји $a \in A$, тако да је $d(A, B) = d(a, B) > 0$.

Пример 31. Из претходног следи и да су метрике d_1, d_2, d_∞ на $\mathbb{R}^n$ еквивалентне. Заиста, ако је S_1 сфера полупречника 1 у једној од уочених метрика, онда је S_1 компактан скуп, па у другој од уочених метрика d' је растојање центра O до те сфере ненегативно, а како је $d'(x, S_1)$ непрекидна, кугла са центром O, полупречника мањег од $d'(x, S_1)$ је садржана у јединичној сфери у полазној метрици. Заправо, видимо да се аналогно показује да су произвољне метрике, које су генерисане нормом у нормираном простору коначне диемнзије, еквивалентне. $\triangle$

Пример 32. Ако је X компактан метрички простор и $f : X \to X$ непрекидна, онда постоји непразан $A \subseteq X$, тако да је $f(A) = A$. Заиста, ако је $X_0 = X$ и $X_{n+1} = f(X_n)$ за $n \geqslant 0$, на основу претходне теореме је X_n компактан за $n \in \mathbb{N}_0$, а како је $X_n \supseteq X_{n+1}$ за $n \in \mathbb{N}_0$, на основу леме 8.3.5, је $A = \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} X_n \neq \emptyset$ и важи $f(A) = A$. $\triangle$

Лема 8.3.7. Нека је $f : X \to Y$ непрекидна бијекција компактног метричког простора X у метрички простор Y. Онда је f^{-1} непрекидно пресликавање.

Доказ. Ако је $F \subseteq X$ затворен, како је X компактан и F је компактан, па како је $f \in C(X)$, компактан је и $f(F)$, па је и затворен. Следи да је инверзна слика произвољног затвореног $F \subseteq X$ функцијом f^{-1} једнака $(f^{-1})^{-1}(F) = f(F)$, тј. затворен скуп, па је f^{-1} непрекидна. $\square$

Наравно, ако је f инјективна, претходно тврђење даје резултат избором $Y = f(X)$ (и на овај начин, између осталог, можемо видети својства утапања компактног простора). Такође, оно омогућава утврђивање непрекидности инверзних функција, како је то рађено у случају $\mathbb{R}$ помоћу теореме 4.3.5 (у тој теореми смо, будући да је $\mathbb{R}$ уређено поље, користили особине поретка, но по управо добијеном резултату видимо да се аналоган резултат може добити и без захтева да се ради у таквој алгебарској структури). И у случају метричких простора се преноси варијанта Канторове теореме (теорема 4.3.3), а уобичајно је да се и то уопштење назива истим именом (у овом тексту је, у циљу приказа више начина размишљања, али и зарад избегавања понављања, доказ теореме 4.3.3 изложен коришћењем својстава низова (тј. секвенцијалне компактности), а наредни доказ коришћењем тополошких својстава (тј. компактности), но препоручујемо читаоцу да провери да се сваки од доказа може прилагодити другој ситуацији; стога су и идеје доказа ова два тврђења исте, што додатно правда то што се ова тврђења називају истим именом).

Лема 8.3.8 (Кантор). Нека је $f : X \to Y$ пресликавање метричког простора X у метрички простор Y и $K \subseteq X$ компактан. Онда је f равномерно непрекидна на K.

Доказ. Како је f непрекидна на K, за свако $x \in K$ постоји $r = r(x)$, тако да за свако $y \in K \cap K(x, r)$ важи $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Скупови $K(x, \frac{r}{2})$, за $x \in K$, чине отворени покривач скупа K, па како је K компактан, може се издвојити коначан потпокривач $K(x_1, \frac{r_1}{2}), \ldots, K(x_n, \frac{r_n}{2})$. Нека је $\delta = \frac{1}{2} \cdot \min\{r_1, \ldots, r_n\}$ и $x, y \in K$ тако да је $d(x, y) < \delta$. Онда постоји j, тако да $x \in K(x_j, \frac{r_j}{2})$ (јер је уочена фамилија потпокривач), а како је $d(y, x_j) \leqslant d(x, y) + d(x, x_j) < \delta + \frac{r_j}{2} \leqslant r_j$, следи да и $y \in K(x_j, r_j)$, па је $d(f(x), f(y)) \leqslant d(f(x), f(x_j)) + d(f(x_j), f(y)) < 2\varepsilon$, што доказује тврђење. $\square$

Пример 33. Нека је $A \subseteq \mathbb{R}$ некомпактан. Ако није затворен и $a \in A' \setminus A$, онда $f(x) = \frac{1}{x-a}$ није ограничена на A, нити је равномерно непрекидна на A, док је $g(x) = \frac{1}{1+(x-a)^2}$ ограничена, а не достиже максимум. Ако A није ограничен, онда $f_1(x) = x$ није ограничена, док је $g_1(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$ ограничена, а не достиже максимум. Стога не очекујемо да тврђења теореме 8.3.1 и леме 8.3.8 у општем случају важе без услова компактности. Приметимо и да је произвољна функција $f_3 : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ равномерно непрекидна (домен је дискретан), па на неограниченом скупу не мора постојати функција која није равномерно непрекидна. $\triangle$

Приметимо и да на основу доказа леме 8.1.5 је скуп компактан ако и само ако се из његовог произвољног покривања базним скуповима може издвојити коначан потпокривач (заиста, у поменутој леми је на основу конструкције погодно изабраним базним скуповима изабран највише пребројив потпокривач; међутим, могло се остати на покривању уоченим базним скуповима, а ако је простор и компактан, након тога издвојити коначан потпокривач састављен од базних скупова). Природно се намеће и питање утврђивања компактности у Декартовом производу простора (са топологијом уведеном на начин описан у делу који је претходио леми 8.2.5).

Лема 8.3.9. Простор $X \times Y$ је компактан ако и само ако су X и Y компактни.

