7. Увод у линеарну алгебру

У претходном делу текста се, приликом испитивања функција и њихових особина које су нам биле од интереса, више пута долазило до закључка да одговарајућа класа функција има структуру векторског простора (а често је природно извирала и норма). Такође, често се дешавало да су нека од проучаваних пресликавања на тим класама таква да се, одређивањем вредности тог пресликавања на специфичном скупу, може закључити његова вредност у произвољној линеарној комбинацији елемената класе. На пример, приликом одређивања изводне функције полинома степена не већег од $n \in \mathbb{N}$, користили смо познате вредности извода за моничне полиноме, тј. полиноме облика t^k, где је $0 \leqslant k \leqslant n$ и тзв. линеарност извода (делови (а) и (б) теореме 5.1.1), а на основу тога долазили до закључка о изводу произвољног полинома степена не већег од n. Један од циљева ове главе је детаљније проучавање описаних појава.

7.1. Линеарна пресликавања векторских простора

У делу 1.3, у одељку посвећеном векторским просторима, дефинисани су појмови линеарне комбинације, линеарне независности и линеала коначног скупа вектора. Приметимо да се појам линеала (линеарног омотача), природно може проширити и за произвољан скуп S у векторском простору V, ако његов линеал, у ознаци $\mathscr{L}(S)$, дефинишемо као скуп свих линеарних комбинација вектора из S (тј. свих вектора облика $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$, где је $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ скалари, а $v_1, \ldots, v_n \in S$; формално се дефинише $\mathscr{L}(\emptyset) = \{0\}$, где је 0 неутрал у простору V). Из дефиниције непосредно следи да је $\mathscr{L}(S)$ најмањи (у смислу инклузије) векторски простор који садржи S, па је $\mathscr{L}(\mathscr{L}(S)) = \mathscr{L}(S)$, ако је U потпростор, онда је $\mathscr{L}(U) = U$, а ако је $S \subseteq T \subseteq V$, онда је $\mathscr{L}(S) \subseteq \mathscr{L}(T)$, док у случају $S \subseteq T \subseteq \mathscr{L}(S)$ закључујемо да је $\mathscr{L}(S) = \mathscr{L}(T)$. Такође, ако $S \subseteq \mathscr{L}(T)$ и $T \subseteq \mathscr{L}(S)$ следи $\mathscr{L}(S) = \mathscr{L}(T)$. Аналогно, за $S \subseteq V$ кажемо да је линеарно независан скуп вектора ако за свако $n \in \mathbb{N}$ су произвољни различити $v_1, \ldots, v_n \in S$ линеарно независни (што се у случају $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ слаже са раније датом дефиницијом), а, иначе, ћемо рећи да је S линеарно зависан. Непосредно следи да је $S \subseteq V$ линеарно зависан ако и само ако постоји $v \in S$ тако да је $v \in \mathscr{L}(S \setminus \{v\})$ (заиста, ако је S линеарно зависан, ако је $v = 0$ тврђење је тривијално, а, иначе, постоје $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ и $v_1, \ldots, v_n \in V$, тако да је $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n = 0$, при чему бар један од $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ није једнак 0 и ако је то, без умањења општости, α_n, онда је $v_n = -\alpha_n^{-1}\alpha_1 v_1 - \ldots - \alpha_n^{-1}\alpha_{n-1}v_{n-1}$, па $v_n \in \mathscr{L}(\{v_1, \ldots, v_{n-1}\})$, а онда и $v_n \in \mathscr{L}(S \setminus \{v_n\})$; обрнуто, ако је $v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$ за неко $n \in \mathbb{N}$, неке $v_1, \ldots, v_n \in S \setminus \{v\}$ и скаларе $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, онда је $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n + (-1)v = 0$, те су $v_1, \ldots, v_n, v$ линеарно зависни). Из претходног следи да је $\mathscr{L}(S) = \mathscr{L}(S \cup \{v\})$ ако и само ако је $v \in \mathscr{L}(S)$, као и да, ако је S линеарно независан, је такав и $S \cup \{v\}$ ако и само ако $v \notin \mathscr{L}(S)$. Из претходног непосредно следи да је подскуп линеарно независног скупа вектора и сам линеарно независан, као и да је надскуп линеарно зависног скупа вектора и сам линеарно зависан.

Пример 1. У векторском простору $C(\mathbb{R})$ је $\cos 2x, 1 \in \mathscr{L}(\{\cos^2 x, \sin^2 x\})$, пошто је $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ и $1 = \cos^2 x + \sin^2 x$, док $\cos x, \sin 2x \notin \mathscr{L}(\{\cos^2 x, \sin^2 x\})$ (заиста, ако је $\cos x = \alpha \cos^2 x + \beta \sin^2 x$ за неке $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, онда претходна једнакост важи за свако $x \in \mathbb{R}$, одакле, заменом $x = 0$, односно $x = \pi$, добијамо $1 = \alpha$, односно $-1 = \alpha$, што је немогуће; слично, ако је $\sin 2x = \alpha \cos^2 x + \beta \sin^2 x$ за неке $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, заменом $x = 0$, односно $x = \frac{\pi}{2}$, добијамо $0 = \alpha$, односно $0 = \beta$, што је немогуће, пошто функција $\sin 2x$ није идентички једнака 0). Ако је $S = \{1\} \cup \{x^n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq C(\mathbb{R})$, онда је $\mathscr{L}(S)$ скуп полинома (тј. S је генератриса тог скупа), док $e^x \notin \mathscr{L}(S)$ (у делу 5.3, у одељку посвећеном Тејлоровом полиному, показано је да Маклоренов полином функције e^x има бесконачно много ненула коефицијената, те e^x није полиномска функција (видети резултате након леме 5.3.2, као и коментаре дате пре примера 60 главе 5)). △

Лема 7.1.1. Ако је S коначан подскуп векторског простора V, онда постоји линеарно независан $T \subseteq S$, тако да је $\mathscr{L}(T) = \mathscr{L}(S)$.

Доказ. Ако је $S = \emptyset$, тврђење је тривијално. Претпоставимо да је тврђење тачно за све скупове који се састоје од $n-1$ вектора, где је $n \in \mathbb{N}$, и нека S има n елемената. Ако је S линеарно независан, можемо изабрати $T = S$, а ако је линеарно зависан, постоји $v \in S$, тако да је $v \in \mathscr{L}(S \setminus \{v\})$, па је $\mathscr{L}(S) = \mathscr{L}(S \setminus \{v\})$. Следи да је $S \setminus \{v\}$ скуп који се састоји од $n-1$ вектора, па (по претпоставци) постоји линеарно независан $T \subseteq S \setminus \{v\}$, тако да је $\mathscr{L}(T) = \mathscr{L}(S \setminus \{v\}) = \mathscr{L}(S)$, одакле, на основу математичке индукције, следи тврђење. □

Ако је U потпростор векторског простора V, за $S \subseteq V$ кажемо да је

генератриса (генераторни скуп) потпростора U ако је $U = \mathscr{L}(S)$ (наравно, јасно је да је од интереса да S буде што је могуће мање кардиналности). Уколико постоји коначан S који је генератриса U, кажемо да је U **коначно генерисан**. На систему вектора $e = (e_i)_{i\in\mathcal{I}}$, где је $\mathcal{I}$ скуп индекса (нагласимо да систем посматрамо као пресликавање, а не као скуп) дефинишемо основне **елементарне трансформације**:

(1) множење j-ог вектора скаларом $\alpha \neq 0$, тј. трансформација која систему $e = (e_i)_{i\in\mathcal{I}}$, за индекс $j \in \mathcal{I}$ и скалар $\alpha \neq 0$, додељује систем $f = (f_i)_{i\in\mathcal{I}}$, где је $f_i = \begin{cases} e_i, & \text{за } i \neq j \\ \alpha e_j, & \text{за } i = j \end{cases}$;

(2) додавање j-тог вектора k-том вектору, тј. трансформација која систему $e = (e_i)_{i\in\mathcal{I}}$, за различите $j, k \in \mathcal{I}$, додељује систем $f = (f_i)_{i\in\mathcal{I}}$, где је $f_i = \begin{cases} e_i, & \text{за } i \neq k \\ e_k + e_j, & \text{за } i = k \end{cases}$;

(3) замена два вектора, тј. трансформација која систему $e = (e_i)_{i\in\mathcal{I}}$, за различите $j, k \in \mathcal{I}$, додељује $f = (f_i)_{i\in\mathcal{I}}$, где је $f_i = \begin{cases} e_i, & \text{за } i \notin \{j, k\} \\ e_j, & \text{за } i = k \\ e_k, & \text{за } i = j \end{cases}$.

За системе $e = (e_i)_{i\in\mathcal{I}}$ и $f = (f_i)_{i\in\mathcal{I}}$ кажемо да су **еквивалентни**, у ознаци $e \sim f$, ако се један може добити из другог применом коначно много основних елементарних операција. Ова релација заиста јесте релација еквиваленције на системима вектора са истим индексима (одакле и потиче њен назив). Заиста, довољно је утврдити да се из система f, који је добијен из e једном од основних елементарних трансформација, може добити систем e. У случају да је f добијен из e применом операције (1) за $j \in \mathcal{I}$ и скалар α, онда се e добија из f применом исте операције за исто j и скалар α^{-1}. Ако је f добијен из e применом операције (2) за индексе $j \neq k$, уколико се примени операција (1) за индекс j и скалар -1, након тога примени операција (2) за индексе j и k, а онда операција (1) за индекс j и скалар -1, добија се систем e. Ако је f добијен из e применом операције (3) за индексе $j \neq k$, применом исте операције на f се добија систем e. У наставку ћемо често користити операцију додавања j-тог вектора, помноженог скаларом α, на k-ти вектор, где је $j \neq k$ (по неким литературама се и ова операција сврстава у основне). Ова операција је елементарна (ако је $\alpha = 0$, систем се не мења, а ако је $\alpha \neq 0$, добија се применом операције (1) за $j \in \mathcal{I}$ и α, након тога применом операције (2) за $j, k \in \mathcal{I}$ и поновном применом операције (1) за $j \in \mathcal{I}$ и α^{-1}). За систем $(e_i)_{i\in\mathcal{I}}$ кажемо да је линеарно независан (у V), односно генератриса простора V, ако је скуп $\{e_i \,|\, i \in \mathcal{I}\}$ линеарно независан, односно генератриса, а уколико је и линеарно независан (у V) и генератриса простора V, онда $(e_i)_{i\in\mathcal{I}}$ називамо **база** (простора V). За систем $e = (e_i)_{i\in\mathcal{I}}$, скуп $\mathscr{L}(e) = \mathscr{L}(\{e_i \,|\, i \in \mathbb{I}\})$ ћемо звати линеарни омотач (линеал) система e.

Лема 7.1.2. Ако је $e = (e_i)_{i\in\mathcal{I}}$ систем различитих вектора из V, онда је e база простора V ако и само ако је скуп $\{e_i \,|\, i \in \mathcal{I}\}$ минимална (у смислу инклузије) генератриса, односно ако и само ако је максималан (у смислу инклузије) линеарно независан скуп у V.

Доказ. Ако је e база, $\{e_i \,|\, i \in \mathcal{I}\}$ је генератриса. Ако постоји његов прави подскуп S, тако да је $\mathscr{L}(S) = V$, ако је $v \in \{e_i \,|\, i \in \mathcal{I}\} \setminus S$, по закључцима који су претходили леми 7.1.1 следи да је $S \cup \{v\}$ линеарно зависан, па је и сваки његов надскуп линеарно зависан. Следи да је линеарно зависан и скуп $\{e_i \,|\, i \in \mathcal{I}\}$, што противречи услову да је e база, па је $\{e_i \,|\, i \in \mathcal{I}\}$ минимална генератриса простора V. Са друге стране, ако је скуп $\{e_i \,|\, i \in \mathcal{I}\}$ минимална генератриса, по условима леме је састављен од различитих вектора, а уколико није линеарно независан, у њему постоји v, тако да је $v \in \mathscr{L}(\{e_i \,|\, i \in \mathcal{I}\} \setminus \{v\})$, па је $\mathscr{L}(\{e_i \,|\, i \in \mathcal{I}\} \setminus \{v\}) = \mathscr{L}(\{e_i \,|\, i \in \mathcal{I}\} \setminus \{v\} \cup \{v\}) = \mathscr{L}(\{e_i \,|\, i \in \mathcal{I}\}) = V$, односно и $\{e_i \,|\, i \in \mathcal{I}\} \setminus \{v\}$ је генератриса, што је немогуће.
Слично, ако је e база, онда је $\{e_i \,|\, i \in \mathcal{I}\}$ линеарно независан. Ако постоји прави надскуп последњег скупа S, који је линаарно независан, онда за свако $v \in S \setminus \{e_i \,|\, i \in \mathcal{I}\} \neq \emptyset$ важи $v \in \mathscr{L}(\{e_i \,|\, i \in \mathcal{I}\}) \subseteq \mathscr{L}(S \setminus \{v\})$, што, по закључцима који су претходили леми 7.1.1, значи да је S линеарно зависан, тј. добијена је контрадикција. Са друге стране, ако је $\{e_i \,|\, i \in \mathcal{I}\}$ максималан линеарно независан скуп, уколико није генератриса, постоји $v \in V$, тако да је $v \notin \mathscr{L}(\{e_i \,|\, i \in \mathcal{I}\})$, па је $\{e_i \,|\, i \in \mathcal{I}\} \cup \{v\}$ линеарно независан скуп, што је немогуће. □

У наставку ове главе ћемо пажњу усресредити на случај коначне базе. Онда ћемо базу означавати са $e = (e_i)_{i=1}^n = (e_1, \ldots, e_n)$, где је $n \in \mathbb{N}$.

Теорема 7.1.1. *У векторском простору V је $e = (e_i)_{i=1}^n$ база ако и само ако за свако $v \in V$ постоје јединствени скалари $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, тако да је $v = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n$.*

Доказ. Ако је e база, онда је $\{e_i \,|\, 1 \leqslant i \leqslant n\}$ генератриса простора V, па за произвољно $v \in V$ постоје скалари $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ тако да је $v = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n$. Ако је $v = \alpha'_1 e_1 + \ldots + \alpha'_n e_n$ за неке скаларе $\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n$, следи $(\alpha_1 - \alpha'_1)e_1 + \ldots + (\alpha_n - \alpha'_n)e_n = 0$, па како је $\{e_i \,|\, 1 \leqslant i \leqslant n\}$ линеарно независан скуп, следи $\alpha_i = \alpha'_i$ за све $1 \leqslant i \leqslant n$, тј. уочено представљање је и јединствено. Са друге стране, ако e има наведену особину, тривијално је $\{e_i \,|\, 1 \leqslant i \leqslant n\}$ генератриса, а ако је $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n = 0$ за неке скаларе $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, како је $0v_1 + \ldots + 0v_n = 0$, следи да је $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$, тј. $\{e_i \,|\, 1 \leqslant i \leqslant n\}$ је и линеарно независан. □

Претходно тврђење истиче важност улоге базе у векторском простору. Слободније говорећи, произвољан вектор у простору који има базу састављену од n елемената се може реконструисати на основу познатих n скалара (како ће нам у наставку највише од интереса бити рад са реалним (комплексним) скаларима, у том случају је вектор једнозначно одређен елементом простора $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$)). Последње доводи и до питања утврђивања разматраног n, а природно се намеће питање да ли различите базе истог простора могу имати различите кардиналности.

Лема 7.1.3. Нека је $n \in \mathbb{N}$ и $e = (e_i)_{i=1}^n$ систем у векторском простору V.
(а) Ако је $e \sim f$ и e линеарно независан, онда је и f линеарно независан.
(б) Ако је $V = \mathscr{L}(e)$, онда у V постоји највише n линеарно независних вектора.

Доказ. (а) Довољно је показати да је тврђење тачно у случају примене једне од основних елементарних трансформација, што је тривијално у случају $n = 1$, као и у случају примене операције (3), пошто је онда $\{e_1, \ldots, e_n\} = \{f_1, \ldots, f_n\}$, а на основу тог закључка следи и да је проверу тврђења за операције (1) и (2) довољно урадити у случају $j = 1$ за операцију (1), односно случају $j = 1$, $k = n$ за операцију (2). Ако се f добија из e применом операције (1) у случају $j = 1$ и за неко $\alpha \neq 0$, ако је $\alpha_1 f_1 + \ldots + \alpha_n f_n = 0$, следи $\alpha\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n = 0$, па како је e линеарно независан, следи $\alpha\alpha_1 = 0$ и $\alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$, а како је $\alpha \neq 0$, онда је $\alpha_1 = 0$, па следи линеана независност f. Слично, ако се f добија из e применом операције (2) у случају $j = 1$ и $k = n$, из $\alpha_1 f_1 + \ldots + \alpha_n f_n = 0$, следи $\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n(e_1 + e_n) = 0$, тј. $(\alpha_1 + \alpha_n)e_1 + \ldots + \alpha_n e_n = 0$, па како је e линеарно независан, следи $\alpha_1 + \alpha_n = 0$ и $\alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$, па је и $\alpha_1 = 0$.
(б) Ако је $n = 1$, тврђење је тривијално. Нека је тврђење тачно за све природне бројеве мање од $n > 1$ и нека је $\{f_1, \ldots, f_m\}$ скуп линеарно независних вектора у $V = \mathscr{L}(e)$. Онда је $f_i = \alpha_{i,1}e_1 + \ldots + \alpha_{i,n}e_n$ за $1 \leqslant i \leqslant m$ и скаларе $\alpha_{i,j}$, где је $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$. Ако је $\alpha_{i,1} = 0$ за $1 \leqslant i \leqslant m$, онда је $\{f_1, \ldots, f_m\}$ садржано у линеалу скупа $\{e_2, \ldots, e_n\}$, па по претпоставци важи $m \leqslant n - 1$. Иначе, ако је бар један од $\alpha_{i,1}$, за $1 \leqslant i \leqslant m$, различит од 0 и ако је то, без умањења општости, $\alpha_{1,1}$, систем састављен од вектора f_1, као и вектора $f_i' = f_i - \frac{\alpha_{i,1}}{\alpha_{1,1}} f_1$, за $2 \leqslant i \leqslant m$, је, на основу дела (а), такође линеарно независан. Следи да је и $(f_i')_{i=2}^m$ линеарно независан, а притом вектори последњег система припадају $\mathscr{L}(\{e_2, \ldots, e_n\})$ (пошто су коефицијенти уз e_1 при изражавању ових вектора једнаки 0), па на основу претпоставке следи $m - 1 \leqslant n - 1$, тј. $m \leqslant n$. На основу математичке индукције следи тврђење. □

Теорема 7.1.2. Ако је векторски простор V коначно генерисан, онда постоји база простора V.

Доказ. Како је V коначно генерисан, постоји коначан S, тако да је $\mathscr{L}(S) = V$, па на основу леме 7.1.1 постоји $T \subseteq S$, тако да је $\mathscr{L}(T) = V$, тј. T је коначан, а како је и генератриса и линеарно независан, следи да је база простора V. □

Из претходног тврђења следи и да је добијена база коначна, тј. векторски простор има коначну димензију ако и само ако је коначно генерисан (стога нисмо формално уводили појам коначно димензионалног простора, а у даљем делу текста ћемо за овакве просторе равноправно користити оба термина). Такође, из претходне теореме и раније добијених резултата, следи да се у коначно димензионалном векторском простору сваки линеарно независан систем може допунити до базе, као и да свака генератриса садржи неку базу. Из дела (б) леме 7.1.3 следи да, уколико су $(e_i)_{i=1}^n$ и $(f_i)_{i=1}^m$ базе векторског простора V, важи $n \leqslant m$ и $m \leqslant n$, тј. $m = n$, па су различите базе простора коначне димензије исте кардиналности, што даје да је наредна дефиниција коректна.

Дефиниција 7.1.1. Димензија коначно димензионалог векторског простора V, у ознаци $\dim V$, је број елемената произвољне његове базе.

Непосредно следи и да, уколико је $\dim V = n \in \mathbb{N}$, произвољан систем састављен од n линеарно независних вектора представља базу простора V, а аналоган закључак важи и за произвољну генератрису састављену од n вектора. Такође, уколико је U потпростор простора V, при чему је $\dim V = n \in \mathbb{N}_0$, онда је $\dim U \leqslant n$, а ако је $\dim U = n$, онда је $U = V$. Уколико је $S \subseteq V$ и $\dim \mathscr{L}(S) \in \mathbb{N}_0$, онда $\rho(S) = \dim \mathscr{L}(S)$ називамо **ранг** скупа S. Аналогно, ако је e систем вектора из V и $\dim \mathscr{L}(e) \in \mathbb{N}_0$, онда $\rho(e) = \dim \mathscr{L}(e)$ називамо **ранг** система e.
Приметимо да, уколико је $\mathscr{L}(S) = U$ и $\mathscr{L}(T) = V$, онда је $\mathscr{L}(S \cup T) = U \cup V$, а ако су S и T линеарно независни и $\dim(U \cap V) = 0$ (тј. $U \cap V = \{0\}$), онда је $S \cup T$ база простора $U \cup V$ (заиста, ако за неке $n, m \in \mathbb{N}$, векторе $u_1, \ldots, u_n \in S$, $y_1, \ldots, y_m \in T$ и скаларе $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_m$ важи $\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n + \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_m v_m = 0$, следи $U \ni \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n = -(\beta_1 v_1 + \ldots + \beta_m v_m) \in V$, одакле, пошто је $U \cap V = \{0\}$, добијамо $\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n = \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_m v_m = 0$, а на основу линеарне независности (скупова $\{u_1, \ldots, u_n\} \subseteq S$ и $\{v_1, \ldots, v_m\} \subseteq T$), следи $\alpha_1 \ldots = \alpha_n = 0$ и $\beta_1 = \ldots = \beta_m = 0$). Дакле, ако су U и V коначно димензионални и важи $U \cap V = \{0\}$, онда је $\dim(U \cup V) = \dim U + \dim V$. Сличан резултат се добија и ако је $\dim(U \cap V) > 0$, што је приказано у наредном тврђењу.

Лема 7.1.4 (Грасманова формула). Ако су U и V коначно генерисани векторски простори (над истим пољем скалара), онда је $\dim U + \dim V = \dim(U + V) + \dim(U \cap V)$.

Доказ. Простор $U \cap V$ је коначно димензионалан, пошто је потпростор коначно димензионалног простора U. Ако је $U \cap V = U$, онда је U потпростор простора V, па је $U + V = V$, те следи тачност наведеног тврђења, а, по симетрији, аналогно важи и ако је $U \cap V = V$.
Нека је $U \cap V \neq U$ и $U \cap V \neq V$, $\dim U \cap V = n \in \mathbb{N}_0$. Случај $n = 0$ је размотрен непосредно пре леме, те је у наставку довољно посматрати случај $n \geqslant 1$. Ако је $(e_i)_{i=1}^n$ база простора $U \cap V$, пошто је $U \cap V$ потпростор простора U и V, на основу теореме 7.1.2 (и коментара након ње), може се допунити до база ових простора, тј. постоје $f = (f_i)_{i=1}^{n+k}$ и $g = (g_i)_{i=1}^{n+l}$, за неке $k, l \in \mathbb{N}_0$, при чему је $f_i = g_i = e_i$ за $1 \leqslant i \leqslant n$. Случајеви $k = 0$ и $l = 0$ су размотрени на почетку доказа, те је довољно још испитати случај $k, l \in \mathbb{N}$. Тривијално је $U = \mathscr{L}(f)$, $\dim U = n + k$, $V = \mathscr{L}(g)$, $\dim V = n + l$ и h генератриса $U + V$, где је $h = (h_i)_{i=1}^{n+k+l}$ одређен са $h_i = \begin{cases} e_i, & \text{за } 1 \leqslant i \leqslant n \\ f_i, & \text{за } n+1 \leqslant n+k \\ g_{i-k}, & \text{за } n+k+1 \leqslant i \leqslant n+k+l \end{cases}$, па је још довољно

показати да је h линеарно независан. Ако је $\alpha_1 h_1+\ldots+\alpha_{n+k+l}h_{n+k+l}=0$ за неке скаларе α_i, $1\leqslant i\leqslant n+k+l$, онда је $U\ni \alpha_1 e_1+\ldots+\alpha_n e_n+\alpha_{n+1}f_{n+1}+\ldots+\alpha_{n+k}f_{n+k}=-(\alpha_{n+k+1}g_{n+1}+\ldots+\alpha_{n+k+l}g_{n+l})$, а како $g_{n+i}\notin U$ за $1\leqslant i\leqslant l$, следи да су стране последње једнакости једнаке 0, па како је f база простора U и $(g_i)_{i=n+1}^{n+l}$ линеарно независни (пошто је део базе g простора V), следи да је $\alpha_i=0$ за $1\leqslant i\leqslant n+k+l$. $\square$

На основу претходног тврђења, уколико се вектор из (коначно димензионалног) $U+V$ приказује у облику $u+v$, где $u\in U$ и $v\in V$, у општем случају наведено представљање не мора бити јединствено. Јединственост таквог представљања се постиже ако и само ако је $U\cap V=\{0\}$, а у том случају се $U+V$ назива **директан збир** (директна сума) простора U и V, у ознаци $U\oplus V$. Аналогно се за $n\geqslant 3$ дефинише $\sum\limits_{i=1}^{n}U_i=U_1+\ldots+U_n=\{u_1+\ldots+u_n\,|\,u_1\in U_1\wedge\ldots\wedge u_n\in U_n\}$, тзв. збир n векторских простора, а ако се произвољан $u\in U_1+\ldots+U_n$ на јединствен начин приказује у облику $u_1+\ldots+u_n$, где је $u_i\in U_i$ за $1\leqslant i\leqslant n$, кажемо да је уочени збир директан, у ознаци $U_1\oplus\ldots\oplus U_n$, односно $\bigoplus\limits_{i=1}^{n}U_i$.

Пример 2. Нека је $U=\{(x,y,0)\,|\,x,y\in\mathbb{R}\}$, $V=\{(0,0,z)\,|\,z\in\mathbb{R}\}$, $W=\{(x,x,x)\,|\,x\in\mathbb{R}\}$. Онда је $U\cap V=V\cap W=W\cap U=\{0\}$. Приметимо да је $U+V+W=\mathbb{R}^3$, па је $\dim(U+V+W)=3$, док је $\dim U+\dim V+\dim W-\dim(U\cap V)-\dim(V\cap W)-\dim(W\cap U)+\dim(U\cap V\cap W)=4$, те, иако претходно тврђење по духу подсећа на познату формулу укључења и искључења, видимо да се у општем случају не преносе одговарајућа уопштења за збир више од два простора (последња два израза нису једнака). Такође, ако је $u=(1,1,0)$, $v=(0,0,1)$ и $w=(1,1,1)$, важи $u\in U$, $v\in V$, $w\in W$, $u+v-w=(0,0,0)$, а у питању су ненула вектори, те видимо да у случају $n\geqslant 3$ услов $U_i\cap U_j=\{0\}$ за $i\neq j$ није довољан да обезбеди да је уочени збир простора и директан. Заправо, анализом доказа претходне леме се долази до закључка да нпр. услов $U_j\cap\sum\limits_{i\neq j}U_i=\{0\}$, за свако $1\leqslant j\leqslant n$, обезбеђује да је $\sum\limits_{i=1}^{n}U_i$ директна (за просторе U,V,W из овог примера је $W\cap(U+V)=W$, $V\cap(W+U)=V$ и $U\cap(V+W)=\{(x,x,0)\,|\,x\in\mathbb{R}\}$). $\triangle$

Пример 3. Непосредно из дефиниције следи да, ако су $(U_i)_{i=1}^{n}$ коначно димензионални векторски простори, онда је $\dim(U_1+\ldots+U_n)\leqslant\dim U_1+\ldots+U_n$, при чему се једнакост достиже ако и само ако је уочени збир директан, па се и на овај начин могло утврдити да збир из претходног примера није директан. Специјално, ако је $\dim(U_1+U_2)<\dim U_1+\dim U_2$, онда U_1+U_2 није директан, па је $U_1\cap U_2$ нетривијалан. На пример, ако је $U_1=\{(x,y,0)\,|\,x,y\in\mathbb{R}\}$, $U_2=\{(x,0,z)\,|\,x,z\in\mathbb{R}\}$, важи $\dim U_1=\dim U_2=2$, $\dim(U_1+U_2)=3$, те уочени збир није директан, па се вектор $u=(x,y,z)\in U_1+U_2=\mathbb{R}^3$ не приказује на јединствен начин у облику u_1+u_2, где је $u_1\in U_1$ и $u_2\in U_2$ (сва таква представљања су $u_1=(x+c,y,0)$, $u_2=(-c,0,z)$, где је $c\in\mathbb{R}$ произвољан). $\triangle$

Простор линеарних пресликавања

У делу 1.3, у одељку посвећеном векторским просторима, дефинисани су појмови хомоморфизма, изоморфизма, језгра и слике линеарног пресликавања. Као и до сада, ако су U и V векторски простори (над истим пољем скалара), а $A : U \to V$ линеарно пресликавање, његову слику означавамо са $\operatorname{Im} A$ (што је векторски потпростор простора V), језгро са $\operatorname{Ker} A$ (што је векторски потпростор простора U), $\rho(A) = \dim \operatorname{Im} A$ се назива **ранг**, а $\delta(A) = \dim \operatorname{Ker} A$ **дефект** линеарног пресликавања A. Приметимо да, ако је $A : U \to V$ линеарно пресликавање, индукцијом следи да је $A(\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n) = \alpha_1 A u_1 + \ldots + \alpha_n A u_n$, за произвољно $n \in \mathbb{N}$, произвољне $u_1, \ldots, u_n \in U$ и произвољне скаларе $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ (у случају линеарног пресликавања ћемо, уколико не може доћи до забуне, традиционално деловање на неки вектор записивати без заграда, тј. користићемо нотацију Au уместо $A(u)$, како је то урађено у претходној вези).

Скуп свих хомоморфизама из векторског простора U у векторски простор V означаваћемо са $L(U, V)$. Специјално, у случају $U = V$ ћемо такво пресликавање називати (линеарни) **оператор** (на U), а одговарајући простор означавати са $L(U)$, док у случају да је $V = \mathbb{P}$, где је $\mathbb{P} = (P, +, \cdot, 0, 1)$ поље скалара над којима је дефинисан U (приметимо да $\mathbb{P}$ можемо видети као векторски простор димензије 1), такво пресликавање ћемо називати (линеарни) **функционал** (на U), а одговарајући простор означавати са U'. Скуп свих функционала (на U) назива се (алгебарски) **дуални простор** простора U.

Већ из самих назива је јасно да дефинисане објекте не желимо да посматрамо као скупове, већ да ћемо на њима подразумевати структуру која је повезана са структурама простора U и V. Ако се сабирање функција и множење скаларом изврши на начин како је то урађено за произвољне функције из U у V (тј. ако је $(\alpha A + \beta B)u = \alpha A u + \beta B u$, за $A, B \in L(U, V)$, $u \in U$ и за скаларе α, β), како је и $\alpha A + \beta B$ линеарно, следи да је $L(U, V)$ векторски простор. Ако је $A \in L(V, W)$ и $B \in L(U, V)$, онда је добро дефинисано $A \circ B : U \to W$, а како је тривијално и линеарно, следи $A \circ B \in L(U, W)$. Следи да се и на простор линеарних пресликавања преносе особине композиције функција, па, на пример, за $A \in L(W, X)$, $B \in L(V, W)$ и $C \in L(U, V)$ важи $A \circ (B \circ C) = (A \circ B) \circ C$ (односно асоцијативност композиције, те се ово пресликавање из $L(U, X)$ често обележава и са $A \circ B \circ C$), као и $A \circ (B + C) = A \circ B + A \circ C$ за $A \in L(V, W)$, $B, C \in L(U, V)$, односно $(A + B) \circ C = A \circ C + B \circ C$, за $A, B \in L(V, W)$, $C \in L(U, V)$ (дистрибутивност са обе стране), а по питању слагања са операцијом множења скалара, лако се проверава да важи $(\alpha A) \circ (\beta B) = \alpha\beta A \circ B$ за све скаларе α, β, $A \in L(V, W)$, $B \in L(U, V)$. Напоменимо да, уколико је јасно да су у питању линеарна пресликавања, се често користи нотација по којој се $A \circ B$ записује у облику AB, уколико не може доћи до забуне. Као и у случају функција, ако је дефинисано AB, не мора бити BA. Заиста,

AB је дефинисано само ако је $A \in L(V,W)$ и $B \in L(U,V)$, а да би за уочена пресликавање било дефинисано BA, мора бити $U = W$, а у том случају је $AB \in L(U)$ и $BA \in L(V)$. Стога једнакост пресликавања AB и BA има смисла разматрати само у случају $U = V = W$, тј. ако су у питању оператори, а ни у том случају не мора важити $AB = BA$ (на пример, ако су $A, B : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ дефинисани са $A(x,y) = (x,0)$ и $B(x,y) = (0,x)$, онда је $AB(x,y) = (0,0)$, а $BA(x,y) = (0,x)$). Приметимо да $A \circ A$ има смисла само у случају да је A оператор и тада ћемо користити и нотацију $A^2 = A \circ A$, а онда је за свако $n \in \mathbb{N}$ добро дефинисан $A^n = A \circ A^{n-1}$, па следи да на $L(U)$ има смисла и $p(A)$, где је p полином са коефицијентима из поља скалара. Напоменимо да се приликом одређивања вредности полинома у $A \in L(U)$ подразумева да је скалару у слободном члану придружен идентички оператор (тј. $Id_U \in L(U)$, за који је $Id_U(u) = u$ за свако $u \in U$). На пример, ако је $A \in L(U)$, $p(x) = 2x-3$ и $q(x) = 2$, онда је $p(A) = 2A-3Id_U$ и $q(A) = 2Id_U$.

Лема 7.1.5. Нека је $A \in L(U,V)$, где су U и V коначно димензионални векторски простори над истим пољем скалара.
(а) Онда је A инјективно ако и само ако слика произвољан линеарно независан скуп (у U) у линеарно независан скуп (у V).
(б) Онда је A сурјективно ако и само ако слика произвољну генератрису (простора U) у генератрису (простора V).
(в) Онда је A изоморфизам ако и само ако слика произвољну базу (простора U) у базу (простора V).

Доказ. (а) Ако је $\{e_i \,|\, 1 \leqslant i \leqslant n\}$ линеарно независан скуп вектора, ако за неке скаларе $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ важи $\alpha_1 Ae_1 + \ldots + \alpha_n Ae_n = 0$, следи $A(\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n) = 0$, а како је A инјективно, следи $\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n = 0$, па је, на основу линеарне независности, $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$, тј. и $\{Ae_i \,|\, 1 \leqslant i \leqslant n\}$ је линеарно независан. Са друге стране, ако A није инјективно, постоје различити u_1, u_2, тако да је $Au_1 = Au_2$, тј. $A(u_1 - u_2) = 0$, па A слика линеарно независан скуп $\{u_1 - u_2\} \neq \{0\}$ у $\{0\}$.
(б) Ако је $\{e_i \,|\, 1 \leqslant i \leqslant n\}$ генератриса и $v \in V$, како је A сурјективно, постоји $u \in U$, тако да је $Au = v$, па постоје скалари $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ тако да је $u = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n u_n$, но онда је $v = Au = \alpha_1 Ae_1 + \ldots + \alpha_n Ae_n$. Са друге стране, ако је $v \in V$ и $\{e_i \,|\, 1 \leqslant i \leqslant n\}$ генератриса, онда је $\{Ae_i \,|\, 1 \leqslant i \leqslant n\}$ генератриса, па постоје скалари $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, тако да је $\alpha_1 Ae_1 + \ldots + \alpha_n Ae_n = v$, тј. $A(\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n) = v$, а како је $v \in V$ произвољно, следи да је A сурјективно.
(в) Ако је $(e_i)_{i=1}^n$ база (простора U), на основу делова (а) и (б), следи да је и $(Ae_i)_{i=1}^n$ база (простора V). Са друге стране, ако је $v \in V$, како A слика базе у базе, ако је $(e_i)_{i=1}^n$ нека база простора U, на основу дела (б) следи да је $v = \alpha_1 Ae_1 + \ldots + \alpha_n Ae_n = A(\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n)$ за неке скаларе $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ (односно A је сурјективно), а ако би било $v = \alpha_1' Ae_1 + \ldots + \alpha_n' Ae_n = A(\alpha_1' e_1 + \ldots + \alpha_n' e_n)$ за неке скаларе $\alpha_1', \dots, \alpha_n'$, онда је $(\alpha_1 - \alpha_1')Ae_1 + \ldots + (\alpha_1 - \alpha_1')Ae_n = 0$, па је (како је $(Ae_i)_{i=1}^n$ база простора

V) $\alpha_i = \alpha_i'$ за $1 \leqslant i \leqslant n$, одакле је $\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n = \alpha_1' e_1 + \ldots + \alpha_n' e_n$ (односно A је инјективно). $\square$

Ако је $A \in L(U,V)$ бијекција, рећи ћемо да су U и V изоморфни, у ознаци $U \cong V$ (по особинама бијекције, јасно је да је изоморфизам релација еквиваленције на векторским просторима, те ће у наставку, приликом проучавања особина које се „чувају изоморфизмом”, бити довољно проучити једног представника сваке од класа). Из претходног тврђења, између осталог, следи да изоморфни векторски простори имају исту димензију. У случају рада са операторима, начин размишљања коришћен у претходној леми даје резултат који има велику вредност приликом утврђивања бијективности оператора.

Лема 7.1.6. Ако је U коначно димензионални векторски простор и $A \in L(U)$, онда је A инјективан ако и само ако је $A(U) = U$ (тј. ако је сурјективан).

Доказ. Ако је $\dim U = n \in \mathbb{N}$ и $(e_i)_{i=1}^n$ база векторског простора U, слика оператора A је линеаран омотач скупа $\{Ae_1, \ldots, Ae_n\}$, па се поклапа са U ако и само ако су вектори у наведеном скупу линеарно независни. Ако је A инјективан и $\alpha_1 Ae_1 + \ldots + \alpha_n Ae_n = 0$, онда је $A(\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n) = 0$, па из инјективности следи $\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n = 0$, те је $\alpha_i = 0$ за свако $1 \leqslant i \leqslant n$, тј. вектори из $\{Ae_1, \ldots, Ae_n\}$ су линеарно независни. Са друге стране, ако је $\{Ae_1, \ldots, Ae_n\}$ састављен од линеарно независних вектора и $A(\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n) = 0$, следи $\alpha_1 Ae_1 + \ldots + \alpha_n Ae_n = 0$, па је $\alpha_i = 0$ за свако $1 \leqslant i \leqslant n$. Следи, ако је $Au = 0$, онда је $u = 0$, па ако је $Au_1 = Au_2$, онда је $A(u_1 - u_2) = Au_1 - Au_2 = 0$, одакле је $u_1 = u_2$, што значи је је A инјективан. $\square$

Пример 4. Ако је $\mathbb{P}$ поље и $U = c_K(\mathbb{P}) = \{(a_i)_{i \geqslant 1} \mid a_i \in \mathbb{P} \wedge (\exists n)(\forall i \geqslant n) a_i = 0\}$, тј. низови елемената из $\mathbb{P}$ (са индексима из $\mathbb{N}$) чији су чланови, почев од неког, једнаки 0, онда је $c_K(\mathbb{P})$ векторски простор (потпростор векторског простора низова са вредностима из $\mathbb{P}$). Ако је, за $n \in \mathbb{N}$, низ $e^n = (e_k^n)_{k \geqslant 1}$ дефинисан са $e_k^n = \begin{cases} 1, & \text{ако је } k = n \\ 0, & \text{ако је } k \neq n \end{cases}$, онда је $e^n \in c_K(\mathbb{P})$, а са $A(e^n) = e^{n+1}$ дефинисано пресликавање из $L(c_K(\mathbb{P}))$ (заиста, $(e^n)_{n \geqslant 1}$ је база простора $c_K(\mathbb{P})$). Ово пресликавање је инјективно, али не и сурјективно (у његовој слици се на налазе низови из $c_K(\mathbb{P})$ којима је прва координата различита од 0), па претходно тврђење не важи и у случају бесконачно димензионалног векторског простора. Приметимо и да $(e^n)_{n \geqslant 1}$ није база простора свих низова са елементима из $\mathbb{P}$ и индексима из $\mathbb{N}$ (на пример, низ константно једнак 1 се не налази у линеалу овог скупа). $\triangle$

Ако је $(e_i)_{i=1}^n$ база векторског простора U, са $e_j'(e_i) = \begin{cases} 1, & \text{ако је } i = j \\ 0, & \text{ако је } i \neq j \end{cases}$, за $1 \leqslant j \leqslant n$, су дефинисани линеарни функционали на U. Приметимо да, уколико је $u \in U$, онда је $u = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n$ за неке скаларе $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, па је $e_j'(u) = \alpha_j$, за $1 \leqslant j \leqslant n$, односно важи

$u = e_1'(u)e_1 + \ldots + e_n'(u)e_n$ (вредности скалара уз векторе из уочене базе се изражавају помоћу наведених функционала; одатле тривијално следи да су ти функционали линеарно независни у U'). Takoђе, ако је $f \in U'$, из претходног следи $f(u) = f(\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n) = f(e_1)e_1'(u) + \ldots + f(e_n)e_n'(u)$, тј. у U' је скуп $\{e_i' \,|\, 1 \leqslant i \leqslant n\}$ генератриса. Следи да се у случају коначно димензионалног простора U на описани начин добија база простора U', која се назива и **дуална база** базе e. Дакле, у коначно димензионалном случају је $U \cong U'$. Приметимо да описана конструкција функционала e_i' има смисла и у простору бесконачне димензије, аналогно показаном они чине линеарно независан скуп, но у том случају не морају чинити генератрису простора U'.

Ако је $A \in L(U,V)$ и $\varphi \in V'$, онда је са $(A'\varphi)u = \varphi(Au)$ дефинисано пресликавање на U. Како је композиција линеарних пресликавања такође линеарно пресликавање, следи да је $A'\varphi \in U'$, па на овај начин добијамо пресликавање $A' \in L(V', U')$, које се назива и (алгебарски) **адјунговано пресликавање** пресликавања A. Ако је $A \in L(V,W)$ и $B \in L(U,V)$, онда је $AB \in L(U,W)$, а за свако $\varphi \in W'$ и $u \in U$ важи $((AB)'\varphi)u = \varphi(ABu) = \varphi(A(Bu)) = (A'\varphi)(Bu) = (B'(A'\varphi))u = ((B'A')\varphi)u$, односно важи $(AB)' = B'A'$. Такође је $((Id_U)'\varphi)u = \varphi(u)$ за све $u \in U$ и $\varphi \in U'$, па је $(Id_U)' = Id_{U'}$. Напоменимо и да се појам адјунгованог пресликавања јављати у различитим контекстима и неће увек имати значење које је овде наведено, те ћемо у тим ситуацијама наглашавати на које се тумачење мисли, односно, ако није јасно из контекста, приликом употребе управо описаног придруживања, наглашаваћемо да је у питању алгебарско адјунговање (сама реч адјунговање је латинског порекла, у значењу повезивање, односно придруживање, те је јасно да може имати различита тумачења).

Пример 5. Ако је $c_K(\mathbb{P})$ векторски простор из претходног примера, а $\mathbb{P}$ било које коначно поље (такво је, на пример, $\mathbb{Z}_p$ за произвољан прост број p; видети пример 28 главе 1), онда је кардиналност скупа $c_K(\mathbb{P})$ једнака $\aleph_0$ (пошто је пребројива унија непразних коначних скупова; видети пример 19 главе 2). Ако је $a = (a_i)_{i \geqslant 1}$ произвољан низ са елементима из $\mathbb{P}$, онда је са $L_a(x) = \sum\limits_{i \geqslant 1} a_i x_i$, где је $x = (x_i)_{i \geqslant 1} \in c_K(\mathbb{P})$, добро дефинисан линеарни функционал на $c_K(\mathbb{P})$ (заиста, за свако $x \in c_K(\mathbb{P})$ претходна сума садржи коначно много ненула сабирака, те је дефинисана, а онда је линеарност тривијална) и притом се, очигледно, L_a и L_b разликују ако је $a \neq b$. Следи да је кардиналност скупа $L'(c_K(\mathbb{P}))$ не мања од кардиналности простора низова (са елементима из $\mathbb{P}$), тј. не мања од $|\mathbb{P}|^{\aleph_0} = c$. △

У претходном примеру смо, зарад лакшег утврђивања да U и U' у бесконачно димензионалном случају не морају бити изоморфни, посматрали коначно поље скалара, а не $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Међутим, ако је $U = c_K(\mathbb{R})$ или $U = c_K(\mathbb{C})$, може се доћи до сличног закључка. Наиме, онда U има пребројиву базу (наравно, пре тога би требало показати да су и у бесконачно димензионалном случају базе исте кардиналности, односно да дефиниција 7.1.1 има смисла и у овом случају), док се може показати да U' у том случају нема пребројиву базу (на пример, ако је $x^\alpha = (\alpha^n)_{n\geqslant 1}$, за $\alpha \in \mathbb{R}$, може се показати да се фамилија $\{x^\alpha \,|\, \alpha \in \mathbb{R}\}$ састоји од линеарно независних вектора (видети пример 24), те у U' постоји непребројив линеарно независан скуп).

По претходним тврђењима, у коначно димензионалним векторским просторима се може говорити о инверзном пресликавању пресликавања $A \in L(U,V)$ ако и само ако је $\dim U = \dim V$. Уколико је A бијективно и A^{-1} његово инверзно пресликавање (видети дефиницију 1.2.4 и коментаре након ње), како је $A(\alpha u_1+\beta u_2) = \alpha A u_1 + \beta A u_2$, ако је $v_1 = Au_1$ и $v_2 = Au_2$, следи $\alpha A^{-1}v_1 + \beta A^{-1}v_2 = A^{-1}(\alpha v_1 + \beta v_2)$, за све скаларе α, β и (како је A сурјективно) све $v_1, v_2 \in V$, па је $A^{-1} \in L(V,U)$. Специјално, ако је $A \in L(U)$ бијективно, постоји $A^{-1} \in L(U)$. Директно се преносе и остали резултати добијени за особине инверзне функције. На пример, непосредно следи да ако је $A \in L(U,V)$ инвертибилно, да је и $A^{-1} \in L(V,U)$ инвертибилно и важи $(A^{-1})^{-1} = A$, а на основу леме 1.2.3, следи да уколико су $A \in L(V,W)$ и $B \in L(U,V)$ бијективна (наравно, по претходном је онда $\dim U = \dim V = \dim W$), постоје $A^{-1} \in L(W,V)$, $B^{-1} \in L(V,U)$ и $(AB)^{-1} \in L(W,U)$, при чему је $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Приметимо и да, ако је $A \in L(U)$ бијетиван оператор (онда постоји $A^{-1} \in L(U)$), из $AA^{-1} = A^{-1}A = Id_U$, на основу особина адјунгованог пресликавања, следи $(A^{-1})'A' = A'(A^{-1})' = Id_{U'}$, па је и $A' \in L(U')$ инвертибилан и важи $(A')^{-1} = (A^{-1})'$.

Теорема 7.1.3 (о рангу и дефекту). Нека су U и V векторски простори, $\dim U = n \in \mathbb{N}$, $\dim V = m \in \mathbb{N}$ и $A \in L(U,V)$. Онда је $\rho(A) + \delta(A) = n$.

Доказ. Ако је $\operatorname{Ker} A = \{0\}$, и $f = (f_i)_{i=1}^n$ база U, на основу дела (а) леме 7.1.5, скуп $\{Af_i \,|\, 1 \leqslant i \leqslant n\}$ је линеарно независан у V, па је $(Af_i)_{i=1}^n$ база простора $\operatorname{Im} A$, тј. у овом случају је $\rho(A) = n$ и $\delta(A) = 0$. Слично, ако је $\operatorname{Ker} A = U$, онда је $\operatorname{Im} A = \{0\}$, па је $\rho(A) = 0$ и $\delta(A) = n$.

Ако $\operatorname{Ker} A$ није једнак ни $\{0\}$ ни U, нека је $(e_i)_{i=1}^k$ његова база (у овом случају је онда $1 \leqslant k \leqslant n-1$). Допунимо уочену базу до базе простора U, векторима $e_{k+1}, \ldots, e_n$ (дакле, $e = (e_i)_{i=1}^n$ је база U). Ако је $v \in \operatorname{Im} A$, постоји $u \in U$, тако да је $Au = v$, а, како је e база U, постоје скалари $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, тако да је $u = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n$, па је $v = Au = \alpha_1 Ae_1 + \ldots + \alpha_n Ae_n = \alpha_{j+1} Ae_{j+1} + \ldots + \alpha_n Ae_n$ (јер је $Ae_i = 0$ за $1 \leqslant i \leqslant k$), тј. $(Ae_i)_{i=k+1}^n$ је генератриса $\operatorname{Im} A$. Међутим, $(Ae_i)_{i=k+1}^n$ је и линеарно независан. Заиста, ако је $\alpha_{k+1}Ae_{k+1} + \ldots + \alpha_n Ae_n = 0$, следи $A(\alpha_{k+1}e_{k+1} + \ldots + \alpha_n e_n) = 0$, па је $\alpha_{k+1}e_{k+1} + \ldots + \alpha_n e_n \in \operatorname{Ker} A$, одакле је $\alpha_{k+1}e_{k+1} + \ldots + \alpha_n e_n = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_k e_k$, за неке скаларе $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$. Како је $(e_i)_{i=1}^n$ база U, из добијеног следи да је $\alpha_i = 0$, за $1 \leqslant i \leqslant n$, тј. линеарна независност $(Ae_i)_{i=k+1}^n$. Дакле, $(Ae_i)_{i=k+1}^n$ је база $\operatorname{Im} A$, те је $\rho(A) = n - k$, одакле следи тврђење и у овом случају. $\square$

Претходно тврђење се често назива и основна теорема линеарне алгебре и јављаће се у различитим облицима приликом рада са линеарним пресликавањима. Већ сада видимо да је примењиво приликом одређивања слике и језгра линеарног пресликавања, а и до сада се појављивало у прикривеном облику. Рецимо, захтев примера 3 (приказивање $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ као збир вектора $(t_1, t_2, 0)$ и $(t_3, 0, t_4)$, где су $t_1, t_2, t_3, t_4 \in \mathbb{R}$) се може реформулисати у терминима испитивања својстава пресликавања $A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, дефинисаног са $A(t_1, t_2, t_3, t_4) = (t_1 + t_3, t_2, t_4)$. Лако се види да је A линеарно и сурјективно, па је $\operatorname{Ker} A$ простор димензије $4 - 3 = 1$, што је и констатовано наведеном примеру (да сва представљања зависе од једног реалног параметра).

7.2. Алгебра матрица

Пресликавање $A : \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\} \to K$, за $m, n \in \mathbb{N}$, називамо **дводимензионална матрица** (табела) са елементима (коефицијентима) из K, типа $m \times n$, простор таквих матрица означаваћемо са $M_{m,n}(K)$, а m и n називамо димензије матрице A (говорићемо и да је A димензија (реда, формата) $m \times n$). Наравно, има смисла посматрати и вишедимензионалне матрице, но како ћемо се у наставку посветити дводимензионалним, термин матрица ће се у овом тексту односити на њих. Ако је $m = n$, матрицу ћемо називати квадратна (реда n), а одговарајући простор ћемо означавати са $M_n(K)$. Како и сам назив сугерише, матрицу $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n} \in M_{m,n}(K)$ визуализујемо као табелу, тј. у облику $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \ldots & a_{m,n} \end{pmatrix}$. За произвољне непразне скупове $X \subseteq \{1, \ldots, m\}$ и $Y \subseteq \{1, \ldots, n\}$ се рестрикција уоченог пресликавања на $X \times Y$ назива подматрица, која одговара избору индекса X и Y, а ако су бројеви елемената скупова X и Y једнаки k и l, редом, кажемо да је у питању подматрица типа $k \times l$. Специјално, ако је $X = \{i\}$ и $Y = \{1, \ldots, n\}$, где је $1 \leqslant i \leqslant m$, одговарајућа подматрица се назива i-та врста матрице A, а ако је $X = \{1, \ldots, m\}$ и $Y = \{j\}$, где је $1 \leqslant j \leqslant n$, одговарајућа подматрица се назива j-та колона матрице A. Слободније говорећи, елемент $a_{i,j}$ се налази „у пресеку i-те врсте и j-те колоне” матрице A, а подматрица типа $k \times l$ се добија избором k врста, l колона и „брисањем елемената” који нису у некој од њих.

Пример 6. Ако је $A \in M_{m,n}(K)$ и $1 \leqslant k \leqslant m$, $1 \leqslant l \leqslant n$, онда подматрица типа $k \times l$ има $\binom{m}{k}\binom{n}{l}$, па подматрица уочене матрице A има $\sum\limits_{k=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} \binom{m}{k}\binom{n}{l} = \sum\limits_{k=1}^{m} \binom{m}{k} \cdot \sum\limits_{j=1}^{n} \binom{n}{l} = (2^m - 1)(2^n - 1)$. Слично, ако је $A \in M_n(K)$, квадратних подматрица димензије k, где је $1 \leqslant k \leqslant n$, има $\binom{n}{k}^2$, па квадратних подматрица матрице A има $\sum\limits_{k=1}^{n} \binom{n}{k}^2$. Изједначавањем коефицијената уз x^n у једнакости полинома $(1+x)^{2n}=(1+x)^n(1+x)^n$ и користећи везу $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$, за $0\leqslant k\leqslant n$, добијамо $\binom{2n}{n}=\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$, па следи да квадратних подматрица матрице из $M_n(K)$ има $\binom{2n}{n}-1$. $\triangle$

Ако је $A\in M_{m,n}(K)$ и на K постоји одговарајућа алгебарска структура, онда се и на $M_{m,n}(K)$ може увести додатна структура. Наравно, то се може учинити на више начина, а овде ће нам основна мотивација бити да је добијена структура у „природној вези" са структуром добијеном на класи линеарних пресликавања. Стога ћемо у даљем посматрати $M_{m,n}(\mathbb{P})$, где је $\mathbb{P}$ поље. Ако је $A\in L(U,V)$, $\dim U=n$, $\dim V=m$ и $e=(e_i)_{i=1}^n$, $f=(f_j)_{j=1}^m$ базе U и V, редом, онда је $Ae_j=\sum\limits_{i=1}^{m}a_{i,j}f_i$, за свако $1\leqslant j\leqslant n$, при чему су, пошто је f база, скалари $a_{i,j}$, за $1\leqslant i\leqslant n$, $1\leqslant j\leqslant m$, јединствено одређени (видети теорему 7.1.1), тј. уочено линеарно пресликавање и избор база једнозначно одређују матрицу $(A)_{e,f}=(a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n}$, а како познавање вредности Ae_j, за $1\leqslant j\leqslant n$, јединствено одређује линеарно пресликавање (пошто је e база), важи и обрнуто. Пошто је жеља да се матрици $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n}$ придружи пресликавање, које ће на описани начин индуковати ту матрицу, следи да се тој матрици придружује пресликавање L_A, које вектору $x\in\mathbb{P}^n$ (чија је i-та координата x_i, за $1\leqslant i\leqslant n$) придружује вектор из $\mathbb{P}^m$, чија је j-та координата $a_{j,1}x_1+\ldots+a_{j,n}x_n$, за $1\leqslant j\leqslant m$. Ако вектор у $\mathbb{P}^n$ видимо као матрицу типа $n\times 1$, претходно се записује у облику

$$L_Ax=\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n}a_{1,j}x_j\\ \vdots\\ \sum\limits_{j=1}^{n}a_{m,j}x_j\end{pmatrix}, \tag{7.1}$$

при чему други члан претходне једнакости означавамо са Ax, док једнакост другог и трећег члана представља дефиницију деловања матрице $A\in M_{m,n}(\mathbb{P})$, као линеарног пресликавања, на вектор $x\in M_{n,1}(\mathbb{P})$ (тзв. колона матрицу). Претходно разматрање нам сугерише да на скупу матрица са елементима из поља $\mathbb{P}$ уведемо следеће операције:

– **сабирање матрица** A и B, у ознаци $A+B$, дефинишемо као матрицу која одговара збиру пресликавања индукованих са A и B; следи да је сабирање дефинисано ако и само ако су матрице истих димензија, а ако је $A,B\in M_{m,n}(\mathbb{P})$, $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n}$, $B=(b_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n}$, где су $m,n\in\mathbb{N}$, онда је $A+B\in M_{m,n}(\mathbb{P})$, при чему је елемент те матрице који се налази на месту (i,j) једнак $a_{i,j}+b_{i,j}$; јасно је да $M_{m,n}(\mathbb{P})$ са сабирањем чини Абелову групу, чији је неутрал матрица из $M_{m,n}(\mathbb{P})$ којој су сви елементи једнаки 0, те се она назива нула матрица, у ознаци 0, односно, $0_{m\times n}$, уколико се жели нагласити њена димензија;

– **множење матрице** A **скаларом** α, у ознаци αA (или $\alpha\cdot A$), дефинишемо као матрицу која одговара пресликавању које је добијено множењем скаларом α пресликавања индукованог матрицом A; следи да је множење скаларом дефинисано за сваку матрицу A, а ако

$A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n} \in M_{m,n}(\mathbb{P})$, онда $\alpha A \in M_{m,n}(\mathbb{P})$, при чему се на месту (i,j) матрице αA се налази елемент $\alpha a_{i,j}$;
– **множење матрица** A и B, у ознаци AB (или $A \cdot B$), дефинишемо као матрицу која одговара композицији пресликавања индукованих са A и B; следи да је множење дефинисано ако и само ако су је $A \in M_{m,n}(\mathbb{P})$, $B \in M_{n,k}(\mathbb{P})$, за неке $m, n, k \in \mathbb{N}$, резултат припада $M_{m,k}(\mathbb{P})$, при чему је елемент матрице AB на месту (i,j) једнак $\sum\limits_{l=1}^{n} a_{i,l} b_{l,j}$ (где су $a_{i,j}$ и $b_{i,j}$ одговарајући елементи матрица A и B, редом); приметимо да се деловање матрице на вектор може видети као производ матрице из $M_{m,n}(\mathbb{P})$ и матрице из $M_{n,1}(\mathbb{P})$ (пошто вектор видимо као матрицу из $M_{n,1}(\mathbb{P})$, тј. колону); инверзна матрица матрице A, у ознаци A^{-1}, представља матрицу пресликавања које је инверзно пресликавању индукованом матрицом A; на основу лема 7.1.5 и 7.1.6, оно може постојати само у случају $A \in M_n(\mathbb{P})$ (ако је $U \cong V$, онда је $\dim U = \dim V$), а постоји ако и само ако је пресликавање одређено матрицом A бијективно; притом, неутрал за множење одговара пресликавању Id_U, а како је $Id_U e_i = e_i$, за свако $1 \leqslant i \leqslant n$ (где је $(e_i)_{i=1}^n$ база простора U), одговарајућа матрица $E = (e_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant n}$ (односно E_n, ако се жели нагласити њена димензија) је одређена са $e_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{ако је } i = j \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$ и назива јединична;
– **транспоновање матрице** A, у ознаци A^T, дефинишемо као матрицу која одговара адјунгованом пресликавању пресликавања индукованог са A; ако је $\dim U = n \in \mathbb{N}$ и $A \in M_{m,n}(\mathbb{P})$, онда $L_A : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^m$, $L_{A^T} = (L_A)' : \mathbb{P}^m \to \mathbb{P}^n$ (за просторе коначне димензије је $U \cong U'$), при чему, ако су $(e_i)_{i=1}^n$ и $(f_j)_{j=1}^m$ одговарајуће базе простора $\mathbb{P}^n$ и $\mathbb{P}^m$, редом, важи $(A' f_j') e_i = f_j'(A e_i) = f_j'\Big(\sum\limits_{l=1}^{m} a_{j,l} f_m\Big) = a_{j,i}$, тј. $A^T \in M_{n,m}(\mathbb{P})$, а на месту (i,j) те матрице се налази елемент $a_{j,i}$, за све $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant m$, где је $a_{i,j}$ одговарајући елемент матрице A (слободније говорећи, транспоновање „мења улоге врста и колона” матрице A).

Наравно, у претходном је подразумевано да се матрица одређује у одговарајућим базама (нпр. у случају сабирања, матрицама A и B су додељена пресликавања из $L(U,V)$, уз избор база e и f, те се тај избор база подразумева и при одређивању $A+B$, слично за множење и множење скаларом, док се код транспоновања подразумева да се за те базе, на U' и V' посматрају одговарајуће дуалне базе). Иначе, горе дефинисане операције и појмови, сем инверза за множење, имају смисла и у случају да је $\mathbb{P}$ прстен, но како је овде превасходни циљ рад са матрицама над $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$, у жељи да се скрати дискусија је посматран само случај поља. Непосредно из одговарајућих особина линеарних пресликавања се преносе особине које задовољавају уведене операције на матрицама, које су сумиране у наредном тврђењу.

Лема 7.2.1. Нека је $\mathbb{P}$ поље, $\alpha, \beta \in \mathbb{P}$ и $m, n, k, l \in \mathbb{N}$.
(а) Структура $(M_{m,n}(\mathbb{P}), +)$ је Абелова група, чији је неутрал $0_{m \times n}$,

инверз елемента $A \in M_{m,n}(\mathbb{P})$ је $-A = (-1)A$, важи и $(\alpha+\beta)A = \alpha A+\beta A$, $1 \cdot A = A$, $0 \cdot A = 0_{m\times n}$, а ако је и $B \in M_{m,n}(\mathbb{P})$, важи $\alpha(A+B) = \alpha A+\alpha B$.
(б) Ако је $A \in M_{m,n}(\mathbb{P})$, $B, C \in M_{n,k}(\mathbb{P})$, онда је $A(B + C) = AB + AC$, $(\alpha A)\cdot(\beta B) = \alpha\beta AB$, $(\alpha A)^T = \alpha A^T$, $(B+C)^T = B^T + C^T$ и $(AB)^T = B^T A^T$.
(в) Ако је $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{P})$ и $C \in M_{n,k}(\mathbb{P})$, онда је $(A + B)C = AC + BC$.
(г) Ако је $A \in M_{m,n}(\mathbb{P}), B \in M_{n,k}(\mathbb{P}), C \in M_{k,l}(\mathbb{P})$, онда $(AB)C = A(BC)$.
(д) Ако су $A, B \in M_n(\mathbb{P})$ инвертибилне, онда је $(A^{-1})^{-1} = A$, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ и $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$. Инвертибилне матрице из $M_n(\mathbb{P})$ чине групу у односу на множење, чији је неутрал E_n.
(ђ) Ако је $A \in M_{m,n}(\mathbb{P})$, онда је $E_m A = AE_n = A$, као и $(A^T)^T = A$.
(е) Структура $M_{m,n}(\mathbb{P})$ је векторски простор (над P), димензије mn.

Приметимо да је у делу (е) једна од база уоченог векторског простора $(E_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant m, 1\leqslant j\leqslant n}$, где је $E_{i,j} \in M_{m,n}(\mathbb{P})$ матрица чији је елемент који одговара индексу (i, j) једнак 1, а остали 0. Напоменимо да, у случају да се $M_{m,n}(\mathbb{C})$ посматра као векторски простор над пољем скалара $\mathbb{R}$, димензија тог векторског простора је $2mn$ ($\mathbb{C}$ је, као векторски простор над пољем скалара $\mathbb{R}$, димензије 2).

Пример 7. Ако су $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, реалне матрице, онда, рецимо, CA, BC, $A^T B$ и $A + C$ нису дефинисани, док је $AB = \begin{pmatrix} 2\cdot2+1\cdot1 & 2\cdot1+1\cdot0 & 2\cdot(-2)+1\cdot1 \\ (-1)\cdot2+2\cdot1 & (-1)\cdot1+2\cdot0 & (-1)\cdot(-2)+2\cdot1 \\ 0\cdot2+1\cdot1 & 0\cdot1+1\cdot0 & 0\cdot(-2)+1\cdot1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 2\cdot2+1\cdot(-1)+(-2)\cdot0 & 2\cdot1+1\cdot2+(-2)\cdot1 \\ 1\cdot2+0\cdot(-1)+1\cdot0 & 1\cdot1+0\cdot2+1\cdot1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Приметимо да је $(BA)\cdot C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2E_2$, па је C инвертибилна и важи $C^{-1} = \frac{1}{2}BA = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. △

Пример 8. Ако је $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, онда је $AB = 0$, иако је $A \neq 0$ и $B \neq 0$. Приметимо да, ако су $A, B \in M_n(\mathbb{P})$, за неко $n \in \mathbb{N}$, ненула матрице за које је $AB = 0$, ниједна од њих не може бити инвертибилна (ако нпр. постоји A^{-1}, онда би било $B = A^{-1}AB = 0$). Ако се на $S = \{\alpha A \,|\, \alpha \in P\}$ пренесе структура индукована матричним операцијама, како је $\alpha A+\beta A = (\alpha+\beta)A \in S$ и $\alpha A\cdot\beta A = (\alpha\beta)A \in S$, јер је $A^2 = A$, видимо да се добија структура која је поље (изоморфно са $\mathbb{P}$). Међутим, $f : S \to M_2(\mathbb{P})$, дефинисана са $f(X) = X$, није изоморфизам поља S и $f(S) \subseteq M_2(\mathbb{P})$, пошто се A, који је јединични елемент у S, не слика у јединични елемент у $M_2(\mathbb{P})$ (видети пример 25 главе 1). △

Пример 9. Ако су $A, B \in M_n(\mathbb{P})$, где је $n \in \mathbb{N}$, такве да је $AB = BA$, како биномна формула важи у било ком комутативном прстену (видети део (б) леме 2.4.1 и коментаре након ње), закључујемо да за свако

$n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ важи $(A+B)^n = A^n + \sum\limits_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} A^{n-k}B^k + B^n$. Без услова комутативности претходно не мора важити. Рецимо, у случају $n = 2$ је $(A+B)^2 = A^2+AB+BA+B^2$, што је једнако $A^2+2AB+B^2$ ако и само ако је $AB = BA$, док се у случају $n > 2$, без услова комутативности, израз $(A+B)^n$ поприлично компликује, те се варијанте биномне формуле ретко користе без тог услова. Како за свако $A \in M_n(\mathbb{P})$ и свако $\alpha \in \mathbb{P}$ важи $A\cdot(\alpha E_n) = \alpha A = (\alpha E_n)\cdot A$, често се виђа примена биномне формуле у случају да је један од чланова облика αE_n. $\triangle$

Начин на који су уведене операције на матрицама омогућује да се изрази, који су до сада коришћени приликом изучавања линеарних комбинација и својстава линеарних оператора, записују у компактнијем облику. На пример, ако је $e = (e_i)_{i=1}^n$ систем вектора и $u = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$, где су α_i скалари за $1 \leqslant i \leqslant n$ (тј. ако је u линеарна комбинација вектора из система e), онда је $u = (e_1, \ldots, e_n)(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^T$ (једини разлог због ког други вектор у претходном изразу не пишемо као колону, већ користимо транспоновање, је уштеда простора). Специјално, ако је $e = (e_i)_{i=1}^n$ база простора U и $u \in U$, на основу теореме 7.1.1, постоји јединствена колона скалара (тј. матрица из $M_{n,1}(\mathbb{P})$) која репрезентује u у облику линеарне комбинације вектора из e. Ту колону ћемо означавати са u_e^T, односно претходна веза се онда записује у облику $u = e \cdot u_e^T$ (или $u = eu_e^T$). Слично, ако Ae означава деловање пресликавања A на систем e (тј. $Ae = (Ae_i)_{i=1}^n$), ако је e база, онда је $Au = Ae \cdot u_e^T$.

Пример 10. По претходној дискусији, линеарна комбинација се може видети у облику производа матрица. На пример, ако је $A \in M_{m,n}(\mathbb{P})$, за неке $m, n \in \mathbb{N}$, и ако су $A_i^{(v)} = (a_{i,j})_{j=1}^n \in M_{1,n}(\mathbb{P})$, за $1 \leqslant i \leqslant m$, врсте, а $A_j^{(k)} = (a_{i,j})_{i=1}^m \in M_{m,1}(\mathbb{P})$, за $1 \leqslant j \leqslant n$, колоне матрице A, онда је $\sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i A_i^{(v)} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \cdot A$ и $\sum\limits_{j=1}^{n} \beta_j A_j^{(k)} = A \cdot (\beta_1, \ldots, \beta_n)^T$ за произвољне скаларе $\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_n$. Претходни запис има смисла и за линеарну комбинацију матрица које не представљају врсте или колоне (како је већ констатовано, основне операције на матрицама имају смисла и ако је $\mathbb{P}$ прстен, а по делу (е) леме 7.2.1, $M_{m,n}(\mathbb{P})$ чине векторски простор), но онда је нужно бити доста опрезнији приликом тумачења добијеног записа. Рецимо, за $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{P})$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{P}$ важи $\alpha A + \beta B = (\alpha, \beta) \cdot \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = (A.B) \cdot (\alpha, \beta)^T$, за све $m, n \in \mathbb{N}$, но при оваквом тумачењу се $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ не сме гледати као матрица из $M_{2m,n}(\mathbb{P})$, а (A, B) као матрица из $M_{m,2n}(\mathbb{P})$, већ као тзв. блок матрица. $\triangle$

Теорема 7.2.1. Нека су $e = (e_i)_{i=1}^n$ и $f = (f_i)_{1=1}^m$ базе U и V, редом.
(а) Ако је $A \in L(U, V)$, онда постоји јединствена $(A)_{e,f} \in M_{m,n}(\mathbb{P})$, тако да је $Ae = f \cdot (A)_{e,f}$, односно, за свако $u \in U$ важи $Au = f \cdot (A)_{e,f} \cdot u_e^T$.

(б) Ако је $A \in M_{m,n}(\mathbb{P})$, постоји јединствено $L_A \in L(U,V)$, тако да је $A = (L_A)_{e,f}$.

Претходно тврђење је у овом тексту „уткано" у саму дефиницију операција на матрицама (видети дефиниције тих операција, као и коментаре дате непосредно пре њих), тј. ми смо те операције увели на начин који је потребан да се добије претходно тврђење. Нагласимо да се по већини текстова којима је циљ увод у линеарну алгебру дефинишу линеарна пресликавања (и изведу њихове основне особине), „указом" дефинишу операције на матрицама, а након тога се „испостави" да постоји веза између њих (наведена у претходној теореми). Из приступа који је овде приказан је јасно зашто су операције на матрицама дефинисане на описани начин, а за њега смо се одлучили пошто је примарни циљ овог дела проучавање линеарних пресликавања (на пример, у глави 9 ће одређеној класи пресликавања у свакој тачки домена бити додељено линеарно пресликавање).

Приметимо и да, ако је $e_i(k) = \begin{cases} 1, & \text{за } k = i \\ 0, & \text{за } k \neq i \end{cases}$, за $1 \leqslant i \leqslant n$, у $\mathbb{P}^n$ (онда се $(e_i)_{i=1}^n$ назива **стандардна база** $\mathbb{P}^n$; видети и пример 4) и ако је, у делу (б) претходног тврђења, $U = \mathbb{P}^n$, $V = \mathbb{P}^m$, а e и f стандардне базе ових простора, редом, онда је $L_A u = A u_e^T$ за сваки $u \in U = \mathbb{P}^n$ (ово је, заправо, прва једнакост у (7.1)), што још једном правда то што се деловање матрице и линеарног пресликавања на вектор означава на исти начин (чак користимо исте симболе за матрице и за пресликавања, а и поистовећиујемо их, кад год не може доћи до забуне).

Претходна теорема обезбеђује да се сваком тврђењу показаном на простору $L(U,V)$, где је $\dim U = n$, $\dim V = m$, за неке $m,n \in \mathbb{N}$, природно придружује одговарајуће тврђење на простору $M_{m,n}(\mathbb{P})$ (и обрнуто), као и да се сваком појму дефинисаном на $L(U,V)$, природно придружује одговарајући појам на $M_{m,n}(\mathbb{P})$ (и обрнуто). Наравно, мисли се на тврђења и појмове добијене по правилима одговарајућег векторског простора.

На пример, директно се на случај матрица преносе резултати добијени за понашање линеарних пресликавања на системима вектора. На основу дела (а) леме 7.1.5, ако је $e = (e_i)_{i=1}^n$ и $A \in M_{m,n}(\mathbb{P})$, онда је A инјективно ако и само ако је Ae линеарно независан систем за сваки линеарно независан систем e, а слично се преносе и делови (б) и (в) исте леме, као и лема 7.1.6. Следи, ако је e линеарно независан и $eB = eC$, за $B, C \in M_{m,n}(\mathbb{P})$, онда је, на основу дела (б) претходне теореме, $(L_B)_{e,f} = (L_C)_{e,f}$, где је f произвољна база V, па је $B = C$. Специјално, ако је $e_i \in \mathbb{P}^k$ за неко $k \in \mathbb{N}$ и $1 \leqslant i \leqslant m$ (онда се e може видети као $A \in M_{k,m}(\mathbb{P})$), ако за сваку ненула $B \in M_{m,n}(\mathbb{P})$ важи $AB \neq 0$, тј. ако из $AB = AC$ следи $B = C$, за произвољно $n \in \mathbb{N}$ и произвољне $B, C \in M_{m,n}(\mathbb{P})$, онда су колоне матрице A линеарно независне. Последња особина се назива **регуларност слева** матрице A, а, слободније говорећи, ако је испуњена, можемо „скратити" чинилац A (са леве стране) приликом решавања одговарајућих једначина.

Аналогно, $A \in M_{n,k}(\mathbb{P})$ је **регуларна здесна** ако за свако $m \in \mathbb{N}$ и све $B, C \in M_{m,n}(\mathbb{P})$, из $BA = CA$ следи $B = C$.

Лема 7.2.2. Матрица A је регуларна и слева и здесна ако и само ако је инвертибилна.

Доказ. Ако је $A \in M_{m,n}(\mathbb{P})$ регуларна слева, по закључцима који су претходили леми, њене колоне $A_j^{(k)} = (a_{i,j})_{i=1}^m \in M_{m,1}(\mathbb{P})$, за $1 \leqslant j \leqslant n$, су линеарно независни вектори (у $\mathbb{P}^m$), па је $n \leqslant m$. Ако је A регуларна здесна, како је $BA = CA$ (за $k \in \mathbb{N}$ и $B, C \in M_{k,m}(\mathbb{P})$) еквивалентно са $A^T B^T = A^T C^T$, онда је A^T регуларна слева, те су њене колоне (што су, заправо, врсте матрице A) линеарно независне (у $\mathbb{P}^n$), па је $m \leqslant n$. Следи да је A квадратна, са линеарно независним колонама, па је придружено пресликавање инјективно, те, на основу леме 7.1.6, следи да је A и инвертибилна.
Са друге стране, ако је $A \in M_n(\mathbb{P})$ инвертибилна, за све $B, C \in M_{m,n}(\mathbb{P})$, $m \in \mathbb{N}$, из $BA = CA$ следи $B = B(AA^{-1}) = (BA)A^{-1} = (CA)A^{-1} = C(AA^{-1}) = C$, док за све $B, C \in M_{n,k}(\mathbb{P})$, $k \in \mathbb{N}$, из $AB = AC$ следи $B = (A^{-1}A)B = A^{-1}(AB) = A^{-1}(AC) = (A^{-1}A)C = C$. □

Дакле, на простору матрица (над пољем) регуларност (са обе стране) је еквивалентна са инвертибилношћу, те се често виђа да се инвертибилна матрица назива и регуларна (на даље ћемо равноправно користити оба термина), док се за неинвертибилну матрицу користи термин **сингуларна**. Претходна разматрања имају и дубљу важност, показују да је у неким ситуацијама од користи посматрати матрицу као функцију колона (врста), што ће се користити и у наставку текста.

Пример 11. Нека је $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$. За $C \in M_{2,n}(\mathbb{R})$, где је $n \in \mathbb{N}$, ако су $C_1^{(v)}, C_2^{(v)} \in M_{1,n}(\mathbb{R})$ њене врсте, важи $AC = \begin{pmatrix} C_1^{(v)} \\ 2C_2^{(v)} \end{pmatrix}$, што је нула матрица ако и само ако је $C_1^{(v)} = 2C_2^{(v)} = 0$, тј. ако је $C = 0$, тј. A је регуларна слева, а до тог закључка се могло доћи и дорадом тврђења коришћеног у претходној леми, пошто су колоне матрице A независне (A се састоји од једне ненула колоне). По истом тврђењу, A није регуларна здесна, а B ни слева ни здесна. Последње се може искористити и за одређивање примера који ефективно показују да одговарајућа регуларност не важи. Рецимо, како за врсте матрице A важи $2 \cdot A_1^{(v)} - 1 \cdot A_2^{(v)} = 0_{1\times 1}$, следи $\begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot A = 0_{1\times 1}$, иако је $\begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} \neq 0_{2\times 1}$, како за колоне B важи $2 \cdot B_1^{(k)} - 1 \cdot B_2^{(k)} = 0_{3\times 1}$, следи $B \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0_{3\times 1}$, иако је $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \neq 0_{2\times 1}$, а како за врсте B важи нпр. $B_1^{(v)} + B_2^{(v)} - B_3^{(v)} = 0_{1\times 2}$, следи $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot B = 0_{1\times 2}$, иако је $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \neq 0_{1\times 3}$. △

Слично, из лема 7.1.5 и 7.1.6 следи и да, ако је $e = (e_i)_{i=1}^n$ база векторског простора U, је $f = eQ$ база ако и само ако је $Q \in M_n(\mathbb{P})$ инвертибилна, као и да је. ако су e и f базе U, уочена матрица јединствена и назива матрица преласка са базе e на базу f, у ознаци $(f)_e$.

Лема 7.2.3. Нека су U и V векторски простори коначне димензије (над истим пољем скалара).
(а) Ако су e, f, g базе U, онда је $(f)_e \cdot (g)_f = (g)_e$, $(e)_f = (f)_e^{-1}$, а за све $u \in U$ важи $u_f^T = (e)_f \cdot u_e^T$.
(б) Ако су e, g базе простора U, f, h базе простора V и $A \in L(U, V)$, онда је $(A)_{g,h} = (h)_f^{-1} \cdot (A)_{e,f} \cdot (g)_e$.

Доказ. (а) Како су e, f, g базе U, постоје инвертибилне P, Q, тако да је $P = (f)_e$ и $Q = (g)_f$, па је $g = fQ = ePQ$, тј. важи $(g)_e = PQ$, при чему је PQ инвертибилна, као производ таквих матрица. Специјално, ако је $g = e$, следи $eId_U = e = ePQ$, тј. $Q = P^{-1}$. За $u \in U$ је $u = eu_e^T$ и $u = fu_f^T$, па ако је $f = eP$, за инвертибилну P, следи $eu_e^T = ePu_f^T$, а како је e база, следи $u_e^T = Pu_f^T = (f)_e u_f^T$, односно $u_f^T = (f)_e^{-1} u_e^T = (e)_f u_e^T$.
(б) На основу дела (а) је $u_e^T = (g)_e u_g^T$ за све $u \in U$, па следи $Au = f \cdot (A)_{e,f} \cdot u_e^T = h(h)_f^{-1} \cdot (A)_{e,f} \cdot (g)_e u_g^T$, те је $(A)_{g,h} = (h)_f^{-1} \cdot (A)_{e,f} \cdot (g)_e$. □

Специјално, ако је $A \in L(U)$ и e, f базе U, из претходног следи да је $(A)_{f,f} = (f)_e^{-1} \cdot (A)_{e,e} \cdot (f)_e$.

Дефиниција 7.2.1. За $m, n \in \mathbb{N}$, $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{P})$ су **еквивалентне**, у ознаци $A \sim_e B$, ако и само ако су матрице истог линеарног пресликавања, а $A, B \in M_n(\mathbb{P})$ су **сличне**, у ознаци $A \sim B$, ако и само ако су матрице истог линеарног оператора.

Из саме дефиниције је јасно да су и еквивалентност (на матрицама исте димензије) и сличност (на квадратним матрицама исте димензије) релације еквиваленције (репрезентују исто линеарно пресликавање, односно оператор, за различит избор база). По претходном тврђењу, за $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{P})$ је $A \sim_e B$ ако и само ако постоје инвертибилне P, Q, тако да је $B = Q^{-1}AP$ (наравно, онда мора бити $P \in M_n(\mathbb{P})$, $Q \in M_m(\mathbb{P})$), а за $A, B \in M_n(\mathbb{P})$ је $A \sim B$ ако и само ако постоји инвертибилна P, тако да је $B = P^{-1}AP$ (наравно, онда је $P \in M_n(\mathbb{P})$).
Јасно, сличне матрице су и еквивалентне, док обрнуто не мора важити. Заиста, ако је $m \neq n$, чак нема ни смисла говорити о сличности, док, рецимо, како је структура $M_1(\mathbb{R})$ је изоморфна са пољем $\mathbb{R}$ (па је комутативна), у случају $M_1(\mathbb{R})$ су све класе еквиваленције релације $\sim$ једночлане (онда је $P^{-1}AP = A$), док релација $\sim_e$ има две класе еквиваленције (класа којој припада нула је једночлана, а другој класи припадају остали елементи из $M_1(\mathbb{R})$).

Пример 12. По литературама у којима се релације еквивалентности и сличности на матрицама дефинишу пре рада са линеарним пресликавањима, везе наведене након претходне дефиниције играју улогу дефиниција тих релација. Но и тада није тешко проверити да су у питању релације еквиваленције. Заиста, ако је $A \in M_{m,n}(\mathbb{P})$, онда је $A = E_m^{-1}AE_n$, ако је $B = Q^{-1}AP$ за инвертибилне $P \in M_n(\mathbb{P})$,

$Q \in M_m(\mathbb{P})$, онда је $A = (Q^{-1})^{-1}BP^{-1}$, при чему су Q^{-1} и P^{-1} инвертибилне, а ако је $B = Q^{-1}AP$ и $C = T^{-1}BR$ за инвертибилне $P, R \in M_n(\mathbb{P})$ и $Q, S \in M_m(\mathbb{P})$, онда је $C = (QT)^{-1}APR$, при чему су QT и PR инвертибилне, што даје тврђење за релацију $\sim_e$. Слично, ако је $A \in M_n(\mathbb{P})$, важи $A = E_n^{-1}AE_n$, ако је $B = P^{-1}AP$ за инвертибилну $P \in M_n(\mathbb{P})$, онда је $A = (P^{-1})^{-1}BP$, при чему је P^{-1} инвертибилна, а ако је $C = Q^{-1}BQ$ и $B = P^{-1}AP$ за инвертибилне P, Q, онда је $C = (PQ)^{-1}APQ$, при чему је PQ инвертибилна, што даје тврђење за релацију $\sim$. $\triangle$

Очекивано, приликом проучавања $A \in L(U, V)$ је циљ одредити „што једноставнију" матрицу која га репрезентује (јасно је да је природан покушај одређивање база e и f за које $(A)_{e,f}$ има што је могуће више елемената једнаких 0), те је циљ у наставку описати класе еквиваленција наведених релација (и одредити „лепе" представнике класа).

Дефиниција 7.2.2. Матрица $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n} \in M_{m,n}(\mathbb{P})$, где је $m, n \in \mathbb{N}$, се назива **дијагонална** ако је $a_{i,j} = 0$ за $i \neq j$, **доње троугаона** ако је $a_{i,j} = 0$ за $i < j$, а **горње троугаона** ако је A^T доње троугаона. Матрица $A \in M_n(\mathbb{P})$ је **дијагонализабилна** ако њеној класи сличности припада нека дијагонална матрица.

Ако је $A \in M_n(\mathbb{P})$, елементи чији су индекси (i, i), за $1 \leqslant i \leqslant n$, визуелно представљају дијагоналу уочене табеле (назива се главна дијагонала матрице A), па не изненађују називи из претходне дефиниције (те се онда тумачење по ком чланови са истим индексима представљају дијагоналу преноси и на матрице општег типа). Дакле, код дијагоналне матрице су чланови ван главне дијагонале једнаки 0, код доње троугаоне су једнаки 0 чланови „изнад", а код горње троугаоне чланови „испод" главне дијагонале. Матрица која је и доње и горње троугаона је дијагонална. За $A \in L(U)$ је матрица која га репрезентује одређена тек са избором базе, а ако она није прецизирана, може се десити да, ако су e, f базе U, је $(A)_{e,e}$ дијагонална, а $(A)_{f,f}$ није, што је и мотивисало дефиницију дијагонализабилности. Сходно томе, оператор ће се називати дијагонализабилан ако постоји база у којој је његова матрица дијагонална (по претходном, то се дешава ако је произвољна матрица која га репрезентије дијагонализабилна), а јасно је да ће онда бити од интереса и одредити такву базу. Приметимо да се појам дијагонализабилности односи на релацију $\sim$, а није уведен одговарајући појам за релацију $\sim_e$. Разлог за то лежи у резултатима које ћемо добити у наставку, наиме, биће показано да произвољној класи еквиваленције релације $\sim_e$ припада дијагонална матрица (видети теорему 7.2.2), те би увођење таквог термина изгубило смисао.
Ако је $A \in L(U)$ дијагонализибилан, а $e = (e_i)_{i=1}^n$ база U за коју је $(A)_{e,e}$ дијагонална, једноставно се одређују његове вредности на векторима представљеним у тој бази. Наиме, ако се на главној дијагонали матрице $(A)_{e,e}$ налазе елементи $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, редом, онда је $Ae_i = \lambda_i e_i$, за свако $1 \leqslant i \leqslant n$, тј. ако је $u \in U$ и $u = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n$, онда је

$Au = \alpha_1\lambda_1 e_1 + \ldots + \alpha_n\lambda_n e_n$, те одређивање овакве базе (уколико постоји) доноси значајне рачунске уштеде, а одређивање Au у овој бази има јасну геометријску интерпретацију. Такође, јасно је да, ако постоји база са описаним својствима, се она састоји од вектора $u \neq 0$, тако да за неко $\lambda \in \mathbb{P}$ важи $Au = \lambda u$. Такво λ се назива **сопствена вредност**, а такво u **сопствени вектор** (који одговара сопственој вредности λ) оператора A. Последњи појмови се, наравно, директно преносе и на квадратне матрице, па, између осталог, видимо да сличне матрице имају исти скуп сопствених вредности (представљају исти оператор, а последње се може добити и непосредно; заиста, ако је $A \in M_n(\mathbb{P})$, $\lambda \in \mathbb{P}$, $u \neq 0$, тако да је $Au = \lambda u$, и $B \sim A$, онда је $A = P^{-1}BP$ за инвертибилну $P \in M_n(\mathbb{P})$, па је $B(Pu) = P(Au) = P(\lambda u) = \lambda Pu$, при чему је $Pu \neq 0$ (на основу леме 7.1.6 је P бијективан, па слика ненула векторе у ненула векторе), тј. Pu је сопствени вектор матрице B који одговара сопственој вредности λ; напоменимо да, по показаном, сопствени вектори матрица A и B не морају бити једнаки). Скуп сопствених вредности оператора $A \in L(U)$, односно матрице $A \in M_n(\mathbb{P})$, се назива **спектар** оператора A, односно матрице A, у ознаци $\sigma(A)$.
Слично се добија геометријско тумачење и за појмове доње и горње троугаоне матрице. Рецимо, ако су $e = (e_i)_{i=1}^n$ и $(f_j)_{j=1}^m$ безе простора U и V, редом, $A \in L(U,V)$ и $(A)_{e,f}$ доње троугаона, онда је $A(\mathscr{L}(\{e_1, \ldots, e_k\})) \subseteq \mathscr{L}(\{f_1, \ldots, f_k\})$ за свако $1 \leqslant k \leqslant \min\{m, n\}$, те је јасно зашто је пожељно одредити базе у којима је линеарно пресликавање репрезентовано матрицом која има неку од наведених особина.