Доказ. Ако је $X \times Y$ компактан, како су пројекције p_X и p_Y непрекидне (тако је и уведена топологија на производ простору), следи да су $X = p_X(X \times Y)$ и $Y = p_Y(X \times Y)$ компактни.
Ако су X и Y компактни, онда су $\{x\} \times Y$ и $X \times \{y\}$ компактни за свако x и y (пошто је пресликавање $x \to (x, y)$ утапање компактног простора X у $X \times Y$). Уочимо отворено покривање простора $X \times Y$. По претходном, довољно је посматрати покривање базним скуповима, тј. можемо претпоставити је покривач састављен од скупова облика $U_\alpha \times V_\alpha$, где је U_α отворен у X, а V_α отворен у Y за свако $\alpha \in \mathcal{A}$. За свако x уочени покривач покрива и скуп $\{x\} \times Y$, који је компактан, па постоји коначан потпокривач $\{U^x_{\alpha_1} \times V^x_{\alpha_1}, \ldots, U^x_{\alpha_{n(x)}} \times V^x_{\alpha_{n(x)}}\}$ полазне фамилије који покрива тај скуп (у претходном $n = n(x)$ зависи од x).
Ако је $U^x = \bigcap\limits_{i=1}^{n(x)} U^x_{\alpha_i}$, онда је U^x отворен, а скупови $U^x \times V^x_{\alpha_i}$, за $1 \leqslant i \leqslant \alpha_{n(x)}$, такође покривају $\{x\} \times Y$. Фамилија $\{U^x \mid x \in X\}$ је отворен покривач скупа X, а како је X компактан, могуће је издвојити њен коначан потпокривач $U^{x_1}, \ldots, U^{x_m}$. Онда је фамилија $\{U^{x_j}_{\alpha_k} \times V^{x_j}_{\alpha_k} \mid 1 \leqslant j \leqslant m \wedge 1 \leqslant k \leqslant n(x_j)\}$ коначан покривач скупа $X \times Y$, који је потпокривач полазног покривача, па је $X \times Y$ компактан. $\square$

Наравно, претходно се индукцијом преноси и на коначан производ простора (поменимо и да наведено тврђење важи и у случају произвољног производа тополошких простора (са тим да се, како је констатовано раније, у случају производа непребројиво много простора, не може гарантовати метрика која индукује тополошку структуру)).

Пример 34. Нека су X и Y метрички простори, при чему је X компактан и $f : X \to Y$. Онда је f непрекидна ако и само ако је њен график, тј. скуп $G_f = \{(x, f(x)) \,|\, x \in X\}$ компактан (у $X \times Y$). Заиста, ако је f непрекидна, како је X компактан, компактни су и $f(X)$ (у Y) и $X \times f(X)$ (у $X \times Y$), а како је $G_f \subseteq X \times f(X)$ затворен (пошто је f непрекидна), следи да је G_f компактан (као затворен подскуп компактног скупа). Обрнуто, ако је G_f компактан, пошто су p_X и p_Y (пројекције на X и Y, редом) непрекидне (као пресликавања из $X \times Y$ у X и Y, редом), непрекидне су и њихове рестрикције p_1 и p_2, редом, на скупу G_f. Међутим, $p_1 : G_f \to X$ је и бијекција, па је на основу леме 8.3.7 непрекидна и p_1^{-1}, одакле следи непрекидност и $f = p_2 \circ p_1^{-1}$. $\triangle$

У компактним просторима се добијају јача тврђења од оних која су, под одговарајућим претпоставкама, добијена у случају општих простора, а компактност долази до пуног изражаја при раду са специфичним метрикама или скуповима. У овом делу ћемо то илустровати у случају рада са изометријама, контракцијама, као и у Еуклидском векторском простору, а у наредном делу ћемо то видети приликом њеног комбиновања са повезаношћу (видети примере 44 и 45).

Ако је c простор из примера 6, пресликавање Λ, које низу $(x_n)_{n\geqslant 1} \in c$ додељује низ $(y_n)_{n\geqslant 1}$, такав да је $y_n = \begin{cases} 0, & \text{ако је } n = 1 \\ x_{n-1}, & \text{ако је } n \geqslant 2 \end{cases}$ („транслација чланова низа за један члан удесно”), је изометрија на c (тј. $\Lambda : c \to c$ и важи $\|\Lambda(x^{(1)}) - \Lambda(x^{(2)})\|_\infty = \|x^{(1)} - x^{(2)}\|_\infty$ за произвољне $x^{(1)}, x^{(2)} \in c$). Међутим, важи $\Lambda(c) \neq c$ (скуп $\Lambda(c)$ не садржи низове из c којима је први члан различит од 0). Следи да постоји метрички простор који је изометричан свом правом подскупу. Последње није могуће уколико је простор компактан, што је показано у наредном тврђењу.

Лема 8.3.10. Ако је X компактан метрички простор и $f : X \to X$ изометрија, онда је $f(X) = X$.

Доказ. За $x_0 \in X$, нека је $x_{n+1} = f(x_n)$ за $n \in \mathbb{N}_0$, а, аналогно, нека је $X_0 = X$ и $X_{n+1} = f(X_n)$ за $n \in \mathbb{N}_0$. На овај начин су добро дефинисани низ $(x_n)_{n\geqslant 0}$ тачака простора X и низ $(X_n)_{n\geqslant 0}$ подскупова скупа X. Тривијално је $X_n \supseteq X_{n+1}$ за $n \in \mathbb{N}_0$, као и $x_n \in X_m$ за све $m \leqslant n$. Такође, за свако $n \in \mathbb{N}_0$, ако је $y \in X_{n+2}$, онда је $y = f(y')$ за неко $y' \in X_{n+1}$, па како је f изометрија, важи $d(x_n, y') = d(f(x_n), f(y')) = d(x_{n+1}, y)$, одакле, преласком на инфимум по свим $y \in X_{n+2}$, следи $d(x_n, X_{n+1}) \leqslant d(x_{n+1}, X_{n+2})$ (пошто за уочено $y \in X_{n+2}$ је $y' \in X_{n+1}$; приметимо да, без додатних услова, се у последњем не може гарантовати једнакост, пошто скуп свих оваквих y' не мора бити једнак X_{n+1}). Слично, за свако $k \in \mathbb{N}$ важи $d(x_0, x_k) = d(f(x_0), f(x_k)) = f(x_1, x_{k+1})$, одакле је, индукцијом, $d(x_n, x_{n+k}) = d(x_0, x_k)$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Како за $k \in \mathbb{N}$ важи $x_k \in X_1$, из последњег следи да за свако $k \in \mathbb{N}$ и свако $n \in \mathbb{N}_0$ важи $d(x_n, x_{n+k}) \geqslant d(x_0, X_1)$.