Пример 13. Како αE_n, за сваки скалар α, комутира са свим матрицама из $M_n(\mathbb{P})$, где је $n \in \mathbb{N}$, следи да је класа сличности ове матрице једночлана (специјално, једина матрица слична нула матрици реда n је она сама, а аналоган закључак важи и за јединичну матрицу). Она је дијагонална, једина сопствена вредност јој је α, а сопствени вектор који јој одговара је произвољан ненула вектор из $\mathbb{P}^n$. Ако је $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, како је $A(x,y)^T = (y,0)^T$, уколико је λ сопствена вредност матрице A, онда је $\lambda x = y$, $\lambda y = 0$, тј. једина сопствена вредност A је 0 (ако је $\lambda \neq 0$, из претходног је $x = y = 0$, а ако је $\lambda = 0$, сопствени вектори су $(0,\alpha)^T$, где је $\alpha \neq 0$), па ако A има сличну дијагоналну матрицу, мора бити у питању нула матрица, што је немогуће, те A нема сличну дијагоналну матрицу. Ако је $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, како је $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ инвертибилна (важи $P^{-1} = P$), следи да је $B \sim P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, те у класи еквиваленције релације сличности може бити више дијагоналних матрица. Ако је $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, како је $C(x,y)^T = (y,-x)^T$, ако је λ сопствена вредност матрице C, онда је $\lambda x = y$, $\lambda y = -x$. Ако је $\lambda = 0$, следи $x = y = 0$, тј. 0 није сопствена вредност C, а ако је $\lambda \neq 0$, следи $(\lambda^2 + 1)x = 0$, а како не може бити $x = 0$ (онда је $y = 0$, па се опет долази до нула вектора), следи $\lambda^2 + 1 = 0$. Ако C посматрамо као матрицу из $M_2(\mathbb{R})$, из последњег следи да нема сопствених вредности, тј. C нема сличну дијагоналну (у $M_2(\mathbb{R})$). Међутим, ако C посматрамо као матрицу из $M_2(\mathbb{C})$, како су решења једначине $\lambda^2 + 1 = 0$ (у $\mathbb{C}$) i и $-i$, онда је C дијагонализабилна. Заиста, $(1, i)^T$ и $(i, 1)^T$ су сопствени вектори који одговарају i и $-i$, редом, па ако је $Q = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$, важи $Q^{-1}CQ = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ (колоне матрице Q су добијени сопствени вектори; онда Q слика елементе стандардне базе у те сопствене векторе, које C слика у исте те векторе, помножене са одговарајућом сопственом вредношћу, а Q^{-1} „врати” у векторе стандардне базе; из описаног следи наведена једнакост, но није тешко ни проверити је директно). Из последњег видимо да дијагонализабилност зависи и од поља над којим је дефинисана матрица (оператор). △

Пример 14. Ако је $U = \mathscr{L}(\{\operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x\})$ потпростор простора $C^\infty(\mathbb{R})$, где су $\operatorname{ch} x$ и $\operatorname{sh} x$ хиперболички косинус и синус (видети пример 19 главе 4), онда је $\dim U = 2$ (наведене функције су линеарно независне у $C^\infty(\mathbb{R})$, те чине базу U), $f \in U$ ако и само ако је $f(x) = a \operatorname{ch} x + b \operatorname{sh} x$, за неке $a, b \in \mathbb{R}$, а диференцирање представља линеарни оператор на U (из $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$ и $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$, следи да за $f \in U$ важи $Df = f' \in U$). Следи $D_{\operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Ако је λ сопствена вредност $D_{\operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x}$ и $u = (x, y)^T$ одговарајући сопствени вектор, следи $(y, x)^T = D_{\operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x} u = \lambda u = (\lambda x, \lambda y)^T$, тј. $y = \lambda x$, $x = \lambda y$, па је $(1, 1)^T$ сопствени вектор који одговара сопственој вредности 1, а $(1, -1)^T$ сопствени вектор који одговара сопственој вредности -1, тј. D је репрезентован дијагоналном матрицом у бази који чине вектори $\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^x$ и $\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = e^{-x}$. Последњи резултат се може добити и без матричног репрезентовања у бази $(\operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x)$, решавањем једначине $Du = \lambda u$, тј. диференцијалне једначине $u' = \lambda u$ (у питању је линеарна диференцијална једначина првог реда, па применом поступка приказаног у делу 6.3, следи да је њено решење $u(x) = Ce^{\lambda x}$, где је $C \in \mathbb{R}$, што припада U ако и само ако је $\lambda \in \{-1, 1\}$). Ако је $\Delta \in L(\mathcal{P}_n)$ оператор описан у уводном делу ове главе (диференцирање на простору $\mathcal{P}_n$, полинома степена не већег од $n \in \mathbb{N}_0$), ако је $n = 0$, у питању је нула оператор, а ако је $n \in \mathbb{N}$, једини ненула чланови матрице $(d_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant n+1, 1 \leqslant j \leqslant n+1} \in M_{n+1}(\mathbb{R})$ која га репрезентује у бази $(t^k)_{k=0}^n$ су $d_{i,i+1} = i$, за $1 \leqslant i \leqslant n$. Као и у првом делу примера, сопствени вектор оператора Δ који одговара сопственој вредности λ је облика $Ce^{\lambda x}$, где је $C \in \mathbb{R}$, а ово је полиномска функција само ако је $C = 0$. Дакле, Δ је дијагонализабилан у случају $n = 0$ (у питању је нула оператор), док у случају $n \geqslant 1$ није, пошто је једина сопствена вредност 0, а вектори који одговарају тој вредности чине потпростор димензије $1 < n + 1$. △

Проблем настао приликом покушаја дијагонализације матрице C из примера 13, посматране као елемент $M_2(\mathbb{R})$, појавио се услед немогућности растављања λ^2+1 на линеарне факторе у прстену $\mathbb{R}[x]$, што нас наводи да размотримо деловање полинома на матрице. Као и у случају оператора, ако је A матрица и $q \in \mathbb{P}[x]$, онда $q(A)$ има смисла ако и само ако је A квадратна. Ако је $A \in M_n(\mathbb{P})$ и $q(A) = 0$ (наравно, овде 0 представља нула матрицу реда n), говорићемо да q поништава A.

Лема 7.2.4. Ако је $A \in M_n(\mathbb{P})$, где је $n \in \mathbb{N}$, постоји неконстантан $q \in \mathbb{P}[x]$, тако да је $q(A) = 0$.

Доказ. На основу дела (а) леме 7.2.1 је $M_n(\mathbb{P})$ векторски простор димензије n^2, па је скуп $\{E_n, A, \ldots, A^{n^2}\}$ линеарно зависан (пошто садржи n^2+1 вектора), те постоје скалари $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n^2}$, међу којима је бар један различит од 0, тако да је $\alpha_0 E_n + \alpha_1 A + \ldots + \alpha_{n^2} A^{n^2} = 0$. Међутим, онда је $q(A) = 0$, где је $q(x) = \alpha_{n^2} x^{n^2} + \ldots + \alpha_0$, при чему q није нула полином (а очигледно није ни константан). ☐

На основу резултата претходне леме и ограничености скупа $\mathbb{N}$, наредна дефиниција је коректна.

Дефиниција 7.2.3. Моничан полином најмањег степена који поништава $A \in M_n(\mathbb{P})$ се назива **минимални полином** матрице A, у ознаци μ_A.

Лема 7.2.5. Нека је $A \in M_n(\mathbb{P})$.
(а) Онда је μ_A јединствен.
(б) Ако $p \in \mathbb{P}[x]$ поништава A, онда $\mu_A \mid p$.
(в) Матрица A је инвертибилна ако и само ако је $\mu_A(0) \neq 0$.
(г) Ако је $B \sim A$, онда је $\mu_B = \mu_A$.
(д) Ако је λ сопствена вредност A, онда је $\mu_A(\lambda) = 0$.

Доказ. Ако је $p \in \mathbb{P}[x]$ неконстантан и $p(A) = 0$, онда је $\deg p \geqslant \deg \mu_A$ (по дефиницији минималног полинома), па је $p(x) = k(x)\mu(x) + r(x)$, где је $k(x)$ количник, а $r(x)$ остатак при дељењу p са μ_A (како је примећено приликом описа дељења полинома у делу 4.3, дељење полинома је коректно дефинисано за полиноме чији су коефицијенти из неког поља). Притом је $\deg r < \deg \mu_A$, па се заменом A у добијену везу добија $r(A) = 0$, те мора бити $r(x) = 0$. Из добијеног следе делови (а) и (б) тврђења (ако је $\deg q = \deg \mu_A$, q моничан и $\mu_A \mid q$, мора бити $q = \mu_A$). Ако је $\deg \mu_A = k$ и $\mu_A(x) = x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \ldots + a_0$, онда је $\mu_A(0) = a_0$, а како је $\mu_A(A) = 0_{n\times n}$, следи $Aq(A) = -a_0 E_n$, где је $q(x) = \frac{\mu_A(x)-a_0}{x}$ полином степена $k-1$. Ако је $a_0 = 0$, из добијеног следи $Aq(A) = 0$, па ако је A инвертибилна, следи $q(A) = A^{-1}Aq(A) = 0$, што је немогуће, пошто је $\deg q < \deg \mu_A$, а ако је $a_0 \neq 0$, из добијеног следи да је $-\frac{1}{a_0} \cdot q(A)$ инверз матрице A, чиме је доказан део (в). Ако је $B \sim A$, онда је $B = P^{-1}AP$ за неку инвертибилну $P \in M_n(\mathbb{P})$, па је $B^2 = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP) = P^{-1}(APP^{-1}A)P = P^{-1}A^2P$, одакле је, индукцијом, $B^k = P^{-1}A^kP$ за свако $k \in \mathbb{N}$, одакле следи $q(B) = P^{-1}q(A)P$ за сваки $q \in \mathbb{P}[x]$. Специјално, $q(A) = 0_{n\times n}$ ако и само ако $q(B) = 0_{n\times n}$, одакле следи тврђење дела (г). Ако је λ сопствена вредност A, постоји $u \neq 0$, тако да је $Au = \lambda u$, одакле је, индукцијом, $A^k u = \lambda^k u$ за свако $k \in \mathbb{N}$, па је $q(A)u = q(\lambda)u$ за сваки $q \in \mathbb{P}[x]$. Специјално, важи $0_{n\times 1} = \mu_A(A)u = \mu_A(\lambda)u$, а како је $u \neq 0$, следи тврђење дела (д). $\square$

Пример 15. Минимални полином нула матрице је x, а матрице αE_n, где је $\alpha \neq 0$, је $x - \alpha$. Минимални полиноми матрица A, B, C из примера 13 су $\mu_A(x) = x^2$, $\mu_B(x) = (x-1)(x-2) = x^2 - 3x + 2$, $\mu_C(x) = x^2 + 1$, па A није инвертибилна, док B и C јесу, а притом је $B^{-1} = -\frac{1}{2} \cdot (B - 3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $C^{-1} = -\frac{1}{1} \cdot C = -C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. У сваком од наведених примера квадратне матрице су реда 2, а степен минималног полинома или 1 или 2, што није случајно. Заиста, ако је $D = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{P})$, онда је $D^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc+d^2 \end{pmatrix}$, те је, због облика чланова који се у D^2 налазе на местима $(1,2)$ и $(2,1)$ (оба садрже фактор $a+d$), природно посматрати $D^2 - (a+d)D = \begin{pmatrix} a^2+bc-a(a+d) & 0 \\ 0 & bc+d^2-d(a+d) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bc-ad & 0 \\ 0 & bc-ad \end{pmatrix}$, одакле је $D^2 - (a+d)D + (ad-bc)E_2 = 0_{2\times 2}$, па $x^2 - (a+d)x + (ad-bc)$ поништава D. Следи да је минимални полином матрице из $M_2(\mathbb{P})$ степена 1 или 2. $\triangle$

Из претходног примера наслућујемо да је процена степена минималног полинома добијена у леми 7.2.4 груба (добијено је да је он степена не већег од n^2; међутим, иако је $M_n(\mathbb{P})$ димензије n^2, линеарна зависност која је успостављена у доказу те леме није урађена за произвољних n^2 матрица из $M_n(\mathbb{P})$, већ за матрице из $\{p(A) \,|\, p \in \mathbb{P}[x]\}$, што је комутативна подалгебра алгебре $M_2(\mathbb{P})$). Из претходног примера и дела (в) леме 7.2.5 следи и да је матрица $D \in M_2(\mathbb{P})$ инвертибилна (уз ознаке из примера) ако и само ако је $ad - bc \neq 0$. Из те леме следи и да су сличне матрице $A, B \in M_n(\mathbb{P})$ истовремено инвертибилне или истовремено сингуларне (приметимо и да, ако је $B = P^{-1}AP$ и A инвертибилна, онда је $B^{-1} = P^{-1}A^{-1}P$), као и да је $q(B) \sim q(A)$ за сваки $q \in \mathbb{P}[x]$.

Детаљном опису класа еквиваленције релације сличности вратићемо се у наредном делу (након развијања потребне технике), а наставак овог дела посвећен је проучавању релације еквиваленције матрица.

Еквивалентност матрица

На начин којим се преносе појмови са линеарних пресликавања на матрице, ранг матрице A, у ознаци $\rho(A)$, је дефинисан као ранг индукованог линеарног пресликавања. Дакле, ако се $A \in M_{m,n}(\mathbb{P})$, где су $m, n \in \mathbb{N}$, посматра као линеарно пресликавање (из $\mathbb{P}^n$ у $\mathbb{P}^m$), ранг тог пресликавања представља број линеарно независних колона те матрице у $\mathbb{P}^m$ (диманзија линеала слике, а слике чланова стандардне базе у $\mathbb{P}^n$ су колоне матрице A). На основу лема 7.1.5 и 7.1.6, следи да ако је $A \sim_e B$, тј. $B = Q^{-1}AP$, где су $P \in M_n(\mathbb{P})$, $Q \in M_m(\mathbb{P})$, инвертибилне, онда су рангови A и B једнаки (пошто бијективни линеарни оператор „чува димензију"), тј. тај ранг је једнак рангу линеарног пресликавања које ове матрице репрезентују у одговарајућим базама (приметимо да одавде следи и да сличне матрице имају исти ранг, одакле следи већ добијени резултат, да су сличне матрице истовремено инвертибилне или истовремено сингуларне), оно што још није јасно је да ли за $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{P})$ истог ранга важи $A \sim_e B$. У циљу испитивања да ли је последње тачно, искористићемо идеју приказану нпр. у доказу дела (б) леме 7.1.3, будући да елементарне трансформације (дефинисане на почеку дела 7.1) не мењају линеарни омотач система вектора.

Дефиниција 7.2.4. Ако је $A_i^{(v)} = (a_{i,j})_{j=1}^n \in M_{1,n}(\mathbb{P})$, за $1 \leqslant i \leqslant m$, ненула врста $A \in M_{m,n}(\mathbb{P})$, где су $m, n \in \mathbb{N}$, елемент $a_{i,k}$ се назива носач (носећи елемент) ако је елемент са најнижим индексом различит од 0 (тј. ако за $j < k$ важи $a_{i,j} = 0$). Ако за сваку врсту $A_i^{(v)}$ важи или $i = n$ или је $A_{i+1}^{(v)}$ нула врста или носач $(i+1)$-ве врсте има већу другу координату од друге координате носача i-те врсте (тј. ако је $a_{i,k}$ носач $A_i^{(v)}$, а $a_{i+1,l}$ носач $A_{i+1}^{(v)}$, онда $l > k$), кажемо да A има (врста) **степенасту форму**. За ненула A, ако је r ранг A, матрицу којој су једини ненула елементи $a_{i,i} = 1$, за $1 \leqslant i \leqslant r$, називамо **канонска форма** матрице A, у ознаци A_0 (ако је $A = 0$, дефинишемо $A_0 = 0$).

Ако су сви носећи елементи једнаки 1, говорићемо и да је у питању редукована степенаста форма (због облика који чине делови врста „десно" од носача, који подсећа на војну формацију, често се виђа и да се степенаста форма назива форма ешалона по врстама). Јасно, ранг матрице у степенастој форми је једнак броју њених ненула врста.

Појам елементарних трансформација уведен на системима вектора се природно преноси и на одговарајуће трансформације врста (колона) матрице $A \in M_{m,n}(\mathbb{P})$, где је $m, n \in \mathbb{N}$. На пример, ако је у питању операција (1) (множење j-ог вектора скаларом $\alpha \neq 0$), одговарајућа трансформација врста се дефинише као множење j-те врсте скаларом $\alpha \neq 0$. Приметимо да се исти резултат добија множењем слева дијагоналном матрицом $T_1(j, \alpha) \in M_m(\mathbb{P})$, којој је елемент на месту (j, j) једнак α, а остали елементи главне дијагонале једнаки 1, што је, заправо, матрица која се добија применом наведене операције на E_m. Слично, примена операције (2) (додавање j-тог вектора k-том вектору за $j \neq k$) се добија множењем слева матрицом која настаје применом наведене операције на E_m (елементи те матрице на главној дијагонали, као и на месту (k, j), су једнаки 1, а преостали 0), док се примена операције (3) (замена врста j и k, где је $j \neq k$) добија множењем слева са $T_3(j, k) \in M_m(\mathbb{P})$, која настаје применом наведене операције на E_m (елементи главне дијагонале $T_3(j, k)$, сем на местима (j, j) и (k, k) су једнаки

1, као и елементи на местима (j, k) и (k, j), док су преостали једнаки 0). Аналогни закључци важе и за основне елементарне операције на колонама, са разликом што је у том случају трансформација матрице једнака множењу здесна матрицом која настаје применом одговарајуће операције на E_n. Индукцијом следи да се добијено преноси и на произвољну елементарну трансформацију (композицују коначно много основних), тј. ако су $\mathcal{V}$ и $\mathcal{K}$ елементарне трансформације, важи

$$\mathcal{V}(A) = \mathcal{V}(E_m) \cdot A \quad \text{и} \quad \mathcal{K}(A) = A \cdot \mathcal{K}(E_n).$$

Како су основне елементарне операције инвертибилне, а композиција инвертибилних пресликавања такође инвертибилно пресликавање, следи да су произвољне трансформације на врстама и колонама, $\mathcal{V}$ и $\mathcal{K}$, редом, инвертибилне и (ако су $\mathcal{V}^{-1}$ и $\mathcal{K}^{-1}$ инверзне операције) важи

$$(\mathcal{V}(E_m))^{-1} = \mathcal{V}^{-1}(E_m) \quad \text{и} \quad (\mathcal{K}(E_n))^{-1} = \mathcal{K}^{-1}(E_n).$$

Као и у делу посвећеном системима вектора, издвојмо и операцију која није основна, но често ће се користити, операција додавања j-те врсте помножене скаларом α на k-ту, где је $j \neq k$. Као и у случају система вектора, није тешко видети да ова операција јесте елементарна, као и да се може видети као множење слева са $T_2(j, k, \alpha) \in M_m(\mathbb{P})$, чији су елементи на главној дијагонали једнаки 1, елемент на месту (k, j) једнак α, а преостали 0 (притом, елементарној операцији (2), додавање j-те k-тој, одговара множење слева са $T_2(j, k, 1)$).

Теорема 7.2.2. Нека су $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{P})$, где су $m, n \in \mathbb{N}$.
(а) Онда се A елементарном трансформацијом врста може свести на степенасту форму.
(б) Постоји јединствен $r \in \mathbb{N}_0$, тако да је $A \sim_e A_0$. Елементарним трансформацијама (врста и колона) се A може свести на A_0.
(в) Важи $A \sim_e B$ ако и само ако је $A_0 = B_0$, односно ако и само ако је $\rho(A) = \rho(B)$.
(г) Ако је $A \in M_n(\mathbb{P})$ инвертибилна, свођење на канонску форму се може спровести применом елементарне трансформације (само) врста. Притом, ако је $\mathcal{V}$ та елементарна трансформација, онда је $A^{-1} = \mathcal{V}(E_n)$.
(д) Матрица $A \in M_n(\mathbb{P})$ је инвертибилна ако и само ако је једнака производу матрица основних елементарних трансформација.

Доказ. (а) Ако је $n = 1$ или $A = 0$, тврђење је тривијално. Иначе, постоји ненула елемент матрице A, па постоји колона са најмањим индексом која садржи ненула елемент. Ако је у питању $A_j^{(k)} = (a_{i,j})_{i=1}^m \in M_{m,1}(\mathbb{P})$, где је $1 \leqslant j \leqslant n$, и $a_{i,j} \neq 0$, заменом прве и i-те врсте добија се матрица $(a'_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n}$, код које је $a'_{1,j} \neq 0$, те се додавањем прве врсте помножене са $-\frac{a'_{i,j}}{a'_{1,j}}$, на i-ту, за $2 \leqslant i \leqslant n$, добија еквивалентна матрица, којој су остали чланови j-те колоне једнаки 0. Ако је $j = n$, тврђење је доказано, а ако је $j < n$, тврђење се своди на понављање описаног поступка на подматрицу одређену индексима врста $\{2, \ldots, m\}$ и индексима колона $\{j+1, \ldots, n\}$ (тј. подматрицу која има мање врста, те тврђење следи на основу математичке индукције).

(б) У делу (а) је, елементарним трансформацијама (само на врстама), матрица сведена на степенасту форму, а ако још сваку ненула врсту поделимо са носећим елементом, добија се редукована степенаста форма (нека су њени елементи $a'_{i,j}$). Ако је у питању ненула матрица и носећи елемент прве врсте на месту $(1, j)$, ако је $j = n$, већ је добијена канонсла форма, а ако је $j < n$, додавањем на i-ту колону j-те колоне помноже са $-a'_{i,j}$, за $j + 1 \leqslant i \leqslant n$ се добија еквивалентна матрица, чији су сви чланови прве врсте, сем носећег, једнаки 0. Притом, како су у j-тој колони сви чланови сем оног на месту $(1, j)$ једнаки 0, ове трансформације не мењају чланове у осталим врстама матрице, те тврђење следи на основу индукције (тј. понављањем описаног поступка на подматрицу одређену индексима врста $\{2, \ldots, m\}$ и индексима колона $\{j + 1, \ldots, n\}$).
(в) По показаном је $A \sim_e A_0$ и $B \sim_e B_0$, па ако је $A \sim_e B$, пошто је у питању релација еквиваленције, следи $A_0 \sim_e B_0$, те мора бити $A_0 = B_0$, а онда су остали делови тврђења (в) тривијални.
(г) Ако је $A \in M_n(\mathbb{P})$ инвертибилна, важи $\rho(A) = n$, па је $A_0 = E_n$, те се спровођењем поступка описаног у делу (а) (у којем су коришћене само операције на врстама), матрица своди на горње троугаону, којој су на главној дијагонали ненула елементи, те се дељењем сваке врсте са елементом главне дијагонале који припада тој врсти добија горње троугаона матрица, чији су сви елементи на главној дијагонали једнаки 1 (ово је редукована степенаста форма; нека је та форма $(a'_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$). Ако је $n = 1$, тврђење је доказано, а ако је $n > 1$, како је $a'_{n,n} = 1$ и $a'_{i,n} = 0$, за $1 \leqslant i \leqslant n - 1$, додавањем на i-ту врсту n-те, помножене са $-a'_{i,n}$, добија се еквивалентна матрица, којој је једини ненула елемент у n-тој колони на месту (n, n), а описане операције не мењају ишта у преосталим колонама. Одавде тврђење следи на основу математичке индукције (тј. понављањем поступка на матрици чији су индекси врста и колона $\{1, \ldots, n - 1\}$).
(д) Ако је $A \in M_n(\mathbb{P})$ инвертибилна и $\mathcal{V}(A) = E_n$, из дискусије приказане пре теореме следи $E_n = \mathcal{V}(A) = \mathcal{V}(E_n) \cdot A$, тј. $A^{-1} = \mathcal{V}(E_n)$. Како се $\mathcal{V}$ приказује у облику производа матрица које одговарају основним елементарним операцијама, следи тврђење. □

Из претходног тврђења видимо и разлог због ког нпр. нису увођени појмови дијагонализабилности у смислу релације $\sim_e$ (свака матрица је таква) или степенасте форме по колонама (видимо да је ранг матрице из $M_{n,n}(\mathbb{P})$ једнак броју њених линеарно независних врста (у $\mathbb{P}^m$), а важи и $\rho(A) = \rho(A^T)$). Такође, за сваки $A \in L(U, V)$, где су U, V векторски простори, $\dim U = n \in \mathbb{N}$, $\dim V = m \in \mathbb{N}$, постоји база $e = (e_i)_{i=1}^n$ простора U и база $f = (f_i)_{i=1}^m$ простора V, тако да је $(A)_{e,f}$ у канонској форми (а при доказу тог тврђења је практично описан и алгоритам добијања тих база). Део (д) претходног тврђења даје могућност одређивања инверзне матрице (уколико постоји). Анализом доказа, видимо да ако се елементарне операције спроведене приликом свођења $A \in M_n(\mathbb{P})$ (притом, примењујући операције само на врстама) у истом редоследу (будући да множење матрица у општем случају није комутативно) примене на E_n, добиће се A^{-1} (ако A није инвертибилна, неће бити могуће свести је трансформацијама врста на E_n (добија се степенаста форма у којој је бар једна нула врста), те није неопходно на почетку испитати инвертибилност A). Приликом спровођења описаног алгоритма, честа је пракса да се A и E_n напишу „једна до друге", у облику $(A|E_n)$, а онда спроводе операције на врстама овако добијене матрице (она је типа $n \times 2n$), док „прва компонента" не постане E_n, онда ће исте операције врста бити спроведене и на „другој компоненти" (видети пример 17). Наравно, сличан закључак се може добити и уколико се примењују само трансформације колона.

Приметимо да резултат дела (д) последње теореме има и дубљу вредност, показује да је приликом испитивања „мултипликативних особина" матрица (тј. особина које, ако их задовољавају чиниоци, задовољава их и производ) довољно испитати особину на матрицама које одговарају основним елементарним операцијама и матрицама које су у канонској форми.

Пример 16. Зарад једноставнијег записа елементарних матричних операција, множење i-те врсте са α обележаваћемо са αV_i, замену врста i и j, где је $i \neq j$, са $V_i \leftrightarrow V_j$, а додавање j-те врсте, помножене са α, на i-ту врсту, где је $i \neq j$, са $V_i + \alpha V_j$, уз аналогно означавање операција на колонама (уз ознаку K уместо V). Онда је $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 7 \\ 5 & 9 & 15 \end{pmatrix} \overset{\substack{V_2-2V_1 \\ V_3-5V_1}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 10 \end{pmatrix} \overset{V_3-2V_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A_s$ (матрица A_s је у степеној форми, а редукована степенаста форма се добија уколико се још примени операција $\frac{1}{2}V_2$), па видимо да је $\rho(A) = 2$ и $A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ако се жели и ефективно добити канонска форма помоћу елементарних операција, то се може учинити, на пример, тако што се на A_s примене операције $K_2 - K_1$, $K_3 - K_1$, $\frac{1}{2}K_2$, $K_3 - 5K_2$, редом. Ако се малопре спроведене операције на врстама, као и управо спроведене операције на колонама, примене (оба пута) на E_3, добија се, редом, $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ и $P = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, те је $A_0 = RAP$, односно, како је $Q = R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ (што се може добити, рецимо, применом „супротних" операција на E_3, тј. у овом случају $V_3 + 2V_2$, $V_3 + 5V_1$, $V_2 + 2V_1$, редом), следи $A_0 = Q^{-1}AP$. Овде видимо и због чега се по литератури чешће виђа последњи запис. Наиме, он има јасно геометријско тумачење (слично оном које је показано у случају дијагонализације матрице C из примера 13). Ако су e и f стандардне базе $\mathbb{R}^3$, g база $\mathbb{R}^3$ састављена од колона матрице P, а h база $\mathbb{R}^3$ состављена од колона матрице Q, последње добијена једнакост је, заправо, $(A)_{g,h} = (h)_f^{-1} \cdot (A)_{e,f} \cdot (g)_e$, тј. веза добијена у делу (б) леме 7.2.3. $\triangle$

Из претходног примера видимо да поступак описан у делу који му је претходио (о једном од начина одређивања инверзне матрице) није бескористан и приликом рада са сингуларним матрицама (у том примеру су, прилагођавањем поменутог поступка, добијене базе у којима A има канонску форму). Пуна снага тог поступка долази до изражаја приликом рада са инвертибилним матрицама, што је илустровано у наредном примеру.

Пример 17. Одредимо (ако постоје) инверзе матрица $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Описаним поступком добијамо $(A|E_2) \xrightarrow{V_1 - V_2}$ $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{V_2 - 2V_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{V_1 - 2V_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 5 & -7 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right)$, те следи да је A инвертибилна и важи $A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$. Приметимо да смо нијансу одступили од алгоритма који се најчешће описује по литератури („прављење нула” по колонама, редом, а након тога множење врста; у овом случају, по том алгоритму треба спровести операције $V_2 - \frac{2}{3}V_1$, $V_1 - 21V_2$, $\frac{1}{3}V_1$, $3V_2$, редом; наравно добија се исти резултат). Међутим, како се произвољним свођењем на јединичну матрицу, применом елементарних операција на врстама, добија резултат, одлучили смо се за поступак који је рачунски мање захтеван (минимизовано је појављивање разломака). Слично,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -3 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{V_1 \leftrightarrow V_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 5 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{V_2 - 3V_1 \\ V_3 - 2V_1}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & -5 & 9 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{V_3 - 5V_2 \\ V_1 + V_2}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -5 & 13 \end{array}\right) \xrightarrow{V_2 + 2V_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -9 & 23 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -5 & 13 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{-V_2 \\ -V_3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 9 & -23 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 5 & -13 \end{array}\right),$$

па је B инвертибилна и важи $B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -2 & 9 & -23 \\ -1 & 5 & -13 \end{pmatrix}$. $\triangle$

7.3. Детерминанте

Један од основних задатака математике је одређивање дужине, површине и запремине. У $\mathbb{R}^2$ уобичајно је да се паралелограму над векторима $(a,0)$ и $(0,b)$ придружи број $|ab|$, који видимо као површину тог паралелограма (пошто у $\mathbb{R}^2$ имамо и појам нормалности, последње је, заправо, израз који представља површину правоугаоника дужина страница $|a|$ и $|b|$, што је коришћено, рецимо, у делу 6.2, приликом дефинисања Римановог интеграла, као и у делу 6.3, приликом приказа неких његових примена). У случају површине паралелограма одређеног векторима (a,c) и (b,d), ако се прихвати геометријски аргумент по ком се транслацијом једне основице дуж њеног вектора не мења површина (слободније речено, последње је чувено „основица пута висина која јој одговара"), у случају $a=0$, ако је и $b=0$, површина је 0, а ако је $b \neq 0$, онда је површина једнака површини паралелограма одређеног векторима $(0,b)$ и $(c,d)-\frac{d}{b}(0,b)=(c,0)$, тј. добија се $|bc|=|0\cdot d-bc|$ (заправо, видимо да, ако је нека од компоненти вектора 0, се рачун тривијално прилагођава случају правоугаоника), док у случају $a \neq 0$, његова површина је једнака површини паралелограма над векторима (a,c) и $(b,d)-\frac{b}{a}(a,c)=(0,\frac{ad-bc}{a})$, тј. на основу добијеног у првом случају, једнака је $|a\cdot\frac{ad-bc}{a}|=|ad-bc|$ (заправо, видимо да се у сваком случају дошло до израза $|ad-bc|$). Сличним разматрањима у случају одређивања запремине у $\mathbb{R}^3$ паралелопипеда над векторима $(a_{i,1},a_{i,2},a_{i,3})$, где је $i\in\{1,2,3\}$, долази се до (апсолутне вредности) израза у ком учествују изрази облика $a_{1,i}a_{2,j}a_{3,k}$, где је $\{i,j,k\}=\{1,2,3\}$ (односно, (i,j,k) је пермутација елемената $1,2,3$).

Претходна разматрања довела су до појма детерминанте (дефиниција 7.3.1), чије је проучавање главни задатак овог дела. Поменимо да, иако је основна мотивација за њено увођење, по претходно приказаном, била одређивање површине, односно запремине, она има смисла и у раду са општим векторским просторима, но онда се вредност добијеног израза не може тумачити као површина, односно запремина. Но, уколико приметимо да је површина паралелограма (запремина паралелопипеда) над векторима који одређују тај паралелограм (паралелопипед) једнака 0 ако и само ако су они линеарно зависни, не изненађује то што се овај појам обрађује у овом делу текста, као ни то што ће се слични изрази јавити код смене приликом уопштења диференцирања и Римановог интеграла у више димензија (главе 9, 10 и 11).

На основу претходних разматрања, прво ћемо размотрити нека својства пермутација. У примеру 22 главе 1 дефинисана је група пермутација S_n. Приметимо да пермутацију $\pi\in S_n$ можемо записати и у облику $(\pi(1),\ldots,\pi(n))$, тј. као уређену n-торку (разлог оваквог записа је, наравно, уштеда простора). За елементе $i,j\in\{1,\ldots,n\}$ ћемо рећи да су у инверзији ако је $i<j$ и $\pi(i)>\pi(j)$, а ако је k број инверзија у π, $\operatorname{sgn}\pi=\begin{cases}1, & \text{ако } 2\mid k\\ -1, & \text{ако } 2\nmid k\end{cases}$ се назива **знак пермутације** π. Последње се често записује и у облику $(-1)^k$ (при чему се сматра да је $\operatorname{sgn} Id=1$, што одговара случају $k=0$), а по неким литаратурама се виђа и да улогу дефиниције игра $\operatorname{sgn}\pi=\prod\limits_{i<j}\frac{\pi(j)-\pi(i)}{j-i}=\prod\limits_{i<j}\operatorname{sgn}(\pi(j)-\pi(i))$, где је sgn

функција из примера 5 главе 4 (јасно је да су наведене дефиниције еквивалентне). По претходном, $\operatorname{sgn}\pi$ је 1 ако и само ако је број инверзија пермутације π паран, те се таква пермутација назива **парна**, а, иначе, назива се **непарна**. Ако је $n \geqslant 2$, за све i, j из $\{1, \ldots, n\}$ за које је $i < j$, пермутација $\pi_{i,j}(k) = \begin{cases} i, & \text{за } k = j \\ j, & \text{за } k = i \\ k, & \text{иначе} \end{cases}$ се назива **транспозиција** елемената i и j (слободније речено, $\pi_{i,j}$ „замењује места" елемената i и j). Како је $(i < j) \wedge (\pi(i) > \pi(j))$ еквивалентно са $(k > l) \wedge (\pi^{-1}(k) < \pi^{-1}(l))$ (π је бијекција, па је претходно добијено сменом $k = \pi(i)$ и $l = \pi(j)$), следи да важи $\operatorname{sgn}\pi = \operatorname{sgn}\pi^{-1}$, за сваку $\pi \in S_n$.

Пример 18. Нека је $n \in \mathbb{N}$. Онда је $\operatorname{sgn} Id = 1$ (број инверзија је 0), а ако је $n \geqslant 2$ и $\pi = (n, n-1, \ldots, 1)$, број инверзија је $\sum\limits_{i=1}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2}$, те је ова пермутација парна ако и само ако n при дељењу са 4 даје остатак или 0 или 1 (а и у случају $n = 1$ је тривијално парна). Ако је $n \geqslant 2$, $\pi \in S_n$ и $i < j$, онда је $\operatorname{sgn}\pi = \prod\limits_{r<s} \frac{\pi(s)-\pi(r)}{s-r}$ и $\operatorname{sgn}\pi \circ \pi_{i,j} = \prod\limits_{r<s} \frac{\pi\circ\pi_{i,j}(s)-\pi\circ\pi_{i,j}(r)}{s-r}$. Ако $r, s \notin \{i, j\}$, чинилац који одговара пару (r, s), где је $r < s$, у претходна два израза је једнак, ако је $(r, s) = (i, j)$, онда је $\frac{\pi\circ\pi_{i,j}(j)-\pi\circ\pi_{i,j}(i)}{j-i} = \frac{\pi(i)-\pi(j)}{j-i} = -\frac{\pi(j)-\pi(j)}{j-i}$, а ако је $r \notin \{i, j\}$, разликујемо три случаја:

(1) ако је $r < i$, у уоченим производима учествују (r, i) и (r, j) и важи $\frac{\pi\circ\pi_{i,j}(i)-\pi\circ\pi_{i,j}(r)}{i-r} \cdot \frac{\pi\circ\pi_{i,j}(j)-\pi\circ\pi_{i,j}(r)}{j-r} = \frac{\pi(j)-\pi(r)}{i-r} \cdot \frac{\pi(i)-\pi(r)}{j-r} = \frac{\pi(i)-\pi(r)}{i-r} \cdot \frac{\pi(j)-\pi(r)}{j-r}$;

(2) ако је $i < r < j$, у уоченим производима учествују парови (i, r) и (r, j) и важи $\frac{\pi\circ\pi_{i,j}(r)-\pi\circ\pi_{i,j}(i)}{r-i} \cdot \frac{\pi\circ\pi_{i,j}(j)-\pi\circ\pi_{i,j}(r)}{j-r} = \frac{-(\pi(j)-\pi(r))}{r-i} \cdot \frac{-(\pi(r)-\pi(i))}{j-r} = \frac{\pi(r)-\pi(i)}{r-i} \cdot \frac{\pi(j)-\pi(r)}{j-r}$;

(3) ако је $r > j$, у уоченим производима учествују (i, r) и (j, r) и важи $\frac{\pi\circ\pi_{i,j}(r)-\pi\circ\pi_{i,j}(r)}{r-i} \cdot \frac{\pi\circ\pi_{i,j}(r)-\pi\circ\pi_{i,j}(r)}{r-j} = \frac{\pi(r)-\pi(j)}{r-i} \cdot \frac{\pi(r)-\pi(i)}{r-j} = \frac{\pi(r)-\pi(i)}{r-i} \cdot \frac{\pi(r)-\pi(j)}{r-r}$;

(наравно, у сва три случаја се може десити и да не постоји r са наведеном особином). Како су у претходном, тачно по једном, размотрени сви парови (r, s), за које је $r < s$, закључујемо да су π и $\pi \circ \pi_{i,j}$ различите парности (до промене знака долази само код пара (i, j); заправо, мења се знак и ако је $i < r < j$ код чиниоца који одговарају паровима (r, i) и (j, r), али се мења на оба пара, те не утиче на знак пермутације (то је део (2) са краја претходне дискусије)). Специјално, пошто је $\pi = Id$ парна, следи да је транспозиција (за произвољне i, j, где је $i < j$) непарна пермутација. Такође, видимо и да је композиција две транспозиције парна пермутација, одакле, индукцијом, следи да је композиција непарно много транспозиција непарна, а парно много транспозиција парна пермутација. Из претходног следи и да, ако је $n \geqslant 2$, има једнак број парних и непарних пермутација у S_n (дакле, и једних и друих има $\frac{n!}{2}$, што се може видети посматрањем пресликавања $F : S_n \to S_n$, дефинисаног са $F(\pi) = \pi \circ \pi_{i,j}$). $\triangle$

Како се свака пермутација може приказати у облику производа транспозиција, по неким литературама се виђа и да се знак пермутације дефинише као парност броја транспозиција, приликом представљања пермутације у облику таквог производа. Овде је то избегнуто, пошто поменуто разлагање није јединствено (рецимо, и $\pi_{1,4} \circ \pi_{2,3}$ и $\pi_{1,2} \circ \pi_{2,3} \circ \pi_{3,4} \circ \pi_{1,2} \circ \pi_{2,3} \circ \pi_{1,2}$ су (нека од) разлагања пермутације $(4,3,2,1)$ на транспозиције), те би у том случају било потребно додатно оправдати коректност дефиниције, а, на основу претходне дискусије, добијамо и закључке који су последица овакве дефиниције. Рецимо, видимо да је $\operatorname{sgn} : S_n \to \{-1,1\}$ хомоморфизам група (где на $\{-1,1\}$ подразумевамо операцију множења наслеђену из $\mathbb{R}$).

Дефиниција 7.3.1. Нека је $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^n \in M_n(\mathbb{P})$. Онда је **детерминанта** матрице A израз $\det A = \sum\limits_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \prod\limits_{i=1}^{n} a_{i,\pi(i)}$, а приликом табеларног приказа матрице, користиће се и запис $\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$.

Ако је $n = 2$, онда S_2 има два елемента, при чему је $(1,2)$ парна, а $(2,1)$ непарна пермутација, те претходна дефиниција доводи до израза $a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}$. Приликом упознавања са детерминантама, последње се обично приказује као на слици 22, као тзв. „производ елемената по дијагоналама”, при чему се производу елемената главне дијагонале придружује знак $+$, а „споредне” знак $-$. Слично, ако је $n = 3$, S_3 има 6 елемената, при чему су $(1,2,3), (2,3,1), (3,1,2)$ парне, а $(1,3,2), (2,1,3), (3,2,1)$ непарне пермутације, те претходна дефиниција доводи до израза $a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} - a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1} - a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2} - a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3}$.

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}$$
$$\begin{matrix} - & + \end{matrix}$$

Слика 22.

$$\left|\begin{matrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{matrix}\right|\begin{matrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{matrix}\Bigg| \begin{aligned} &= a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} \\ &\quad - a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1} - a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2} - a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3} \end{aligned}$$
$$\begin{matrix} - & - & - & + & + & + \end{matrix}$$

Слика 23.

Као и у претходном случају, последње се обично приказује као на слици 23, при чему су на табелу која представља матрицу $A \in M_3(\mathbb{P})$ „дописане” прва и друга колона (у том редоследу), а онда се чиниоцима који одговарају дијагоналама паралелним главној додели знак $+$, а преосталим знак $-$. Наравно, у случају $n > 3$ је овако једноставан приказ немогућ (већ у случају $n = 4$ је сабирака који учествују у дефиницији детерминанте 24).

Ако су $A_j^{(k)} = (a_{i,j})_{i=1}^m \in M_{n,1}(\mathbb{P})$, за $1 \leqslant j \leqslant n$, колоне матрице $A \in M_n(\mathbb{P})$ (видети пример 10), детерминанта се може видети и као функција колона, те ћемо писати и $\det A = \det(A_1^{(k)}, \ldots, A_n^{(k)})$ (последње је директно повезано са мотивацијом увођења детерминанти).

Теорема 7.3.1. Нека је $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{P}$ и $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^n \in M_n(\mathbb{P})$.
(а) Ако је A горње троугаона, онда је $\det A = \prod\limits_{i=1}^{n} a_{i,i}$.
(б) Важи $\det A = \det A^T$.
(в) Важи $\det(\alpha A_1^{(k)}, A_2^{(k)}, \ldots, A_n^{(k)}) = \alpha \det(A_1^{(k)}, A_2^{(k)}, \ldots, A_n^{(k)})$.
(г) Ако је $A_1, B_1 \in M_{n,1}(\mathbb{P})$, онда важи $\det(A_1 + B_1, A_2^{(k)}, \ldots, A_n^{(k)}) = \det(A_1, A_2^{(k)}, \ldots, A_n^{(k)}) + \det(B_1, A_2^{(k)}, \ldots, A_n^{(k)})$.
(д) Ако је $n \geqslant 2$, $2 \leqslant j \leqslant n$ и $A_{(1,j)}$ матрица добијена заменом прве и j-те колоне, онда је $\det A_{(1,j)} = -\det A$.
(ђ) Ако је $n \geqslant 2$ и $A_1^{(k)} = A_j^{(k)}$ за неко $1 \leqslant j \leqslant n$, онда је $\det A = 0$.

Доказ. (а) Ако је $\prod\limits_{i=1}^{n} a_{i,\pi(i)} \neq 0$, мора бити $a_{1,\pi(1)} \neq 0$, а како је $a_{i,j} = 0$ за $i > j$, мора бити $\pi(1) = 1$. Но онда је $\pi(2) \geqslant 2$, па понављањем претходног закључка, добијамо, редом, $\pi(2) = 2, \ldots, \pi(n-1) = n-1$, тј. ако је $\pi \neq Id$, уочени производ је једнак 0.
(б) За све $\pi \in S_n$ је $\operatorname{sgn}\pi = \operatorname{sgn}\pi^{-1}$, па је $\det A^T = \sum\limits_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}\pi \prod\limits_{i=1}^{n} a_{\pi(i),i} = \sum\limits_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}\pi^{-1} \prod\limits_{i=1}^{n} a_{i,\pi^{-1}(i)} = \sum\limits_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \prod\limits_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$ (извршена је смена $\sigma = \pi^{-1}$).
(в) Ако је $A_i^k = (a_{1,i}, \ldots, a_{n,i})^T$, за $1 \leqslant i \leqslant n$, и $n \geqslant 2$ (ако је $n = 1$, тврђење је тривијално), онда је $\det(\alpha A_1^{(k)}, A_2^{(k)}, \ldots, A_n^{(k)}) = \sum\limits_{\pi \in S_n} \Big(\operatorname{sgn}\pi \cdot \alpha a_{1,\sigma(1)} \cdot \prod\limits_{i=2}^{n} a_{i,\sigma(i)}\Big) = \alpha \cdot \sum\limits_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}\pi \prod\limits_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)} = \alpha \cdot \det(A_1^{(k)}, A_2^{(k)}, \ldots, A_n^{(k)})$.
(г) Ако је $n = 1$, тврђење је тривијално. Ако је $A_i^{(k)} = (a_{1,i}, \ldots, a_{n,i})^T$, за $2 \leqslant i \leqslant n$, $A_1 = (a_1, \ldots, a_n)^T$ и $B_1 = (b_1, \ldots, b_n)^T$, онда је

$$\begin{aligned}\det(A_1 + B_1, A_2^{(k)}, \ldots, A_n^{(k)}) &= \sum_{\pi \in S_n} \Big(\operatorname{sgn}\pi \cdot (a_1 + b_1) \cdot \prod_{i=2}^{n} a_{i,\sigma(i)}\Big) \\ &= \sum_{\pi \in S_n} \Big(\operatorname{sgn}\pi \cdot a_1 \cdot \prod_{i=2}^{n} a_{i,\sigma(i)}\Big) + \sum_{\pi \in S_n} \Big(\operatorname{sgn}\pi \cdot b_1 \cdot \prod_{i=2}^{n} a_{i,\sigma(i)}\Big)\end{aligned}$$

$= \det(A_1, A_2^{(k)}, \ldots, A_n^{(k)}) + \det(B_1, A_2^{(k)}, \ldots, A_n^{(k)})$.
(д) Ако је $A_{(1,j)} = (\alpha_{i,j})_{i,j=1}^n$, онда је $\alpha_{r,s} = \begin{cases} a_{j,s}, & \text{ако је } r = 1 \\ a_{1,s}, & \text{ако је } r = j \\ a_{r,s}, & \text{иначе} \end{cases}$, па је $\det A_{(1,j)} = \sum\limits_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}\pi \prod\limits_{i=1}^{n} \alpha_{i,\pi(i)} = \sum\limits_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}\pi \cdot a_{1,\pi(j)} a_{j,\pi(1)} \prod\limits_{i \notin \{1,j\}} a_{i,\pi(i)} = \sum\limits_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}\pi \cdot \prod\limits_{i=1}^{n} a_{i,\pi \circ \pi_{1,j}(i)} = \sum\limits_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma \circ \pi_{1,j}) \cdot \prod\limits_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)} = -\sum\limits_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \prod\limits_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)} = -\det A$, при чему је извршена смена $\sigma = \pi \circ \pi_{1,j}$ (онда је $\pi = \sigma \circ \pi_{1,j}$) и искоришћно да важи $\operatorname{sgn}(\sigma \circ \pi_{1,j}) = -\operatorname{sgn}\sigma$ за свако $\sigma \in S_n$.