Претпоставимо да је $f(X) \neq X$. Онда постоји $x_0 \in X \setminus f(X)$, па ако су $(X_n)_{n\geqslant 0}$ и $(x_n)_{n\geqslant 0}$ дефинисани на горе описани начин, при чему је $x_0 \in X \setminus f(X)$, како је X компактан, $f(X)$ је компактан, па је и затворен, те је $d(x_0, X_1) = d(x_0, f(X)) > 0$ (видети коментаре из примера 29). Међутим, по горе доказаном, онда за све $k \in \mathbb{N}$ и $n \in \mathbb{N}_0$ важи $d(x_{n+k}, x_n) \geqslant d(x_0, X_1)$, па се произвољна два члана низа $(x_n)_{n\geqslant 0}$ налазе на растојању не мањем од $d(x_0, f(X)) > 0$, што је немогуће, пошто је у питању низ тачака у компактном метричком простору (па мора имати конвергентан подниз). Следи да је $f(X) = X$. $\square$

Пример 35. Нека је (X, d) компактан метрички простор и $f : X \to X$ сурјективна функција за коју је $d(f(x), f(y)) \leqslant d(x, y)$ за све $x, y \in X$. Докажимо да је f и инјективно пресликавање (тј. да је, под наведеним условима, f бијекција). Нека су $a, b \in X$ произвољни. Дефинишимо $a_0 = a$, а како је f сурјективна, скуп $f^{-1}(a_0)$ је непразан. Нека је a_1 произвољан елемент тог скупа. Аналогно, ако је одређено a_n, како је f сурјективна, $f^{-1}(a_n)$ је непразан, а a_{n+1} дефинишемо као произвољан елемент тог скупа. На овај начине је добро дефинисан низ $(a_n)_{n\geqslant 0}$, а, на аналоган начин, дефинишемо низ $(b_n)_{n\geqslant 0}$, где је $b_0 = b$ (дакле, по начину конструкције, за свако $n \in \mathbb{N}_0$ је $a_n = f(a_{n+1})$ и $b_n = f(b_{n+1})$).
Како је $(a_n)_{n\geqslant 0}$ низ тачака у компактном X, постоји његов конвергентан подниз $(a_{n_i})_{i\geqslant 0}$, а, аналогно, како је и $(b_{n_i})_{i\geqslant 0}$ низ тачака у X, постоји његов конвергентан подниз $(b_{m_i})_{i\geqslant 0}$. Ако је $\lim\limits_{i\to\infty} a_{n_i} = \alpha$, $\lim\limits_{i\to\infty} b_{m_i} = \beta$, нека је $\alpha_0 = \alpha$, $\beta_0 = \beta$, као и $\alpha_{n+1} = f(\alpha_n)$, $\beta_{n+1} = f(\beta_n)$ за $n \in \mathbb{N}_0$. Онда за свако $n \in \mathbb{N}_0$, на основу везе коју задовољава функција f, важи $d(a, \alpha_n) = d(a_0, \alpha_n) = d(f(a_1), f(\alpha_{n-1})) \leqslant d(a_1, \alpha_{n-1})$, односно, настављањем последњег поступка, следи $d(a, \alpha_n) \leqslant d(a_n, \alpha_0) = d(a_n, \alpha)$. Специјално, важи $d(a, \alpha_{m_i}) \leqslant d(a_{m_i}, \alpha) \to 0$ кад $i \to \infty$ (пошто $a_{m_i} \to \alpha$ кад $i \to \infty$), па $\alpha_{m_i} \to a$ кад $i \to \infty$. Аналогно, $\beta_{m_i} \to b$ кад $i \to \infty$, па $d(\alpha_{m_i}, \beta_{m_i}) \to d(a, b)$ кад $i \to \infty$.
Како, на основу особине коју задовољава f, за свако $n \in \mathbb{N}_0$ важи $d(\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}) = d(f(\alpha_n), f(\beta_n)) \leqslant d(\alpha_n, \beta_n)$, следи да је $(d(\alpha_n, \beta_n))_{n\in\mathbb{N}_0}$ нерастући низ ненегативних реалних бројева, а по претходно показаном, има конвергентан подниз (пошто $d(\alpha_{m_i}, \beta_{m_i}) \to d(a, b)$ кад $i \to \infty$), па важи и $d(\alpha_n, \beta_n) \to d(a, b)$ кад $n \to \infty$. Из особине коју задовољава f, следи да је она непрекидна, па из до сада добијеног следи $d(a, b) = \lim\limits_{i\to\infty} d(\alpha_{m_i+1}, \beta_{m_i+1}) = \lim\limits_{i\to\infty} d(f(\alpha_{m_i}), f(\beta_{m_i})) = d\Big(f(\lim\limits_{i\to\infty} \alpha_{m_i}), f(\lim\limits_{i\to\infty} \beta_{m_i})\Big) = d(f(a), f(b))$. Како су $a, b \in X$ произвољни, последње значи да је f изометрија на X (па је и инјективна). $\triangle$

Слично, и у случају контракције у компактном метричком простору, добијају се јачи резултати од добијених у општем случају. У примерима 24 и 25, показано је да, ако се у комплетном метричком простору X услов q-контракције (за неко $q \in (0, 1)$) замени условом $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ за све $x, y \in X$, $x \neq y$, онда се не може гарантовати ни егзистенција ни одсуство фиксне тачке пресликавања f. Наредно тврђење показује да се то ипак може учинити у компактном простору.

Лема 8.3.11. Нека је (X,d) компактан метрички простор и $f : X \to X$ функција која задовољава $d(f(x), f(y)) < d(x,y)$ за све $x, y \in X$, $x \neq y$.
(а) Онда f има јединствену фиксну тачку.
(б) За произвољно $x_0 \in X$, низ дефинисан са $x_{n+1} = f(x_n)$ конвергира ка фиксној тачки чија је егзистанција утврђена у делу (а).