(ђ) Важи $A_{(1,j)} = A$, те из дела (д) следи $\det A = \det A_{(1,j)} = -\det A$, тј. $\det A = 0$. $\square$

На основу дела (а) претходне теореме је и детерминанта дијагоналне матрице једнака производу елемената њене главне дијагонале. Специјално, важи $\det E_n = 1$. Из делова (а) и (б) следи да је и детерминанта доње троугаоне матрице једнака производу елемената њене главне дијагонале, а из делова (б) и (ђ) да је детерминанта матрице A, за коју је $A_1^{(v)} = A_j^{(v)}$ за неко $2 \leqslant j \leqslant n$, једнака 0. И више, из дела (б) следи и да свако тврђење о детерминанти добијено за колоне матрице даје одговарајуће тврђење за врсте матрице (стога су остали делови тврђења формулисани само за колоне, што ћемо радити и у наставку, подразумевајући да је тиме добијено и одговарајуће тврђење за врсте). Делови (в) и (г) говоре да је $F : M_{n,1}(\mathbb{P}) \to \mathbb{P}$ дефинисана са $F(x) = \det(x, A_2^{(k)}, \ldots, A_n^{(k)})$ линеарна функција (тј. при фиксираним осталим колонама, детерминанта је линеарна функција прве колоне). Но онда део (д) даје да је детерминанта линеарна функција сваке колоне (при фиксираним осталим колонама). Заиста, из тог дела и линеарности по првој колони, следи

$$\det(A_1^{(k)}, \ldots, \alpha_1 A_{j,1}^{(k)} + \alpha_2 A_{j,2}^{(k)}, \ldots) = -\det(\alpha_1 A_{j,1}^{(k)} + \alpha_2 A_{j,2}^{(k)}, \ldots, A_1^{(k)}, \ldots) =$$
$$-\Big(\alpha_1 \det(A_{j,1}^{(k)}, \ldots, A_1^{(k)}, \ldots) + \alpha_2 \det(A_{j,2}^{(k)}, \ldots, A_1^{(k)}, \ldots)\Big) =$$
$$\alpha_1 \det(A_1^{(k)}, \ldots, A_{j,1}^{(k)}, \ldots) + \alpha_2 \det(A_1^{(k)}, \ldots, A_{j,2}^{(k)}, \ldots),$$

за свако $2 \leqslant j \leqslant n$ и све $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{P}$. Заправо, као што се део (б) може схватити као „алат за пренос тврђења са колона на врсте”, део (д) се може схватити као „алат за пренос тврђења показаног за прву колону на произвољну колону” (слично, ако је показано за $A_1^{(k)}$ и $A_j^{(k)}$, где је $2 \leqslant j \leqslant n$, преноси се на произвољне две колоне), те су делови (д) и (ђ) и формулисани само за пар колона од којих је једна прва. Међутим, ако је $1 < j < k$ и $A_{(j,k)}$ матрица настала „заменом j-те и k-те колоне матрице A”, како је $\pi_{j,k} = \pi_{1,j} \circ \pi_{1,k} \circ \pi_{1,j}$ (тј. замена колона 1 и j, након тога 1 и k, а након тога 1 и j, је трансформација еквивалентна замени колона j и k), следи $\det A_{(j,k)} = -\det A$ (довољно је три пута применити добијено у делу (д)). Из добијеног следи да ако се k пута изврши замена две колоне матрице A, тј. замена која одговара композицији k транспозиција, онда је детерминанта добијене матрице једнака $(-1)^k \det A$.

Пример 19. Ако је $A \in M_n(\mathbb{P})$, онда је $\det(\alpha A) = \alpha^n \det A$, што се добија применом хомогености (део (в) претходног тврђења) на сваку колону. По мотивацији описаној на почетку овог дела, ово је очекиван резултат (ако су тела слична, са коефицијентом сличности k, површине су им у односу k^2, а запремине у односу k^3). Из адитивнсти (део (г) претходног тврђења) следи одговарајући резултат у случају да се више колона представља у облику збира, рецимо, ако је $A = (A_{1,1}^{(k)} + A_{1,2}^{(k)}, \ldots, A_{n,1}^{(k)} + A_{n,2}^{(k)}) \in M_n(\mathbb{P})$, онда је $\det A = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} \det(A_{1,i}^{(k)}, A_{2,j}^{(k)})$, но видимо да код оваквих закључака број сабирака драстично расте са повећањем реда матрице, те формула постаје непрактична, па се у применама најчешће виђа примена на једној колони (врсти). Ако су $k,l \in \mathbb{N}$, $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^{k}$, $B = (b_{i,j})_{i,j=1}^{l}$ и $D = \operatorname{diag}(A,B) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = (d_{i,j})_{i,j=1}^{k+l} \in M_{k+l}(\mathbb{P})$, тј. блок матрица (видети пример 10), састављена од квадратних блокова „по дијагонали”, док су остали елементи 0 (приметимо да у претходном запису једна 0 представља $0_{k\times l}$, а друга $0_{l\times k}$), при одређивању $\det D$ у сабирку који одговара $\pi \in S_{k+l}$ се јавља производ $d_{1,\pi(1)} \cdot \ldots \cdot d_{k+l,\pi(k+l)}$, који је једнак 0 ако је $\pi(i) > k$ за неко $1 \leqslant i \leqslant k$, као и ако је $\pi(k+i) < k$ за неко $1 \leqslant i \leqslant l$, те су једини производи за које није јасно да ли су једнаки 0 облика $a_{1,\pi(1)} \cdot \ldots \cdot a_{k,\pi(k)} \cdot b_{1,\pi(k+1)} \cdot \ldots \cdot b_{l,\pi(k+l)}$, при чему је $\pi = \pi_1 \circ \pi_2$, где је $\pi_1 \in S_{k+l}$, тако да је $\pi_1(i) = i$ за $k+1 \leqslant i \leqslant k+l$ (нека је скуп таквих пермутација Π_1), а $\pi_2 \in S_{k+l}$, тако да је $\pi_1(i) = i$ за $1 \leqslant i \leqslant k$ (нека је скуп таквих пермутација Π_2). Дакле, ненула чланови у $\det D$ могу настати само од пермутације облика $\pi = \pi_1 \circ \pi_2$, где је $\pi_1 \in \Pi_1$, $\pi_2 \in \Pi_2$ (нека је тај скуп $\Pi_1 \circ \Pi_2$), а како је овом случају $\pi_1 \circ \pi_2 = \pi_2 \circ \pi_1$ и $\operatorname{sgn} \pi = \operatorname{sgn} \pi_1 \cdot \operatorname{sgn} \pi_2$, следи $\det D = \sum\limits_{\pi \in \Pi_1 \circ \Pi_2} \operatorname{sgn} \pi \prod\limits_{i=1}^{n} d_{i,\pi(i)} = \sum\limits_{\pi_1 \in \Pi_1} \operatorname{sgn} \pi_1 \prod\limits_{i=1}^{n} a_{i,\pi_1(i)} \cdot \sum\limits_{\pi_2 \in \Pi_2} \operatorname{sgn} \pi_2 \prod\limits_{i=1}^{n} b_{i,\pi_1(i)} = \det A \cdot \det B$. Наравно, из претходног следи да ако је матрица састављена од „квадратних блокова” (са нулама ван тих блокова), онда је њена детерминанта једнака производу детерминанти блокова (тј. добијено је тачно и ако је блокова више од 2). Ако је $C = (c_{i,j})_{i,j=1}^{n} \in M_n(\mathbb{P})$ матрица чији су су сви елементи испод споредне дијагонале једнаки 0 (дакле, $c_{i,j} = 0$ за $i + j > n + 1$), заменом колона i и $n + 1 - i$, за $1 \leqslant i \leqslant [\frac{n}{2}]$ (овде $[x]$ представља цео део броја $x \in \mathbb{R}$), добија се горње троугаона матрица, чији су елементи главне дијагонале $c_{i,n+1-i}$, за $1 \leqslant i \leqslant n$, па је $\det C = (-1)^{[\frac{n}{2}]} \prod\limits_{i=1}^{n} c_{i,n+1-i}$ (није тешко видети да је $(-1)^{[\frac{n}{2}]} = 1$ ако n даје остатак 0 или 1 при дељењу са 4, а $(-1)^{[\frac{n}{2}]} = -1$ ако n даје остатак 2 или 3 при дељењу са 4). △

Из претходне теореме (и коментара након ње), следи да је $\det A$, где је $A \in M_n(\mathbb{P})$ за $n \in \mathbb{N}$, посматрана као функција колона, у блиској вези са детерминантом матрице добијене вршењем елементарних трансформација на тим колонама. Конкретно, за произвољне $i, j \in \{1 \ldots, n\}$, $i \neq j$ и $\alpha \in \mathbb{P}$, важи $\det(\ldots, A_i^{(k)}, \ldots, A_j^{(k)} + \alpha A_i^{(k)}, \ldots) = \det(\ldots, A_i^{(k)}, \ldots, A_j^{(k)}, \ldots) + \alpha \det(\ldots, A_i^{(k)}, \ldots, A_i^{(k)}, \ldots) = \det(\ldots, A_i^{(k)}, \ldots, A_j^{(k)}, \ldots)$ (искоришћена је линеарност по j-тој колони, а други сабирак у претходној једнакости је једнак 0, на основу дела (ђ) претходне теореме), тј. детерминанта матрице се не мења ако се i-та колона, помножена са α, дода на j-ту колону. Сходно нотацији уведеној након дефиниције 7.2.4, последње значи да је $\det A = \det(A \cdot T_2^T(i, j, \alpha))$. Аналогно, важи $\alpha \det A = \det(A \cdot T_1(j, \alpha))$ (по делу (в) претходне теореме), као и $-\det A = \det(A \cdot T_3(i, j))$,

за $i \neq j$ (по делу (д) претходне теореме и коментарима након ње), а по делу (б) претходне теореме, следе и аналогни закључци при раду са врстама, тј. за $i \neq j$ и $\alpha \in \mathbb{P}$ важи $\det A = \det(T_2(i,j,\alpha) \cdot A)$, $-\det A = \det(T_3(i,j) \cdot A)$ и $\alpha \det A = \det(T_1(j,\alpha) \cdot A)$ (како је $A \in M_n(\mathbb{P})$, подразумева се да су све наведене матрице трансформација реда n).
Приметимо да је $\det T_1(j,\alpha) = \alpha$, $\det T_2(i,j,\alpha) = \det T_2^T(i,j,\alpha) = 1$ и $\det T_3(i,j) = -1$, па резултати претходног пасуса говоре да је $\det(AT) = \det A \cdot \det T$, где је T основна елементарна трансформација (колона), као и да је $\det(TA) = \det T \cdot \det A$, где је T основна елементарна трансформација (врста), те индукцијом следи да је претходно тачно и за коначне производе основних елементарних трансформација. На основу теореме 7.2.2, произвољна $A \in M_n(\mathbb{P})$ се приказује у облику VA_0K, где је је V производ елементарних матрица трансформација врста, а K производ елементарних матрица трансформација колона (наравно, овде је A_0 канонска форма матрице A), те како је, по претходним закључцима, $\det V \neq 0$, $\det K \neq 0$ и $\det A = \det V \cdot \det A_0 \cdot \det K$, следи да је $\det A = 0$ ако и само ако је $\det A_0 = 0$. Дакле, закључијемо да је

$$A \in M_n(\mathbb{P}) \text{ сингуларна ако и само ако је } \det A = 0,$$

као и да се инвертибилна $A \in M_n(\mathbb{P})$ може приказати у облику производа матрица основних елементарних трансформација (заиста, у овом случају је $A_0 = E_n$). Како је ранг матрице A једнак реду њене највеће несингуларне квадратне подматрице (то је директна последица леме 7.1.5 и теореме 7.2.2), следи да је ранг матрице једнак реду њене највеће подматрице чија је детерминанта различита од 0, те претходни резултат доноси информације и у случају да је A сингуларна, као и у случају да A није квадратна (наравно, ако је $\rho(A) = r > 0$, може се десити да је нека квадратна подматрица реда r сингуларна, али ако постоји бар једна несингуларна, реда r, онда је ранг барем r; рецимо, ако је $A = A_0 \in M_{m,n}(\mathbb{P})$ и $0 < \rho(A) = r < \min\{m,n\}$, једина регуларна подматрица типа $r \times r$ је одређена са првих r врста и првих r колона). Из претходне дискусије, следи и да за $A, B \in M_n(\mathbb{P})$ важи

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B.$$

Заиста, ако је A инвертибилна, закључак следи понављањем претходног поступка (пошто се онда A приказује у облику производа матрица основних елементарних трансформација), а ако је A сингуларна, онда је и AB сингуларна, те је $\det A = 0$ и $\det AB = 0$. Последњи закључак говори да детерминанта, за свако $n \in \mathbb{N}$, представља хомоморфизам структуре $(M_n(\mathbb{P}), \cdot)$ у $(\mathbb{P}, \cdot)$, чије језгро чине сингуларне матрице. Ако је $P \in M_n(\mathbb{P})$ инвертибилна, следи $\det P^{-1} \cdot \det P = \det(P^{-1}P) = \det E_n = 1$, па је $\det P^{-1} = \frac{1}{\det P}$, па ако је $A \sim B$ и $B = P^{-1}AP$, онда је $\det B = \det(P^{-1}AP) = \det P^{-1} \cdot \det A \cdot \det P = \det A$, те је $\det A = \det B$. Из добијеног следи и да има смисла дефинисати $\det A$, где је $A \in L(U)$, као детерминанту матрице која га представља у произвољној бази (по претходном, добијена вредност не зависи од избора базе).

Пример 20. Ако је $n \in \mathbb{N}$, $(c_i)_{i=1}^n$ и $(d_i)_{i=1}^n$ из $\mathbb{R}^n$, одредимо $\det A_n$, где је $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^n$ таква да је $a_{i,j} = c_i + d_j$ за све $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Јасно, важи $\det A_1 = b_1 + c_1$ и $\det A_2 = (b_1 - b_2)(c_2 - c_1)$. Ако је $n \geqslant 3$, одузимањем прве врсте од друге и треће (односно, вршећи операције $V_2 - V_1$ и $V_3 - V_1$), добија се матрица која има исту вредност детерминанте, а како је друга врста те матрице $(c_2 - c_1, \dots, c_2 - c_1)$, а трећа $(c_3 - c_1, \dots, c_3 - c_1)$, она има две линеарно зависне колоне, па је у овом случају $\det A_n = 0$. $\triangle$

Пример 21. Ако су a, b, c све нуле полинома $p(x) = x^3 + a_1x + a_0 \in \mathbb{C}[x]$, онда је $D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ b+c+a & c & a \\ c+a+b & a & b \end{vmatrix}$ (на прву колону су додате друга и трећа, тј. извршене су операције $K_1 + K_2$ и $K_1 + K_3$, које не мењају вредност детерминанте), а како је $p(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$, на основу коефицијента уз x^2, следи $a + b + c = 0$, па је $D = 0$, пошто је прва колона добијене детерминанте једнака 0. $\triangle$

У претходном примеру су, практично, изведена чувена Виетова правила (ако су $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ нуле полинома $p(x) = a_nx^n + \ldots + a_0 \in \mathbb{C}[x]$, где је $n \in \mathbb{N}$ и $a_n \neq 0$, онда за свако $1 \leqslant k \leqslant n$ важи $\sum\limits_{i_1 < \ldots < k} \lambda_{i_1} \cdot \ldots \cdot \lambda_{i_k} = (-1)^k \cdot \frac{a_{n-k}}{a_n}$; специјално, збир нула уоченог полинома је $-\frac{a_{n-1}}{a_n}$). Напоменимо да је притом употребљено да полином има растављање на линеарне факторе (стога је и изабран полином из $\mathbb{C}[x]$, пошто комплексни полиноми, по последици леме 4.3.10, задовољавају то својство, но претходно се може закључити и у било ком $\mathbb{P}[x]$ са наведеном особином), међутим, закључак се може пренети и на случај $\mathbb{R}[x]$ (како је то рађено и у току средњег школовања), ако се посматрају комплексне нуле уоченог полинома, тј. ако се посматрано поље „прошири” до поља које има наведено својство (уколико такво постоји). На пример, код полинома $\lambda^2 + 1$ (добијеног у примеру 13 приликом одређивања сопствених вредности матрице C) закључујемо да је $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ и $\lambda_1\lambda_2 = -1$ (иако тај полином нема реалних нула). Нагласимо и да се нуле, при оваквим применама, рачунају са вишеструкошћу (па, претходно добијено у случају полинома $(x-1)^n = x^n + \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{n-k}\binom{n}{k}x^k$, даје да је, рецимо, збир нула овог полинома једнак $-\frac{-n}{1} = n$; заиста, 1 је нула уоченог полинома, вишеструкости n).
До краја овог одељка подразумеваћемо да је $n \geqslant 2$, уколико не нагласимо другачије.

Дефиниција 7.3.2. Ако је $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^n \in M_n(\mathbb{P})$ и $(i,j) \in \{1, \dots, n\}^2$, детерминанта подматрице матрице A, генерисана индексима врста $\{1, \dots, n\} \setminus \{i\}$ и индексима колона $\{1, \dots, n\} \setminus \{j\}$ се назива **минор** који одговара пару индекса (i,j), у ознаци $m_{i,j}$, док се $A_{i,j} = (-1)^{i+j}m_{i,j}$ назива (алгебарски) **кофактор** који одговара пару (i,j), а матрица $\operatorname{adj} A = (A_{j,i})_{i,j=1}^n \in M_n(\mathbb{P})$ се назива **адјунгована матрица** матрице A.

Дакле, $\operatorname{adj} A$ је транспонована матрица матрице добијене одређивањем кофактора за сваки пар $(i,j) \in \{1,\dots,n\}^2$ (у претходној дефиницији $\operatorname{adj} A$ су индекси „окренути”, тј. на месту (i,j) у $\operatorname{adj} A$ се налази $A_{j,i}$).

Пример 22. Важи $\operatorname{adj} 0_{n\times n} = 0_{n\times n}$, као и $\operatorname{adj} E_n = E_n$ (ако је $i \neq j$, подматрица која одређује $m_{i,j}$ (реда $n-1$) садржи $n-2$ елемената 1, а остали су 0, док је $m_{i,i} = \det E_{n-1} = 1$). Ако је $A \in M_n(\mathbb{P})$, за свако $\alpha \in \mathbb{P}$ је $\operatorname{adj}(\alpha A) = \alpha^{n-1} \operatorname{adj} A$, као и $\operatorname{adj} A^T = (\operatorname{adj} A)^T$. △

Теорема 7.3.2 (Лаплас). Нека је $n \geqslant 2$ и $A \in M_n(\mathbb{P})$. Онда је
(а) $\det A = \sum\limits_{r=1}^{n} a_{i,r}A_{i,r}$ и $\det A = \sum\limits_{r=1}^{n} a_{r,j}A_{r,j}$, за све $i,j \in \{1,\dots,n\}$.
(б) $A \cdot \operatorname{adj} A = \operatorname{adj} A \cdot A = \det A \cdot E_n$.

Доказ. (а) Докажимо прво да је $\det A = \sum\limits_{r=1}^{n} a_{r,1}A_{r,1}$. На основу линеарности по првој колони, важи $\det A = \sum\limits_{r=1}^{n} a_{r,1} \det(E_r^{(k)}, A_2^{(k)}, \dots, A_n^{(k)})$, где је $E_r^{(k)} = (e_{r,1},\dots,e_{r,n})^T \in M_{n,1}(\mathbb{P})$ таква да је $e_{r,i} = \begin{cases} 1, & \text{ако је } r = i \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$.
Међутим, детерминанта матрице $(E_r^{(k)}, A_2^{(k)}, \dots, A_n^{(k)})$ је једнака детерминанти матрице која се из ње добија додавањем прве колоне помножене са $-a_{r,j}$ на j-ту колону, за $2 \leqslant j \leqslant n$. Ако је $r = 1$, добијена матрица састављена од квадратних блокова, димензија 1 и $n-1$, дуж дијагонале, док су остали елементи једнаки 0, тј. облика је $\operatorname{diag}(A_1, B_1)$, уз ознаке из примера 19, при чему је $A_1 = (\,1\,)$, а B_1 подматрица матрице A одређена индексима врста и колона $\{2,\dots,n\}$ (дакле, њена детерминанта је $m_{1,1}$), те је, на основу резултата поменутог примера, $\det(E_1^{(k)}, A_2^{(k)}, \dots, A_n^{(k)}) = 1 \cdot m_{1,1} = A_{1,1}$. Ако је $r > 1$, заменом, редом, врста r и $r-1$,…, 2 и 1 (тј. укупно $r-1$ замена), добија се $\operatorname{diag}(A_r, B_r)$, где је $A_r = (\,1\,)$, а B_r подматрица матрице A одређена индексима врста $\{1,\dots,n\} \setminus \{r\}$, а колона $\{2,\dots,n\}$ (дакле, њена детерминанта је $m_{r,1}$), те је, на основу случаја $r = 1$, $\det(E_r^{(k)}, A_2^{(k)}, \dots, A_n^{(k)}) = (-1)^{r-1} \cdot 1 \cdot m_{r,1} = A_{r,1}$. Из добијеног следи тврђење у издвојеном случају (тј. друга наведена једнакост за $j = 1$).
Ако је $j > 1$, заменом колона j и $j-1$,…,2 и 1, редом (укупно $j-1$ замена), како је минор који одговара пару индекса $(r,1)$ новодобијене матрице једнак минору који одговара пару индекса (r,j) полазне, за све $1 \leqslant r \leqslant n$, из горе показаног тврђења за $j = 1$ следи $\det A = \sum\limits_{r=1}^{n} ((-1)^{j-1} a_{r,j} (-1)^{1+r} m_{r,j}) = \sum\limits_{r=1}^{n} a_{r,j}A_{r,j}$, што даје доказ друге једнакости дела (а) и у овом случају.
Како је кофактор који одговара пару индекса (i,j) матрице A једнак кофактору који одговара пару индекса (j,i) матрице A^T, прва једнакост дела (а) је непосредна последица друге (применом на $\det A^T$).
(б) На основу показаног у делу (а), чланови на дијагонали матрице $A \cdot \operatorname{adj} A$ једнаки су $\det A$. Ако је $i \neq j$, члан који се налази на месту

(i,j) у $A \cdot \operatorname{adj} A$ је $\sum_{r=1}^{n} a_{i,r}A_{j,r}$, а, на основу дела (а), наведена сума је једнака детерминанти матрице којој су све врсте, сем i-те, једнаке одговарајућим врстама матрице A, а i-та једнака j-тој врсти матрице A, тј. једнака је 0 (као детерминанта матрице која има једнаке две врсте са различитим индексима). По симетрији следи тврђење и за $\operatorname{adj} A \cdot A$. $\square$

Једнакости дела (а) претходне теореме се обично називају (Лапласов) развој детерминанте по i-тој врсти и j-тој колони, редом. Из дела (б) непосредно следи да, уколико је A инвертибилна, важи

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \operatorname{adj} A, \tag{7.2}$$

те је јасно да се добијена веза може користи при одређивању инверзне матрице. Такође, следи и да је A инвертибилна ако и само ако је $\operatorname{adj} A$ инвертибилна (ако је $A = 0$, онда је и $\operatorname{adj} A = 0$; ако је $A \neq 0$ и $\det A = 0$, важи $A \cdot \operatorname{adj} A = 0$, па је $\operatorname{Im} \operatorname{adj} A \subseteq \operatorname{Ker} A$, а у овом случају је $\delta(A) \leqslant n-1$, те је $\rho(\operatorname{adj} A) \leqslant n-1$, што значи да је $\operatorname{adj} A$ сингуларна; ако је $\det A \neq 0$, онда је $\operatorname{adj} A = \det A \cdot A^{-1}$, јасно, инвертибилна).

Ако је D матрица из примера 15, на основу добијеног следи да је D инвертибилна ако и само ако је $\det D = ad - bc \neq 0$, а како је $\operatorname{adj} D = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, у случају $\det D \neq 0$ следи да је $D^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Ако је B матрица из примера 17, онда је $\det B = 2 \cdot 2 \cdot (-2) + (-3) \cdot (-4) \cdot 1 + 5 \cdot 3 \cdot 1 - 5 \cdot 2 \cdot 1 - 2 \cdot (-4) \cdot 1 - (-3) \cdot 3 \cdot (-2) = -1 \neq 0$, а њени кофактори су $A_{1,1} = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$, $A_{1,2} = -\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2$, $A_{1,3} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$, $A_{2,1} = -\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -1$, $A_{2,2} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -9$, $A_{2,3} = -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -5$, $A_{3,1} = \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 2$, $A_{3,2} = -\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 23$, $A_{3,3} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 13$, те, применом формуле (7.2), следи $B^{-1} = -\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & -9 & -5 \\ 2 & 23 & 13 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -2 & 9 & -23 \\ -1 & 5 & -13 \end{pmatrix}$ (наравно, добијен је исти резултат као и у примеру 17). Вредност $\det B$ се може одредити и развојем по произвољној врсти или колони. На пример, из развоја по другој колони, следи $\det B = a_{1,2}A_{1,2} + a_{2,2}A_{2,2} + a_{3,2}A_{3,2} = (-3) \cdot 2 + 2 \cdot (-9) + 1 \cdot 23 = -1$ (док је, рецимо, $a_{1,2}A_{1,3} + a_{2,2}A_{2,3} + a_{3,2}A_{3,3} = (-3) \cdot 1 + 2 \cdot (-5) + 1 \cdot 13 = 0$, што је показано у делу (б) претходне теореме).

Пример 23. Анализом урађеног у примеру 19 за детерминанту матрице $\operatorname{diag}(A, B)$, може се закључити да је $\det \begin{pmatrix} A & 0_{k \times l} \\ C & B \end{pmatrix} = \det A \cdot \det B$, где је $k, l \in \mathbb{N}$, $A \in M_k(\mathbb{P})$, $B \in M_l(\mathbb{P})$ (наравно, онда је $C \in M_{l,k}(\mathbb{P})$), што би нијансу упростило претходни доказ (након свођења на одређивање детерминанте матрице чија колона садржи један ненула елемент, не би било потребно трансформисати матрицу, тако да су у врсти у којој се налази тај елемент остали елементи 0). Наравно, могуће је доказати претходну теорему и без употребе закључака примера 19, а онда се резултати тог примера могу добити као последица претходне теореме (нпр. у развоју по првој врсти матрице $\mathrm{diag}(A, B)$, $l-k$ сабирака је једнако 0). Идеја представљања матрице у облику „блок матрице” је корисна и у ширем контексту. Рецимо, ако је $n \in \mathbb{N}$, $A, B \in M_n(\mathbb{P})$ и $D = \begin{pmatrix} A & 0_{n\times n} \\ -E_n & B \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{P})$, уколико за све $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ се j-та колона матрице D, помножена са $b_{i,j}$, дода на $(n+j)$-ту колону те матрице (тј. изврше операције $K_{n+j} + b_{i,j}K_j$ за све $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, укупно n^2 операција), детерминанта добијене матрице ће бити иста као и детерминанта матрице D (уочене операције не утичу на вредност детерминанте), а блок матрични запис добијене матрице је $\begin{pmatrix} A & AB \\ -E_n & 0_{n\times n} \end{pmatrix}$, те се заменом врста i и $n+i$, за $1 \leqslant i \leqslant n$ (односно, вршењем операција $V_i \leftrightarrow V_{n+i}$, за $1 \leqslant i \leqslant n$, укупно n операција; свака од тих операција мења знак детерминанте), добија да је

$$\det D = (-1)^n \cdot \det\begin{pmatrix} -E_n & 0_{n\times n} \\ A & AB \end{pmatrix} = (-1)^n \cdot \det(-E_n) \cdot \det(AB) = \det(AB),$$

односно $\det(AB) = \det A \cdot \det B$, тј. ово својство се може доказати и на основу Лапласовог развоја. Овакав приступ се обично виђа по литературама у којима се испитивање линеарних пресликавања обрађује након проучавања детерминанти, а јасно је да се овим начином размишљања могу добити и друга тврђења. △

Пример 24. Нека је $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ и $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ међусобно различити. Одредимо $\det A_n$, где је A_n матрица чија је k-та врста $(1, a_k, \ldots, a_k^{n-1})$, за $1 \leqslant k \leqslant n$. Одузимањем $(n-1)$-ве колоне помножене са a_1 од n-те, након тога $(n-2)$-ге помножене са a_1 од $(n-1)$-ве,..., прве помножене са a_1 од друге (тј. вршењем операција $K_n - a_1K_{n-1}, K_{n-1} - a_1K_{n-1}, \ldots, K_2 - a_1K_1$, тим редоследом), добија се матрица која има исту детерминанту као и полазна, а за $2 \leqslant k \leqslant n$, k-та колона новодобијене матрице је $(0, a_2^{k-1}(a_2-a_1), \ldots, a_n^{k-1}(a_n-a_1))^T$, те је

$$\begin{aligned}
\det A_n &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & a_2 - a_1 & \ldots & a_2^{n-1}(a_2-a_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n - a_1 & \ldots & a_n^{n-1}(a_n - a_1) \end{vmatrix} \\
&= 1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & \ldots & a_2^{n-1}(a_2-a_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n - a_1 & \ldots & a_n^{n-1}(a_n-a_1) \end{vmatrix} = \prod_{i=2}^{n}(a_i - a_1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & \ldots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \ldots & a_n^{n-1} \end{vmatrix},
\end{aligned}$$

тј. добијена је детерминанта матрице аналогне полазној, али реда $n-1$ и која одговара бројевима $a_2, \ldots, a_n$ (у претходном је прво искоришћен Лапласов развој детерминанте по првој колони (којој су сви елементи, сем једног, једнаки 0, те се тај развој своди на један сабирак), а након тога хомогеност детерминанте (из i-те врсте је извучен фактор

$a_{i+1}-a_1$, за $1 \leqslant i \leqslant n-1$)). Настављањем поступка (тј. индукцијом), закључујемо да је $\det A_n = \prod\limits_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (a_i - a_j)$. Детерминанта разматрана у овом примеру се назива **Вандермондова детерминанта**. $\triangle$

Пример 25. За $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ и $p, q \in \mathbb{R}$, одредимо $\det B_n$, при чему је $B_n = (b_{i,j})_{i,j=1}^{n}$, где је $b_{i,j} = \begin{cases} p, & \text{ако је } j = i+1 \\ p+q, & \text{ако је } j = i \\ q, & \text{ако је } j = i-1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$, тј. квадратна матрица реда n, којој су елементи главне дијагонале $p+q$, прве „изнад главне" p, прве „испод главне" q, а преостали 0. За $n \geqslant 2$, на основу Лапласовог развоја по првој врсти, важи $\det B_{n+2} = (p+q)\det B_{n+1} - q \cdot \det B'$, при чему је прва колона матрице $B' \in M_{n+1}(\mathbb{R})$ једнака $(q, 0, \ldots, 0)^T$, па се Лапласовим развојем по њој добија $\det B_{n+2} = (p+q)\det B_{n+1} - p \cdot q \cdot \det B_n = 0$, тј. низ $(\det B_n)_{n \geqslant 2}$ задовољава добијену линеарну рекурентну везу. Ако је $p \neq q$, на основу резултата примера 11 главе 2, је $\det B_n = Cp^n + Dq^n$, за неке $C, D \in \mathbb{R}$, а како је $\det B_2 = \frac{p^3-q^3}{p-q}$ и $\det B_3 = \frac{p^4-q^4}{p-q}$, следи $C = \frac{p}{p-q}$, $D = -\frac{q}{p-q}$, те је $\det D_n = \frac{p^{n+1}-q^{n+1}}{p-q}$, за $n \geqslant 2$. Слично, ако је $p = q$, на основу коментара датих након поменутог примера, важи $\det B_n = (Cn+D)p^n$, за неке $C, D \in \mathbb{R}$, одакле је $\det B_n = (n+1)p^n$. Приметимо да се резултат за $p = q$ може добити из добијеног резултата за $p \neq q$, пуштањем $q \to p$ (у глави 2 је претходно рађено у циљу приказа примена математичке индукције, а у том моменту још није била обрађена непрекидност). $\triangle$

Пример 26. Ако су $A, B \in M_n(\mathbb{P})$ инвертибилне, по делу (б) претходне теореме је $A \operatorname{adj} A = \det A \cdot E_n$ и $B \operatorname{adj} B = \det B \cdot E_n$, па је $AB \operatorname{adj} AB = \det(AB) \cdot E_n = \det A \cdot \det B \cdot E_n = A \operatorname{adj} A \cdot \det B = A \cdot \det B \cdot \operatorname{adj} A = AB \operatorname{adj} B \operatorname{adj} A$ (пошто је $\det B \operatorname{adj} A = \operatorname{adj} A \det B$, јер је $\det B$ скалар). Из последње везе, множењем слева са $(AB)^{-1}$, следи $\operatorname{adj} AB = \operatorname{adj} B \operatorname{adj} A$.

Наравно, природно се поставља питање да ли се добијена веза преноси и на случај у ком је нека од уочених матрица сингуларна. Један од начина да то урадимо у случају $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ је да посматрамо претходно добијени резултат, примењен на $A - xE_n$ и $B - xE_n$, где је $x \in \mathbb{C}$. Онда је, на основу закључака са почетка примера, $(A-xE_n)(B-xE_n)\operatorname{adj}((A-xE_n)(B-xE_n)) = (A-xE_n)(B-xE_n)\operatorname{adj}(B-xE_n)\operatorname{adj}(A-xE_n)$ за све $x \in \mathbb{C}$, а ако су $A - xE_n$ и $B - xE_n$ регуларне, добијена веза се може скратити слева са $(A-xE_n)(B-xE_n)$. Међутим, $\det(A-xE_n)$ и $\det(B-xE_n)$ су ненула полиноми (тј. $A - xE_n$ и $B - xE_n$ су сингуларне за коначно много $x \in \mathbb{C}$), а како су $\operatorname{adj}(A-xE_n)$ и $\operatorname{adj}(B-xE_n)$ матрице чији су елементи полиноми (видети и коментаре дате након примера), добијена веза је полиномска (заправо, добија се систем n^2 једнакости полинома), при чему је, по претходном, тачна за све, сем коначно много $x \in \mathbb{C}$, но онда мора бити тачна и за свако $x \in \mathbb{C}$. Следи да и у овом случају можемо „скратити слева" члан $(A-xE_n)(B-xE_n)$, тј. добијамо да је $\operatorname{adj}((A-xE_n)(B-xE_n)) = \operatorname{adj}(B-xE_n)\operatorname{adj}(A-xE_n)$, за све $x \in \mathbb{C}$, одакле се, заменом $x = 0$, добија да $\operatorname{adj} AB = \operatorname{adj} B \operatorname{adj} A$ важи и у случају у ком је нека од A, B сингуларна. $\triangle$

Из претходног примера непосредно следи да, ако је A инвертибилна, важи $\operatorname{adj} A^{-1} \cdot \operatorname{adj} A = \operatorname{adj}(AA^{-1}) = \operatorname{adj} E_n = E_n$, па је $\operatorname{adj} A$ инвертибилна и важи $\operatorname{adj} A^{-1} = (\operatorname{adj} A)^{-1}$. Такође, избором $A = B$, следи $\operatorname{adj} A^2 = (\operatorname{adj} A)^2$, одакле, индукцијом, следи $\operatorname{adj} A^k = (\operatorname{adj} A)^k$, за свако $k \in \mathbb{N}$.

Прокоментаришимо и разматрање спроведено у претходном примеру, везано за пренос особине, коју задовољавају регуларне матрице, на сингуларни случај. Дефиниција детерминанте представља полином више променљивих (елемената матрице), па уколико постоји аналогија са функцијама једне променљиве (што у овом моменту не знамо, но то је један од задатака наставка овог текста), неће представљати изненађење закључак о непрекидности те функције (непрекидност функција више променљивих ћемо разматрати у глави 8). Како је $\det(A - xE_n)$ полином променљиве $x \in \mathbb{C}$ (за фиксну $A \in M_n(\mathbb{C})$), основна идеја другог дела претходног примера је била да се искористи да је у $\mathbb{C}[x]$ једнакост полинома (ако их посматрамо као алгебарске изразе) еквивалентна са једнакошћу одговарајућих полиномских функција, као и да, при „малој измени полинома” (што може значити „малу промену променљиве x”, али и „малу измену” коефицијената полинома), остају на снази везе које су последица непрекидности (а, по закључцима добијеним у раду са функцијама једне променљиве, очекујемо да су везе настале компоновањем полинома такве). Последње значи и да се доказ већине овде приказаних тврђења не мора делити на „регуларни и сингуларни део”, већ се, након доказа у случају регуларности, могу добити сличним разматрањем као и закључак другог дела претходног примера. Аналогни закључци се преносе и на $\mathbb{P}[x]$ у ком је задовољено наведено својство (специјално, преносе се на случај $\mathbb{R}[x]$). Претходни закључак се могао добити и посматрањем неких других полинома, а не само $\det(A - xE_n)$, но одлучили смо се за тај полином, пошто он има посебну важност (проучаваћемо га у наставку овог дела).

У складу са претходним, ако су $A(x)$ и $B(x)$ матрице са елементима из $\mathbb{C}[x]$, уколико је $A(x) = B(x)$, наравно, морају бити истог типа, па ако је $A(x), B(x) \in M_{m,n}(\mathbb{C}[x])$, k највећи степен полинома који се јавља међу елементима тих матрица, а полиноми који се налазе на месту (i, j) матрица $A(x)$ и $B(x)$ једнаки, редом, $\sum\limits_{r=0}^{k} a_{i,j}^{(r)} x^r$ и $\sum\limits_{r=0}^{k} b_{i,j}^{(r)} x^r$ (ако је степен неког од полинома мањи од k, сматрамо да су коефицијенти уз чланове који су већег степена од степена тог полинома једнаки 0), онда се веза $A(x) = B(x)$ своди на mn једнакости полинома из $\mathbb{C}[x]$, те одговарајући коефицијенти морају бити једнаки, тј. за све $i \in \{1, \ldots, m\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$ и $r \in \{0, \ldots, k\}$ важи $a_{i,j}^{(r)} = b_{i,j}^{(r)}$. По начину дефинисања матричних операција (у овом случају сабирања матрица и множења скаларом), последње значи да је $A(x) = \sum\limits_{r=0}^{k} A_r x^r$ и $B(x) = \sum\limits_{r=0}^{k} B_r x^r$, за неке $A_r = (a_{i,j}^{(r)})_{1\leqslant i\leqslant m, 1\leqslant j\leqslant n}$ и $B_r = (b_{i,j}^{(r)})_{1\leqslant i\leqslant m, 1\leqslant j\leqslant n}$ (сабирање матрица је комутативно, као и множење скаларом, па се не мора наглашавати редослед сабирања, а важи и $A_r x^r = x^r A_r$, за свако $0 \leqslant r \leqslant k$), те се $A(x) = B(x)$ своди на $A_r = B_r$, за све $0 \leqslant r \leqslant k$. Дакле, и у овом случају се преноси закључак добијен при раду у $\mathbb{C}[x]$, да су полиноми (полиномске функције) једнаки ако и само ако су им одговарајући коефицијенти једнаки (у посматраном случају коефицијенти су из $M_{m,n}(\mathbb{C})$), а и овде се тај закључак преноси на полиноме над произвољним пољем у ком су еквивалентни једнакост полинома и једнакост одговарајуће полиномске функције (специјално, важи у $\mathbb{R}[x]$).

Попут $\det(A - xE_n)$, посебну важност у наставку ће имати $\operatorname{adj}(A - xE_n)$, где је $A \in M_n(\mathbb{C})$. Елементи те матрице су или скалари или линеарни полиноми, при чему је тачно n линеарних полинома, од којих никоја два нису у истој врсти или колони, па су минори ове матрице полиноми степена не већег од $n-1$, што значи да је $\operatorname{adj}(A - xE_n)$ матрица чији су елементи полиноми степена не већег од $n-1$, те је $\operatorname{adj}(A - xE_n) = A_{n-1}x^{n-1} + \ldots + A_0$ за неке $A_i \in M_n(\mathbb{C})$, где је $0 \leqslant i \leqslant n-1$, тј. $\operatorname{adj}(A - xE_n)$ се може видети као полином чији су коефицијенти уочене матрице (а како се на дијагонали $\operatorname{adj}(A - xE_n)$ налазе полиноми степена $n-1$, следи да A_{n-1} није нула матрица, те је у питању полином степена $n-1$). Приметимо и да, ако је $A \in M_n(\mathbb{R})$, онда су $A_i \in M_n(\mathbb{R})$, за $0 \leqslant i \leqslant n-1$.

Скренимо пажњу да у случају $m = n$ има смисла дефинисати и множење полинома са коефицијентима из $M_n(\mathbb{P})$ (а, под одговарајућим условима, и дељење), но при раду са таквим полиномима, пошто $M_n(\mathbb{P})$ није комутативна структура, се мора обратити пажња са које стране се врши множење (рецимо, ако су $B_0, B_1, C \in M_n(\mathbb{P})$, онда су $(B_1x + B_0)C = B_1Cx + B_0C$ и $C(B_1x + B_0) = CB_1x + CB_0$ полиноми степена не већег од 1, који не морају бити једнаки), а слично и за дељење. Даљи рад са описаним уопштењем излази изван оквира овог текста.

Пример 27. Ако је $\rho(A) \leqslant n-2$, онда је свака квадратна подматрица реда $n-1$ матрице A сингуларна, па је $\operatorname{adj} A = 0_{n\times n}$, тј. $\rho(\operatorname{adj} A) = 0$. Ако је $\rho(A) = n-1$, онда је $\rho(\operatorname{adj} A) \geqslant 1$ (постоји бар један ненула минор), а како је $\operatorname{adj} A \cdot A = \det A \cdot E_n = 0_{n\times n}$, следи да је $\operatorname{Im} A \subseteq \operatorname{Ker} \operatorname{adj} A$, па је $\delta(\operatorname{adj} A) \geqslant n-1$. На основу тврђења о рангу и дефекту (теорема 7.1.3), следи $\rho(\operatorname{adj} A) = 1$. Из дела (б) претходне теореме следи $\det A \cdot \det(\operatorname{adj} A) = (\det A)^n$, па је $\det(\operatorname{adj} A) = (\det A)^{n-1}$ (ако је $\det A = 0$, по претходној дискусији следи да је и $\det(\operatorname{adj} A) = 0$). Такође, из дела (б) претходне теореме, користећи управо добијено, као и резултате претходног примера, следи $\det A \cdot \operatorname{adj}(\operatorname{adj} A) = A \cdot \operatorname{adj} A \cdot \operatorname{adj}(\operatorname{adj} A) = A \cdot \det(\operatorname{adj} A) = (\det A)^{n-1}A$. Ако је A инвертибилна, следи $\operatorname{adj}(\operatorname{adj} A) = (\det A)^{n-2}A$. Ако је $\det A = 0$ и $n \geqslant 3$, онда је $\operatorname{adj} A$, по претходно доказаном, ранга не већег од 1, што је мање од $n-1$, па је $\rho(\operatorname{adj} A) \leqslant n-2$, те је $\operatorname{adj}(\operatorname{adj} A) = 0_{n\times n}$, а у овом случају је и $(\det A)^{n-2}A = 0_{n\times n}$, а ако је $n = 2$, непосредном провером следи $\operatorname{adj}(\operatorname{adj} A) = A$, те је претходно добијено тачно и у овим случајевима. Из добијеног следи $\det(\operatorname{adj}(\operatorname{adj} A)) = \det((\det A)^{n-2} \cdot A) = (\det A)^{n(n-2)} \cdot \det A = (\det A)^{(n-1)^2}$. △

Наравно, има смисла разматрати и композиције више адјунгата, но то излази изван оквира овог текста (заправо, за наше потребе је довољно посматрати само један адјунгат, а у претходном примеру смо, између осталог, желели да илуструјемо како се могу добити закључци у случају њиховог компоновања).

Карактеристични полином

У овом делу ћемо посматрати квадратне матрице са елементима, превасходно, из $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$. Напоменимо да се резултати добијени у случају $\mathbb{C}$ преносе на произвољно поље у ком се произвољан полином разлаже на производ линеарних фактора (а неки се преносе и на случај произвољног поља). Један од задатака овог дела је и опис класа еквиваленције релације сличности.

Дефиниција 7.3.3. Ако је $A \in M_n(\mathbb{C})$, онда се $\chi_A(x) = \det(A - xE_n)$ назива **карактеристични полином** матрице A.

Непосредно из дефиниције следи да је χ_A полином степена n (коефицијент уз x^n му је $(-1)^n$), а, као и у случају детерминанте, ако је $A \sim B$, онда је $B = P^{-1}AP$ за инвертибилну $P \in M_n(\mathbb{C})$, па је $B - xE_n = P^{-1}(A - xE_n)P$, те из својстава детерминанте следи $\chi_B(x) = \det P^{-1} \det(A - xE_n) \det P = \chi_A(x)$, тј. сличне матрице имају исти карактеристични полином. Из последњих закључака следи и да је добро дефинисан карактеристични полином $A \in L(U)$ (не зависи од избора базе простора U).

Теорема 7.3.3. Нека је $A \in M_n(\mathbb{C})$, где је $n \in \mathbb{N}$. Онда је $\chi_A(A) = 0_{n\times n}$.

Доказ. На основу Лапласове теореме је $\chi_A(x)E_n = \det(A - xE_n)E_n = \operatorname{adj}(A - xE_n)(A - xE_n)$, па, по коментарима датим након примера 26, важи $\chi_A(x)E_n = (A_{n-1}x^{n-1} + \ldots + A_0)(A - xE_n) = -A_{n-1}x^n + \sum\limits_{i=1}^{n-1}(A_iA - A_{i-1})x^i + A_0A$, за неке $A_i \in M_n(\mathbb{C})$, где је $0 \leqslant i \leqslant n-1$, те (по истим коментарима), уколико је $\chi_A(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} k_ix^i$, следи $k_nE_n = -A_{n-1}$ (онда је и $k_nA^n = -A_{n-1}A^n$), $k_iE_n = A_iA - A_{i-1}$, за $1 \leqslant i \leqslant n-1$ (онда је и $k_iA^i = A_iA^{i+i} - A_{i-1}A^i$, за $1 \leqslant i \leqslant n-1$) и $k_0E_n = A_0A$, па је $\chi_A(A) = -A_{n-1}A^n + \sum\limits_{i=1}^{n-1}(A_iA^{i+i} - A_{i-1}A^i) + A_0A = 0_{n\times n}$. □

Претходна теорема се обично назива теорема **Кејли–Хамилтона**. Дакле, карактеристични полином матрице $A \in M_n(\mathbb{C})$ поништава ту матрицу (на даље ћемо последње записивати у облику $\chi_A(A) = 0$, кад год је јасно да 0 у уоченој једнакости представља нула матрицу одговарајућег реда). Јасно, нуле χ_A су сопствене вредности A (ако $\lambda \in \mathbb{C}$

није сопствена вредност, оператор $A - \lambda E_n$ има тривијално језгро, те је бијективан, а ако је $\lambda \in \mathbb{C}$ сопствена вредност, језгро тог оператора је нетривијално). На основу дела (б) леме 7.2.5, следи да $\mu_A \mid \chi_A$ (а како су, по делу (д) исте леме, сопствене вредности A и нуле μ_A, закључак да су сопствене вредности нуле χ_A смо могли добити одатле). Такође, следи и да (за $A \in M_n(\mathbb{C})$) важи $\deg \mu_A \leqslant n$ (тј. и ефективно је показано да је процена из леме 7.2.4 груба). Заправо, могу се дати слични коментари као и они који су наведени након примера 15, пошто се може показати да коефицијенти $\operatorname{adj}(A - xE_n)$ (тј. матрице $(A_i)_{i=0}^{n-1}$ из претходног доказа) припадају алгебри генерисаној са A (те, рецимо, комутирају са A, што, између осталог, омогућује да се претходна теорема докаже и на друге начине).

Дакле, за $A \in M_n(\mathbb{C})$, полиноми μ_A и χ_A имају исти скуп нула (то је управо спектар матрице). Из претходне теореме и дела (д) леме 7.2.5, следи да, ако је $\mu_A(x) = \prod\limits_{i=1}^{k} (x - \lambda_i)^{\alpha_i}$ и $\chi_A(x) = \prod\limits_{i=1}^{k} (x - \lambda_i)^{\beta_i}$, при чему је $\lambda_i \neq \lambda_j$ за $i \neq j$, важи $1 \leqslant \alpha_i \leqslant \beta_i \leqslant n$. Заправо, по литератури се често виђа да се теорема Кејли–Хамилтона формулише у том облику (да би се избегло разматрање о разложивости полинома на линеарне факторе), а јасно је да је у $\mathbb{C}[x]$ последње еквивалентно са горњим тврђењем. Приметимо и да важи $\chi_A \mid \mu_A^n$. Ако $A \in M_n(\mathbb{R})$, онда је $\chi_A \in \mathbb{R}[x]$, но нуле χ_A не морају бити реалне, те управо наведено тврђење у $\mathbb{R}[x]$ остаје на снази ако се посматрају и комплексне нуле добијених полинома или ако се формулише у облику растављања реалног полинома на линеарне и нерастављиве квадратне полиноме (видети коментаре након леме 4.3.10).

Ако је $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ и $A \sim B$, показано је да важи $\chi_A(x) = \chi_B(x)$, а како је $\chi_A(0) = \det A$, поново долазимо до закључка да сличне матрице имају једнаке детерминанте. Ако је $\chi_A(x) = (-1)^n \prod\limits_{i=1}^{k} (x - \lambda_i)^{\alpha_i}$, где је $\lambda_i \neq \lambda_j$ за $i \neq j$ (тј. ако су $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ нуле карактеристичног полинома вишеструкости $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, редом), следи да је $\det A = \prod\limits_{i=1}^{k} \lambda_i^{\alpha_i}$ (што је, заправо, у пољима у којима се полиноми могу разложити на линеарне факторе, еквивалентно дефиницији детерминанте). Међутим, из једнакости карактеристичних полинома сличних матрица, добијамо и друге последице (једнакост детерминанти је у претходном, заправо, добијена изједначавањем слободних чланова χ_A и χ_B, а уколико се то уради за друге коефицијенте, добијају се нови закључци). Рецимо, уочени полиноми имају једнаке коефицијенте уз x^{n-1}. Ако је $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^{n}$, чланови матрице $A - xE_n$ су полиноми степена 0 или 1 (променљиве x), а притом су степена 1 ако и само ако припадају главној дијагонали. Следи да се, у производима којим је дефинисана $\det(A - xE_n)$, степен $n-1$ добија само ако је бар $n-1$ од тих чинилаца степена 1, а то, у овом случају, значи да њих бар $n-1$ припада главној дијагонали. Међутим, ако је $\pi \in S_n$ таква да је $\pi(i) = i$ за $n-1$ вредности, мора бити $\pi = Id$, те је једини сабирак који садржи полином степена не мањег од $n-1$ заправо $\operatorname{sgn} Id \cdot \prod_{i=1}^{n}(a_{i,i} - x)$. Следи да је коефицијент уз x^{n-1} у $\det(A - xE_n)$ једнак $(-1)^{n-1}\sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$ (тј. важи $\chi_A(x) = (-1)^n x^n + (-1)^{n-1}\sum_{i=1}^{n} a_{i,i} \cdot x^{n-1} + \dots$). Израз $\sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$ се назива **траг** матрице A, у ознаци $\operatorname{Tr} A$. Уз последњи запис, он има смисла за произвољну $A \in M_n(\mathbb{P})$ (слободније говорећи, траг матрице представља збир елемената који се налазе на главној дијагонали), а у случају да произвољан полином раставља на линеарне факторе, уз горе наведену нотацију, важи $\operatorname{Tr} A = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i\lambda_i$ (тј. збир сопствених вредности (рачунајући њихове вишеструкости), а последње је, у пољима са наведеним својством, еквивалентно са дефиницијом трага). Како сличне матрице имају једнаке трагове, следи да има смисла дефинисати и траг линеарног оператора (као траг произвољне матрице која га представља). Тривијално је испуњено $\operatorname{Tr}(\alpha A + \beta B) = \alpha \operatorname{Tr} A + \beta \operatorname{Tr} B$ и $\operatorname{Tr} A^T = \operatorname{Tr} A$ за произвољне $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Ако је $A \in M_{k,l}(\mathbb{C})$, $B \in M_{l,k}(\mathbb{C})$, где су $k, l \in \mathbb{N}$, а $C_1, C_2 \in M_{k+l}(\mathbb{C})$ матрице чија су блок матрична представљања $C_1 = \begin{pmatrix} E_k & A \\ B & xE_l \end{pmatrix}$ и $C_2 = \begin{pmatrix} xE_k & -A \\ 0_{l\times k} & E_l \end{pmatrix}$, онда је $C_1C_2 = \begin{pmatrix} xE_k & 0_{k\times l} \\ xB & xE_l - BA \end{pmatrix}$ и $C_2C_1 = \begin{pmatrix} xE_k - AB & 0_{k\times l} \\ B & xE_l \end{pmatrix}$. Како је $\det(C_1C_2) = \det C_1 \det C_2 = \det(C_2C_1)$, следи (видети пример 23) $(-1)^l x^k \det(AB - xE_k) = (-1)^k x^l \det(BA - xE_k)$, тј. $(-1)^l x^k \chi_{AB}(x) = (-1)^k x^l \chi_{BA}(x)$. Поређењем коефицијената уз x^{k+l-1} у добијеној једнакости полинома, следи $\operatorname{Tr} AB = \operatorname{Tr} BA$. Ако су $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ и једна од матрица инвертибилна (нека је то, рецимо, A), важи $BA = A^{-1}(AB)A$, тј. $BA \sim AB$, па смо претходни закључак могли добити и на основу ранијих резултата, но видимо да он важи и у прилично општијем случају (чак AB и BA не морају бити истог типа).

Пример 28. Из дискусије спроведене након примера 19 следи да за $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ важи $\det(AB) = \det(BA)$ (оба израза су једнака $\det A \cdot \det B$). У случају да су $A \in M_{k,l}(\mathbb{C})$, $B \in M_{l.k}(\mathbb{C})$, где су $k, l \in \mathbb{N}$, $k > l$, изрази $\det A$ и $\det B$ немају смисла, али су дефинисани $\det(AB)$ и $\det(BA)$. Очекивано, последњи изрази не морају бити једнаки (важи $\det(AB) = 0$, пошто је $AB \in M_k(\mathbb{C})$ и $\rho(AB) \leqslant l < k$, док $\det(BA)$ не мора бити једнака 0; рецимо, ако су A и B матрице из примера 7, важи $\det(BA) = 2$). Међутим, резултат добијен у дискусији која је претходила примеру, тј. да важи $(-1)^l x^k \chi_{AB}(x) = (-1)^k x^l \chi_{BA}(x)$, даје одговарајући резултат и у овом случају (рецимо, видимо да AB и BA имају исте ненула сопствене вредности). Заиста, коефицијент уз x^k на десној страни добијене везе је $\det(BA)$, одакле се, изједначавањем са одговарајућим коефицијентом са леве стране једначине добија

$$\det(BA) = \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_l\leqslant k} \det\Big(A^{(v)}_{i_1},\ldots,A^{(v)}_{i_l}\Big)\cdot\det\Big(B^{(k)}_{i_1},\ldots,B^{(k)}_{i_l}\Big). \qquad (7.3)$$

У претходној вези се подразумева нотација коришћена у теореми 7.3.1, тј. $(B^{(k)}_{i_1},\ldots,B^{(k)}_{i_l})$ представља матрицу из $M_k(\mathbb{C})$ састављену од колона $i_1,\ldots,i_k$ (у том редоследу) матрице B, аналогно, $(A^{(v)}_{i_1},\ldots,A^{(v)}_{i_l})$ представља матрицу из $M_k(\mathbb{C})$ састављену од врста $i_1,\ldots,i_k$ (у том редоследу) матрице A, а претходна сума се може видети као сума по свим подкуповима од l елемената скупа $\{1,\ldots,k\}$ (дакле, у њој учествује $\binom{k}{l}$ сабирака). Рецимо, у случају $l=1$, ако је $A=(a_1,\ldots,a_k)^T$ и $B=(b_1,\ldots,b_k)$, добијамо да је $\det(BA)=\mathrm{Tr}(AB)=\sum\limits_{i=1}^{k}a_ib_i$, а ако су A и B матрице из примера 19, добијена формула говори да је $\det(BA)=\begin{vmatrix}2&1\\-1&2\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}2&1\\1&0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2&1\\0&1\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}2&-2\\1&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-1&2\\0&1\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}1&-2\\0&1\end{vmatrix}=$ $5\cdot(-1)+2\cdot4+(-1)\cdot1=2$. Једнакост (7.3) се по литератури обично назива **Коши–Бинеова формула**. Приметимо да разматрање овог примера има смисла и ако је $k=l$, а у том случају добијена формула доводи до $\det(BA)=\det A\cdot\det B$, те се та формула може схватити као специјалан случај формуле Коши–Бинеа. $\triangle$

Пример 29. Важи $\chi_{\alpha E_n}(x)=(\alpha-x)^n$, за $\alpha\in\mathbb{C}$ (па је $\mathrm{Tr}(\alpha E_n)=\alpha n$). Ако су A,B,C матрице из примера 13, важи $\chi_A(x)=x^2$, $\chi_B(x)=(x-2)(x-1)$, $\chi_C(x)=x^2+1$ (па је $\mathrm{Tr}\,A=0$, $\mathrm{Tr}\,B=3$, $\mathrm{Tr}\,C=0$). Приметимо да A и $0_{2\times2}$ имају исте карактеристичне полиноме, иако нису сличне. Ако је D_0 канонска форма матрице $D\in M_n(\mathbb{C})$, онда је $\mathrm{Tr}\,D_0=\rho(D)$. Ако је $F\in M_n(\mathbb{C})$ инвертибилна (што је еквивалентно са $\det F\neq0$), онда за $x\neq0$ важи $\chi_{F^{-1}}(x)=\det(F^{-1}-xE_n)=\det F^{-1}\cdot(-x)^n\cdot\det(F-\frac{1}{x}\cdot E_n)=\frac{(-1)^n}{\det F}\cdot x^n\chi_F(\frac{1}{x})$ (а како је добијени израз полином (ако се чланови $\chi_F(\frac{1}{x})$ помноже са x^n), након тога је добијена веза тачна и за $x=0$). Рецимо, важи $\chi_{B^{-1}}(x)=\frac{1}{2}\cdot x^2(\frac{1}{x}-1)(\frac{1}{x}-2)=(x-\frac{1}{2})(x-1)$. $\triangle$

Из претходног следи да за $A\in M_2(\mathbb{C})$ важи $\chi_A(x)=x^2-\mathrm{Tr}\,A\cdot x+\det A$ (упоредити са добијеним за матрицу D у примеру 15), док за $A\in M_3(\mathbb{C})$ важи $\chi_A(x)=-x^3+\mathrm{Tr}\,A\cdot x^2+k_2x+\det A$ (наравно, и k_2 се може исказати преко елемената матрице, но то нам у овом моменту није од интереса).

Лема 7.3.1. Нека је $n\in\mathbb{N}$ и $A\in M_n(\mathbb{C})$. (а) Ако су $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$, где је $k\in\mathbb{N}$, сопствене вредности A, при чему је $\lambda_i\neq\lambda_j$ за $i\neq j$, а $u_1,\ldots,u_k$ сопствени вектори који одговарају тим сопственим вредностима, редом, онда је систем $(u_i)_{i=1}^k$ линеарно независан.
(б) Матрица A је дијагонализабилна ако и само ако су све нуле μ_A просте.

Доказ. (а) Ако је $k=1$, тврђење је тривијално тачно. Ако је $k\geqslant2$ и тврђење тачно за $k-1$, уколико је $\sum\limits_{i=1}^{k}\alpha_iu_i=0$, за неке $\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in\mathbb{C}$,

онда је $A(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i u_i)=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i A u_i=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\lambda_i u_i=0$, па је $\sum_{i=1}^{k-1}\alpha_i(\lambda_i-\lambda_k)u_i=0$ (од друге везе је одузета прва, помножена са λ_k), а како је тврђење тачно за $k-1$, следи $\alpha_i(\lambda_i-\lambda_k)=0$, за $1\leqslant i\leqslant k-1$. Међутим, како је $\lambda_i\neq\lambda_k$, за $1\leqslant i\leqslant k-1$, последње значи да је $\alpha_i=0$, за $1\leqslant i\leqslant k-1$, но онда је и $\alpha_k=0$, те је тврђење доказано индукцијом.
(б) По коментарима датим након дефиниције 7.2.2, A је дијагонализабилна ако и само ако $\mathbb{C}^n$ има базу састављену од сопствених вектора A. Ако A има сличну дијагоналну, како минимални полином дијагоналне матрице има просте нуле и како произвољан полином поништава матрицу ако и само ако поништава све њој сличне матрице, следи да и минимални полином A има просте нуле. Са друге стране, ако је $\mu_A(x)=\prod_{i=1}^{k}(x-\lambda_i)$ и $\chi_A(x)=\prod_{i=1}^{k}(x-\lambda_i)^{\beta_i}$ и (при чему је $\lambda_i\neq\lambda_j$ за $i\neq j$), онда је $\operatorname{Ker}(A-\lambda_1E_n)+\ldots+\operatorname{Ker}(A-\lambda_kE_n)=\mathbb{C}^n$, а, на основу дела (а), добијена сума је и директна (за свако $1\leqslant i\leqslant k$, простору $\operatorname{Ker}(A-\lambda_iE_n)$ припадају сопствени вектори који одговарају λ_i, а како су сопствени вектори који одговарају различитим сопственим вредностима независни, следи $\operatorname{Ker}(A-\lambda_iE_n)\cap\sum_{j\neq i}\operatorname{Ker}(A-\lambda_jE_n)=\emptyset$). Следи да је $\delta(A-\lambda_iE_n)=\beta_i$, за $1\leqslant i\leqslant k$, те се у $\operatorname{Ker}(A-\lambda_iE_n)$ може изабрати β_i линеарно независних вектора, а тако изабрани вектори (за $1\leqslant i\leqslant k$) чине базу $\mathbb{C}^n$. $\square$

Из претходне леме следи да ако $A\in M_n(\mathbb{C})$ има n различитих сопствених вредности, онда је дијагонализабилна (ако су у питању $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$, онда је $\mu_A(x)=(-1)^n\chi_A(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-\lambda_i)$). Претходна разматрања показују да простор $\operatorname{Ker}(A-\lambda E_n)$, где је $A\in M_n(\mathbb{C})$ и λ сопствена вредност A, има посебну важност. У том случају је наведено језгро (прави) потпростор $\mathbb{C}^n$, који се назива **сопствени потпростор** који одговара сопственој вредности λ (наравно, $\operatorname{Ker}(A-\lambda E_n)$ има смисла за све $\lambda\in\mathbb{C}$, но ако није у питању сопствена вредност, онда је $\operatorname{Ker}(A-\lambda E_n)=\{0\}$). Аналогно, $\operatorname{Im}(A-\lambda E_n)$ је потпростор $\mathbb{C}^n$ (као и у случају језгра, смислено га је посматрати ако је λ сопствена вредност A, пошто је, ако то није случај, $A-\lambda E_n$ несингуларно, па је бијективно, тј. онда је наведена слика $\mathbb{C}^n$). Јасно, за $k\in\mathbb{N}$ важи $\operatorname{Ker}(A-\lambda E_n)^k\subseteq\operatorname{Ker}(A-\lambda E_n)^{k+1}$ и $\operatorname{Im}(A-\lambda E_n)^k\supseteq\operatorname{Im}(A-\lambda E_n)^{k+1}$ (уколико је $u\in\mathbb{C}^n$, ако је $(A-\lambda E_n)^ku=0$, онда је $(A-\lambda E_n)^{k+1}u=(A-\lambda E_n)(A-\lambda E_n)^ku=(A-\lambda E_n)0=0$, а ако је $u=(A-\lambda E_n)^{k+1}v$ за неко $v\in\mathbb{C}^n$, онда је $u=(A-\lambda E_n)^kv_1$, где је $v_1=(A-\lambda E_n)v$), као и да постоји l, тако да су низови (потпростора) $(\operatorname{Ker}(A-\lambda E_n)^k)_{k\geqslant1}$ и $(\operatorname{Im}(A-\lambda E_n)^k)_{k\geqslant1}$ константни почев од члана l (по претходном, $(\operatorname{Ker}(A-\lambda E_n)^k)_{k\geqslant1}$ је неопадајући (у смислу инклузије) низ потпростора коначно димензионалног простора $\mathbb{C}^n$, па за неко k мора бити $\operatorname{Ker}(A-\lambda E_n)^k=\operatorname{Ker}(A-\lambda E_n)^{k+1}$; у том случају, ако је $u\in\operatorname{Ker}(A-\lambda E_n)^{k+2}$, важи $(A-\lambda E_n)u\in\operatorname{Ker}(A-\lambda E_n)^{k+1}$, те следи $(A-\lambda E_n)u\in\operatorname{Ker}(A-\lambda E_n)^k$, односно $u\in\operatorname{Ker}(A-\lambda E_n)^{k+1}$; аналогно се показује одговарајућа веза за низ слика, пошто је $\mathrm{Im}(A-\lambda E_n)^{k+1}$ једнака слици рестрикције $A-\lambda E_n$ на простор $\mathrm{Im}(A-\lambda E_n)^k$). Како је $\dim \mathbb{C}^n = n$, јасно је да је $l \leqslant n$ (заправо, јасно је да важи и више, за уочено λ је l не веће од вишеструкости λ као нуле χ_A), а претходна разматрања доводе до закључка да је рестрикција $A-\lambda E_n$ на $\mathrm{Im}(A-\lambda E_n)^l$ (где је l горе описан природан број) инјективан оператор, док је рестрикција истог оператора на $\mathrm{Ker}(A-\lambda E_n)^l$ примењена l пута нула оператор (тј. на овом простору је $(A-\lambda E_n)^l = 0$).

Лема 7.3.2. Нека су $B, C \in M_n(\mathbb{P})$, тако да је $\mathrm{Ker}\, B \cap \mathrm{Ker}\, C = \{0\}$ и $BC = CB$. Онда је $\mathrm{Ker}\, BC = \mathrm{Ker}\, B \oplus \mathrm{Ker}\, C$.

Доказ. Важи $\mathrm{Ker}\, C \subseteq \mathrm{Ker}\, BC$ и $\mathrm{Ker}\, B \subseteq \mathrm{Ker}\, CB = \mathrm{Ker}\, BC$. Стога је збир простора $\mathrm{Ker}\, B$ и $\mathrm{Ker}\, C$ садржан у $\mathrm{Ker}\, BC$ (а, под наведеним условима, јасно је да је тај збир и директан), те још треба показати да је он једнак $\mathrm{Ker}\, BC$. Ако су B' и C' рестрикције B и C, редом, на $\mathrm{Ker}\, BC$ (онда је $B'C' = C'B' = 0$), на основу теореме о рангу и дефекту (теорема 7.1.3), важи $\dim \mathrm{Ker}\, BC = \delta(B') + \rho(B') \leqslant \delta(B') + \delta(C')$ (јер је $C'B' = 0$, па је $\mathrm{Im}\, B' \subseteq \mathrm{Ker}\, C'$), што даје тврђење (пошто је пресек језгара B' и C' тривијалан). $\square$

Ако је $A \in L(U)$ и U_1 потпростор U, онда се U_1 назива A **инваријантан** ако је $AU_1 \subseteq U_1$. Приметимо да је A инваријантан потпростор U_1 и $p(A)$ инваријантан, за произвољан $p \in \mathbb{C}[x]$ (заиста, онда за $k \geqslant 1$ важи $A^k U_1 \subseteq A^{k-1} U_1 \subseteq \ldots \subseteq U_1$), као и да су A инваријантни $\mathrm{Ker}\, A^j$ и $\mathrm{Im}\, A^j$, за свако $j \in \mathbb{N}$ (ако је $u \in A(\mathrm{Ker}\, A^j)$, важи $u = Av$, за неко v, тако да је $A^j v = 0$, па је $A^j u = A^{j+1} v = 0$; ако је $u \in A(\mathrm{Im}\, A^j)$, важи $u = Av$, за неко v, тако да је $v = A^j v_1$, за неко v_1, па је $u = A^j(Av_1)$). Из претходног следи и да су, за $A \in M_n(\mathbb{C})$, $i, j \in \mathbb{N}$ и $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, $(A-\lambda_1 E_n)^i$ инваријантни простори $\mathrm{Ker}(A-\lambda_2)^j$ и $\mathrm{Im}(A-\lambda_2)^j$.

Приметимо да, ако је $A \in L(U)$, U_1, U_2 потпростори V, који су A инваријантни и за које је $U = U_1 \oplus U_2$, уколико су $(e_i)_{i=1}^k$ и $(f_i)_{i=1}^l$ базе U_1 и U_2, редом, а $(h_i)_{i=1}^{k+l}$ база U, настала „надовезивањем” e и f (односно, важи $h_i = \begin{cases} e_i, & \text{за } 1 \leqslant i \leqslant k \\ f_{i-k}, & \text{за } k+1 \leqslant i \leqslant k+l \end{cases}$), онда $(A)_{h,h}$ има блок матрично представљање $\begin{pmatrix} (A_1)_{e,e} & 0_{k\times l} \\ 0_{l\times k} & (A_2)_{f,f} \end{pmatrix}$, где су A_1 и A_2 рестрикције A на U_1 и U_2, редом (заиста, ако је $u \in U$, постоје јединствени $u_1 \in U_1$ и $u_2 \in U_2$, тако да је $u = u_1 + u_2$, а онда је $Au = Au_1 + Au_2$, при чему је $Au_1 \in U_1$ и $Au_2 \in U_2$ (што говори да се у „доњем левом” и „горњем десном ћошку” $A_{h,h}$ налазе нула матрице)).

Теорема 7.3.4. (а) Матрица $A \in M_2(\mathbb{C})$ је слична или дијагоналној матрици или матрици $\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$, за неко $\alpha \in \mathbb{C}$.

(б) Матрица $A \in M_3(\mathbb{C})$ је слична или дијагоналној матрици или матрици $\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$, за неке $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, или матрици $\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$, за неко $\alpha \in \mathbb{C}$.

Доказ. (а) Ако је $\chi_A(x) = (x-\alpha)(x-\beta)$, где је $\alpha \neq \beta$, на основу дела (б) леме 7.3.1 (и коментара након ње), A има сличну дијагоналну (при чему се на дијагонали налазе, у неком редоследу, α и β). Ако је $\chi_A(x) = (x-\alpha)^2$, за неко $\alpha \in \mathbb{C}$, уколико је $\mu_A = x - \alpha$, по истој леми A има сличну дијагоналну (заправо, онда је $A = \alpha E_2$). Иначе, важи $\mu_A = (x-\alpha)^2$, тј. $\mathrm{Ker}(A-\alpha E_2)^2 = \mathbb{C}^2$, док је $\mathrm{Ker}(A-\alpha E_2) \neq \mathbb{C}^2$. Следи да постоји $u_2 \in \mathrm{Ker}(A-\alpha E_2)^2 \setminus \mathrm{Ker}(A-\alpha E_2)$, па ако је $u_1 = (A-\alpha E_2)u_2$, онда је $u_1 \neq 0$ и $(A-\alpha E_2)u_1 = (A-\alpha E_2)^2 u_2 = 0$, тј. важи $Au_1 = \alpha u_1$ и $Au_2 = \alpha u_2 + u_1$. Стога, је матрица оператора A у бази коју чине вектори u_1, u_2 (тим редом) управо наведена у тексту тврђења.
(б) Ако је $\mu_A(x) = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$, где су α, β, γ међусобно различити на основу дела (б) леме 7.3.1 (и коментара након ње), A има сличну дијагоналну (при чему се на дијагонали налазе, у неком редоследу, α, β и γ; као и у делу (а), редослед је одређен поретком одговарајућих сопствених вектора). Ако је $\chi_A(x) = (x-\alpha)(x-\beta)^2$, где је $\alpha \neq \beta$, уколико је $\mu_A = (x-\alpha)(x-\beta)$, по истој леми је A слична дијагоналној матрици, којој је један елемент главне дијагонале α, а два β, док у случају $\mu_A(x) = \chi_A(x)$, на основу леме 7.3.2 (за $B = \mathrm{Ker}(A-\alpha E_3)$ и $C = \mathrm{Ker}(A-\beta E_3)^2$) и коментара након ње, рестрикција A на B (који је димензије 1) је представљена матрицом чији је минимални полином $x-\alpha$, а рестрикција A на C (који је димензије 2) је представљена матрицом чији је минимални полином $(x-\beta)^2$, те, на основу дела (а), следи да је у овом случају A слична матрици која има блок матрично представљање облика $\mathrm{diag}(A_1, A_2)$, где је $A_1 = (\alpha)$, а $A_2 = \begin{pmatrix} \beta & 1 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$. Коначно, ако је $\chi_A = (x-\alpha)^3$, постоје 3 могућности. Ако је $\mu_A(x) = x - \alpha$, на основу леме 7.3.1, A има сличну дијагоналну (заправо, онда је $A = \alpha E_3$). Ако је $\mu_A(x) = (x-\alpha)^2$, постоји $u_3 \in \mathrm{Ker}(A-\alpha E_2)^2 \setminus \mathrm{Ker}(A-\alpha E_2)$, па ако је $u_2 = (A-\alpha E_2)u_3$, а $u_1 \in \mathrm{Ker}(A-\alpha E_2)$ произвољан независан са u_2 (такав постоји, пошто је у овом случају $\dim \mathrm{Ker}(A-\alpha E_2) = 2$), онда важи $Au_1 = \alpha u_1$, $u_2 \neq 0$ и $(A-\alpha E_2)u_2 = (A-\alpha E_2)^2 u_3 = 0$, односно $Au_2 = \alpha u_2$, као и $Au_3 = \alpha u_3 + u_2$. Стога, је матрица оператора A у бази коју чине вектори u_1, u_2, u_3 (тим редом) слична првој наведеној матрици из формулације теореме, у случају $\alpha = \beta$. Ако је $\mu_A(x) = (x-\alpha)^3$, онда је $\mathrm{Ker}(A-\alpha E_2)^3 \setminus \mathrm{Ker}(A-\alpha E_2)^2 \neq 0$, те избором u_3 који припада том скупу, ако је $u_2 = (A-\alpha E_3)u_3$ и $u_1 = (A-\alpha E_3)u_2$, следи да је $u_1 \neq 0, u_2 \neq 0$, као и $(A-\alpha E_3)u_1 = (A-\alpha E_3)^3 u_3 = 0$, односно $Au_1 = \alpha u_1$, па је $Au_2 = \alpha u_2 + u_1$ и $Au_3 = \alpha u_3 + u_2$. Следи да је представљање A у бази коју чине u_1, u_2, u_3, тим редом, друга наведена матрица из текста дела (б) теореме. $\square$

Пример 30. Ако је $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, важи $\chi_M(x) = \mu_M(x) = (x-1)(x-2)$, па је $M \sim B$, где је B матрица из примера 13. Притом је $M = P^{-1}BP$, где је P матрица чија је прва колона сопствени вектор који одговара сопственој вредности 1 (рецимо $(1, -2)^T$), а друга сопствени вектор који одговара сопственој вредности 2 (рецимо $(1,-1)^T$), а уколико би се обрнуо редослед колона (тј. ако је Q матрица чија је прва колона $(1,-1)^T$, а друга $(1,-2)^T$), онда је $Q^{-1}MQ$ друга дијагонална матрица из тог примера, која је слична матрици B. Ако је $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, онда је $\chi_N(x) = \mu_N(x) = x^2$, па је N слична матрици A из примера 13. Важи $\operatorname{Ker} N^2 = \mathbb{C}^2$ и $\operatorname{Ker} N = \{\lambda(1,1)^T \mid \lambda \in \mathbb{C}\}$, па, по претходним закључцима, избором произвољног $u_2 \in \operatorname{Ker} N^2 \setminus \operatorname{Ker} N$ (нека је, рецимо, $u_2 = (1,0)^T$), а $u_1 = Nu_2 = (1,1)^T$, долазимо до закључка да је $A = R^{-1}NR$, где је R матрица чија је прва колона u_1, а друга u_2. $\triangle$

Пример 31. Нека је $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ -2 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 9 & 13 & -18 \\ 5 & 5 & -6 \end{pmatrix}$. Онда је $\chi_A(x) = \chi_B(x) = -(x-4)^3$, док је $\mu_A(x) = (x-4)^3$, а $\mu_B(x) = (x-4)^2$. По резултатима претходне теореме, важи $A \sim J_A$ и $B \sim J_B$, где је $J_A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ и $J_B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Притом важи $\operatorname{Ker}(A - 4E_3) = \{\lambda(2,3,1)^T \mid \lambda \in \mathbb{C}\}$ и $\operatorname{Ker}(A-4E_3)^2 = \{(x,y,z)^T \mid -x+2y-4z = 0\}$, па избором $u_3 \in \operatorname{Ker}(A-4E_3)^3 \setminus \operatorname{Ker}(A-4E_3)^2$ (нека је, рецимо, $u_3 = (1,1,0)^T$), а $u_2 = (A-4E_3)u_3 = (-2,-1,0)$ и $u_1 = (A-4E_3)u_2 = (2,3,1)^T$, на основу дискусије спроведене у претходној теореми, ако је P матрица чије су колоне u_1, u_2, u_3, тим редом, онда је $J_A = P^{-1}AP$. Слично, како је $\operatorname{Ker}(B-4E_3) = \{(x,y,z)^T \mid x+y-2z = 0\}$ и $\operatorname{Ker}(B-4E_3)^2 = \mathbb{C}^2$, узевши $u_3 \in \operatorname{Ker}(B-4E_3)^2 \setminus \operatorname{Ker}(B-4E_3)$ (нека је, рецимо, $u_3 = (1,0,0)^T$), ако је $u_2 = (B-4E_3)u_3 = (1,9,5)^T$, а u_1 произвољан вектор из $\operatorname{Ker}(B-4E_3)$ који је независан са u_2 (нека је, рецимо, $u_1 = (1,1,1)^T$), онда је $J_B = Q^{-1}BQ$, где је Q матрица чије су колоне u_1, u_2, u_3, тим редом. $\triangle$

У претходној теореми је, за $A \in M_2(\mathbb{C})$ и $A \in M_3(\mathbb{C})$, одређен „леп представник” класе еквиваленције релације сличности. И за $A \in M_n(\mathbb{C})$, где је $n \geqslant 4$, се може показати сличан резултат, односно, свака квадратна матрица је слична матрици која има блок матрично представљање облика $\operatorname{diag}(A_1, \dots, A_r)$, где, за свако $1 \leqslant i \leqslant r$, је или $A_i = (\lambda)$, при чему је λ сопствена вредност A, или, у случају да је $A_i \in M_s(\mathbb{C})$, $s \geqslant 2$, се на дијагонали A_i налази λ, које је сопствена вредност A, на местима $(i, i+1)$, за $1 \leqslant i \leqslant s-1$, су елементи једнаки 1, а на осталим местима се налазе 0. Последње описана матрица се назива **Жорданов блок** димензије s који одговара сопственој вредности λ, у ознаци $J(\lambda, s)$ (матрица наведена у формулацији дела (а) претходне теореме је, по овим ознакама, $J(\alpha, 2)$, а друга матрица наведена у формулацији дела (б) те теореме је $J(\alpha, 3)$; притом, сматрамо да је $J(\lambda, 1) = (\lambda)$), док се матрица облика $\operatorname{diag}(A_1, \dots, A_r)$, где су A_i Жорданови блокови, за $1 \leqslant i \leqslant r$, која је слична матрици A се назива **Жорданова форма** те матрице. Уз претходно, ако је $\chi_A(x) = (-1)^n \prod_{i=1}^{k} (x - \lambda_i)^{\beta_i}$ и $\mu_A(x) = \prod_{i=1}^{k} (x - \lambda_i)^{\alpha_i}$,

где је $\lambda_i \neq \lambda_j$ за $i \neq j$, се у Жордановој форми матрице A елемент λ_i, за $1 \leqslant i \leqslant k$, јавља на дијагонали тачно β_i пута (односно, збир димензија Жордановых блокова који одговарају сопственој вредности λ_i је β_i), а највећа димензија Жордановог блока који одговара тој сопственој вредности је α_i. Доказ наведеног тврђења излази изван оквира овог текста (но, кључни кораци доказа су приказани у претходном делу).
По приказаном у претходном делу, видимо да, за $A \in M_2(\mathbb{C})$ и $A \in M_3(\mathbb{C})$, на основу минималног и карактеристичног полинома можемо одредити Жорданову форму те матрице (то је тврђење претходне теореме), као и у случају да су нуле минималног полинома просте (то је тврђење дела (б) леме 7.3.1). Међутим, последње није довољно у случају $n \geqslant 4$. Рецимо, ако је $A \in M_4(\mathbb{C})$, $\chi_A(x) = (x-\lambda)^4$ и $\mu_A(x) = (x-\lambda)^2$, за неко $\lambda \in \mathbb{C}$, Жорданова форма A може бити и $\operatorname{diag}(J(\lambda,1), J(\lambda,1), J(\lambda,2))$ и $\operatorname{diag}(J(\lambda,2), J(\lambda,2))$, те је (очекивано) у случају $n \geqslant 4$ одређивање Жорданове форме технички захтевније (видимо да је онда потребно прецизније испитивање простора $\operatorname{Ker}(A-\lambda_i)^j$, где је λ_i сопствена вредност матрице A, а $j \in \mathbb{N}$, односно, што је еквивалентно, дефинисање низа тзв. инваријантних полинома матрице). Још једном напоменимо да је Жорданова форма у општем случају није јединствена, већ је једнозначно одређена до на пермутацију блокова, но последње се контролише утврђивањем редоследа сопствених вектора у матрици преласка. По литератури се често виђа (у зависности од тога које су даље потребе рада са матрицом, након свођења на овакво представљање) и да се дефинишу блокови којима су елементи 1 на местима $(i-1,i)$ (тј. на „првој дијагонали испод", а не „изнад" главне), но то се једноставно постиже другим редоследом добијених сопствених вектора (рецимо, уколико су вектори u_1, u_2, u_3 добијени у претходном примеру приликом одређивања J_A, а R матрица чије су колоне u_3, u_2, u_1, тим редоследом, онда је $R^{-1}AR$ матрица која на главној дијагонали има елементе једнаке 4, на местима $(2,1)$ и $(3,2)$ елементе једнаке 1, а на осталим 0). Приметимо и да је матрица оператора приказаног у уводном делу ове главе (диференцирање на простору полинома степена не већег од $n \in \mathbb{N}$) у бази $(1, \frac{t}{1}, \ldots, \frac{t^n}{n!})$, једнака $J(0, n+1)$.

Како се у $\mathbb{R}[x]$ произвољан полином не може раставити на линеарне факторе, природно питање је који се (и у ком облику) од претходно добијених резултата преноси на случај $A \in M_n(\mathbb{R})$.

Лема 7.3.3. Ако је $n \in \mathbb{N}$ и $A, B \in M_n(\mathbb{C})$, тако да је $A \sim B$. Ако су $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, онда су A и B сличне и у $M_n(\mathbb{R})$.

Доказ. По условима, постоји $P \in M_n(\mathbb{C})$, тако да је $B = P^{-1}AP$. Ако је $P = Q + iR$, за $Q, R \in M_n(\mathbb{R})$ (уочено представљање је јединствено), онда је $PB = AP$, тј. $QB + iRB = AQ + iAR$, одакле је (пошто A и B имају реалне елементе) $QB = AQ$ и $RB = AR$, па је $(Q+zR)B = A(Q+zR)$, за свако $z \in \mathbb{C}$. Довољно је показати да постоји $z \in \mathbb{R}$, тако да је $Q + zR$ инвертибилна. Ако је $R = 0$, то је испуњено (онда је $P = Q$), а, иначе,

$Q + zR$ је сингуларна ако и само ако је $\det(Q + zR) = 0$. Међутим, ако је $R \neq 0$, $\det(Q + zR)$ је неконстантан полином (променљиве z), степена не већег од n, те може имати највише n нула, односно, важи $\det(Q + zR) \neq 0$ за све, сем коначно много z, па постоји и $z \in \mathbb{R}$, тако да је $Q + zR \in M_n(\mathbb{R})$ инвертибилна. □

Претходни резултат говори да, ако су све сопствене вредности матрице $A \in M_n(\mathbb{R})$ реалне, се преносе добијени резултати (између осталих, лема 7.3.1 и теорема 7.3.4), а притом се и матрица прелаcка може изабрати тако да припада $M_n(\mathbb{R})$. Међутим, ако нека сопствених вредности припада $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, тако нешто није могуће (рецимо, матрица C из примера 13 нема сличну дијагоналну у $M_2(\mathbb{R})$). Уколико је жеља да се у свакој класи еквиваленције релације сличности $A \in M_n(\mathbb{R})$ одреди представник из $M_n(\mathbb{R})$ (као и да матрица преласка буде реална), јасно је да се не можемо задржати на Жордановој форми, већ да се морају одредити „други представници". Наравно, тај избор није једнозначан, овде ћемо приказати једну од могућности у случају $n \in \{2, 3\}$.

Лема 7.3.4. (а) Ако је $A \in M_2(\mathbb{R})$ и $z = a + ib$, где је $b \neq 0$, сопствена вредност A, онда је $A \sim \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.
(б) Ако је $A \in M_3(\mathbb{R})$ и $z = a + ib$, где је $b \neq 0$, сопствена вредност A, онда је $A \sim \begin{pmatrix} a & -b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$, за неко $c \in \mathbb{R}$.

Доказ. (а) Како је $\chi_A \in \mathbb{R}[x]$, следи да су $a + ib$ и $a - ib$ сопствене вредности A, као и да су просте, па је (у $M_2(\mathbb{C})$) матрица A слична са $\mathrm{diag}((a + ib), (a - ib))$, која је слична са матрицом која је наведена у формулацији (заиста, имају исти минимални, као и исти карактеристични полином), а пошто та матрица припада $M_2(\mathbb{R})$, резултат следи на основу леме 7.3.3.
(б) Како је $\chi_A \in \mathbb{R}[x]$, следи да χ_A има просте нуле $a - ib$, $a + ib$, као и још једну реалну нулу (нека је то c), па је, на основу дела (б) леме 7.3.1, слична са $\mathrm{diag}((a + ib), (a - ib), (c))$. По добијеном у делу (а), следи да је слична (у $M_3(\mathbb{C})$) и са матрицом наведеном у формулацији, те резултат следи на основу леме 7.3.3. □

Приметимо да, уколико се $a+ib$, где је $b \neq 0$, запише у поларном облику (видети пример 51 главе 4, као и коментаре након примера 46 исте главе), тј. ако је $a+ib = R(\cos\psi + i\sin\psi)$, онда је запис матрице описане у делу (а) претходне леме $M(R, \psi) = \begin{pmatrix} R\cos\psi & -R\sin\psi \\ R\sin\psi & R\cos\psi \end{pmatrix}$, па ако је $(x, y)^T = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)^T$ (тј. ако и координате наведеног вектора запишемо преко поларних координата), важи $M(R, \psi) \cdot (r\cos\varphi, r\sin\varphi)^T = (Rr\cos(\psi + \varphi), Rr\sin(\psi + \varphi))^T$, те је јасно да је избор баш матрице наведеног облика да игра улогу представника класе еквиваленције релације сличности мотивисано геометријским потребама (те не изненађује што

ће се ова матрица појављивати приликом испитивања геометријских особина простора $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$).
Нерастављиви полиноми из $\mathbb{R}[x]$ су или линеарни или квадратни, што је и разлог што представници описаних класа имају блок матрични запис у ком учествују блокови реда 1 и 2, а како смо се у последњем тврђењу задржали на случају $M_2(\mathbb{R})$ и $M_3(\mathbb{R})$, није се појавила могућност вишеструке комлексне нуле. По аналогији приказаног у вези са Жордановим блоковима, приликом испитивања $M_n(\mathbb{R})$, за $n \geqslant 4$, може се показати да сваки представник класе одређене чланом $(x^2 - 2ax + a^2 + b^2)^k$ (где је $k > 1$ и $b > 0$) има блок матрични запис облика $\begin{pmatrix} M & E_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & M & E_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \end{pmatrix}$, где је $M = M(a,b) \in M_2(\mathbb{R})$ матрица наведена у делу (а) претходне леме, тј. елементи матрице у претходном запису су из $M_2(\mathbb{R})$, на главној дијагонали се налазе $M(a,b)$, на „првој изнад главне” E_2, а на осталим местима $0_{2\times 2}$ (притом је последња матрица реда $2s$, где је $s \leqslant k$; ако је $s = 2$, онда је једнака $M(a,b)$). Последње је наведено је зарад потпуности информација, а доказ изостављамо, пошто излази изван оквира овог текста.