Доказ. (а) Ако би постојале две фиксне тачке $a \neq b$, онда је $0 < d(a,b) = d(f(a), f(b)) < d(a,b)$, што је немогуће. Нека је $g : X \to \mathbb{R}$ дефинисана са $g(x) = d(x, f(x))$ (очигледно је $g(x) \geqslant 0$ за свако $x \in X$). Постојање фиксне тачке (функције f на X) је еквивалентно егзистенцији нуле функције g. Како је g непрекидна на компактном простору X и ненегативна, достиже минималну вредност, тј. постоји $a \in X$ тако да је $d(a, f(a)) \leqslant d(x, f(x))$ за свако $x \in X$. Ако је $a \neq f(a)$, онда је $d(f(a), f(f(a))) < d(a, f(a))$ (по услову теореме), тј. g узима мању вредност, па мора бити $f(a) = a$, односно a је фиксна тачка функције f.
(б) Нека је $(x_n)_{n\geqslant 1}$ наведени низ. Ако је $x_n = a$ за неко n, онда је $x_{n+1} = f(x_n) = f(a) = a$, па је низ константно једнак a почев од n-тог члана, тј. конвергира ка a. Ако је $x_n \neq a$ за свако $n \in \mathbb{N}$, онда је $0 < d(x_{n+1}, a) = d(f(x_n), f(a)) < d(x_n, a)$ за свако $n \in \mathbb{N}$, па је низ $(d(x_n, a))_{n\geqslant 1}$ опадајући низ позитивних реалних бројева. Следи да постоји $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, a) = l$, а како је X компактан, постоји подниз $(x_{n_i})_{i\geqslant 1}$ који конвергира. Нека је $\lim\limits_{i\to\infty} x_{n_i} = b$. Како је f непрекидна, следи да је $\lim\limits_{i\to\infty} f(x_{n_i}) = f(b)$, тј. $\lim\limits_{i\to\infty} x_{n_i+1} = f(b)$. Пошто $d(x_n, a) \to l$ кад $n \to \infty$, следи $d(x_{n_i}, a) \to l$ и $d(x_{n_i+1}, a) \to l$ кад $i \to \infty$, па на основу непрекидности метрике следи $d(x_{n_i}, a) \to d(b, a)$ и $d(x_{n_i+1}, a) \to d(f(b), a)$ кад $i \to \infty$, одакле је $d(b,a) = l = d(f(b), a) = d(f(b), f(a))$. Уколико је $b \neq a$, из претходног следи $d(f(b), f(a)) < d(b,a)$, што је немогуће, па је $b = a$, односно $l = d(b,a) = 0$. Дакле, $d(x_n, a) \to 0$ кад $n \to \infty$. $\square$

Видели смо да се нормираном векторском простору, као и Еуклидском векторском простору, природно придружује метрика. Наравно, за очекивати је да се за такву метрику може доћи до јачих закључака, него што је то могуће у општем метричком простору.

Пример 36. Ако је X компактан подскуп Еуклидског векторског простора (онда је (X,d) метрички простор, при чему је $d(x,y) = \|x - y\|$, за $x, y \in X$, а норма $\|\cdot\|$ је индукована скаларним производом), $Y \subseteq X$ затворен и конвексан, $z \in X$ и $r = d(z, Y)$ (на основу резултата примера 29 и теореме 8.3.1, r је добро дефинисано). Докажимо да, ако за низ $(y_n)_{n\geqslant 1}$ важи $d(y_n, z) \to r$ кад $n \to \infty$, онда је $(y_n)_{n\geqslant 1}$ конвергентан. Како је посматрана норма индукована скаларним производом, задовољена је једнакост паралелограма (видети пример 38 главе 7), па за све $m, n \in \mathbb{N}$ важи $2(\|y_n - z\|^2 + \|y_m - z\|^2) = \|y_n - y_m\|^2 + \|y_n + y_m - 2z\|^2 = \|y_n - y_m\|^2 + 4 \cdot \|\frac{y_n+y_m}{2} - z\|^2 \geqslant \|y_n - y_m\|^2 + 4r^2$ (због конвексности Y, из $y_n, y_m \in Y$ следи $\frac{y_n+y_m}{2} \in Y$), одакле је $(d(y_n, y_m))^2 \leqslant 2(d(y_n, z))^2 + 2(d(y_m, z))^2 - 4r^2$.

Ако $d(y_n, z) \to r$, кад $n \to \infty$, следи да за произвољно $\varepsilon > 0$, постоји n_0, тако да за $m, n \geqslant n_0$ важи $(d(y_n, y_m))^2 < \varepsilon$, те је низ $(y_n)_{n\geqslant 1}$ Кошијев, а како је X компактан простор, он је и комплетан, па је уочени низ и конвергентан (како је и Y компактан, заправо видимо и да $(y_n)_{n\geqslant 1}$ конвергира ка елементу из Y). △

Ако је $X = [-1,1]^2$ и $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$, онда је (X, d) компактан метрички простор (заправо, у питању је нормиран простор, са нормом $\|(x,y)\|_\infty = \max\{|x|, |y|\}$), $Y = [-1,1] \times \{0\}$ је његов затворен подскуп, а ако је $z = (0,1)$, важи $d(z, y) = 1$, за свако $y \in Y$, те за произвољан низ $(y_n)_{n\geqslant 1}$ у Y (па и низ који није конвергентан) важи $d(y_n, z) = 1$, па се закључак претходног примера не преноси на случај оштег нормираног простора (а у оштем метричком простору не мора имати смисла појам конвексности). Упоредити добијено у овом примеру са резултатом леме 7.5.2 (видети и коментаре након ње).

8.4. Повезаност у метричком простору

Дефиниција 8.4.1. Метрички простор X је **повезан** ако и само ако су X и $\emptyset$ једини скупови који су истовремено и отворени и затворени.

По литератури се често виђа да се уместо назива повезан користи термин конексан, латинског порекла. Скупове који су истовремено и отворени и затворени ћемо на даље звати отворено–затворени. Приметимо да сама дефиниција има смисла и у ширем контексту (рецимо, и у тополошком простору). Из дефиниције следи да је метрички простор X неповезан ако је $X = U \cup V$ за неке непразне дисјунктне отворене скупове U и V. Заиста, онда је $V = X \setminus U$ и $U = X \setminus V$, па су U и V истовремено и затворени, а, ако постоји, овакво растављање простора X се назива **дисконексија**. Скуп у метричком простору је повезан ако и само ако је повезан метрички простор (са топологијом наслеђеном из ширег простора; дакле, ако за $A \subseteq X$ постоје отворени $U, V \subseteq X$, тако да су $A_1 = A \cap U$ и $A_2 = A \cap V$ дисјунктни, непразни и важи $A = A_1 \cup A_2$, онда је A неповезан). Из претходног следи и да повезаност није релативна особина, односно, уколико је скуп повезан у неком метричком простору, биће повезан и као подскуп ширег простора, што, као и у случају компакности, даје посебну важност проучавању ове особине.