7.4. Методе решавања система линеарних једначина

Једначина облика $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = b$, где су $a_i, b \in \mathbb{P}$, за $1 \leqslant i \leqslant n$, се назива **линеарна једначина** у пољу $\mathbb{P}$, при чему се a_i називају коефицијенти, b слободни члан (те једначине), а x_i, за $1 \leqslant i \leqslant n$, непознате. Аналогно, коначан скуп линеарних једначина $a_{i,1}x_1 + \ldots + a_{i,n}x_n = b_i$, за $1 \leqslant i \leqslant m$, где су $a_{i,j} \in \mathbb{P}$, за све $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$, а $b_i \in \mathbb{P}$, за све $1 \leqslant i \leqslant m$, се назива **систем линеарних једначина** са непознатим x_i, за $1 \leqslant i \leqslant n$ (линеарна једначина је, по претходном, систем који се састоји од једне једначине). Јасно, систем се може видети у облику $Ax = b$, где је $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant m} \in M_{m,n}(\mathbb{P})$ и $b = (b_1, \ldots, b_m)^T \in M_{m,1}(\mathbb{P})$, а $x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in M_{n,1}(\mathbb{P})$ колона непознатих (говорићемо да је у питању систем са n непознатих; притом се A назива матрица система, а b слободна колона). Због компактности последњег записа, користиће се кад год не може доћи до забуне, а он сугерише и да је решавање система линеарних једначина блиско повезано са проучавањем линеарних пресликавања које је спроведено у претходном делу ове глеве. **Партикуларно решење** система $Ax = b$, где је $A \in M_{m,n}(\mathbb{P})$, $b \in M_{m,1}(\mathbb{P})$, је произвољан $x \in M_{n,1}(\mathbb{P})$ који задовољава наведену једначину, а скуп свих решења се назива **опште решење** тог система. Системи се називају **еквивалентни** ако имају исто опште решење. Ако је

$b = 0 \in M_{m,1}(\mathbb{P})$ (тј. нула колона у уоченом простору), систем се назива **хомоген**, а, иначе, ћемо рећи да је **нехомоген**. Уколико систем има макар једно решење, говори се да је **сагласан** (тј. ако нема решења, да је несагласан), а ако има јединствено решење, да је **одређен** (тј. ако има више решења, да је неодређен).
Јасно је да хомоген систем $Ax = 0$, где је $A \in M_{m,n}(\mathbb{P})$ увек има решења (рецимо, решење је $x = 0$), као и да је опште решење векторски потпростор U простора $\mathbb{P}^n$ (заиста, ако су x_1, x_2 партикуларна решења, а $\alpha, \beta \in \mathbb{P}$, онда је $A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha A x_1 + \beta A x_2 = 0$). Слично, ако је $x^{(p)}$ партикуларно решење нехомогеног система $Ax = b \neq 0$, за произвољно решење x тог система важи $A(x - x^{(p)}) = Ax - Ax^{(p)} = b - b = 0$, односно $x - x^{(p)}$ је решење хомогеног система $Ax = 0$, те је, по претходном, $\{x - x^{(p)} \,|\, Ax = b\}$ векторски простор, тј. онда је опште решење облика $x^{(p)} + U = \{x^{(p)} + x \,|\, x \in U\}$, где је U векторски потпростор простора $\mathbb{P}^n$, а овакав простор се назива **афини** простор (из последњег видимо да се одређивањем једног партикуларног решења, ако такво постоји, решавање нехомогеног своди на решавање хомогеног система). У оба случаја је решење јединствено ако и само ако је U тривијалан.
У циљу повезивања решавања система линеарних једначина са претходним разматрањима при раду са матрицама, придружимо систему $Ax = b$, где је $A \in M_{m,n}(\mathbb{P})$, $b \in M_{m,1}(\mathbb{P})$, матрицу чији је блок матрични запис $(A\, b)$, тј. матрицу из $M_{m,n+1}(\mathbb{P})$, која настаје „додавањем” колоне b на матрицу A, која се обично назива проширена матрица уоченог система (често се, да би се назначило да је урађена претходна операција, ова матрица записује и у облику $(A \,|\, b)$). Јасно је да се сваком систему линеарних једначина једнозначно придружије проширена матрица система, као и да, уколико је познато са којим се напознатим ради, се из те матрице једнозначно може реконструисати систем.
Приметимо да елементарним трансформацијама врста, спроведеним на уоченој матрици, добија матрица система који је еквивалентан полазном. Заиста, довољно је проверити то за основне елементарне трансформације. Ако је спроведена трансформација (1) (множење j-те врсте са $\alpha \neq 0$), остале једначине система се не мењају, а j-та постаје $\alpha a_{j,1} x_1 + \ldots + \alpha a_{j,n} x_n = \alpha b_j$, а како је $\alpha \neq 0$ и $\mathbb{P}$ поље, она је еквивалентна са $a_{j,1} x_1 + \ldots + a_{j,n} x_n = b_j$. Ако је спроведена операција (2) (додавење j-те врсте на k-ту, за $j \neq k$), k-та једначина постаје $(a_{k,1} + a_{j,1}) x_1 + \ldots + (a_{k,n} + a_{j,n}) x_n = b_j + b_k$, док су остале непромењене, те се одузимањем j-те једначине од наведене (што не мења опште решење система), она трансформише у $a_{k,1} x_1 + \ldots + a_{k,n} x_k = b_k$. Ако је примењена операција (3) (замена две врсте), скуп једначина остаје непромењен (само је замењен њихов редослед), те се, тривијално, не мења опште решење. Дакле, вршењем елементарних трансформација на врстама проширене матрице система, добија се матирца којој одговара еквивалентан систем, те, на основу дискусије спроведене након дефиниције 7.2.4, за сваки систем постоји њему еквивалентан, који је у степенастој форми (онда се и за тај систем каже да је у степенастој

форми). За систем који је у степенастој форми, променљиве које су уз носеће елементе називамо **водеће променљиве**, а преостале називамо **слободне променљиве**.

Теорема 7.4.1 (Кронекер–Капели). Систем $Ax = b$, где је $A \in M_{m,n}(\mathbb{P})$, $b \in M_{m,1}(\mathbb{P})$, је сагласан ако и само ако је $\rho(A) = \rho((A\,|\,b))$ (тј. ако је ранг матрице система једнак рангу проширене матрице тог система).

Доказ. Јасно је да је ранг проширене матрице или једнак или је за један већи од ранга матрице система (проширена матрица система има једну колону више). Притом је за један већи ако и само ако један од носача припада слободној колони, а, у том случају, ако тај носач припада j-тој врсти, одговарајућа једначина је облика $0x_1+\ldots+0x_n = b_j \neq 0$, па систем нема решења. Са друге стране, ако су наведени рангови једнаки, додељивањем слободним променљивим произвољне вредности, једнозначно су одређене вредности водећих променљивих. Заиста, последња једначина система у степенастој форми има једну водећу променљиву, тј. облика је (ако је у питању j-та једначина и водећа променљива x_k, где је $k \geqslant j$) $a_{j,k}x_k + \ldots + a_{j,n}x_n = b_n$, те се из те једначине (преко слободних променљивих и коефицијената система у степенастој форми) једнозначно одређује x_k, а након тога, понављањем поступка (тј. индуктивно), долазимо до вредности осталих водећих променљивих. □

Поменимо да се претходно тврђење по литератури појављује под различитим именима (по енглеској литератури се обично назива теорема Руше–Капелија, а по другим говорним подручјима се везује и за имена Фробенијуса, Фонтена,...). Поступак свођења система на степенасту форму се назива Гаусов метод (а трансформације које одговарају трансформацијама врста проширене матрице се називају Гаусове трансформације). Из претходног доказа можемо закључити и више, ако је у питању хомоген систем са n променљивих, онда је $\rho(A) = \rho((A\,|\,b))$, а простор решења је векторски потпростор простора $\mathbb{P}^n$ димензије $n - \rho(A)$ (а по теореми о рангу и дефекту (теорема 7.1.3), та димензија је $\delta(A)$), а ако је у питању нехомоген систем за који је $\rho(A) = \rho((A\,|\,b))$, онда је простор решења афини потпростор простора $\mathbb{P}^n$ димензије $n - \rho(A) = \delta(A)$ (у оба случаја решење је јединствено ако је $\rho(A) = n$, тј. $\delta(A) = 0$). У наставку ћемо, приликом оваквих ситуација, говорити да је простор решења димензије $\delta(A)$, без наглашавања да ли је у питању векторски или афини, ако је из контекста јасно о ком случају се ради. Видимо и да, ако је $\mathbb{P}$ бесконачно поље, случај више решења заправо говори да онда има бесконачно решења (тако да се, по литературама у којима се се ради само са бесконачним пољима, у том случају често говори да је број решења бесконачан (специјално, то се дешава ако се ради са системима у $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$)). Често се, ако је то прегледније, променљиве означавају различитим симболима, тј.

без употребе индекса, што је нарочито заступљено ако је n „мало” (по школској литератури се најчешће виђају променљиве x, y у случају система са 2, а x, y, z у случају система са 3 непознате).

Наравно, приликом свођења система на степенасту форму (из које, како смо видели, се лако одређује решење), могу се користити и елементарне трансформације колона, но онда се мора памтити које су се трансформације колона вршиле, пошто долази до промене улоге променљивих. На пример, уколико су полазне променљиве $(x_i)_{i=1}^n$, а j-та колона дода на k-ту, за $j \neq k$, онда ће променљива на k-том месту бити $x_j + x_k$ (док ће остале бити непромењене), тј. након добијања решења се морају полазне променљиве додатно изразити преко новодобијених. Стога се у пракси или избегава вршење операција на колонама или се врши само операција замене колона (пошто се на тај начин у добијеној степенастој форми обезбеђује да носећи елементи припадају главној дијагонали проширене матрице система, а одређивање полазних променљивих преко новодобијених је праволинијско (новодобијене чине пермутацију полазних)).

Решавање система је присутно од самог почетка ове главе (приликом испитивања линеарне зависности вектора, одређивања слике или језгра линеарног пресликавања, ранга матрице,...). Рецимо, у примеру 2, одређивање $U \cap (V+W)$ се своди на решавање система $x = a$, $y = a$, $z = 0$, $z = a+b$, за неке $a, b \in \mathbb{R}$, одговарајућа степенаста форма је $x = a$, $y = a$, $z = 0$, $0 = a + b$, те има решења ако и само ако је $a + b = 0$, а у том случају је решење $(x, y, z) = (a, a, 0)$, за $a \in \mathbb{R}$. Слично, у примеру 3, приказивање $(a, b, c)^T \in \mathbb{R}^3$ у облику $u_1 + u_2$, где је $u_1 = (x, y, 0)^T \in U_1$, $u_2 = (t, 0, z)^T \in U_2$, се своди на решавање система $x + t = a$, $y = b$, $z = c$, који се, заменом прве и треће једначине, своди на степенасту форму, те су водеће променљиве z, y, x, а слободна t, одакле следи да је решење система (афини или векторски, у зависности од a, b, c) потпростор димензије 1, односно $(x, y, z, t) \in \{(a - \alpha, b, c, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$.

Пример 32. Ако су $\varphi, \psi \in [0, 2\pi)$, у $\mathbb{R}^2$ решимо систем $\cos\psi \cdot x - \sin\psi \cdot y = \cos\varphi$, $\sin\psi \cdot x + \cos\psi \cdot y = \sin\varphi$. Ако је $\psi = \frac{\pi}{2}$, постаје $-y = \cos\varphi$, $x = \sin\varphi$, те има јединствено решење $(x, y) = (\sin\varphi, -\cos\varphi)$. Слично, ако је $\psi = \frac{3\pi}{2}$, добија се јединствено решење $(x, y) = (-\sin\varphi, \cos\varphi)$. Иначе је $\cos\psi \neq 0$, па се трансформацијама проширене матрице придружене систему добија $\left(\begin{array}{cc|c} \cos\psi & -\sin\psi & \cos\varphi \\ \sin\psi & \cos\psi & \sin\varphi \end{array}\right) \xrightarrow{\cos\psi \cdot V_2}$ $\left(\begin{array}{cc|c} \cos\psi & -\sin\psi & \cos\varphi \\ \sin\psi\cos\psi & \cos^2\psi & \sin\varphi\cos\psi \end{array}\right) \xrightarrow{V_2 - \sin\psi \cdot V_1} \left(\begin{array}{cc|c} \cos\psi & -\sin\psi & \cos\varphi \\ 0 & 1 & \sin(\varphi - \psi) \end{array}\right)$, те је у овом случају ранг и матрице система и проширене матрице једнак 2, а како је матрица система из $M_2(\mathbb{R})$, следи да систем има јединствено решење, које лако добијамо из последњег облика. Наиме, важи $y = \sin(\varphi - \psi)$, док је $x = \frac{1}{\cos\psi} \cdot (\sin\psi\sin(\varphi - \psi) + \cos\varphi) = \frac{1}{2\cos\psi} \cdot (\cos(\varphi - 2\psi) - \cos\varphi + 2\cos\varphi) = \frac{1}{2\cos\psi} \cdot 2\cos(\varphi - \psi)\cos\psi = \cos(\varphi - \psi)$, те је решење $(x, y) = (\cos(\varphi - \psi), \sin(\varphi - \psi))$. Приметимо да се последње добијена формула уклапа и за добијено у случају $\varphi \in \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}$, као и да је матрица претходног система $M(1,\psi)$, посматрана након леме 7.3.4, те се добијени резултат „надовезује” на тамо добијени. $\triangle$

Пример 33. У $\mathbb{R}^3$ решимо системе $x+y+z=a$, $2x+4y+7z=a-1$, $5x+9y+15z=a^2$, као и $bx+y+z=1$, $x+by+z=b$, $x+y+bz=b^2$, где су $a,b\in\mathbb{R}$. У случају првог система, његова матрица је A, посматрана у примеру 16, те поновивши исте операције као и у том примеру (тј. V_2-2V_1, V_3-5V_1, а након тога V_3-2V_2) на проширену матрицу система $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 2 & 4 & 7 & a-1 \\ 5 & 9 & 15 & a^2 \end{array}\right)$, добија се $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & 5 & -a-1 \\ 0 & 0 & 0 & (a-2)(a-1) \end{array}\right)$, што је проширена матрица еквивалентног система. Ако $a\notin\{1,2\}$, онда је $(a-2)(a-1)\neq 0$, па ранг проширеног система већи од ранга матрице система, те у овом случају нема решења, а ако је $a\in\{1,2\}$, како је $\delta(A)=1$, следи да је решење простор димензије 1. Притом, у случају $a=1$, решење је $(x,y,z)=\{(\frac{3t+4}{2},\frac{-5t-2}{2},t)\,|\,t\in\mathbb{R}\}$, а у случају $a=2$, решење је $(x,y,z)=\{(\frac{3t+7}{2},\frac{-5t-3}{2},t)\,|\,t\in\mathbb{R}\}$. У случају другог наведеног система, вршећи Гаусове трансформације, добијамо

$$\left(\begin{array}{ccc|c} b & 1 & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 & b \\ 1 & 1 & b & b^2 \end{array}\right) \xrightarrow{V_1\leftrightarrow V_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & b & b^2 \\ 1 & b & 1 & b \\ b & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[V_3-bV_1]{V_2-V_1,} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & b & b^2 \\ 0 & b-1 & 1-b & b(1-b) \\ 0 & 1-b & 1-b^2 & 1-b^3 \end{array}\right).$$

Ако је $b=1$, добијена матрица је у степенастој форми (сви елементи друге и треће врсте су једнаки 0), па су онда рангови и матрице система и проширене матрице једнаки 1, тј. у овом случају систем има решења, у питању је простор димензије 2, а опште решење је $\{(1-\beta-\gamma,\beta,\gamma)\,|\,\beta,\gamma\in\mathbb{R}\}$. Ако је $b\neq 1$, важи $b-1\neq 0$, па се, вршењем операција $\frac{1}{b-1}\cdot V_2$ и $\frac{1}{1-b}\cdot V_3$, наведена матрица своди на

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & b & b^2 \\ 0 & 1 & -1 & -b \\ 0 & 1 & b+1 & b^2+b+1 \end{array}\right) \xrightarrow{V_3-V_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & b & b^2 \\ 0 & 1 & -1 & -b \\ 0 & 0 & b+2 & (b+1)^2 \end{array}\right),$$ те следи да

у случају $b=-2$ нема решења (матрица система је ранга 2, а проширене 3), док у преосталим случајевима (односно, ако је $b\notin\{-2,1\}$) систем има јединствено решење (онда је ранг обе поменуте матрице једнак 3), а то решење је $(x,y,z)=\left(-\frac{b+1}{b+2},\frac{1}{b+2},\frac{(b+1)^2}{b+2}\right)$. У претходном је, у случају другог посматраног система, спроведен алгоритам свођења на степенасту форму у облику у ком је описан у претходном делу текста. До резултата се могло доћи и изменама тог алгоритма, које су у неким ситуацијама мање рачунски захтевне. Конкретно, ако се на почетку изврше операције V_1+V_2 и V_1+V_3, добија се да је прва врста $(b+2,b+2,b+2,b^2+b+1)$, те опет добијамо закључак да нема решења ако је $b=-2$, а након тога, у случају $b\neq 2$, применом операција $V_2-\frac{1}{b+2}\cdot V_1$ и $V_3-\frac{1}{b+2}\cdot V_1$ се, ако је $b=1$ добија систем чије су друга и трећа једначина $0=0$ (те опет долазимо до горе наведеног закључка), а ако је $b\notin\{-2,1\}$, друга и трећа једначина садрже једну промењљиву (чине дијагоналан систем), одакле добијамо вредности y и z, а након тога и вредност променљиве x из прве једначине. Често се у другим случајевима изменама алгоритма долази до рачунски мање захтевног решења (уштеда у последње описаном поступку посебно долази до изражаја при решавању система са већим бројем једначина и непознатих, рецимо, код аналогије претходног система у $\mathbb{R}^n$, система састављеног од $n \in \mathbb{N}$ једначина, чија је i-та једначина $\sum\limits_{j \neq i} x_j + bx_j = b^{j-1}$, за $1 \leqslant i \leqslant n$, где је $b \in \mathbb{R}$). $\triangle$

Пример 34. У $\mathbb{C}^2$ решимо систем $\lambda x + y = 1$, $-x + \lambda y = \lambda$, где је $\lambda \in \mathbb{C}$. Трансформацијама врста проширене матрице система добијамо $\left(\begin{array}{cc|c} \lambda & 1 & 1 \\ -1 & \lambda & \lambda \end{array}\right) \xrightarrow{V_1 \leftrightarrow V_2} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & \lambda & \lambda \\ \lambda & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{V_1 + \lambda V_2} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & \lambda & \lambda \\ 0 & 1+\lambda^2 & 1+\lambda^2 \end{array}\right)$, па је добијена степенаста форма. Ако $\lambda \notin \{-i, i\}$, рангови и матрице и проширене матрице система су једнаки 2, па је $(x, y) = (0, 1)$ јединствено решење, а ако $\lambda \in \{-i, i\}$, оба наведена ранга су једнаки 1, те постоји више решења, тј. простор решења је димензије 1, а то решење је $(x, y) \in \{(i(\alpha - 1), \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{C}\}$ у случају $\lambda = i$, а $(x, y) \in \{(i(1-\alpha), \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{C}\}$ у случају $\lambda = -i$. Приметимо да, ако се исти систем решава у $\mathbb{R}^2$, за $\lambda \in \mathbb{R}$, решење је јединствено за сваку вредност параметра λ. $\triangle$

Пример 35. Ако је $a \in \mathbb{C}$ и $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, решимо једначину $AX = XA$ у скупу матрица са елементима из $\mathbb{C}$. Јасно, због дефинисаности, мора бити $X \in M_2(\mathbb{C})$, па ако је $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, из наведене једначине (изједначавањем компоненти матрица са различитих страна једначине) се добија систем линеарних једначина $x + az = x, y + at = ax + y, z = z, t = az + t$, односно $az = 0, a(x - t) = 0$. Дакле, ако је $a = 0$, решење је произвољна $X \in M_2(\mathbb{C})$ (дакле, простор димензије 4), а ако је $a \neq 0$, опште решење је $\left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha, \beta \in \mathbb{C} \right\}$ (тј. простор димензије 2). Приметимо да смо у претходном одредили које матрице комутирају са Жордановим блоком реда 2. $\triangle$

При решавању система су од користи и резултати добијени приликом проучавања детерминанти (наравно, они се односе на квадратне системе, тј. дају резултате при проучавању линеарних оператора).

Теорема 7.4.2 (Крамерово правило). Нека је $n \in \mathbb{N}$, $A \in M_n(\mathbb{P})$, $b \in M_{n,1}(\mathbb{P})$ и $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$. Ако је $\Delta = \det A$, а, за свако $1 \leqslant i \leqslant n$, Δ_{x_i} детерминанта матрице чије је i-та колона једнака b, а, j-та једнака j-тој колони матрице A, за све $j \neq i$, онда:
(а) важи $\Delta \neq 0$ ако и само ако систем $Ax = b$ има јединствено решење, а у том случају је $x_i = \frac{\Delta_{x_i}}{\Delta}$, за свако $1 \leqslant i \leqslant n$;
(б) ако је $\Delta = 0$ и $\Delta_{x_i} \neq 0$ за неко $1 \leqslant i \leqslant n$, систем $Ax = b$ нема решења.

Доказ. (а) Ако $Ax = b$ има јединствено решење, важи $\rho(A) = \rho((A \mid b)) = n$, те је $\Delta = \det A \neq 0$. Са друге стране, ако је $\Delta = \det A \neq 0$, следи

$n = \rho(A) \leqslant \rho((A\,|\,b)) \leqslant n$, пошто је $(A\,|\,b) \in M_{n,n+1}(\mathbb{P})$, па је решење система $Ax = b$ јединствено. У том случају, ако је $x \in M_{n,1}(\mathbb{P})$ решење система, важи $\Delta \cdot E_n \cdot x = \operatorname{adj} A \cdot A \cdot x = \operatorname{adj} A \cdot b$, односно $x = \frac{1}{\Delta} \cdot \operatorname{adj} A \cdot b$. Из добијеног, изједначавањем елемената матрица са различитих страна добијене једначине, следи $x_i = \frac{1}{\Delta} \cdot \sum\limits_{j=1}^{n} A_{j,i} b_j$, за $1 \leqslant i \leqslant n$ (пошто је $\operatorname{adj} A = (A_{j,i})_{i,j=1}^{n}$, где је $A_{i,j}$ одговарајући кофактор матрице A). На основу Лапласовог развоја (део (а) теореме 7.3.2), последња сума представља развој по i-тој колони матрице описане у формулацији („замењена" i-та колона матрице A са b), те је $x_i = \frac{\Delta_{x_i}}{\Delta}$, за $1 \leqslant i \leqslant n$.
(б) Ако је $\Delta = 0$, а x задовољава $Ax = b$, важи $0_{n\times 1} = \operatorname{adj} A \cdot Ax = \operatorname{adj} \cdot b$, па је $0_{n\times 1} = \sum\limits_{j=1}^{n} A_{j,i} b_j = (\Delta_{x_1}, \ldots, \Delta_{x_n})^T$, односно, мора бити $\Delta_{x_i} = 0$, за $1 \leqslant i \leqslant n$. □

Услед резултата претходне теореме, вредност Δ се обично назива детерминанта система. Ако се жели нагласити матрица система $Ax = b$ (што је пожељно, рецимо, ако се ради са више система), онда ће се Δ и Δ_{x_i} обележавати и са Δ_A и $\Delta_{A.x_i}$ (или $\Delta_{A,i}$), редом. У претходном резултату остаје неразјашњен случај $\Delta = \Delta_{x_1} = \ldots = \Delta_{x_n} = 0$. Онда је $\rho(A) = r < n$, те у случају да је $\rho((A\,|\,b)) = r + 1$, нема решења (типичан школси пример је $0x = b \neq 0$), а ако је $\rho((A\,|\,b)) = r$, има више решења (типичан школски пример је $0x = 0$), а простор решења је димензије $n - r$ (дакле, у овој ситуацији се не може десити да систем има јединствено решење).

За систем из примера 32, важи $\Delta = \begin{vmatrix} \cos\psi & -\sin\psi \\ \sin\psi & \cos\psi \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, тј. решење је јединствено за свако ψ, а како је $\Delta_x = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\sin\psi \\ \sin\varphi & \cos\psi \end{vmatrix} = \cos(\varphi - \psi)$ и $\Delta_y = \begin{vmatrix} \cos\psi & \cos\varphi \\ \sin\psi & \sin\varphi \end{vmatrix} = \sin(\varphi - \psi)$, следи $(x, y) = \left(\frac{\Delta_x}{\Delta}, \frac{\Delta_y}{\Delta}\right) = (\cos(\varphi - \psi), \sin(\varphi - \psi))$, тј. добијен је резултат из тог примера и помоћу Крамерових правила. За први систем из примера 33, важи $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 7 \\ 5 & 9 & 15 \end{vmatrix} = 0$, док је $\Delta_x = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ a-1 & 4 & 7 \\ a^2 & 9 & 15 \end{vmatrix} = 3(a-1)(a-2)$, $\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 2 & a-1 & 7 \\ 5 & a^2 & 15 \end{vmatrix} = -5(a-1)(a-2)$, $\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & 4 & a-1 \\ 5 & 9 & a^2 \end{vmatrix} = 3(a-1)(a-2)$, те из Крамерових правила следи да систем нема решења ако $a \notin \{1, 2\}$, као и да за $a \in \{1, 2\}$ решење није јединствено, али њиховом употребом не долазимо до одговора да ли систем нема решења или има више решења. Ипак, код (квадратних) система у којима су коефицијенти матрица полиноми, а детерминанта система није идентички једнака 0, на основу Крамерових правила се добија одговор за све, сем коначно много вредности (заиста, онда је та детерминанта ненула полином), те она имају значајну улогу и при решавању таквих система. У случају другог система из примера 33, важи $\Delta = \begin{vmatrix} b & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 1 & b \end{vmatrix} = b^3 - 3b + 2 = (b-1)^2(b+2)$, $\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & b & 1 \\ b^2 & 1 & b \end{vmatrix} = -(b-1)^2(b+1)$, $\Delta_y = \begin{vmatrix} b & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & b^2 & b \end{vmatrix} = (b-1)^2$, $\Delta_z = \begin{vmatrix} b & 1 & 1 \\ 1 & b & b \\ 1 & 1 & b^2 \end{vmatrix} = (b-1)^2(b+1)^2$, па је за $b \notin \{-2, 1\}$ јединствено решење $(x, y, z) = \left(\frac{-(b-1)^2(b+1)}{(b-1)^2(b+2)}, \frac{(b-1)^2}{(b-1)^2(b+2)}, \frac{(b-1)^2(b+1)^2}{(b-1)^2(b+2)}\right) = \left(-\frac{b+1}{b+2}, \frac{1}{b+2}, \frac{(b+1)^2}{b+2}\right)$ (наравно, добијен је исти резултат као и у поменутом примеру), за $b = -2$ нема решења (онда је $\Delta = 0$, а $\Delta_x \neq 0$), док на основу претходног тврђења не добијамо потпун одговор у случају $b = 1$.

Пример 36. Нека је $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ и $x_1, \ldots, x_{n+1} \in \mathbb{R}$, тако да је $x_i \neq x_j$ за $i \neq j$. Одредимо све полиноме p степена не већег од n, за које је $p(x_i) = f(x_i)$, за $1 \leqslant i \leqslant n+1$. Како је $\deg p \leqslant n$, важи $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_0$, за неке $a_n, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$, па се заменом вредности $x_1, \ldots, x_{n+1}$, добија да је $a_n x_i^n + \ldots + a_0 = f(x_i)$, за $1 \leqslant i \leqslant n+1$. Последње, заправо, представља систем линеарних једначина, при чему су непознате $a_0, \ldots, a_n$ (у питању је $n+1$ једначина са $n+1$ непознатих), те се може записати у облику $Va = f$, где је матрица система $V = (x_i^{j-1})_{1 \leqslant i,j \leqslant n+1}$ (притом сматрамо да је $x_i^0 = 1$ за свако $1 \leqslant i \leqslant n+1$), $a = (a_0, \ldots, a_n)^T$ колона непознатих, а слободна колона $f = (f(x_1), \ldots, f(x_{n+1}))^T$. Приметимо да је $V = A_{n+1}$, за вредности $x_1, \ldots, x_{n+1}$, где је A_{n+1} матрица из примера 24, те је, на основу резултата добијених у том примеру, $\det V = \prod\limits_{1 \leqslant j < i \leqslant n+1} (x_i - x_j) \neq 0$, пошто је $x_i \neq x_j$ за $i \neq j$, те уочени систем има јединствено решење. Није тешко проверити да полином $p(x) = \sum\limits_{j=1}^{n+1} \Big(f(x_j) \cdot \prod\limits_{i \neq j} \frac{x - x_i}{x_j - x_i} \Big)$ задовољава наведене услове, а, по претходном, то је јединствен такав полином и назива се **Лагранжов интерполациони полином** (функције f, који одговара избору тачака $x_1, \ldots, x_{n+1}$). Видимо и разлоге због којих је, при одређивању полинома степена не већег од n, захтевано $n+1$ услова, пошто уз мање услова полином не мора бити јединствен, а уз више не мора постојати (рецимо, ако је $p(x_1) = f(x_1)$ и $p(x_2) = f(x_2)$, ако је $\deg p = 2$, $p_\lambda(x) = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} \cdot f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \cdot f(x_2) + \lambda(x - x_1)(x - x_2)$ испуњава наведени захтев за свако $\lambda \in \mathbb{R}$, а ако је $\deg p = 0$, решење постоји ако и само ако је $f(x_1) = f(x_2)$). Добијени резултат употпуњује резултате добијене у леми 5.2.2 (поменимо да је општи задатак интерполације у $\mathbb{R}$ „мешавина” ова два резултата, захтева се конструкција полинома одговарајућег степена, чије су вредности, као и вредности изабраних (коначно много) извода, у одабраних коначно много тачака једнаке одговарајућим вредностима неке функције). $\triangle$

Пример 37. Нека је $k, l \in \mathbb{C}$, $l \neq 0$ и $(a_n)_{n \geqslant 0}$ дефинисан са $a_0 = a$, $a_1 = b$

и $a_{n+2} = ka_{n+1} + la_n$ (видети пример 11 главе 2, коментаре након њега, као и пример 25 ове главе). Ако је $M = \begin{pmatrix} k & l \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, а $A_n = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$, за $n \in \mathbb{N}_0$, онда је $A_{n+1} = MA_n$, за $n \in \mathbb{N}_0$, па је $A_n = M^n A_0$, за $n \in \mathbb{N}_0$, где је $A_0 = (a_1, a_0)^T = (b, a)^T$, те се решавање наведене једначине (линеарне рекурентне са константним коефицијентима, реда 2), своди на одређивање M^n. Важи $\chi_M(x) = x^2 - kx - l$. Ако је $k^2 + 4l \neq 0$, он има две различите нуле p и q, тј. важи $\chi_M(x) = (x-p)(x-q)$ (онда је $k = p+q$ и $l = -pq$), те је $M \sim \operatorname{diag}((p),(q))$, одговарајући сопствени вектори су $(p,1)^T$ и $(q,1)^T$, па је $M = \begin{pmatrix} p & q \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{p-q} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -q \\ -1 & p \end{pmatrix}$. Следи $M^n = \begin{pmatrix} p & q \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p^n & 0 \\ 0 & q^n \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{p-q} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -q \\ -1 & p \end{pmatrix} = \frac{1}{p-q} \cdot \begin{pmatrix} p^{n+1} - q^{n+1} & pq(q^n - p^n) \\ p^n - q^n & pq(q^{n-1} - p^{n-1}) \end{pmatrix}$, а како је $A_n = M^n A_0$, изједначавањем елемената на на месту $(2,1)$ матрица на странама последње везе, следи $a_n = b \cdot \frac{p^n - q^n}{p-q} + a \cdot \frac{pq(q^{n-1} - p^{n-1})}{p-q} = \frac{qa-b}{q-p} \cdot p^n + \frac{pa-b}{p-q} \cdot q^n$, за $n \in \mathbb{N}_0$ (што је резултат примера 11 главе 2). Ако је $k^2 + 4l = 0$, онда $\chi_M(x)$ има двоструку нулу, па ако је у питању p, важи $\chi_M(x) = (x-p)^2$, а како M није једнака pE_2, следи да је $\mu_M(x) = \chi_M(x)$, те је $M \sim J(p,2)$, $k = 2p$ и $l = -p^2$. Простору $\operatorname{Ker}(M - pE_2)^2 \setminus \operatorname{Ker}(M - pE_2)$ припада, рецимо, $u_2 = (p+1, 1)^T$ и важи $u_1 = (M - pE_2)u_2 = (p,1)^T$. Следи $M = \begin{pmatrix} p & p+1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p & 1 \\ 0 & p \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & p+1 \\ 1 & -p \end{pmatrix}$, па је $M^n = \begin{pmatrix} p & p+1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p^n & np^{n-1} \\ 0 & p^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & p+1 \\ 1 & -p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (n+1)p^n & -np^{n+1} \\ np^{n-1} & -(n-1)p^n \end{pmatrix}$, а како је $A_n = M^n A_0$, изједначавањем елемената на на месту $(2,1)$ матрица на странама последње везе, следи $a_n = bnp^{n-1} - a(n-1)p^n$ (што је резултат добијен у коментарима након примера 11 главе 2). $\triangle$

У претходном примеру је приказано како се, техником развијеном у овој глави, може решити линеарна рекурентна једначина реда 2, а описани поступак се, праволинијски, преноси и на случај решавања једначине $a_{n+k} = \sum\limits_{i=0}^{k-1} c_i a_{n+i}$, за $n \in \mathbb{N}_0$, где је $k \geqslant 2$, а $c_0, \ldots, c_{k-1} \in \mathbb{R}$, $c_0 \neq 0$, тј. такве једначине реда k. Понављањем поступка, долази се до потребе изучавања матрице M_k, чија је прва врста $(c_{k-1}, \ldots, c_0)$, елементи на местима $(i, i-1)$, за $2 \leqslant i \leqslant k-1$, једнаки 1 (односно, елементи на „првој дијагонали испод главне"), док су преостали једнаки 0 (матрица проучавана у претходном примеру је, при овој нотацији, M_2, док је $c_1 = k$, $c_0 = l$). Ако је $p_k(x) = x^k - c_{k-1}x^{k-1} - \ldots - c_0$ полином који се природно придружује наведеној рекурентној вези, онда је $\chi_{M_k}(x) = (-1)^k p_k(x)$ (заиста, по претходном примеру је то тачно у случају $k = 2$, а ако је $k \geqslant 3$ и тврђење тачно за $k-1$, онда, на основу Лапласовог развоја по последњој колони, следи $\det(M_k - xE_k) = (-x)((-1)^{k-1}(x^{k-1} - c_{k-2}x^{k-2} - \ldots - c_1)) + (-1)^{k-1}c_0 = (-1)^k p_k(x))$, па

је јасно да постоји суптилна веза између посматраних објеката. Заправо, по литератури се често виђа да се степен квадратне матрице (а самим тим и вредност полинома те матрице) одређује техником решавања линеарних рекурентих једначина.
У претходном примеру је M^n одређен уз помоћ резултата добијених при испитивању класа еквиваленције сличности матрица, но то се може урадити и на друге начине. Рецимо, како су, у случају $p \neq q$, $(p,1)^T$ и $(q,1)^T$ сопствени вектори који одговарају p и q, редом, и како је $(b,a)^T = \frac{qa-b}{q-p} \cdot (p,1)^T + \frac{pa-b}{p-q} \cdot (q,1)^T$, следи $M^n(b,a)^T = \frac{qa-b}{q-p} \cdot M^n(p,1)^T + \frac{pa-b}{p-q} \cdot M^n(q,1)^T = \frac{qa-b}{q-p} \cdot p^n(p,1)^T + \frac{pa-b}{p-q} \cdot q^n(q,1)^T$, те опет, изједначавањем чланова на месту $(2,1)$ матрица на странама последње једнакости, добијамо резултат.

7.5. Еуклидски векторски простори

До краја ове главе ћемо се посветити раду са векторским просторима над пољем скалара $\mathbb{R}$, пошто нам је један од циљева у наредних неколико глава дефинисање и проучавање непрекидности, диференцијабилности и интегралног рачуна у $\mathbb{R}^n$, а одговарајућим резултатима при раду са просторима над $\mathbb{C}$ ћемо се вратити касније. У овом делу ћемо у реалном векторском простору увести и проучити додатну структуру, која ће омогућити дефинисање одговарајућих геометријских објеката у таквом простору (по искуству стеченом при раду са функцијама једне реалне променљиве, јасно је да је жеља да добијени апарат, између осталог, користи при одређивању површине и запремине, а као основа ће послужити појмови дужине вектора и мере угла између вектора у $\mathbb{R}^n$, који ће се поклапати са до сада коришћеним у $\mathbb{R}^2$).

Дефиниција 7.5.1. Нека је V векторски простор над пољем скалара $\mathbb{R}$. Пресликавање $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$, тако да за све $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и све $u, v, w \in V$ важи:

(1) $\langle \alpha u + \beta v, w\rangle = \alpha\langle u, w\rangle + \beta\langle v, w\rangle$; (2) $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$;

(3) $\langle u, u\rangle \geqslant 0$, при чему се једнакост достиже ако и само ако је $u = 0$,

се назива (реални) **скаларни производ** (на V), а ако је простор V и коначне димензије, онда се V назива **Еуклидски векторски простор**.

Користиће се и назив простор са скаларним производом, а ако је јасно о ком пољу скалара се ради, нећемо га посебно наглашавати. Особина (1) се назива линеарност, а из ње индукцијом следи и да је $\langle \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n, v\rangle = \alpha_1\langle u_1, v\rangle + \ldots + \alpha_n\langle u_n, v\rangle$, за све $n \in \mathbb{N}$, $u_1, \ldots, u_n, v \in V$, као и да је $\langle 0, v\rangle = 0$, за свако $v \in V$ (где је 0 на левој страни једнакости из V, а на десној из $\mathbb{R}$; заиста, важи $\langle 0, v\rangle = \langle 0+0, v\rangle = \langle 0, v\rangle + \langle 0, v\rangle$, те је $\langle 0, v\rangle = 0$). Особина (2) се назива симетричност, те уз претходне закључке, следи $\langle u, \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n\rangle = \alpha_1\langle u, v_1\rangle + \ldots + \alpha_n\langle u, v_n\rangle$ и $\langle u, 0\rangle = 0$, за све $n \in \mathbb{N}$, $u_1, \ldots, u_n, u, v \in V$ (те ћемо, на даље, код симетричних веза код којих се једна тривијално добија из друге, наглашавати само једну од њих). Особина (3), из разлога које ћемо приказати у наставку, се назива позитивна дефинитност. Израз $\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$, за $u \in V$, се назива норма индукована наведеним скаларним производом (из разлога који ће бити приказани у делу (в) наредне леме; за сад приметимо да је наведени израз добро дефинисан, пошто је поткорена величина ненегативна).

Дефиниција 7.5.2. Нека је V еуклидски векторски простор. онда је вектор $u \in V$ **ортогоналан (нормалан)** на $v \in V$, у ознаци $u \perp v$, ако и само ако важи $\langle u, v\rangle = 0$, а **ортогоналан (нормалан)** на $S \subseteq V$, у ознаци $u \perp S$, ако и само ако је $u \perp v$ за све $v \in S$. Скуп вектора ортогоналних на све векторе из S називамо „S ортогонал”, у ознаци $S^{\perp}$.

Напоменимо да се подразумева да је $\emptyset^{\perp} = V$. Непосредно из дефиниције следи да је ортогоналност у Еуклидским просторима симетрична, тј. важи $u \perp v$ ако и само ако је $v \perp u$, па се често говори и да су u и v међусобно (узајамно) нормални, као и да је $\{u\}^{\perp} = \{v \mid \langle v, u\rangle = 0\}$ векторски потпростор простора V (заиста, важи $0 \in \{u\}^{\perp}$, те је $\{u\}^{\perp} \neq \emptyset$, а ако су $v_1, v_2 \in \{u\}^{\perp}$ и $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, онда је $\langle \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2, u\rangle = \alpha_1\langle v_1, u\rangle + \alpha_2\langle v_2, u\rangle = 0$, тј. $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 \in \{u\}^{\perp}$), па је и $S^{\perp} = \bigcap\limits_{u\in S}\{u\}^{\perp}$ потпростор V. Јасно, ако је $S_1 \subseteq S_2$, онда је $S_2^{\perp}$ потпростор $S_1^{\perp}$. Приметимо да је $\{u\}^{\perp} = V$, за неко $u \in V$, ако и само ако је $u = 0$ (важи $\{0\}^{\perp} = V$, а како $u \notin \{u\}^{\perp}$ за $u \neq 0$, у том случају не може бити $\{u\}^{\perp} = V$).

Лема 7.5.1. Нека је V Еуклидски векторски простор. Онда за све $u, v, u_1, \ldots u_n \in V$ и $\alpha \in \mathbb{R}$ важи:
(а) $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + 2\langle u, v\rangle + \|v\|^2$;
(б) $|\langle u, v\rangle| \leqslant \|u\| \cdot \|v\|$, при чему се једнакост достиже ако и само ако су u и v линеарно зависни;
(в) $\|\cdot\|$ је норма на V;
(г) ако је $u_i \perp u_j$ за $i \neq j$, онда је $\|u_1 + \ldots + u_n\|^2 = \|u_1\|^2 + \ldots + \|u_n\|^2$.

Доказ. (а) За све $u, v \in V$ важи $\|u + v\|^2 = \langle u, u\rangle + \langle u, v\rangle + \langle v, u\rangle + \langle v, v\rangle = \|u\|^2 + 2\langle u, v\rangle + \|v\|^2$.
(б) За све $u, v \in V$ и $\alpha \in \mathbb{R}$ важи $0 \leqslant \|u + \alpha v\|^2 = \|u\|^2 + 2\alpha\langle u, v\rangle + \alpha^2\|v\|^2$, па ако је $v = 0$, неједнакост (заправо и једнакост) је тривијално испуњена за свако $u \in V$, а ако је $v \neq 0$, заменом $\alpha = -\frac{\langle u,v\rangle}{\|v\|^2}$ се добија $0 \leqslant \|u\|^2 - \frac{2|\langle u,v\rangle|^2}{\|v\|^2} + \frac{|\langle u,v\rangle|^2}{\|v\|^4} \cdot \|v\|^2$, односно $\frac{|\langle u,v\rangle|^2}{\|v\|^2} \leqslant \|u\|^2$, одакле директно следи остатак тврђења ($u + \alpha v = 0$ даје да су u и v линеарно зависни).
(в) Важи $\|\alpha u\|^2 = \langle \alpha u, \alpha u\rangle = \alpha^2\langle u, u\rangle = |\alpha|^2 \cdot \|u\|^2$, за произвољно $\alpha \in \mathbb{R}$ и $u \in V$. Такође је $\|u\| = 0$ ако и само ако је $\langle u, u\rangle = 0$, што је тачно ако и само ако је $u = 0$. За $u, v \in V$, на основу делова (а) и (б), важи

$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + 2\langle u,v\rangle + \|v\|^2 \leqslant \|u\|^2 + 2|\langle u,v\rangle| + \|v\|^2 \leqslant \|u\|^2 + 2\cdot\|u\|\cdot\|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2$, па је $\|u+v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$.
(г) Ако је $u_1 \perp u_2$, на основу дела (а) је $\|u_1+u_2\| = \|u_1\|^2 + 2\langle u_1,u_2\rangle + \|u_2\|^2 = \|u_1\|^2 + \|u_2\|^2$. Ако је $n \geqslant 3$ и $u_1 \perp u_i$, за $2 \leqslant i \leqslant n$, следи $u_1 \perp u_2 + \ldots + u_n$, па је $\|u_1+u_2+\ldots+u_n\|^2 = \|u_1\|^2 + \|u_2+\ldots+u_n\|^2$ (примењено је доказано за $n=2$ на векторе u_1 и $u_2+\ldots+u_n$), те тврђење овог дела следи на основу индукције. □

Део (б) претходне леме се назива и **неједнакост Коши–Шварц–Буњаковског** (за векторе у Еуклидском векторском простору; видети и део (в) леме 2.3.2, као и пример 8 главе 2). Приметимо да $\langle x,y\rangle = x^Ty = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$, где су $x = (x_1,\ldots,x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ и $y = (y_1,\ldots,y_n)^T \in \mathbb{R}^n$, а $n \in \mathbb{N}$, дефинише скаларни производ на $\mathbb{R}^n$, који се назива **канонски** (стандардни) скаларни производ у $\mathbb{R}^n$, а показана неједнакост у овом случају је еквивалентна са $(x_1y_1+\ldots+x_ny_n)^2 \leqslant (x_1^2+\ldots+x_n^2)(y_1^2+\ldots+y_n^2)$. Како је већ поменуто, показано у делу (в) правда назив (и ознаку) $\|\cdot\|$ (заиста је у питању норма). По претходном доказу, ако се у (в) достиже једнакост, онда је $|\langle u,v\rangle| = \|u\|\cdot\|v\|$ (што, по (б), значи да су u и v линеарно зависни) и $\langle u,v\rangle = |\langle u,v\rangle|$, односно, једнакост се достиже или у случају да је неки од u,v нула вектор или ако је $u = \alpha v$, за неко $\alpha > 0$ (слободније речено, ако су у питању „истосмерни” вектори). Део (г) се (из јасних разлога) често назива и Питагорина теорема. Ако је u ненула вектор, онда је $\frac{u}{\|u\|}$, на основу претходних резултата, јединични вектор (тј. вектор чија је норма 1) колинеаран са u (последње се често назива и нормирање вектора u; заправо, по искуству стеченом при раду у $\mathbb{R}^2$, природно $\|u\|$ називамо дужина (интезитет) вектора u). На основу дела (б) је $-1 \leqslant \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\|v\|} \leqslant 1$, за $u \neq 0$, $v \neq 0$, па постоји јединствено $\varphi \in [0,\pi]$, тако да је $\langle u,v\rangle = \|u\|\cdot\|v\|\cdot\cos\varphi$, које се назива и угао између вектора u и v (ако је неки од вектора 0, не дефинишемо угао); овде је изабран интервал $[0,\pi]$, пошто њега косинусна функција бијективно слика на $[-1,1]$, но по потреби се могу допустити и друге вредности за φ. Ако је $u \perp v$, онда је $u = 0$ или $v = 0$ или $\varphi = \frac{\pi}{2}$, те се добијено уклапа са горе уведеном нотацијом. Приметимо да се, уз последњу нотацију, резултат дела (а) записује у облику $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + 2\cdot\|u\|\cdot\|v\|\cdot\cos\varphi + \|v\|^2$, те представља познату косинусну теорему (у $\mathscr{L}(\{u,v\})$).

Пример 38. На основу дела (а) претходне леме је $\langle u,v\rangle = \frac{1}{2}\cdot(\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v|^2)$, за све $u,v \in V$, те се, на основу норме индуковане скаларним производом, може изразити скаларни производ. Из добијеног за векторе u и $-v$, следи $-\langle u,v\rangle = \frac{1}{2}\cdot(\|u-v\|^2 - \|u\|^2 - \|v|^2)$, те из добијених веза следи $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$, за све $u,v \in V$, па норма која индукује скаларни производ задовољава наведени идентитет (који је познат као једнакост паралелограма, због јасног геометријског тумачења). Из добијеног видимо и (очекивано) да не мора свака норма бити индукована скаларним производом. Рецимо, ако је $V = W = \mathbb{R}$, са нормама $|\cdot|$, а норма на $\mathbb{R}^2$ изрази $\|(u,v)\|_1$ и $\|(u,v)\|_\infty$, дефинисани у примеру 8 главе 2, за $u = (1,0)$ и $v = (0,1)$

је $\|u+v\|_1 = \|u-v\|_1 = 2$, $\|u\|_1 = \|v\|_1 = 1$, $\|u+v\|_\infty = \|u-v\|_\infty = \|u\|_\infty = \|v\|_\infty = 1$, па следи да уочене норме не задовољавају наведену једнакост (те нису индуковане неким скаларним производом). △

Пример 39. Ако је $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$, где су $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, испитајмо да ли је $\langle u, v\rangle = u^T A v$, за $u = (u_1, u_2)^T \in \mathbb{R}^2$ и $v = (v_1, v_2)^T \in \mathbb{R}^2$ скаларни производ (на $\mathbb{R}^2$). Линеарност следи непосредно из дефиниције операција на матрицама. Како је $\langle (1,0)^T, (0,1)^T\rangle = b$ и $\langle (0,1)^T, (1,0)^T\rangle = c$, ако је $b \neq c$ није задовољена симетричност, те није у питању скаларни производ. На даље ћемо посматрати случај $b = c$, а у том случају је $u^T A v = au_1v_1 + b(u_1v_2 + u_2v_1) + dv_1v_2$, те је задовољена симетричност. Како је $(1,0)^T A(1,0) = a$, ако је у питању скаларни производ, мора бити $a > 0$, а у том случају је $u^T A u = au_1^2 + 2bu_1u_2 + du_2^2 = a(u_1 + \frac{b}{a} \cdot u_2)^2 + \frac{ad-b^2}{a} \cdot u_2^2$, па мора бити $ad - b^2 > 0$ (иначе у случају, рецимо, $u = (-b, a)^T \neq 0$ важи $u^T A u \leqslant 0$), а ако је $ad - b^2 > 0$, из последњег следи $u^T A u \geqslant 0$, при чему се једнакост достиже ако и само ако је $u = (0, 0)^T$. Дакле, наведени израз представља скаларни производ ако и само ако је $A = A^T$, $a > 0$ и $\det A > 0$. Приметимо да се за $A = E_2$ добија канонски скаларни производ на $\mathbb{R}^2$. △

Пример 40. Нека су a, b, c различити реални бројеви, $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ непрекидна, таква да је $f(x) > 0$, за $x \in [-1, 1]$, а $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ векторски простор реалних полинома, степена не већег од 2. Испитајмо да ли изрази $\langle p, q\rangle_1 = p(a)q(a) + p(b)q(b)$, $\langle p, q\rangle_2 = p(a)q(a) + p(b)q(b) + p(c)q(c)$, $\langle p, q\rangle_3 = p(a)q(a) + p'(a)q'(a)$, $\langle p, q\rangle_4 = p(a)q(a) + p'(a)q'(a) + p''(a)q''(a)$ и $\langle p, q\rangle_5 = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)f(x)dx$ представљају скаларни производ на $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. Сваки од наведених израза је добро дефинисан, а, на основу особина извода и интеграла, непосредно следе линеарност и симетричност, као и да је испуњено $\langle p, p\rangle_i \geqslant 0$, за свако $p \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ и свако $1 \leqslant i \leqslant 5$. Ако је $p(x) = (x-a)(x-b) \not\equiv 0$, онда је $\langle p, p\rangle_1 = 0$, те овај израз не представља скаларни производ. Ако је $\langle p, p\rangle_2 = 0$, онда је $(p(a))^2 + (p(b))^2 + (p(c))^2 = 0$, те је $p(a) = p(b) = p(c) = 0$, но како је $p \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, следи да је $p \equiv 0$, те овај израз представља скаларни производ (на $\mathcal{P}(\mathbb{R})$). Ако је $p(x) = (x-a)^2 \not\equiv 0$, онда је $\langle p, p\rangle_3 = 0$, те овај израз не представља скаларни производ. Ако је $\langle p, p\rangle_4 = 0$, онда је $(p(a))^2 + (p'(a))^2 + (p''(a))^2 = 0$, те је $p(a) = p'(a) = p''(a) = 0$, но како је $p \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, следи да је $p \equiv 0$, те овај израз представља скаларни производ (на $\mathcal{P}(\mathbb{R})$). Коначно, како је $f(x)(p(x))^2$ ненегативна и непрекидна на $[-1, 1]$, и како за $p \not\equiv 0$, у некој тачки из $[-1, 1]$ функција $f(x)(p(x))^2$ узима позитивну вредност, на основу леме 6.2.6, следи и да је пети наведени израз скаларни производ. △

Резултате претходног примера није тешко прилагодити и на случај простора полинома већег степена, а наслућујемо и да су (поготово у случају $\langle \cdot, \cdot\rangle_5$) захтевани и прејаки услови, но треба бити прилично опрезан приликом њиховог слабљења.

Пример 41. За $n, k \in \mathbb{N}$, нека су $m_1, \ldots, m_k > 0$ и $A_1, \ldots, A_k \in \mathbb{R}^n$.

Одредимо $\inf\limits_{X\in\mathbb{R}^n}\sum\limits_{i=1}^{k} m_i\|XA_i\|^2$. Ако је $m = m_1+\ldots+m_k$, $Y\in\mathbb{R}^n$ и $C\in\mathbb{R}^n$ таква да је $m\overrightarrow{YC} = \sum\limits_{i=1}^{k} m_i\overrightarrow{YA_i}$, онда је $m\overrightarrow{XC} = m(\overrightarrow{XY}+\overrightarrow{YC}) = \sum\limits_{i=1}^{k} m_i(\overrightarrow{XY}+\overrightarrow{YA_i}) = \sum\limits_{i=1}^{k} m_i\overrightarrow{XA_i}$, за произвољну $X\in\mathbb{R}^n$, па дефиниција тачке C не зависи од изабране тачке X. Тачка C се назива центар масе (барицентар) система $((A_i,m_i))_{i=1}^k$ и, по претходном, важи $\sum\limits_{i=1}^{k} m_i\overrightarrow{CA_i} = 0$. Следи $\sum\limits_{i=1}^{k} m_i\|XA_i\|^2 = \sum\limits_{i=1}^{k} m_i\|\overrightarrow{XC}+\overrightarrow{CA_i}\|^2 = \sum\limits_{i=1}^{k} m_i\Big(\|XC\|^2+2\langle\overrightarrow{XC},\overrightarrow{CA_i}\rangle+\|CA_i\|^2\Big) = \sum\limits_{i=1}^{k} m_i(\|XC\|^2+\|CA_i\|^2)+2\Big\langle\overrightarrow{XC},\sum\limits_{i=1}^{k} m_i\overrightarrow{CA_i}\Big\rangle = \sum\limits_{i=1}^{k} m_i(\|XC\|^2+\|CA_i\|^2) \geqslant \sum\limits_{i=1}^{k} m_i\|CA_i\|^2$, а једнакост у последњој неједнакости се достиже ако и само ако је $X = C$, па уочени инфимум постоји (заправо је и минимум). $\triangle$

Скуп $S\subseteq V$, где је V Еуклидски векторски простор, називамо **ортогоналан** ако за све $u,v\in S$, за које је $u\neq v$, важи $u\perp v$, аналогно се дефинише ортогоналан систем, а S називамо **ортонормиран** ако је ортогоналан и сви вектори у њему су јединични. Аналогно, базу e називамо ортогонална (ортонормирана) ако представља базу, а одговарајући систем је ортогоналан (ортонормиран) (наравно, у систему који представља базу не може бити нула вектор). Приметимо да, ако је S ортогоналан и $0\notin S$, онда се S састоји од линеарно независних вектора. Заиста, ако је, за неко $n\in\mathbb{N}$, $u_1,\ldots,u_n\in S$ и $\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in\mathbb{R}$ такви да је $\alpha_1u_1+\ldots+\alpha_nu_n = 0$, скаларним множењем са u_j следи $\alpha_j\|u_j\|^2 = 0$, тј. $\alpha_j = 0$, за свако $1\leqslant j\leqslant n$. Из претходног следи да ортонорниран систем $(e_i)_{i=1}^n$ (као и ортогоналан, уколико не садржи нула вектор) представља базу простора $\mathscr{L}(\{e_1,\ldots,e_n\})$, као и да овакви системи (у V) не могу садржати више од $\dim V$ вектора.

Лема 7.5.2. Нека је V Еуклидски векторски простор, а $(e_i)_{i=1}^n$ ортонормиран скуп у V. Онда за свако $u\in V$ важи:

(а) $\|u\|^2 = \|u-\sum\limits_{k=1}^{n}\langle u,e_k\rangle e_k\|^2+\sum\limits_{k=1}^{n}|\langle u,e_k\rangle|^2$;

(б) $\sum\limits_{k=1}^{n}|\langle u,e_k\rangle|^2\leqslant\|u\|^2$;

(в) $\|u-\sum\limits_{k=1}^{n}\langle u,e_k\rangle e_k\|\leqslant\|u-\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_ke_k\|$, за произвољне $\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in\mathbb{R}$.

Доказ. Како је $\Big\langle u-\sum\limits_{i=1}^{n}\langle u,e_i\rangle e_i, e_k\Big\rangle = \langle u,e_k\rangle-\langle u,e_k\rangle\langle e_k,e_k\rangle = 0$, за $1\leqslant k\leqslant n$, по Питагориној теореми (део (г) леме 7.5.1) следи $\|u\|^2 = \|u-\sum\limits_{k=1}^{n}\langle u,e_k\rangle e_k\|^2+\sum\limits_{k=1}^{n}|\langle u,e_k\rangle|^2$, што је тврђење дела (а), а како је $\|u-$

$\sum\limits_{k=1}^{n}\langle u,e_k\rangle e_k\|^2 \geqslant 0$, следи и тврђење дела (б). Из уочене ортогоналности, следи и $\left\|u-\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k e_k\right\|^2 = \left\|\left(u-\sum\limits_{k=1}^{n}\langle u,e_k\rangle e_k\right)-\sum\limits_{k=1}^{n}(\alpha_k-\langle u,e_k\rangle)e_k\right\|^2 = \left\|u-\sum\limits_{k=1}^{n}\langle u,e_k\rangle e_k\right\|^2+\sum\limits_{k=1}^{n}\left|\alpha_k-\langle u,e_k\rangle\right|^2 \geqslant \left\|u-\sum\limits_{k=1}^{n}\langle u,e_k\rangle e_k\right\|^2$, односно тврђење дела (в), при чему се једнакост достиже ако и само ако је $\alpha_k = \langle u,e_k\rangle$ за свако $1 \leqslant i \leqslant n$. □

Део (в) претходне леме говори да за $u \in V$ постоји јединствен вектор w из $U = \mathscr{L}(\{e_1,\dots,e_n\})$, тако да је $\|u-w\| = \min\{\|u-v\| \mid v \in U\}$, односно, слободније говорећи, w је најбоља апроксимација вектора u векторима из U, као и да $u-w \in U^{\perp}$ (наравно, ако је $u \in U$, онда је $u = w$). Стога се вектор w назива **ортогонална** (нормална) **пројекција** вектора u на потпростор U, у ознаци $\operatorname{proj}_U u$. Видимо да се тај вектор изражава линеарним комбинацијама у којима је коефицијент уз e_k, за $1 \leqslant k \leqslant n$, једнак $\langle u,e_k\rangle$, који се назива и Фуријеов коефицијент (вектора u у односу на вектор e_k). Претходно се праволинијски прилагођава случају у ком је систем $(e_k)_{k=1}^{n}$ ортогоналан и не садржи нула вектор (онда ће Фуријеови коефицијенти бити $\frac{\langle u,e_k\rangle}{\|e_k\|^2}$, за $1 \leqslant k \leqslant n$). Неједнакост дела (б) се назива Беселова неједнакост (заправо, то име се обично везује за аналогну неједнакост, која се добија при раду са бесконачним системима, пошто онда добијени резултат долази до пуног изражаја). Пошто у овом моменту радимо са просторима коначне димензије, основни закључак тог дела је да је „дужина пројекције не већа од дужине вектора”. Приметимо и да смо „припремили терен” за развој геометријских резултата у општем Еуклидском векторском простору (аналогних оним у $\mathbb{R}^2$), пошто су дефинисане величине које одговарају дужини вектора, углу између вектора, као и растојању тачке од потпростора (ако је вектор положаја тачке u и потпростор U, то растојање је $\|u-\operatorname{proj}_U u\|$). Заправо, за последње је још потребно утврдити да ли сваки потпростор има ортонормирану базу (у претходном тврђењу је рађено под претпоставком да је $U = \mathscr{L}(\{e_1,\dots,e_n\})$), што испитујемо у наредном тврђењу.

Теорема 7.5.1 (Грам–Шмит). Нека је V Еуклидски векторски простор и $f = (f_i)_{i=1}^{n}$ произвољна његова база. Онда постоји јединствена ортонорнирана база $(e_i)_{i=1}^{n}$, тако да је $\mathscr{L}(\{e_1,\dots,e_j\}) = \mathscr{L}(\{f_1,\dots,f_j\})$ и $\langle e_j,f_j\rangle > 0$, за свако $1 \leqslant j \leqslant n$.

Доказ. Ако је $n = 1$, како је $\mathscr{L}(\{e_1\}) = \mathscr{L}(\{f_1\})$, мора бити $e_1 = \alpha f_1$, за неко $\alpha \neq 0$. Како је $\|e_1\| = 1$, следи $\alpha \in \{-\frac{1}{\|f_1\|}, \frac{1}{\|f_1\|}\}$ (пошто је (f_1) база, важи $\|f_1\| \neq 0$), а како је $\langle e_1,f_1\rangle = \alpha\|f_1\|$, следи $\alpha = \frac{1}{\|f_1\|}$, тј. $e_1 = \frac{f_1}{\|f_1\|}$. Претпоставимо да је за $i < n$ одређен ортонормиран скуп $\{e_1,\dots,e_i\}$, који задовољава својства наведана у формулацији за $1 \leqslant j \leqslant i$, а желимо да одредимо e_{i+1}, тако да су испуњена та својства и за $j = i+1$. Ако је $U_i = \mathscr{L}(\{e_1,\dots,e_i\})$, на основу леме 7.5.2 и закључака добијених

након ње, следи да је $f_{i+1} = \operatorname{proj}_{U_i} f_{i+1} + v$, где је $v = f_{i+1} - \operatorname{proj}_{U_i} f_{i+1}$, при чему је $\operatorname{proj}_{U_i} f_{i+1} \in U_i$ и $v \in U_i^{\perp}$, а уз то је $v \neq 0$, пошто $f_{i+1} \notin U_i$. Дакле, за свако $\alpha \neq 0$ је $\mathscr{L}(\{e_1, \ldots, e_i, \alpha v\}) = \mathscr{L}(\{f_1, \ldots, f_{i+1}\})$, скуп $\{e_1, \ldots, e_i, \alpha v\}$ је састављен од ненула међусобно ортогоналних вектора (при чему су $e_1, \ldots, e_i$ и јединични), а како је $v \perp \operatorname{proj}_{U_i} f_{i+1}$, следи $\langle \alpha v, f_{i+1}\rangle = \alpha\langle v, \operatorname{proj}_{U_i} f_{i+1}\rangle + \alpha\langle v, v\rangle = \alpha\|v\|^2$, те се избором $\alpha > 0$ постиже да је $\langle \alpha v, f_{i+1}\rangle > 0$, па ако изаберемо $\alpha = \frac{1}{\|v\|} > 0$, добијамо и да је $e_{i+1} = \frac{v}{\|v\|}$ јединични. Приметимо да је, по резултатима леме 7.5.2, представљање f_{i+1} у облику збира вектора из U_i и вектора $U_i^{\perp}$ јединствено, као и сви кораци спроведени у приказаном доказу, те је e_{i+1} јединствен вектор који задовољава наведена својства.
Коначно, тврђење следи на основу математичке индукције. ☐

Специјално, из претходног тврђења следи да сваки Еуклодски векторски простор V има ортонормирану базу, као и да је та база управо кардиналности $\dim V$ (тј. иста ако и кад V посматрамо као векторски простор). Заправо, на основу ранијих резултата добијених за векторске просторе, из последњих закључака следи и да су Еуклидски векторски простори исте димензије изоморфни, при чему, ако је $\dim V = n$, онда је V изоморфан са $\mathbb{R}^n$ (овде се, наравно, под изоморфизмом V_1 и V_2 подразумева изоморфизам Еуклидске структуре, односно, да је $F : V_1 \to V_2$ изоморфизам векторских простора за који важи $\langle v, w\rangle_{V_1} = \langle Fv, Fw\rangle_{V_2}$, за све $v, w \in V_1$). Анализом доказа претходне теореме видимо да је и конструисан алгоритам добијања ортонормиране базе из произвољне базе (која је, уз наведена додатна својства, и јединствена), који се обично назива Грам–Шмитов поступак. Конкретно, важи $e_1 = \frac{f_1}{\|f_1\|}$ и $e_k = \frac{f_k - \langle f_k, e_1\rangle e_1 - \ldots - \langle f_k, e_{k-1}\rangle e_{k-1}}{\|f_k - \langle f_k, e_1\rangle e_1 - \ldots - \langle f_k, e_{k-1}\rangle e_{k-1}\|}$, за $2 \leqslant k \leqslant n$. Из претходног тврђења непосредно следи и да, ако је U потпростор Еуклидског векторског простора V, онда је $U \oplus U^{\perp} = V$ (ако је $U = V$, тврђење је тривијално; иначе, ако је $(e_i)_{i=1}^{k}$ ортонормирана база U, она се може допунити векторима $f_1, \ldots, f_{n-k}$ до базе V (видети коментаре након теореме 7.1.2), па се спровођењем Грам–Шмитовог поступка добија систем $(e_i)_{i=1}^{n}$, при чему је $(e_i)_{i=k+1}^{n-k}$ база $U^{\perp}$, те је $U + U^{\perp} = V$; како је $\langle u, u\rangle = 0$ само ако је $u = 0$, јасно је да је $U \cap U^{\perp} = \{0\}$, тј. претходна сума је и директна). Из последњег, између осталог, следи да се сваки ортонормиран систем у V може допунити до ортонормиране базе простора V, као и да је $\dim U^{\perp} = \dim V - \dim U$, на основу теореме о рангу и дефекту (теорема 7.1.3), те је $(S^{\perp})^{\perp} = \mathscr{L}(S)$ (напоменимо да радимо са просторима коначне димензије). Такође, на основу последњег можемо описати и V'. Заиста, ако је $f \in V'$, уколико је $f \equiv 0$, онда је $f(u) = \langle u, 0\rangle$, за свако $u \in V$. Иначе, ако је $U = \operatorname{Ker} f$, онда је U потпростор V, при чему је $U \neq V$, тј. важи $V = U \oplus U^{\perp}$, а како је $U^{\perp} \neq \emptyset$, постоји $e \in U^{\perp}$, тако да је $\|e\| = 1$ (рецимо, e може бити било који члан ортонормиране базе $U^{\perp}$). За произвољан $u \in V$, ако је $g_u = f(u)e - f(e)u$, важи $f(g_u) = f(u)f(e) - f(e)f(u) = 0$, тј. $g_u \in U$, те је $\langle g_u, e\rangle = 0$, одакле је $f(u)\langle e, e\rangle - f(e)\langle u, e\rangle = 0$, односно

$f(u) = f(e)\langle u, e\rangle = \langle u, f(e)e\rangle$. Дакле, ако је $v = f(e)e$, за свако $u \in V$ важи $f(u) = \langle u, v\rangle$, те су сви припадници V' овог облика. Последње, између осталог, говори да се и на дуалном простору Еуклидског векторског простора, природно индукује скаларни производ (тј. и V' је Еуклидски векторски простор, изоморфан са V (и у смислу Еуклидске структуре)). Наравно, применом других раније добијених резултата се добијају и даље последице, овде смо издвојили најважније, пре свега оне које ћемо користити у наставку (а неке и зарад илустрације).

Пример 42. Једну базу Еуклидског векторског простора полинома степена не већег од 2 (скупа $\mathcal{P}_2$ из претходног примера), где је $\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx$, за $p, q \in \mathcal{P}_2$ (тј. $\langle \cdot, \cdot\rangle_5$ за функцију $f \equiv 1$ из тог примера), чине $g_0(x) = 1, g_1(x) = x, g_2(x) = x^2$. Важи $\|g_0\|^2 = \int_{-1}^{1} 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot dx = 2$ (наравно, подразумевамо норму индуковану са $\langle \cdot, \cdot\rangle$), те је $e_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, такође је $\langle g_0, g_1\rangle = \int_{-1}^{1} 1 \cdot x \cdot 1 \cdot dx = 0$ и $\|g_1 - 0 \cdot e_0\|^2 = \|x - 0\|^2 = \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3}$, те је $e_1(x) = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot x$, а како је $\langle g_2, e_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{\sqrt{2}}{3}$, $\langle g_2, e_1\rangle = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \int_{-1}^{1} x^3 dx = 0$ и $\|g_2 - 0 \cdot e_1 - \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot e_0\|^2 = \int_{-1}^{1}(x^2 - \frac{1}{3})^2 dx = \frac{8}{45}$, важи $e_2(x) = \sqrt{\frac{5}{2}} \cdot \frac{3x^2-1}{2}$. Дакле, $(e_i(x))_{i=0}^{2}$ чине ортонормирану базу $\mathcal{P}_2$. Јасно је да се описани поступак може спровести и за полиноме већег степена, као и за друге функције f, а у жељи за једноставнијим рачуном ће често бити од интереса добијање ортогоналне базе, тј. без захтева да је састављена од јединичних вектора (Грам–Шмитов поступак се праволинијски прилагођава). Конкретно, полиноми $1, x, \frac{3x^2-1}{2}$ чине ортогоналан систем у $\mathcal{P}_2$, по литератури се обично називају Лежандрови полиноми (реда $0, 1, 2$, редом). Ова и сличне конструкције (на другим просторима функција) ће се природно појавити приликом решавања диференцијалних једначина. $\triangle$

Претходна разматрања доводе до потребе изучавања специјалне класе матрица. Наиме, у претходном делу смо видели да је матрица преласка са базе на базу неког простора (коначне димензије) произвољна инвертибилна матрица, но при раду са ортонорнираним базама, извиру додатна ограничења.

Дефиниција 7.5.3. Матрица $P \in M_n(\mathbb{R})$, где је $n \in \mathbb{N}$ се назива **ортогонална** ако и само ако је $PP^T = E_n$, док се $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ називају **ортогонално сличне** ако постоји ортогонална P, тако да је $B = P^T AP$.

Из претходног је јасно да је P инвертибилна, при чему је $P^{-1} = P^T$, док на основу особина транспоновања и инвертовања (видети лему 7.2.1), ако је $P \in M_n(\mathbb{R})$ ортогонална, следи $(P^T)^{-1} = (P^{-1})^T = (P^T)^T$, те је и P^T ортогонална, а ако су $P, Q \in M_n(\mathbb{R})$ ортогоналне, онда је $(PQ)^{-1} = Q^{-1}P^{-1} = Q^T P^T = (PQ)^T$, те је и PQ ортогонална. Такође, за ортогоналну $P \in M_n(\mathbb{R})$, на основу особина детерминанте важи $1 = \det E_n = \det(PP^T) = \det P \cdot \det P^T = (\det P)^2$, те је $\det P \in \{-1, 1\}$. На основу резултата дела 7.3 (видети одељак посвећен карактеристичном полиному), ако ортогоналну $P \in M_n(\mathbb{R})$ посматрамо као матрицу

из $M_n(\mathbb{C})$, уколико је λ нула $\chi_A(x)$, постоји ненула $u = (u_1, \dots, u_n)^T \in M_{n,1}(\mathbb{C})$, тако да је $Pu = \lambda u$ (наравно, u не мора имати реалне координате, па услов $u \neq 0$ заправо значи да је $|u_1|^2 + \dots + |u_n|^2 \neq 0$, док се не може гарантовати да је $u_1^2 + \dots + u_n^2 = 0$). Из претходног је $u^T P^T = \lambda u^T$, па је $\overline{u}^T P^T = \overline{\lambda} \cdot \overline{u}^T$ (при чему је $\overline{u}^T = (\overline{u}_1, \dots, \overline{u}_n)$), те из претходне две везе добијамо $|u_1|^2 + \dots + |u_n|^2 = \overline{u}^T P^T P \overline{u}^T = |\lambda|^2(|u_1|^2 + \dots + |u_n|^2)$, па је $|\lambda| = 1$ (приметимо да је у добијеној вези битно извршити и конјуговање, због претходног коментара, а како је $P^T \in M_n(\mathbb{R})$, оно не утиче на ту матрицу). Како су сопствене вредности P међу решењима $|\lambda| = 1$, из Жорданове форме се опет може доћи до закључка за ортогоналну $P \in M_n(\mathbb{R})$ важи $\det P \in \{-1, 1\}$ (иначе, закључак да су сопствене вредности ортогоналне матрице по модулу 1 се може добити и као последица облика карактеристичног полинома инверзне матрице (видети пример 29)). Из претходног следи да, ако ортогонална $P \in M_n(\mathbb{R})$ има сопствену вредност у $\mathbb{R}$, та сопствена вредност мора бити или -1 или 1. Такође, јасно је да се ортогоналне матрице природно појављују приликом испитивања изометрија у $\mathbb{R}^n$ (ако је $\langle \cdot, \cdot \rangle$ канонски скаларни производ у $\mathbb{R}^n$, а $e = (e_i)_{i=1}^n$ ортонормирана база, $P \in M_n(\mathbb{R})$ је ортогонална ако само је и eP ортонормирана база (тј. колоне P чине ортонормирану базу $\mathbb{R}^n$), а важи и $\|Px\|^2 = \langle Px, Px \rangle = (Px)^T (Px) = x^T (P^T P) x = x^T x = \langle x, x \rangle = \|x\|^2$).
Видимо да релација ортогоналне сличности описује матрице истог оператора при промени базе, ако се ограничимо на ортонормиране базе (наравно, ортогонално сличне матрице су и сличне, док обрнуто не мора бити тачно; рецимо, ако је $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ и $R = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, свака матрица која је ортогонално слична матрици A је ортогонална (A је ортогонална, па ако је таква и P, онда је и $P^{-1}AP$), а како је $B = R^{-1}AR = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$, следи да је $B \sim A$, но како није ортогонална, није и ортогонално слична са A).

Пример 43. Ако је $Q \in M_2(\mathbb{R})$ ортогонална, по закључку који је претходио примеру, следи $\det Q \in \{-1, 1\}$. Како је $A = \operatorname{diag}(1, -1)$ ортогонална, следи да је Q ортогонална ако и само ако је $Q \cdot \operatorname{diag}(1, -1)$ ортогонална, те је у циљу одређивања свих ортогоналних матрица реда 2 довољно одредити оне за које је $\det Q = 1$. Сопствене вредности такве матрице су модула 1, а, како је $\det Q = 1$, и њихов производ једнак 1. Уколоко су оне и реалне, следи да је у питању E_2 или $-E_2$, а ако су из $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, онда су у питању $z = \cos\varphi + i \sin\varphi$ и $\overline{z}$, те је у питању $M(1, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ (видети лему 7.3.4), за $\varphi \in (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$ (заправо, ако је $\varphi = 0$, онда је $M(1, \varphi) = E_2$, а ако је $\varphi = \pi$, онда је $M(1, \varphi) = -E_2$, па су $M(1, \varphi)$, за $[0, 2\pi)$, све ортогоналне матрице из $M_2(\mathbb{R})$ чија је детерминанта 1). Дакле, ортогоналне матрице у $M_2(\mathbb{R})$ су $M(1, \varphi)$ и $N(1, \varphi) = M(1, \varphi) \cdot \operatorname{diag}(1, -1) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$, где је

$\varphi \in [0, 2\pi)$. Приметимо да, на основу коментара датих након леме 7.3.4 (а видети и пример 32) $M(1, \varphi)$ представља ротацију у $\mathbb{R}^2$ (са центром у $(0,0)$ за угао φ), а није тешко видети да $N(1, \varphi)$ представља осну симетрију (у односу на праву $\sin\frac{\varphi}{2} \cdot x - \cos\frac{\varphi}{2} \cdot y = 0$). △

Наравно, релација ортогоналне сличности доводи до више ограничења у односу на релацију сличности. Приликом одређивања класа еквиваленције релације сличности, ако карактеристични полином матрице има разлагање на линеарне факторе у $\mathbb{R}[x]$, закључили смо да та класа садржи горње троугаону матрицу, те се природно поставља питање да ли сличан резултат важи и у случају релације ортогоналне сличности.

Лема 7.5.3 (Шурово разлагање). Ако је $A \in M_n(\mathbb{R})$, где је $n \in \mathbb{N}$, таква да се $\chi_A(x)$ разлаже на линеарне факторе у $\mathbb{R}[x]$, онда постоји ортогонална $P \in M_n(\mathbb{R})$, тако да је P^TAP горње троугаона.

Доказ. Тврђење је тривијално у случају $n = 1$. Нека је $n \geqslant 2$ и тврђење тачно за $n-1$. По претоставкама, постоје $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ и јединични $u_1 \in \mathbb{R}^n$, тако да је $Au_1 = \lambda_1 u_1$, а онда, по претходним закључцима, постоји и ортонормирана база $(u_i)_{i=1}^n$ простора $\mathbb{R}^n$. Матрица P, чије су колоне $u_1, \ldots, u_n$, редом, је ортогонална (важи $P^TP = E_n$), а како је $Au_1 = \lambda_1 u_1$, следи да је $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & B \\ 0 & A_{n-1} \end{pmatrix}$ (у наведеном блок матричном представљању је $B \in M_{1,n-1}(\mathbb{R})$, $A_{n-1} \in M_{n-1}(\mathbb{R})$, а 0 представља $0_{n-1\times 1}$). Лапласовим развојем по првој колони, следи $\chi_A(x) = \chi_{P^{-1}AP}(x) = \det(P^{-1}AP - xE_n) = (\lambda_1 - x)\det(A_{n-1} - xE_{n-1})$, те су и све сопствене вредности A_{n-1} реалне. Како је тврђење тачно за матрице из $M_{n-1}(\mathbb{R})$, следи да постоји ортогонална $P_{n-1} \in M_{n-1}(\mathbb{R})$, тако да је $P_{n-1}^{-1}A_1P_{n-1}$ горње троугаона, па је и $Q^{-1}\begin{pmatrix} 1 & B \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}Q$ горње троугаона, где је $Q = \operatorname{diag}((1), P_{n-1})$ (тривијално је и Q ортогонална). Но онда је и $(PQ)^{-1}A(PQ)$ горње троугаона, а како је PQ ортогонална, следи да је тврђење тачно и за матрице из $M_n(\mathbb{R})$. Овим је тврђење доказано, на основу математичке индукције. □

Напоменимо да се по литератури Шуровим разлагањем чешће назива варијанта претходног тврђења при раду са комплексним скаларним производом (које, услед тога што се елементи $\mathbb{C}[x]$ разлажу на линеарне факторе, има једноставнију формулацију, а изложени доказ се праволинијски прилагођава том случају), а, из јасних разлога, виђа се и назив Шурова триангулација. Како у овом моменту радимо са Еуклидским векторским просторима, задржали смо се на реалном случају. Претходни резултат ће добити употребну вредност уколико одредимо „довољно велику” класу матрица, чији се карактеристични полиноми растављају на линеарне факторе у $\mathbb{R}[x]$ (наравно, значење последњег је релативно и зависи од проблема који се посматра, пошто иста класа може довести до решења у неким проблемима, а у неким не, а прецизирање тог значења за наше потребе ћемо приказати до краја овог дела) и да притом утврђивање припадности тој класи буде што једноставније. За $n \in \mathbb{N}$ се $A \in M_n(\mathbb{R})$ назива **симетрична** ако је $A = A^T$ (приметимо да последње има смисла и при раду са матрицама чији су елементи из произвољног поља). Ако је $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, онда је $A = A^T$ еквивалентно са $a_{i,j} = a_{j,i}$ за све $(i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2$ (јасно, довољно је испитати да ли је последње испуњено нпр. у случају $1 \leqslant i < j \leqslant n$), односно, ако су једнаки елементи који су симетрични у односу на главну дијагоналу (одакле и потиче назив за ову класу матрица). Специјално, дијагоналне матрице су симетричне, јасно је и да је линеарна комбинација симетричних матрица такође симетрична матрица, ако је $A \in M_n(\mathbb{R})$, онда је $A + A^T$ симетрична, док производ симетричних матрица не мора бити симетрична матрица (рецимо, ако је $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A^T$ и $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = B^T$, важи $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq (AB)^T$), тј. симетричне матрице у $M_n(\mathbb{R})$ чине потпростор, али не и подалгебру. Ако је $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, онда је $P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, где је B малопре уочена матрица, те матрица слична симетричној не мора бити симетрична. Међутим, ако је $C = C^T$, а Q ортогонална, онда важи $(Q^{-1}CQ)^T = Q^T C^T (Q^{-1})^T = Q^{-1}CQ$, тј. ако су симетричне матрице сличне, оне су и ортогонално сличне (последње је један од разлога што је проучавање симетричних матрица одложено до момента увођења структуре скаларног производа).

У наредном тврђењу ортогоналност посматрамо у смислу канонског скаларног производа на $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Лема 7.5.4. Нека је $A \in M_n(\mathbb{R})$ симетрична.
(а) Онда $\chi_A(x)$ има разлагање на линеарне факторе у $\mathbb{R}[x]$.
(б) Ако су λ, μ сопстевене вредности A, при чему је $\lambda \neq \mu$, u_λ и u_μ сопствени вектори који одговарају λ и μ, редом, онда је $u_\lambda \perp u_\mu$.
(в) Онда је A ортогонално слична некој дијагоналној матрици.

Доказ. (а) Ако је $\lambda \in \mathbb{C}$ такво да је $\chi_A(\lambda) = 0$, постоји ненула $u = (u_1, \ldots, u_n)^T \in M_{n,1}(\mathbb{C})$, тако да је $Au = \lambda u$, одакле, конјуговањем, следи $A\overline{u} = \overline{\lambda}\overline{u}$ (за $B = (b_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n} \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ је $\overline{B} = (\overline{b}_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n}$; видети део након дефиниције 7.5.3), те се, транспоновањем, добија $\overline{\lambda}\overline{u}^T = \overline{u}^T A^T = \overline{u}^T A$. Множењем здесна са u, следи $\overline{\lambda}\overline{u}^T u = \overline{u}^T A u = \lambda \overline{u}^T u$, одакле је $\overline{\lambda} = \lambda$ (важи $\overline{u}^T u = |u_1|^2 + \ldots + |u_n|^2 \neq 0$), тј. $\lambda \in \mathbb{R}$.
(б) Важи $\lambda u_\lambda^T u_\mu = (\lambda u_\lambda)^T u_\mu = (A u_\lambda)^T u_\mu = u_\lambda^T A^T u_\mu = u_\lambda^T A u_\mu = \mu u_\lambda^T u_\mu$, тј. $(\lambda - \mu) u_\lambda^T u_\mu = 0$. Међутим, како је $\lambda \neq \mu$, следи $u_\lambda^T u_\mu = 0$, тј. $u_\lambda \perp u_\mu$.
(в) На основу дела (а) χ_A има растављање на линеарне факторе у $\mathbb{R}[x]$, па, на основу Шуровог разлагања, постоји ортогонална $P \in M_n(\mathbb{R})$, тако да је $B = P^T A P$ горње троугаона. Онда је $B^T = P^T A^T (P^T)^T = P^T A P = B$, тј. B је и симетрична, па је дијагонална. $\square$

Приметимо да тврђење дела (а) важи и уколико се $M_n(\mathbb{R})$ посматра као структура без скаларног производа, као и последица дела (в), да симетрична матрица има сличну дијагоналну. На основу добијеног, ако су $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ сопствене вредности симетричне $A \in M_n(\mathbb{R})$, са вишеструкостима $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}$, редом, онда је $\mu_A(x) = (x-\lambda_1)\cdot\ldots\cdot(x-\lambda_k)$, а $\chi_A(x) = (x-\lambda_1)^{m_1}\cdot\ldots\cdot(x-\lambda_k)^{m_k}$ (наравно, важи $m_1+\ldots+m_k = n$). Ако је $(\mu_i)_{i=1}^n$ низ у ком је m_i елемената једнако λ_i, за $1 \leqslant i \leqslant k$, а $D = \mathrm{diag}((\mu_1), \dots, (\mu_n))$, на основу дела (в) је $D = P^T AP$, за неку ортогоналну $P \in M_n(\mathbb{R})$, тј. важи $PD = AP$. Ако су $u_1, \dots, u_n$ колоне P, онда су колоне PD једнаке $\mu_1 u_1, \dots, \mu_n u_n$, редом, а колоне AP су $Au_1, \dots, Au_n$, редом, тј. важи $Au_i = \mu_i u_i$, за $1 \leqslant i \leqslant n$. Дакле, колоне матрице P чине сопствени вектори матрице A. Последње описује и метод одређивања матрице P из дела (в). Наиме, уз претходну нотацију, важи $\dim\mathrm{Ker}(A-\lambda_i E_n) = m_i$, за $1 \leqslant i \leqslant k$, у том простору се изабере база (која садржи m_i вектора) и ортонормира (нпр. Грам–Шмитовим поступком), а скуп добијених вектора, за $1 \leqslant i \leqslant k$, чини ортонормирану базу $\mathbb{R}^n$, док матрица којој су ти вектори колоне игра улогу матрице P (наравно, од редоследа изабраних вектора зависи редослед бројева $\mu_1, \dots, \mu_n$ на дијагонали добијене матрице D).

Пример 44. Нека је $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 2 & 5 & -6 \\ -4 & -6 & 4 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Онда је $A = A^T$, $B = B^T$, $\chi_A(x) = -x^3 + 9x^2 + 36x = -x(x+3)(x-12)$, $\chi_B(x) = -x^3+6x^2-9x+4 = -(x-1)^2(x-4)$. Како се $A - 0\cdot E_3$ елементарним трансформацијама врста своди на $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 2 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (нпр. трансформацијама $V_3 + 2V_2$, па $V_3 - 2V_1$), следи да је $\mathrm{Ker}(A - 0\cdot E_3) = \{(-2z, 2z, z)^T \,|\, z \in \mathbb{R}\}$, тј. јединични вектор из тог простора је нпр. $u_1 = (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})^T$. Слично, важи $\mathrm{Ker}(A + 3\cdot E_3) = \{xu_2 \,|\, x \in \mathbb{R}\}$ и $\mathrm{Ker}(A - 12\cdot E_3) = \{xu_3 \,|\, x \in \mathbb{R}\}$, где су $u_2 = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})^T$ и $u_3 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3})^T$ јединични вектори. Ако је P матрица чије су колоне u_1, u_2, u_3, тим редом, на основу претходних резултата (видети лему 7.5.4 и коментаре након ње), следи да је P ортогонална и важи $P^T AP = \mathrm{diag}((0), (-3), (12))$. Аналогно, у случају матрице B, важи $\mathrm{Ker}(B - 4\cdot E_3) = \{xv_1 \,|\, x \in \mathbb{R}\}$, где је $v_1 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})^T$ јединични и важи $v_1 \perp \mathrm{Ker}(B - 1\cdot E_3) = \{(-y-z, y, z) \,|\, y.z \in \mathbb{R}\}$. У овом случају је потребно одредити ортонормирану базу простора $\mathrm{Ker}(B - 1\cdot E_3)$. Једну базу, по претходном, чине вектори $w_2 = (-1, 1, 0)^T$ и $w_3 = (-1, 0, 1)^T$, те се из ње, Грам–Шмитовим поступком, добија $v_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)^T$ и $v_3 = \frac{w_3 - \langle w_3, v_2\rangle v_2}{\|w_3 - \langle w_3, v_2\rangle v_2\|} = (-\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3})^T$. Дакле, ако је Q матрица чије су колоне v_1, v_2, v_3, редом, она је ортогонална и важи $Q^T BQ = \mathrm{diag}((4), (1), (1))$. △

Реалне квадратне форме

Дефиниција 7.5.4. Нека је V реални векторски простор коначне димензије, $q : V \to \mathbb{R}$ и $f : V^2 \to \mathbb{R}$, дефинисано са $f(x, y) = q(x+y) - q(x) - q(y)$, тако да

(1) за свако $\alpha \in \mathbb{R}$ и свако $x \in V$ важи $q(\alpha x) = \alpha^2 q(x)$;

(2) за свако $y \in V$ је $f_y(x) = f(x,y)$ линеарно;
(3) за свако $x \in V$ је $f_x(y) = f(x,y)$ линеарно.
Онда се q назива (реална) **квадратна форма** на V.

Како ћемо у овом делу радити само са реалним квадратним формама, користићемо назив квадратна форма, тј. нећемо наглашавати да је реална (иначе, овај појам има смисла и уколико поље скалара није $\mathbb{R}$, као и у случају простора бесконачне димензије). Јасно, скуп квадратних форми на V чини (реални) векторски простор. Непосредно из дефиниције, уколико је $\dim V = n \in \mathbb{N}$ и $(e_i)_{i=1}^n$ база V, ако је $x = \sum\limits_{i=1}^n x_i e_i$ и $y = \sum\limits_{i=1}^n y_i e_i$, следи да је $f(x,y) = f\Big(\sum\limits_{i=1}^n x_i e_i, y\Big) = \sum\limits_{i=1}^n x_i f\Big(e_i, \sum\limits_{j=1}^n y_j e_j\Big) = \sum\limits_{i,j=1}^n x_i y_j f(e_i,e_j) = 2\sum\limits_{i,j=1}^n a_{i,j} x_i y_j$, где је $a_{i,j} = \frac{1}{2}\cdot f(e_i,e_j) = \frac{1}{2}\cdot (q(e_i+e_j) - q(e_i) - q(e_j))$, за $1 \leqslant i,j \leqslant n$, а како, за свако $x \in V$, важи $f(x,x) = q(2x) - 2q(x) = 2q(x)$, следи $q(x) = \sum\limits_{i,j=1}^n a_{i,j} x_i x_j$, тј. квадратна форма представља реални хомогени полином степена 2 (често се виђа и да последње игра улогу дефиниције квадратне форме). Из претходног следи да је $q(x) = x^T A x$, где је $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^n$ (тзв. матрични запис квадратне форме), при чему је $a_{i,j} = \frac{1}{2}\cdot (q(e_i+e_j) - q(e_i) - q(e_j)) = a_{j,i}$, за $1 \leqslant i,j \leqslant n$, тј. A је симетрична матрица. Приметимо да, ако би израз $q(x) = x^T A x$ био дефиниција квадратне форме, без захтева да је A симетрична, различите матрице могу довести до исте квадратне форме (а није тешко видети да A и $B = (b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ одређују исту квадратну форму ако и само ако је $a_{i,j} + a_{j,i} = b_{i,j} + b_{j,i}$, за све $1 \leqslant i,j \leqslant n$). Међутим, и уз такву дефиницију се може изабрати да је матрица која одређује квадратну форму симетрична (важи $q(x) = (x^T A x)^T = x^T A^T x$, па је $q(x) = x^T \cdot \frac{A+A^T}{2} \cdot x$, за свако $x \in V$, а $\frac{A+A^T}{2}$ је симетрична).
По претходном разматрању, приликом промене базе простора V, уколико је P матрица преласка, квадратна форма $q(x) = x^T A x$ ће бити приказана у облику $x^T P^T A P x$, где је P инвертибилна матрица, што нас наводи да квадратне форме посматрамо у Еуклидском векторском простору (те се по литератури често виђа да се у претходној дефиницији од почетка намеће тај услов; овде је жеља била да прикажемо да се до њега природно долази). У том случају, на основу раније добијених резултата, уколико се ограничимо на ортогоналне матрице преласка P, постоји дијагонална D тако да је $q(x) = (Px)^T D P x$, при чему се на дијагонали D налазе сопствене вредности матрице A, бројеви $\lambda_i \in \mathbb{R}$, за $1 \leqslant i \leqslant n$ (видети лему 7.5.4), тј. ако је $y = Px$, онда је $q(y) = \sum\limits_{i=1}^n \lambda_1 y_i^2$ (овим је и прецизирано значење термина „довољно велика" класа матрица у разматрању које је претходило леми 7.5.4).