Пример 37. У $\mathbb{R}$ са стандардном метриком повезани скупови су интервали. Заиста, ако је $A \subseteq \mathbb{R}$ такав да постоји $a \notin A$, а да је притом $U = (-\infty, a) \cap A \neq \emptyset$ и $V = (a, \infty) \cap A \neq \emptyset$, онда је $U \cup V$ дисконексија скупа A. На пример, скуп $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ није повезан у $\mathbb{R}$ и улогу скупова U и V играју скупови $(-\infty, 0)$ и $(0, \infty)$. Приметимо и да скупови U и V који приказују дисконексију не морају бити једнозначно одређени. На пример, ако је $X = (-1, 0] \cup [1, 2] \cup (3, \infty)$, посматран као потпростор $\mathbb{R}$, онда X није повезан, а улогу U из дефиниције дисконексије може играти било који од скупова $(-1,0]$, $[1,2]$, $(3,\infty)$, $(-1,0]\cup[1,2]$, $(-1,0]\cup(3,\infty)$, $[1,2]\cup(3,\infty)$ (а онда је $V = X\setminus U$). $\triangle$

Пример 38. Ако је X простор са бар два елемента снабдевен дискретном метриком, онда је X неповезан. Заиста, ако је $x\in X$ и K отворена кугла са центром у x, полупречника $\frac{1}{2}$, ако је $U = X\cap K = \{x\}$ и $V = X\setminus\overline{K} = X\setminus\{x\}\neq\emptyset$, онда је $X = U\cup V$ једна дисконексија X. $\triangle$

По претходном примеру, $\{0,1\}$ са дискретном метриком (а то је метрика овог простора и посматраног као потпростор $\mathbb{R}$) је неповезан.

Лема 8.4.1. Метрички простор X је повезан ако и само ако је свака непрекидна функција $f : X\to\{0,1\}$ константна (тј. није сурјективна).

Доказ. По претходном примеру, у $\{0,1\}$ су и $\{0\}$ и $\{1\}$ отворено–затворени скупови, па ако постоји непрекидна f, тако да је $f(X) = \{0,1\}$, онда су $f^{-1}(\{0\})$ и $f^{-1}(\{1\})$ непразни отворено–затворени и дисјунктни скупови у X, те X није повезан. Са друге стране, ако X није повезан и ако је $U\cup V$ нека његова дисконексија, функција $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ако је } x\in U \\ 1, & \text{ако је } x\in V\end{cases}$ је непрекидна и неконстантна. $\square$

Претходна лема даје опис повезаности простора „језиком функција" и може се искористити за дефиницију повезаности метричког простора (у том случају би горња дефиниција била прва последица). Из претходног следи да је $A\subseteq X$, где је X метрички простор, отворено–затворен ако и само ако је функција $\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{ако } x\in A \\ 0, & \text{ако } x\notin A\end{cases}$ непрекидна (заиста, слика функције је у $\{0,1\}$, па ако је A отворено–затворен, следи да су $\chi_A^{-1}(0) = A$ и $\chi_A^{-1}(1) = X\setminus A$ отворени (у X), те је χ_A непрекидна (скупови $\{0\}$ и $\{1\}$ чине базу у простору $\{0,1\}$); са друге стране, ако је χ_A непрекидна, онда је $A = \chi_A^{-1}(1)$ отворено–затворен, пошто је $\{1\}$ отворено–затворен у $\{0,1\}$). Приметимо да је у претходној леми кључан био захтев непрекидности посматраних функција, те не изненађује што ће се и при даљим испитивањима особина повезаног скупа помоћу функција дефинисаних на њему, природно наметати услов њихове непрекидности, што долази до пуног изражаја у наредном тврђењу.

Теорема 8.4.1. Нека су X и Y метрички простори, при чему је X повезан, а $f : X\to Y$ непрекидно пресликавање. Онда је $f(X)$ повезан скуп.

Доказ. Довољно је посматрати случај $Y = f(X)$. Уколико $f(X)$ није повезан, онда је $f(X) = U\cup V$ за неке непразне дисјунктне отворене скупове U и V у $f(X)$, а онда су они и затворени у $f(X)$. Међутим, како је f непрекидна, следи да су $f^{-1}(U)$ и $f^{-1}(V)$ непразни и дисјунктни отворено–затворени скупови у X, што је немогуће, пошто је X повезан метрички простор. $\square$

Дакле, непрекидна слика повезаног скупа је повезан скуп. Како су повезани скупови у случају $\mathbb{R}$ интервали, претходна теорема у овом случају доводи до раније добијене теореме о међувредности (теорема 4.3.1; заиста, ако је X повезан метрички простор, $f : X \to \mathbb{R}$ непрекидна, $f(a) = \alpha$, $f(b) = \beta$ и ако се γ налази између α и β, по претходном тврђењу је $f(X)$ повезан (у $\mathbb{R}$), па је у питању интервал који садржи α, β, но онда садржи и γ, тј. постоји $c \in X$, тако да је $f(c) = \gamma$). Међутим, права вредност претходне теореме је, између осталог, у томе што са подједнаким напором даје закључке и у случајевима у којима функције нису реалновредносне (приметимо да се не захтева никаква алгебарска структура ни на доменском ни на кодоменском простору).

Пример 39. Ако је $A \subseteq \mathbb{R}^n$ повезан скуп и ако $a_1, a_2 \in A$, тако да је $\|a_1\| < 1$ и $\|a_2\| > 1$, онда скуп A садржи тачку b, тако да је $\|b\| = 1$. Заиста, функција $f(x) = \|x\|$ је непрекидна на $\mathbb{R}^n$, па је слика скупа A повезан скуп, а како су повезани скупови у $\mathbb{R}$ интервали и како, по условима, слика садржи a_1 и a_2, тако да је $\|a_1\| < 1$ и $\|a_2\| > 1$, интервал који представља слику садржи и тачку 1. $\triangle$

Пример 40. Сличним начином размишљања као у претходном примеру можемо закључити да ако повезан метрички простор X садржи макар две тачке, онда садржи непребројиво много тачака. Заиста, ако су $a \neq b$ уочене две тачке, δ произвољан број за који је $0 < \delta < d(a, b)$ и K_δ кугла са центром у a и полупречника δ, уколико је $X \cap K_\delta = \emptyset$, онда су $U = X \cap K_\delta$ и $V = X \setminus U$ непразни отворено–затворени подскупови у X (скуп V је скуп свих $x \in X$ за које је $d(x, a) > \delta$), па X не би био повезан. Дакле, сфера са центром у a и полупречника δ, за свако $\delta \in (0, d(a, b))$ садржи макар једну тачку, а како су те тачке и различите за различите вредности δ, кардиналост скупа X је не мања од кардиналности интервала $(0, d(a, b))$, односно не мања од $\mathfrak{c}$. $\triangle$

Пример 41. Како је $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, дефинисана са $f(t) = (\cos t, \sin t)$, непрекидна, за произвољне $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$ је скуп $\ell_{a,b} = f(a, b)$ повезан. Претходно, у случају $b - a < 2\pi$, можемо видети као (отворен) лук, тј. део кружне линије (у кругу са центром у $(0, 0)$, полупречника 1, централног угла $b - a$). По претходном, $\ell_{0,2\pi}$ и $\ell_{-\pi,\pi}$ су повезани, док њихов пресек није (њихов пресек је уочена јединична кружна линија без тачака $(-1, 0)$ и $(1, 0)$), па пресек повезаних скупова не мора бити повезан скуп. Ако је $X = \ell_{0,2\pi}$ метрички простор (посматран као потпростор $\mathbb{R}^2$), онда је X повезан, а (отворена) кугла $K(f(\frac{\pi}{6}), 1)$ је скуп $\ell_{0,\frac{\pi}{2}} \cup \ell_{\frac{11\pi}{6},2\pi}$ (аналогно, затворена кугла $\overline{K}(f(\frac{\pi}{6}), 1)$ је скуп $K(f(\frac{\pi}{6}), 1) \cup \{(\cos\frac{\pi}{2}, \sin\frac{\pi}{2}), (\cos\frac{11\pi}{6}, \sin\frac{11\pi}{6})\}$). Из претходног видимо да, иако је X повезан, ни отворена ни затворена кугла у X не морају бити повезани скупови. $\triangle$

Пример 42. Ако је X повезан, $a, b \in X$, како је $f(x) = d(x, a) - d(x, b)$ непрекидна, важи $|f(x)| \leqslant d(a, b)$, као и $-f(a) = f(b) = d(a, b)$, следи да је $f(X) = [-d(a, b), d(a, b)]$ (пошто је $f(X)$ повезан, а повезани скупови у $\mathbb{R}$ су интервали). Аналогно, ако постоје непразни дисјунктни $A, B \subseteq X$, тако да је $d(x, A) \neq d(x, B)$, онда X не може бити повезан. Заиста,

$g(x) = d(x, A) - d(x, B)$ је непрекидна, за $x \in A$ важи $g(x) = -d(x, B) \leqslant 0$, а за $x \in B$ важи $g(x) = d(x, A) \geqslant 0$, па како из наведеног услова следи да је $g(x) \neq 0$, следи да су $g^{-1}(-\infty, 0)$ и $g^{-1}(0, \infty)$ непразни и чине дисконексију простора X. △

Пример 43. Као што је то био случај и приликом примене теореме 4.3.1, типична употреба претходне теореме је при утврђивању егзистенције решења једначина. Ако је X повезан метрички простор, $a, b \in X$, $f : X \to \mathbb{R}$ непрекидна, онда постоји $c_1 \in X$, тако да је $(f(c_1))^3 = \frac{(f(a))^3+(f(a))^2 f(b)+f(a)(f(b))^2+(f(b))^3}{4}$, а ако је f и ненегативна, постоји $c_2 \in X$ тако да је $f(c_2) = \sqrt{f(a)f(b)}$. Заиста, под наведеним условима су претходни изрази добро дефинисани, а ако је, без умањења општости, $f(a) \leqslant f(b)$, важи $(f(a))^3 \leqslant \frac{(f(a))^3+(f(a))^2 f(b)+f(a)(f(b))^2+(f(b))^3}{4} \leqslant (f(b))^3$ и $f(a) \leqslant \sqrt{f(a)f(b)} \leqslant f(b)$, па како је $f(X)$ интервал, $f(a), f(b) \in f(X)$ (а x^3 је непрекидна и растућа на $\mathbb{R}$), следе наведена тврђења. △

Лема 8.4.2. Ако је $X = X_1 \cup X_2$ дисконексија метричког простора X и $Y \subseteq X$ повезан скуп, онда $Y \subseteq X_1$ или $Y \subseteq X_2$.

Доказ. Скупови X_1 и X_2 су непразни дисјунктни отворено–затворени скупови у X, па су $Y \cap X_1$ и $Y \cap X_2$ отворено–затворени скупови у његовом потпростору Y, а ако би били и непразни, Y не би био повезан. Међутим, како је Y повезан, бар један од поменутих скупова је празан, а пошто је $Y \subseteq X_1 \cup X_2$, следи да Y припада неком од X_1, X_2. □

У примеру 41 смо видели да повезаност пресека повезаних скупова не можемо гарантовати без додатних услова, а сличан случај је и са унијом. На пример, у $\mathbb{R}$ су $[0, 1]$, $[1, 2]$ и $[2, 3]$ повезани, као и $[0, 1] \cup [1, 2] = [0, 2]$, док $[0, 1] \cup [2, 3]$ није повезан, што доводи до мотивације се да као довољан услов који обезбеђује повезаност уније повезаних скупова изабере захтев да нису дисјунктни.

Лема 8.4.3. Ако су A и $(A_i)_{i \in \mathcal{I}}$, где је $\mathcal{I}$ неки скуп индекса, повезани скупови метричког простора и ако је $A \cap A_i \neq \emptyset$ за свако $i \in \mathcal{I}$, онда је и $A \cup (\bigcup\limits_{i \in \mathcal{I}} A_i)$ повезан скуп.

Доказ. Ако је $X = A \cup (\bigcup\limits_{i \in \mathcal{I}} A_i)$ неповезан, онда је $X = X_1 \cup X_2$ за неке непразне дисјунктне отворено–затворене скупове X_1 и X_2. Како је за свако $i \in \mathcal{I}$ скуп A_i повезан, на основу претходне леме је $A_i \subseteq X_1$ или $A_i \subseteq X_2$, а аналоган закључак важи и за скуп A. Без умањења општости, нека је $A \subseteq X_1$. Међутим, како је $A \cap A_i \neq \emptyset$, онда мора бити $A_i \subseteq X_1$ за свако $i \in \mathcal{I}$, а последње значи да је $X_2 = \emptyset$. Из добијене контрадикције следи да је X повезан. □

Из претходне леме следи да, ако су $(A_i)_{i \in \mathcal{I}}$ повезани скупови метричког простора и важи $\bigcap\limits_{i \in \mathcal{I}} A_i \neq \emptyset$, онда је $\bigcup\limits_{i \in \mathcal{I}} A_i$ повезан.

Пример 44. Скупови $A = [0, 1)$ и $B = \{1\}$ у $\mathbb{R}$ (са стандардном метриком) су повезани и дисјунктни, а $A \cup B$ је повезан, па претходно тврђење даје довољне, али не и потребне услове који обезбеђују повезаност уније повезаних скупова. Сличан закључак се може добити и у произвољном метричком простору X. Заиста, ако је $A \subseteq X$ повезан и $B = \{b\}$, ако је b изолована тачка у $A \cup B$, онда је последњи скуп неповезан, а ако $b \in A'$, онда је $A \cup B$ повезан (у свакој околини b се налази бар једна тачка скупа A, па A није затворен у $A \cup B$). Дакле, ако је $B = \{b\}$ једночлан и A повезан, $A \cup B$ је повезан ако и само ако је $d(A, b) = 0$. Међутим, последње није тачно у случају да B није једночлан. Заиста, ако су A и B скупови из примера 30, онда је $d(A, B) = 0$, а $A \cup B$ је дисконексија тог простора (у примеру 29 је показано да постоје дисјунктни отворени $U_1, U_2 \subseteq \mathbb{R}^2$, тако да је $A \subseteq U_1$, $B \subseteq U_2$). Стога повезаност добија пуну снагу ако се примењује у просторима који задовољавају додатне особине, попут компактности (обично се, из разлога који су поменути раније, особина повезаности упарује са особинама које нису релативне). Конкретно, ако је $X = A \cup B$ компактан метрички простор, а $A, B \subseteq X$ повезани, онда је X повезан ако и само ако је $d(A, B) = 0$. Заиста, ако је $\delta = d(A, B) > 0$, онда су $U = \bigcup_{x \in A} K(x, \frac{\delta}{2})$ и $V = \bigcup_{x \in B} K(x, \frac{\delta}{2})$ дисјунктни и отворени, па су $A = X \cap U$ и $B = X \cap V$ отворено–затворени, тј. Y није повезан. Обрнуто, ако је $d(A, B) = 0$, постоје низови $(a_n)_{n \geqslant 1}$ у A и $(b_n)_{n \geqslant 1}$ у B, тако да $d(a_n, b_n) \to 0$ кад $n \to \infty$. Како је X компактан, постоји подниз $(a_{n_i})_{i \geqslant 1}$ првог низа, тако да $a_{n_i} \to a \in X$, као и подниз $(b_{m_i})_{i \geqslant 1}$ низа $(b_{n_i})_{i \geqslant 1}$, тако да $b_{m_i} \to b \in X$ кад $i \to \infty$ (наравно, онда и $a_{m_i} \to a$ кад $i \to \infty$). Следи $a = b$, па свака околина ове тачке садржи и тачку из A и тачку из B. Ако је, без умањења општости, $a \in A$, из претходног следи да B није затворен (у X), па је X повезан. Из претходних разматрања видимо и да, ако је X повезан метрички простор са бар две тачке и $x \in X$, онда $X \setminus \{x\}$ не може бити компактан. $\triangle$

Пример 45. Ако је $S = \{(x, y) \,|\, x^2 + y^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$, одредимо све непрекидне инјективне функције $f : S \to \mathbb{R}$. Скуп S је компактан и повезан, па је $f(S)$ компактан повезан скуп у $\mathbb{R}$, односно у питању је затворен интервал $[a, b]$ (а како S садржи бесконачно много тачака и f је инјективна, важи $a < b$). Ако је $c \in (a, b)$ и $p \in S$ таква да је $f(p) = c$, скуп $S \setminus \{p\}$ је повезан (у $\mathbb{R}^2$), док је $f(S \setminus \{p\}) = [a, c) \cup (c, b]$ неповезан (у $\mathbb{R}$), што је немогуће, пошто је f непрекидна на $S \setminus \{p\}$. Следи да не постоји f са наведеним особинама. Приметимо да аналогним поступком можемо показати да не постоји непрекидна инјективна $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (довољно је посматрати рестрикцију f на неку затворену куглу у $\mathbb{R}^2$ и поновити претходни поступак). $\triangle$

Резултати примера 44 природно постављају питање повезаности затворења повезаног скупа, што доводи до наредног тврђења.

Лема 8.4.4. Ако је $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$ и скуп A повезан, онда је и B повезан.

Доказ. Уколико B није повезан, онда је $B = B_1 \cup B_2$, где су B_1 и B_2 непразни отворено–затворени скупови. Како је A повезан, на основу леме 8.4.2 мора бити $A \subseteq B_1$ или $A \subseteq B_2$. Без умањења општости, нека је $A \subseteq B_1$. Међутим, како је B_1 затворен, следи $\overline{A} \subseteq B_1$, а пошто је $B \subseteq \overline{A}$, следи $B_2 = \emptyset$, што је противно претпоставци. Следи да је B повезан. $\square$

Видимо и да је простор X неповезан ако постоје $A, B \subseteq X$ тако да је $X = A \cup B$ и $\overline{A} \cap B = \emptyset = A \cap \overline{B}$ (по неким литературама се виђа да последње игра улогу дефиниције неповезаног простора).

Из леме 8.4.2 следи и да, у случају да се метрички простор X може приказати као дисјунтна унија више од 2 повезана скупа, повезан скуп Y мора бити садржан у једном од њих, па је, зарад бржег закључивања, у оваквим случајевима од интереса приказати X као унију дисјунктних повезаних скупова. Ако за $x, y \in X$ дефинишемо $x \sim y$ ако и само ако постоји повезан скуп који садржи x и y, у питању је релација еквиваленције (заиста, рефлексивност и симетричност су тривијалне, а ако је $x \sim y$ и $y \sim z$, постоје повезани $A_x \ni x, y$ и $A_z \ni y, z$, а како $y \in A_x \cap A_z$, они су и непразни, па је $A_x \cup A_z$ повезан који садржи x и z). Класе еквиваленције ове релације се називају **компоненте повезаности** (метричког простора X). Следи да лема 8.4.2 доводи до закључка да је сваки повезан скуп садржан у некој компоненти повезаности простора X, а ако X има $n \geqslant 2$ компоненти повезаности, постоји непрекидно сурјективно пресликавање $f : X \to \{0, \ldots, n-1\}$ (компоненте повезаности су, за такво пресликавање, управо $f^{-1}(i)$, где је $0 \leqslant i \leqslant n-1$), док у овом случају не постоји непрекидно сурјективно пресликавање из X у $\{0, \ldots, n\}$.

Пример 46. Конвексан скуп у нормираном векторском простору је повезан. Заиста, ако је X уочени скуп и $x \in X$, за свако $y \in X$ дуж A_y, која спаја x и y, је повезан скуп (пошто је непрекидна слика $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$, јер је A_y одређена са $tx + (1-t)y$, где је $t \in [0,1]$), важи $A_y \cap A_z = \{x\}$ за све $y, z \in X$, као и $X = \bigcup\limits_{x \in X} A_x$, па на основу леме 8.4.3 следи да је X повезан простор. У простору $C[a,b]$ са нормом $\|\cdot\|_\infty$ (видети пример 7) је скуп полиномских функција повезан (ако је n нула полином, за произвољан полином p и $t \in [0,1]$ је $tp + (1-t)n$ полином), а повезан је и скуп монотоних функција (аналогно, ако је n нула функција, за произвољну монотону $m : [a,b] \to \mathbb{R}$ и $t \in [0,1]$ је $tm + (1-t)n$ монотона), док подскуп строго монотоних функција овог простора није повезан (ако је Y тај скуп, а Y_1 и Y_2, редом, његови подскупови састављени од строго растућих и строго опадајућих функција, ако је $f \in Y_1$, онда кугла са центром у f и полупречника $r \in (0, \frac{f(b)-f(a)}{2})$ (постоји такво r, пошто је f строго растућа) је дисјунктна са Y_2 (ако је g из уочене кугле, онда је $g(b) > f(b) - r > f(a) + r > g(a)$, па не може бити опадајућа); како таква кугла постоји за свако $f \in Y_1$, следи да је Y_1 отворен (у Y), аналогно је Y_2 отворен (у Y), па је $Y_1 \cup Y_2$ дисконексија Y). $\triangle$

Тачке x, y метричког простора X се могу повезати путем ако постоји непрекидно пресликавање $f : [0,1] \to X$, тако да је $f(0) = x$ и $f(1) = y$

(ово пресликавање се назива пут из тачке x у тачку y). Уколико је $x \sim y$ ако се $x, y \in X$ могу повезати путем, онда је $\sim$ релација еквиваленције на X. Заиста, $f(t) = x$ је пут који повезује x и x (рефлексивност), ако је $f(t)$ пут који повезује x и y, онда је $f(1-t)$ пут који повезује y и x (симетричност), а ако је $f(t)$ пут који повезује x и y, а $g(t)$ пут који повезује y и z, онда је $h(t) = \begin{cases} f(2t), & \text{за } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ g(2t-1), & \text{за } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$ пут који повезује x и z (транзитивност). Класе еквиваленције ове релације се називају компоненте путне повезаности. Уколико се X састоји од једне компоненте путне повезаности (тј. ако се произвољне тачке из X могу повезати путем), онда се X назива **путно повезан**.

Лема 8.4.5. Ако је метрички простор путно повезан, онда је и повезан.

Доказ. Ако је уочени простор X путно повезан и $x \in X$, за свако $y \in X$ постоји пут f_y који повезује x и y. Ако је $A_y = f_y([0,1])$, онда је A_y повезан (у X), а ако је $A = \{x\}$, важи $A \cap A_y = \{x\}$, што је повезан скуп у X, па на основу леме 8.4.3, следи тврђење. $\square$

Пример 47. На основу леме 8.4.4, скуп $T = \{(x,y) \mid x \neq 0 \wedge y = \sin\frac{1}{x}\} \cup \{(0,y) \mid -1 \leqslant y \leqslant 1\}$ је повезан (у стандардној метрици наслеђеној из $\mathbb{R}^2$). Нека је f пут у T који повезује $(0,0)$ и $(1, \sin 1)$, $f(0) = (0,0)$, $A = \{(x,y) \mid x \neq 0 \wedge y = \sin\frac{1}{x}\}$ и $s = \sup\{f^{-1}(T \setminus A)\}$. Како је $f^{-1}(T \setminus A)$ затворен (пошто је $T \setminus A$ затворен, а f непрекидна), следи $f(s) \in T \setminus A$, а како је $f(1) \in A$, следи $s < 1$. Из претходног и како је f непрекидна, следи да постоји $\delta \in (0, 1-s]$, тако да је $f([s, s+\delta])$ садржан у $K = K(f(s), \frac{1}{2})$. Међутим, онда $K \cap T$ није повезан, а компонента повезаности $K \cap T$ која садржи $f(s)$ је $K \cap (T \setminus A)$, па $f(s+\delta) \in T \setminus A$, што противречи дефиницији s. Следи да T није путно повезан. $\triangle$

Дакле, не важи обрат претходне леме. За крај овог дела размотримо и понашање особине повезаности приликом рада у производу простора.

Лема 8.4.6. Метрички простори X и Y су повезани ако и само ако је повезан $X \times Y$.

Доказ. Како се $A = \{x\} \times Y$ утапа у $X \times Y$, ако је Y повезан, следи да је и A повезан. Аналогно, ако је X повезан, онда су $A_y = X \times \{y\}$ повезани за свако $y \in Y$. Како је $A \cap A_y \neq \emptyset$, на основу леме 8.4.3, је $A \cup (\bigcup_{y \in Y} A_y) = X \times Y$ повезан. Са друге стране, ако је $X \times Y$ повезан, како су пројекције p_X и p_Y на X и Y, редом, непрекидне, на основу теореме 8.4.1 следи да су $p_X(X \times Y) = X$ и $p_Y(X \times Y) = Y$ повезани. $\square$

Приметимо и да, ако је $f : X \to Y$ непрекидна и X повезан, онда је $G_f = \{(x,y) \mid x \in X \wedge y = f(x)\}$ повезан (заиста, онда је $F : X \to X \times Y$ дефинисана са $F(x,y) = (x, f(x))$ непрекидна, па је $G_f = F(X)$ повезан на основу теореме 8.4.1), док обрнуто не мора бити тачно (ако је $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дефинисана са $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & \text{ако је } x \neq 0 \\ 0, & \text{ако је } x = 0 \end{cases}$, онда f није непрекидна, иако је G_f повезан (видети претходни пример)).