Дефиниција 7.5.5. Квадратна форма q се назива **позитивно дефини-**

тна ако за свако $x \in V \setminus \{0\}$ важи $q(x) > 0$, **негативно дефинитна** ако за свако $x \in V \setminus \{0\}$ важи $q(x) < 0$, **ненегативно дефинитна** ако за свако $x \in V$ важи $q(x) \geqslant 0$, а **непозитивно дефинитна** ако за свако $x \in V$ важи $q(x) \leqslant 0$.

Из саме дефиниције је јасно да је квадратна форма q негативно дефинитна ако и само ако је $-q$ позитивно дефинитна (а слична је веза између непозитивно и ненегативно дефинитних форми), те ћемо у наставку пажњу усресредити на испитивање позитивне дефинитности (а, по управо примећеном, ће непосредно следити одговарајући закључак за негативну дефинитност форме). Ако је $A \in M_n(\mathbb{R})$ симетрична, претходно уведени појмови се преносе и на ту матрицу, ако она индукује квадратну форму са одговарајућом особином (рецимо, за A ћемо рећи да је позитивно дефинитна ако и само ако је форма x^TAx позитивно дефинитна). Како за симетричну $A \in M_n(\mathbb{R})$ постоје ортогонална $P \in M_n(\mathbb{R})$ и дијагонална $D \in M_n(\mathbb{R})$, тако да је $A = P^TDP$, из последњег следи да је A позитивно (негативно) дефинитна ако и само ако је D позитивно (негативно) дефинитна, односно ако и само ако су све сопствене вредности A позитивне (негативне). Такође, ако су $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ позитивно дефинитне и $\alpha, \beta > 0$, онда су $\alpha A + \beta B$, $\operatorname{diag}(A, B)$, као и A^k, за свако $k \in \mathbb{N}$, позитивно дефинитне, а ако је, уз претходно, A инвертибилна, онда је и A^{-1} позитивно дефинитна.

Пример 45. Типичан пример квадратне форме на Еуклидсном простору V је квадрат норме вектора. Притом, улогу функције f из дефиниције 7.5.4 онда игра израз $2\langle x, y\rangle = \|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2$ (видети пример 38), те су резултати добијени приликом испитивања квадратних форми од користи и при описивању скаларних производа на простору V (није тешно видети да, ако је $A \in M_n(\mathbb{R})$ позитивно дефинитна, онда израз x^TAy, за $x, y \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ представља скаларни производ). У случају $V = \mathbb{R}$, квадратне форме су мономи степена 2, тј. изрази облика $q(x) = ax^2$, за $a \in \mathbb{R}$, а јасно је да је та форма позитивно дефинитна ако и само ако је $a > 0$. Спектар матрице B из примера 13 је $\{1, 2\}$, те је одговарајућа квадратна форма (тј. $2x_1^2 + x_2^2$) позитивно дефинитна, а ако је P матрица из истог примера, њен спектар је $\{-1, 1\}$, те одговарајућа квадратна форма (тј. $2x_1x_2$) није ни позитивно ни негативно дефинитна. Аналогно, и за матрице већих димензија, матрица је позитивно (ненегативно) дефинитна ако и само ако су све њене сопствене вредности позитивне (ненегативне). Рецимо, матрица A из примера 44 није ни позитивно ни негативно дефинитна (спектар јој је $\{-3, 0, 12\}$, па садржи и негативну и позитивну вредност), док је B из истог примера позитивно дефинитна (све сопствене вредности су јој позитивне). $\triangle$

Поставља се питање што једноставнијег утврђивања да ли матрица (квадратна форма) има неку од претходно наведених особина, као и да ли се то може утврдити без одређивања спектра матрице.

Лема 7.5.5. Ако је $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in M_n(\mathbb{R})$ позитивно дефинитна, онда је $\det A > 0$ и $a_{i,i} > 0$ за свако $1 \leqslant i \leqslant n$.

Доказ. Како је $A = P^T DP$, где је $P \in M_n(\mathbb{R})$ ортогонална, а $D \in M_n(\mathbb{R})$ дијагонална, којој су елементи главне дијагонале сопствене вредности A, бројеви $\lambda_i > 0$, за $1 \leqslant i \leqslant n$, следи $\det D = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n > 0$ и $\det P^T = \det P = 1$, па је $\det A = \det(P^T DP) = \det P^T \cdot \det D \cdot \det P = \det D > 0$. Ако је $e_i = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{i-1}, 1, 0, \ldots, 0)^T \in \mathbb{R}^n$, следи $a_{ii} = e_i^T A e_i > 0$, за $1 \leqslant i \leqslant n$. $\square$

Како је A негативно дефинитна ако и само ако је $-A$ позитивно дефинитна, из претходног непосредно следи да ако је $A \in M_n(\mathbb{R})$ негативно дефинитна, онда је $a_{ii} < 0$ за $1 \leqslant i \leqslant n$, док је $\det A$ истог знака као и израз $(-1)^n$. Рецимо, из последњег можемо закључити да P из примера 13 није ни позитивно ни негативно дефинитна (важи $\det P = -1 < 0$).

Ако је $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in M_n(\mathbb{R})$, где је $n \in \mathbb{N}$, и $k \in \{1, \ldots, n\}$, нека је $A_{(k)} = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant k} \in M_k(\mathbb{R})$ („горњи–леви ћошак” димензије k матрице A) и $\Delta_k(A) = \det A_{(k)}$ ($\Delta_k(A)$ називамо **главни минор реда** k матрице A). У случају дијагоналне $D \in M_n(\mathbb{R})$, код које су елементи главне дијагонале λ_i (у том редоследу), за $1 \leqslant i \leqslant n$, важи $\Delta_k(D) = \prod_{i=1}^{k} \lambda_i$, па ако је D позитивно дефинитна, онда је $\Delta_i(D) > 0$, за свако $1 \leqslant i \leqslant n$, ако је D негативно дефинитна, онда је $\Delta_i(D) > 0$ за парне i, а $\Delta_i(D) < 0$ за непарне i, где је $1 \leqslant i \leqslant n$. Наведена особина се преноси и на симетричне $A \in M_n(\mathbb{R})$, што је показано у наредном тврђењу. Приметимо да, како је $\det(-A_{(k)}) = (-1)^k \det A_{(k)}$, довољно је тврђење показати за позитивно дефинитне матрице (из последњег директно следи и варијанта за негативно дефинитне).

Лема 7.5.6 (Силвестер). Симетрична матрица $A \in M_n(\mathbb{R})$ је позитивно дефинитна ако и само ако је $\Delta_k(A) > 0$, за свако $1 \leqslant k \leqslant n$.

Доказ. Ако је $x = (x_1 \ldots x_n)^T$, нека је $x_{(k)} = (x_1 \ldots, x_k, 0 \ldots, 0)^T$ за $1 \leqslant k \leqslant n$ (тј. првих k координата вектора $x_{(k)}$ се поклапа са првих k координата вектора x, а преостале су 0) и $y_k = (x_1 \ldots x_k) \in \mathbb{R}^k$ (пројекција на простор димензије k генерисан са првих k координатних вектора). Онда је $y_k^T A_{(k)} y_k = x_{(k)}^T A x_{(k)} > 0$, па је $A_{(k)}$ позитивно дефинитна. На основу претходне леме следи $\Delta_k(A) > 0$.

Са друге стране, ако је $\Delta_k(A) > 0$ за $1 \leqslant k \leqslant n$ и $A = \begin{pmatrix} A_{(n-1)} & a \\ a^T & \alpha \end{pmatrix}$, онда је $A_{(n-1)}$ несингуларна, па ако су $a_1, \ldots, a_{n-1}$ колоне матрице $A_{(n-1)}$, оне су линеарно независне. Следи да постоје јединствени $c_1, \ldots, c_{n-1} \in \mathbb{R}$, тако да је $a = c_1 a_1 + \ldots + c_{n-1} a_{n-1}$. Ако је $P \in M_n(\mathbb{R})$ матрица чијих се првих $n-1$ колона поклапа са првих $n-1$ колона јединичне матрице, а n-та колона $(-c_1, \ldots, -c_{n-1}, 1)^T$, онда је P несингуларна и важи $\det P = 1$, као и $P^T AP = \begin{pmatrix} A_{(n-1)} & 0 \\ 0^T & \psi \end{pmatrix}$, где је $\psi = \alpha - \sum_{i=1}^{n-1} c_i \alpha_i$, где је $a = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})^T$. Притом, ако је $\psi = 0$, онда је n-та колона матрице A линеарна комбинација првих $n-1$ колона те матрице, те би у том случају било $\Delta_n(A) = 0$. Дакле, $\psi \neq 0$ и важи $\det A = \det P^T \cdot \det A \cdot \det P = \det(P^T AP) = \psi \cdot \det A_{(n-1)}$, па како је $\det A_{(n-1)} > 0$, следи $\psi > 0$, док је $x^T Ax > 0$, где је $x = (x_1 \dots x_n)^T$, еквивалентно са $(Px)^T A(Px) = x^T P^T APx = x^T_{(n-1)} A_{(n-1)} x_{(n-1)} + \psi x_n^2$, те тврђење следи на основу индукције. $\square$

Претходна тврђења дају прилично ефикасан апарат за утврђивање позитивне или негативне дефинитности матрице (квадратне форме), но имају ограничења приликом утврђивања ненегативне и непозитивне дефинитности. Рецимо, за матрицу B из примера 44, главни минори су $2, 2, 4$, редом, те (без одређивања спектра матрице) закључујемо да је она позитивно дефинитна, док код матрица $C_1 = \mathrm{diag}((0), (1), (1))$ и $C_2 = \mathrm{diag}((0), (1), (-1))$ су сви главни минори једнаки 0, те ова матрица није ни позитивно ни негативно дефинитна, али по питању непозитивне и ненегативне дефинитности претходни критеријум, у оригиналном облику, не доводи директно до одговора. До одговора се може доћи нпр. ситнијим модификацијама претходна два тврђења; на пример, у случају матрице C_2, одговарајућа форма (тј. $x_2^2 - x_3^2$) се, заменом улоге променљивих (тј. њиховог поретка), своди на форму чија је матрица $C_2' = \mathrm{diag}((-1), (1), (0))$, те је $\Delta_2(C_2') < 0$, па ова форма није ни нененегатнивно но непозитивно дефинитна (а до закључка се могло доћи и на основу тога што се на главној дијагонали C_2 налазе и позитивна и негативна вредност), а често се виђа и да се у оваквим ситуацијама одговарајућа квадратна форма запише у облику комбинације ненегативних израза (рецимо, у случају C_1, одговарајућа квадратна форма је $x_2^2 + x_3^2 \geqslant 0$, те је ненегативно дефинитна).

Пример 46. Ако је $a \in \mathbb{R}$ и $A = \begin{pmatrix} a & a-2 \\ a-2 & a^3 \end{pmatrix}$, важи $\Delta_1(A) = a$ и $\Delta_2(A) = a^4 - (a-2)^2 = (a+2)(a-1)(a^2 - a + 2)$. Како је $\Delta_2(A) < 0$ за $a \in (-2, 1)$, у овом случају A не задовољава ниједну од наведених дефинитности, ако је $a \in (1, \infty)$, важи $\Delta_1(A) > 0$ и $\Delta_2(A) > 0$, те је позитивно дефинитна, а ако је $a \in (-\infty, -2)$, важи $\Delta_1(A) < 0$ и $\Delta_2(A) > 0$, те је негативно дефинитна. Коначно, ако је $a = 1$, одговарајућа квадратна форма је $x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = (x_1 - x_2)^2 \geqslant 0$, те је ненегативно дефинитна, а ако је $a = -2$, одговарајућа квадратна форма је $-2x_1^2 - 8x_1x_2 - 8x_2^2 = -2(x_1 + 2x_2)^2 \leqslant 0$, те је непозитивно дефинитна. $\triangle$

7.6. Аналитичка геометрија у $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$

Резултати добијени у овој глави нам омогућују да дођемо до одговарајућих геометријских закључака, што је основни циљ наредног дела. При томе ћемо акценат бацити на проучавање геометријских особина у просторима $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$ (но треба рећи да се велики број изложених резултата може пренети и на $\mathbb{R}^n$, за $n > 3$).

У овом делу ћемо $\mathbb{R}^n$ посматрати као Еуклидски векторски простор, са канонским скаларним производом, при чему ће $(e_i)_{i=1}^n$ представљати стандардну ортонормирану базу (база наведена у доказу леме 7.5.5), а $(f_i)_{i=1}^n$ произвољну базу простора $\mathbb{R}^n$. Под координатама тачке X у бази $(f_i)_{i=1}^n$ подразумевамо координате вектора $\overrightarrow{OX}$ у тој бази, где је O координатни почетак (дакле, координате тачке O су $(0,\ldots,0)$), а означаваћемо их са $(x_{i,f})_{i=1}^n$, односно са $(x_i)_{i=1}^n$, уколико је јасно о којој се бази ради. Традиционално, у случају $n = 2$ се елементи стандардне ортонормиране базе означавају и са i, j, а одговарајуће координате са x, y, редом, а у случају $n = 3$ се елементи стандардне ортонормиране базе означавају и са i, j, k, а одговарајуће координате са x, y, z, редом.

За базу g простора $\mathbb{R}^n$ кажемо да је **исте оријентације** као и база f истог простора ако је детерминанта одговарајуће матрице преласка $(g)_f$ позитивна. На основу понашања матрице преласка у различитим базама (видети лему 7.2.3), као и особина детерминанти (важи $\det E_n = 1$, $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$ и $\det AB = \det A \cdot \det B$ за несингуларне $A, B \in M_n(\mathbb{R})$), следи да је у питању релација еквиваленције на фамилији база простора $\mathbb{R}^n$, која има две класе еквиваленције. У геометријским применама уобичајно је да се за припаднике класе којој припада стандардна ортонормирана база каже да су позитивно, а за оне које су у другој класи негативно оријентисане базе (заправо, видимо да терминологија и потиче из начина на који је дефинисана оријентација).

У случају $\mathbb{R}^2$ су позитивно оријентисане базе у описаној релацији са системом (i, j), ако уочене векторе поставимо тако да им је почетна тачка у координатном почетку, крајње припадају кругу полупречника 1, кретање по краћем луку јединичног круга који повезује крајњу тачку првог и крајњу тачку другог вектора, посматрано из тачке која се налази на позитивном делу z осе, је кретање здесна улево (супротно од смера кретања казаљке на сату), те се овакви системи називају и „десно оријентисани" (наравно, у претходном је битно да се посматра из тачке која се налази на позитивном делу z осе, пошто исто кретање, посматрано из тачке која се налази на негативном делу z осе, ће бити виђено као кретање слева у десно; стога се по литератури чешће виђа да се оријентација дефинише алгебарким методама, како је то урађено и овде). У случају $\mathbb{R}^3$, позитивно оријентисане базе су у описаној релацији са системом (i, j, k), а из сличних разлога се виђа и назив „десно оријентисани" (за уочена два линеарно независна вектора и одређен правац вектора који представља ортокомплемент простора одређеног са та два вектора, при избору смера се говори да се примењује правило десне руке (десног завртња), пошто при постављању шаке десне руке у координатни почетак, тако да је палац усмерен у смеру првог, а кажипрст у смеру другог, средњи прст је усмерен у смеру трећег вектора ако и само ако је у питању позитивно оријентисан систем (аналогно, ако се глава десног завртња постави у раван одређену са прва два вектора система и креће тако да се такав

завртањ „заврће", тело завртња прати смер трећег вектора система ако и само ако је у питању позитивно оријентисан систем)).
На основу резултата теореме 7.4.1 и коментара након ње, (линеарна) једначина $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = b$ нема решења ако је $a_1 = \ldots = a_n = 0$ и $b \neq 0$, скуп решења је $\mathbb{R}^n$ ако је $a_1 = \ldots = a_n = b = 0$, док у случају $a = (a_1, \ldots, a_n) \neq 0$, скуп решења представља потпростор димензије $n-1$ (векторски ако је $b = 0$, а афини ако је $b \neq 0$; потпростор димензије $n-1$ у $\mathbb{R}^n$ се по литератури често назива и **хиперраван**). У последњем случају, ако је $D(d_1, \ldots, d_n)$ тачка која припада уоченој хиперравни α (тј. ако је $(d_1, \ldots, d_n)$ решење уочене једначине), посматрана једначина се може записати у облику $a_1(x_1 - d_1) + \ldots + a_n(x_n - d_n) = 0$, па тачка $X(x_1, \ldots, x_n)$ припада α ако и само ако је $a \perp \overrightarrow{XD}$, што даје јасно геометријско тумачење хиперравни, као и разлог због ког се, ако је $n \geqslant 3$, a назива **вектор хиперравни** α (дакле, у питању је вектор који је нормалан на све векторе одређене са произвољне две тачке те хиперравни, тј. вектор који јој „најмање одговара"; наравно, онда је $\alpha a \perp \overrightarrow{XD}$, за произвољно $\alpha \in \mathbb{R}$, тј. под вектором хиперравни се подразумева било који од вектора облика αa, где је $\alpha \neq 0$, односно, тај вектор није јединствен (одређен је до на множење ненула скаларом)).
Разлог издвајања случаја $n \geqslant 3$ је то што је у том случају димензија хиперравни $n - 1$, а ортокомплемента 1, па како је $n - 1 > 1$, потребно је мање података за опис ортокомплемента, док су у случају $n = 2$ поменути простори исте димензије, а традиционално се онда описује простор решења уочене једначине, а не ортокомлемент.

Једначина праве у $\mathbb{R}^2$

На основу претходног разматрања, у случају $n = 2$ посматрана једначина је $a_1x + a_2y = b$ (као што је то био случај и код решавања система линеарних једначина, често се виђа и запис $ax + by = c$, односно да се при мањем броју променљивих избегава употреба индекса), те ако је $(a_1, a_2)^T \neq 0$, простор решења је димензије 1, а уочена једначина се назива **општи** (имплицитни) **облик** једначине праве (у $\mathbb{R}^2$). Притом, ако је (d_1, d_2) једно од решења, опште решење је одређено са $(x, y)^T = (d_1 + a_2t, d_2 - a_1t)^T = (d_1, d_2)^T + t(a_2, -a_1)^T$, за произвољно $t \in \mathbb{R}$, а последње се назива **параметарски облик** једначине праве. Приметимо да, без додатних ограничења, ни општи ни параметарски облик праве нису јединствено одређени (рецимо, за произвољно $\alpha \neq 0$, једначина $\alpha a_1x + \alpha a_2y = \alpha b$ одређује исту праву као и већ посматрана једначина, док и $(d_1, d_2)^T + t(\alpha a_2, -\alpha a_1)^T$ представља параметарски облик те праве). Сходно претходним разматрањима, вектор $(a_2, -a_1)^T$ се назива **вектор** (уочене) **праве** (и он је нормалан на $(a_1, a_2)^T$). Ако је $a_1 \neq 0$ и $a_2 \neq 0$, из претходног следи $\frac{x-d_1}{a_2} = \frac{y-d_2}{-a_1}$ (обе стране једнакости су једнаке t), који се назива и **канонски облик** једначине праве, а како је из њега лако одредити геометријска својства праве (у бројиоцу се појављују координате тачке коју права садржи, а у имениоцу координате вектора праве), по литератури се она често приказује баш у том облику, а, притом, могућност да је једна од координата вектора једнака 0, уз жељу да се свака права може приказати у наведеном облику, се отклања договором да ако је неки од имениоца у раломцима који се појављују једнак 0, онда се сматра да је и бројилац једнак 0 (рецимо, уз тај договор, једначина x осе ће бити $\frac{x}{1} = \frac{y}{0}$). Облик једначине праве који највише одговара техници развијеној приликом испитивања реалних функција једне реалне променљиве је, наравно, облик у којем променљива x игра улогу параметра, што је могуће ако и само ако вектор праве и вектор x осе нису међусобно нормални (онда је нормална пројекција те праве на x осу бијекција), односно ако и само ако је $a_2 \neq 0$ (пошто је $(a_2, -a_1)^T$ вектор уочене праве, а $i = (1, 0)^T$ вектор x осе, њихов скаларни производ је a_2), а у том случају се једначина праве приказује у облику $y = kx + n$, где је $k = -\frac{a_1}{a_2}$ (тзв. коефицијент правца уочене праве), а $n = \frac{b}{a_2}$, који се назива **експлицитни облик** једначине праве (јасно, предност последњег облика је, између осталог, то што се природно повезује са резултатима добијеним у претходном делу текста, а једна од мана је то што се не може свака права изразити у наведеном облику). Приметимо да је, уколико постоји, експлицитни облик једначине праве јединствено одређен.

Природно се поставља питање међусобног односа две праве у $\mathbb{R}^2$. Ако су у питању $a_{1,1}x + a_{1,2}y = b_1$ и $a_{2,1}x + a_{2,2}y = b_2$ (при чему је $a_{1,1}^2 + a_{1,2}^2 \neq 0$ и $a_{2,1}^2 + a_{2,2}^2 \neq 0$, пошто су у питању ненула вектори), рангови и матрице и проширене матрице система састављеног од наведене две једначине су или 1 или 2. На основу претходних резултата (теорема 7.4.1), у случају да су оба посматрана ранга једнаки 1, $(a_{1,1}, a_{1,2}, b_1)$ и $(a_{2,1}, a_{2,2}, b_2)$ су линеарно зависни, а простор решења је димензије 1, односно, у овом случају једначине система представљају исту праву. У случају да је ранг система 1, а проширеног 2, уочени систем нема решења, а последње се дешава ако су $(a_{1,1}, a_{1,2})$ и $(a_{2,1}, a_{2,2})$ линеарно зависни (у том случају зависни су и вектори уочених правих, $(a_{1,2}, -a_{1,1})$ и $(a_{2,2}, -a_{2,1})$), док су $(a_{1,1}, a_{1,2}, b_1)$ и $(a_{2,1}, a_{2,2}, b_2)$ независни; дакле, уочене праве имају исти вектор (будући да је вектор праве одређен до на множење ненула скаларом), а немају заједничких тачака, те је геометријско тумачење овог случаја да су у питању паралелне праве. Коначно, ако су оба посматрана ранга једнаки 2 (онда су вектори уочених правих независни), посматрани систем има јединствено решење, а геометријско тумачење је да су у питању праве које се секу, при чему су координате пресечне тачке управо решење тог система.

Пример 47. За $a \in \mathbb{R}$, вектори правих $ax + y = 1$ и $x + ay = a^2$ су $(1, -a)^T$ и $(a, -1)^T$, а канонски облици њихових једначина $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{-a}$ и $\frac{x}{a} = \frac{y-a}{-1}$, редом, пошто прва уочена права садржи тачку $(0, 1)$, а друга $(0, a)$ (по договору наведеном у претходном делу, ако је $a = 0$, претходни облик тумачимо као $y = 1$, односно $x = 0$). Ако је $a \notin \{-1, 1\}$, ранг $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ је једнак 2, па се у овом случају наведене праве секу, а, решавањем система, добија се да је пресечна тачка $\left(-\frac{a}{a+1}, \frac{a^2+a+1}{a+1}\right)$. Ако је $a = 1$, наведене једначине представљају једначину исте праве, а ако је $a = -1$, наведени систем нема решења, тј. праве $-x + y = 1$ и $x - y = 1$ су различите и паралелне. △

У делу након леме 7.5.1 дефинисан је појам угла између два ненула вектора, што нас наводи да дефинишемо угао између правих. Како вектор праве није једнозначно одређен, већ до на множење ненула скаларом који може бити и негативан, а угао између $v \neq 0$ и αv, где је $\alpha < 0$, је једнак π, следи да се избором различитих вектора правих може доћи или до истог или до суплементног угла, те, уколико је жеља да угао између правих буде јединствено дефинисан, се морају поистоветити тако добијени резултати. Стога је уобичајно да се угао између две праве дефинише као угао из $[0, \frac{\pi}{2}]$, тј. да се изаберу вектори правих који заклапају угао који није туп, а онда угао између тих вектора представља угао између правих. Како је $\cos\varphi = -\cos(\pi - \varphi)$, следи да ако су $(a_1, a_2)^T$ и $(b_1, b_2)^T$ произвољни вектори правих a и b, редом, онда је $\cos\sphericalangle(a, b) = \frac{|\langle (a_1,a_2)^T,(b_1,b_2)^T\rangle|}{\|(a_1,a_2)^T\|\cdot\|(b_1,b_2)^T\|} = \frac{|a_1b_1+a_2b_2|}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$. У случају да се праве могу представити у експлицитном облику (тј. ако ниједна од њих није паралелна са y осом), ако су k_a и k_b њихови коефицијенти правца, како је $\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\pi - \varphi)$, претходни резултат се по литератури често приказују и у облику $\sphericalangle(a, b) = \operatorname{arctg}\left|\frac{k_a-k_b}{1+k_ak_b}\right|$, при чему се сматра да је наведени угао једнак $\frac{\pi}{2}$ у случају $k_ak_b = -1$.

Ако права $a_1x + a_2y = b$ садржи тачке $(x_M, y_M) \neq (x_N, y_N)$, онда је $a_1x_M + a_2y_M = b$ и $a_1x_N + a_2y_N = b$. Ако је $x_M = x_N$, следи $a_2(y_M - y_N) = 0$, те је $a_2 = 0$, па је једначина праве $x = \frac{b}{a_1}$. Иначе, важи $a_2 \neq 0$, па се, без умањења општости, уочена права може посматрати у облику $a_1x + y = b$, одакле је $a_1(x_M - x_N) + y_M - y_N = 0$. Следи $x_M \neq x_N$, те се у овом случају добија $y = \frac{y_M-y_N}{x_M-x_N}\cdot(x - x_N) + y_N$ (наведен је облик који се најчешће среће по литератури). Ако права није паралелна y оси, коефицијент нагиба јој је k и садржи тачку (x_M, y_M), аналогно претходном, добијамо да је једначина праве $y = k(x - x_M) + y_M$, као и да праве $x = x_M$ и $y = k(x-x_M)+y_M$, за $k \in \mathbb{R}$, чине прамен правих које садрже тачку (x_M, y_M) (наравно, за $(a_1, a_2)^T \neq (0, 0)^T$, праве $a_1x+a_2y = b$, где је $b \in \mathbb{R}$ чине прамен паралелних правих).

На основу дела (в) леме 7.5.2, постоји јединствена пројекција M' тачке $M(x_M, y_M)$ на праву p, одређену једначином $a_1x + a_2y = 0$, а притом важи $\|\overrightarrow{MM'}\| = \min\left\{\|\overrightarrow{MX}\| \mid X \in p\right\}$, те је растојање тачке M од праве p, у ознаци $d(M,p)$, једнако $\|\overrightarrow{MM'}\|$. Тачка M' припада правој која садржи M и нормална је на p (те је њен вектор $(a_2, -a_1)^T$), као и правој p, па су њене координате решење система $a_1x + a_2y = 0$, $a_2x - a_1y = a_2x_M - a_1y_M$, тј. решавањем система следи да је у питању тачка $\left(\frac{a_2^2x_M-a_1a_2y_M}{a_1^2+a_2^2}, \frac{-a_1a_2x_M+a_1^2y_M}{a_1^2+a_2^2}\right)$, па је $d(M, p) = \frac{|a_1x_M+a_2y_M|}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}$.

Случај праве p облика $a_1x + a_2y = b$, уколико јој припада тачка P чије су координате (x_P, y_P), се своди на претходни membrane заменом $x' = x - x_P$,

$y' = y - y_P$ (растојање тачке M од праве $a_1x + a_2y = b$ је једнако растојању тачке чије су координате $(x_M - x_P, y_M - y_P)$ од праве $a_1x + a_2y = 0$), тј. у овом случају је $d(M,p) = \frac{|a_1x_M + a_2y_M - b|}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}$ (претходно посматрани случај је саставни део последње добијене формуле; заправо, тај случај је издвојен стога што је онда посматрана права векторски простор, а видима да се и у општем случају добија исти резултат).

Пример 48. Одредимо праву која припада прамену правих којем и $3x + 2y = -5$ и $7x - 8y = 1$, а удаљена је 5 од тачке $M(5, 7)$. Вектори наведених правих су $(2, -3)^T$ и $(-8, -7)^T$, па како нису колинеарни, оне се секу, а решавањем система једначина које одређују те праве, следи да је пресечна тачка $(-1, -1)$. Тачка M се налази на растојању 6 од праве $x = -1$, а остале праве тог прамена су облика $p_k : y = k(x+1)-1$, где је $k \in \mathbb{R}$. Следи $d(M, p_k) = \frac{|6k-8|}{\sqrt{k^2+1}} = 5$, одакле је $11k^2 - 96k + 39 = 0$, а решења добијене квадратне једначине $k_1 = \frac{48}{11} - \frac{25\sqrt{3}}{11}$ и $k_2 = \frac{48}{11} + \frac{25\sqrt{3}}{11}$, доводе до два решења постављеног задатка. Како је, по Виетовим правилима, $k_1k_2 = \frac{39}{11}$, угао између добијених правих је $\operatorname{arctg}\left|\frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}\right| = \operatorname{arctg}\frac{\frac{50\sqrt{3}}{11}}{1+\frac{39}{11}} = \operatorname{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$. $\triangle$

За крај овог дела поменимо и да се у геометријским применама јављају и други облици представљања праве у $\mathbb{R}^2$. Међу познатијима су сегментни облик, у којем се права приказије у облику $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, при чему су геометријска тумачења величина $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ да представљају одсечке које права одсеца на x и y оси, редом (јасно, у овом облику се могу приказати праве које нису паралелне ниједној од оса и не садрже координатни почетак; у том случају, за праву $a_1x + a_2y = b$ је $a_1, a_2, b \neq 0$, одговарајуће величине су $a = \frac{b}{a_1}$ и $\frac{b}{a_2}$, а у питању је права која садржи тачке $(\frac{b}{a_1}, 0)$ и $(0, \frac{b}{a_2})$), као и нормални облик, у којем се права приказује у облику $x\cos\varphi + y\sin\varphi = d$, где је $d > 0$ и $\varphi \in [0, 2\pi)$, при чему је гоометријско тумачење наведених величина да d представља растојање праве од координатног почетка, а φ оријентисани угао између вектора $i = (1, 0)^T$ и вектора $\overrightarrow{OP}$, где је P пројекција координатног почетка O на уочену праву (јасно, наведени облик постоји ако права не садржи тачку O, тј. ако је $b \neq 0$ (у том случају је $\overrightarrow{OP}$ ненула вектор), а ако је у питању права p чија је једначина $a_1x + a_2y = b \neq 0$, онда је $d = d(O, p) = \frac{|b|}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}$, а једначина праве је еквивалентна са $\frac{|b|}{b} \cdot \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}} \cdot x + \frac{|b|}{b} \cdot \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}} = d$, те како је $\left(\frac{|b|}{b} \cdot \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}\right)^2 + \left(\frac{|b|}{b} \cdot \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}\right)^2 = 1$, постоји јединствено $\varphi \in [0, 2\pi)$, тако да је $\cos\varphi = \frac{|b|}{b} \cdot \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}$ и $\sin\varphi = \frac{|b|}{b} \cdot \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}$, одакле следи егзистенција наведеног облика). Услед јасног геометријског тумачења у случајевима у којим наведени облици постоје, они се обично јављају приликом дубљих геометријских испитивања, а једна од предности им је и то што је (ако постоји) запис праве у наведеним облицима јединствен. Како се поменути облици добијају непосредно из општег облика, а испитивање геометријских особина није примарни циљ овог текста, нећемо се на даље задржавати на проучавању њихових особина.

Векторски и мешовити производ у $\mathbb{R}^3$

У наставку желимо да добијемо аналогије закључака претходног одељка у $\mathbb{R}^3$, тј. да прикажемо геометријско тумачење решења линеарне једначине, као и система линеарних једначина у $\mathbb{R}^3$. По искуству из претходног одељка, јасно је да ће се у том случају појавити потреба одређивања вектора који је нормалан на два неколинеарна вектора (тј. опис ортокомплемента простора димензије 2 у $\mathbb{R}^3$), те у овом одељку дајемо приказ такве конструкције. Приказана конструкција је специфична за $\mathbb{R}^3$ (тј. у наведеном облику се не преноси и на $\mathbb{R}^n$, за $n \neq 3$).

Дефиниција 7.6.1. Нека су $a = (a_1, a_2, a_3)^T = a_1 i + a_2 j + a_3 k \in \mathbb{R}^3$ и $b = (b_1, b_2, b_3)^T = b_1 i + b_2 j + b_3 k \in \mathbb{R}^3$. Онда је **векторски производ** та два вектора, у ознаци $a \times b$, вектор $\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} i + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} k$. Ако је и $c = (c_1, c_2, c_3)^T \in \mathbb{R}^3$, онда се израз $\langle a \times b, c \rangle$ назива **мешовити производ** вектора a, b и c, у ознаци $[a, b, c]$.

Основна својства векторског и мешовитог производа су наведена у наредној леми. Напоменимо да у њој (као и у наставку овог дела) подразумевамо нотацију уведену у претходној дефиницији.

Лема 7.6.1. Нека су $a, b, c, d \in \mathbb{R}^3$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Онда важи:
(а) $a \times b \perp a$, $a \times b \perp b$, $a \times b = -b \times a$, $(\alpha a + \beta b) \times c = \alpha(a \times c) + \beta(b \times c)$;
(б) $a \times b = 0$ ако и само ако су a и b линеарно зависни;
(в) ако је $a, b \neq 0$, онда је $\|a \times b\| = \|a\| \cdot \|b\| \cdot \sin \sphericalangle(a, b)$, а систем $(a, b, a \times b)$ је позитивно оријентисан;
(г) $(a \times b) \times c = -\langle b, c \rangle\, a + \langle a, c \rangle\, b$, $(a \times b) \times c + (b \times c) \times a + (c \times a) \times b = 0$;
(д) $[\alpha a + \beta b, c, d] = \alpha[a, c, d] + \beta[b, c, d]$;
(ђ) $[a, b, c] = [b, c, a] = [c, a, b] = -[a, c, b] = -[b, a, c] = -[c, b, a]$;
(е) $[a, b, c] = 0$ ако и само ако су a, b, c линеарно зависни.

Доказ. На основу Лапласовог развоја (део (а) теореме 7.3.2), важи $[a, b, c] = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} c_1 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} c_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} c_3 = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$, па је $c \perp a \times b$ ако и само ако је добијена детерминанта једнака 0 (што је, специјално, испуњено ако је $c \in \{a, b\}$). По особинама детерминанти, важи $\begin{vmatrix} a_r & a_s \\ b_r & b_s \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b_r & b_s \\ a_r & a_s \end{vmatrix}$, за $(r, s) \in \{(2, 3), (3, 1), (1, 2)\}$, одакле следи и $a \times b = -b \times a$, а аналогно, како је детерминанта линеарна по свакој од врста, следи и линеарност векторског производа по првом чиниоцу. Из особина детерминанти следи и тврђење дела (б), а аналогно приказаном за векторски производ, следе и одговарајућа тврђења за мешовити производ, тј. делови (д) и (ђ), као и део (е). Важи $(a_rb_s - a_sb_r)^2 = a_r^2b_s^2 + a_s^2b_r^2 - 2a_ra_sb_rb_s$, за $1 \leqslant r, s \leqslant 3$, па је $\|a \times b\|^2 = \sum\limits_{1 \leqslant r < s \leqslant 3} (a_r^2b_s^2 + a_s^2b_r^2 - 2a_ra_sb_rb_s) = \sum\limits_{r=1}^{3} a_r^2 \cdot \sum\limits_{s=1}^{3} b_s^2 - (a_1^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 + a_3^2b_3^2 + 2a_1a_2b_1b_2 + 2a_2a_3b_2b_3 + 2a_3b_3a_1b_1) = \|a\|^2 \cdot \|b\|^2 - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 = \|a\|^2 \cdot \|b\|^2 - (\langle a, b\rangle)^2$. За ненула a, b, на основу коментара након леме 7.5.1, важи $\langle a, b\rangle = \|a\| \cdot \|b\| \cos \sphericalangle(a, b)$, те из последњег следи $\|a \times b\| = \|a\| \cdot \|b\| \cdot \sin^2 \sphericalangle(a, b)$, а како је $\sin\varphi \geqslant 0$ за $\varphi \in [0, \pi]$, следи идентитет дела (в). Из горе показаног следи да, ако је (a, b, c) база $\mathbb{R}^3$, она је позитивно оријентисана ако и само ако је $[a, b, c] = [b, c, a] > 0$, а како је $[a, b, a \times b] = [a \times b, a, b] = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2 > 0$, за линеарно независне a, b, следи да је $(a, b, a \times b)$ позитивно оријентисан. За $(r, s, t) \in \{(3, 1, 2), (1, 2, 3), (2, 3, 1)\}$ је $(a \times b) \times c = d_1i + d_2j + d_3k$, где је $d_s = \begin{vmatrix} a_r & a_s \\ b_r & b_s \end{vmatrix} c_r - \begin{vmatrix} a_s & a_t \\ b_s & b_t \end{vmatrix} c_t = -a_s(b_rc_r + b_tc_t) + b_s(a_rc_r + a_tc_t) = -a_s(b_rc_r + b_tc_t + a_sb_s) + b_s(a_rc_r + a_tc_t + a_sb_s) = -a_s\langle b, c\rangle + b_s\langle a, c\rangle$, те следи прва веза дела (г), а из ње следи $(b \times c) \times a = -\langle c, a\rangle b + \langle b, a\rangle c$ и $(c \times a) \times b = -\langle a, b\rangle c + \langle c, b\rangle a$, одакле се, сабирањем добијене три везе, добија друга веза дела (г). □

Из дела (а) следи и линеарност векторског производа по другом чиниоцу (важи $c \times (\alpha a + \beta b) = -(\alpha a + \beta b) \times c = -\alpha(a \times c) - \beta(b \times c) = \alpha(c \times a) + \beta(c \times b)$), а како се претходно добија праволинијски из одговарајућег тврђења за први чинилац, није експлицитно формулисано у претходној леми. Аналогно се, из делова (д) и (ђ), добија и линеарност мешовитог производа по другој и трећој компоненти. Део (б) се често виђа и у формулацији да су одговарајући вектори колинеарни (пошто то одговара линеарној зависности два вектора), а део (е) у формулацији да су одговарајући вектори копланарни (пошто то одговара линеарној зависности три вектора). Једини разлог што је у делу (в) тражено да је $a, b \neq 0$ је то што је угао између два вектора једнозначно одређен у $[0, \pi]$ ако су у питању ненула вектори (у случају да је један од вектора 0, нисмо ни дефинисали тај угао), но то се тврђење често виђа и без тог ограничења, пошто су онда обе стране једнаке 0, без обзира на то како се дефинише угао у случају да је неки од њих 0, а уколико се допусти да угао узима и друге вредности, виђа се и варијанта у којој је на десној страни синус под апсолутном вредношћу (за $\varphi \in [0, \pi]$ је $\sin\varphi \geqslant 0$). Како $\|a\| \cdot \|b\| \cdot \sin \sphericalangle(a, b)$ одговара површини паралелограма над векторима a и b, често се виђа и дефиниција векторског производа у ком се захтева да, за неколинеарне a, b, је $a \times b$ нормалан на a, b, да систем $(a, b, a \times b)$ чини позитивно оријентисан систем и да је норма тог вектора једнака $\|a\| \cdot \|b\| \cdot \sin \sphericalangle(a, b)$. Из претходног је јасно да ће се векторски производ користити и приликом одређивања мерног броја површине паралелограма чије су странице одређене са

a и b. Слично, изражавање мешовитог производа (као детерминанте) показано у претходном доказу говори да ће се он користити и приликом одређивања запремине паралелопипеда чије су странице a, b и c. Претходна дефиниција се често записује и у неформалнијем облику $a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$, подразумевајући да ће се извршити развој по првој врсти (чиме се добија запис наведен у тој дефиницији). Део (г) показује, између осталог, да векторско множење није асоцијативна операција, прва једнакост тог дела је позната и као Лагранжов, а друга као Јакобијев идентитет (за векторски производ).

Пример 49. Важи $a \times a = 0$, за свако $a \in \mathbb{R}^3$, па, ако је (i, j, k) стандардна ортонормирана база, важи $i \times i = j \times j = k \times k = 0$, док је $i \times j = -j \times i = k$, $j \times k = -k \times j = i$, $k \times i = -i \times k = -j$. За произвољне $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ је $(a \times b) \times (a \times c) = -\langle b, a \times c\rangle a + \langle a, a + c\rangle b = -[b, a, c]a + [a, a, c]b = [a, b, c]a$. Следи $[a \times b, b \times c, c \times a] = \Big\langle (a \times b) \times (b \times c), c \times a \Big\rangle = -[b, a, c] \cdot \langle b, a \times c\rangle = [b, a, c]^2 = [a, b, c]^2$, па су $a \times b, b \times c, c \times a$ копланарни ако и само ако су a, b, c копланарни. Ако су $A, B, C \in \mathbb{R}^3$, а O координатни почетак, онда је $I(A, B, C) = \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC} \times \overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC} \times (\overrightarrow{OC} + (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC})) = \overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{OC} \times \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB} \times \overrightarrow{AC}$, па су тачке A, B, C колинеарне ако и само ако је $I(A, B, C) = 0$, док у случају $I(A, B, C) \neq 0$ је у питању вектор равни одређене тачкама A, B, C. $\triangle$

Пример 50. Ако су $a_i = (a_{i,1}, a_{i,2}, a_{i,3})^T \in \mathbb{R}^3$, $b_i = (b_{i,1}, b_{i,2}, b_{i,3})^T \in \mathbb{R}^3$, за $i \in \{1, 2, 3\}$, на основу Коши–Бинеове формуле (формула (7.3)) је $\begin{vmatrix} \langle a_1, b_1\rangle & \langle a_2, b_1\rangle \\ \langle a_2, b_1\rangle & \langle a_2, b_2\rangle \end{vmatrix} = (a_1, a_2)^T(b_1, b_2) = \sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant 3} \begin{vmatrix} a_{1,i} & a_{1,j} \\ a_{2,i} & a_{2,j} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{1,i} & b_{2,j} \\ b_{1,i} & b_{2,j} \end{vmatrix} = \langle a_1 \times a_2, b_1 \times b_2\rangle$, као и $\begin{vmatrix} \langle a_1, b_1\rangle & \langle a_2, b_1\rangle & \langle a_3, b_1\rangle \\ \langle a_1, b_2\rangle & \langle a_2, b_2\rangle & \langle a_3, b_2\rangle \\ \langle a_1, b_3\rangle & \langle a_2, b_3\rangle & \langle a_3, b_3\rangle \end{vmatrix} = (a_1, a_2, a_3)^T(b_1, b_2, b_3) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{1,1} & b_{2,1} & b_{3,1} \\ b_{1,2} & b_{2,2} & b_{3,2} \\ b_{1,3} & b_{2,3} & b_{3,3} \end{vmatrix} = [a_1, a_2, a_3] \cdot [b_1, b_2, b_3]$. Специјално, на основу добијеног и резултата претходног примера је $[a_1 \times a_2, a_2 \times a_3, a_3 \times a_1] = [a_1, a_2, a_2]^2 = \det(\langle a_i, a_j\rangle)_{1 \leqslant i,j \leqslant 3}$. $\triangle$

За векторе $a_1, \dots, a_n$, где је $n \in \mathbb{N}$, се $G(a_1, \dots, a_n) = (\langle a_i, a_j\rangle)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ назива **Грамова матрица** (која одговара тим векторима), а њена детерминанта Грамова детерминанта. По претходном примеру следи да за $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^3$ је $\det G(a_1) = \|a_1\|^2$, $\det G(a_1, a_2) = \|a_1 \times a_2\|^2$ и $\det G(a_1, a_2, a_3) = [a_1, a_2, a_3]^2$, тј. у питању је ненегативно дефинитна матрица, а њене вредности се природно повезују са одговарајућим геометријским особинама (за $a_i \in \mathbb{R}^3$, $1 \leqslant i \leqslant n$, важи $G(a_i, a_j) = 0$ ако и само ако су a_i и a_j колинеарни, $G(a_i, a_j, a_k) = 0$ ако и само ако су a_i, a_j, a_k копланарни, а добијено сугерише да квадратни корени вредности ових детерминанти одговарају, редом, дужини вектора, површини паралелограма над два вектора, односно запремини паралелопипеда над три вектора), док је Грамова детерминанта $n \geqslant 4$ вектора из $\mathbb{R}^3$ једнака 0. Наравно, ако се допусти да су вектори из $\mathbb{R}^m$, где је $m \geqslant n$, проучавање $G(a_1, \ldots, a_n)$ доводи до нетривијалних закључака, аналогних добијеним у случају $m = 3$, но како је основни циљ овог дела рад у $\mathbb{R}^3$, задржали само се на одговарајућим матрицама реда не већег од 3.

Пример 51. Одредимо површину четвороугла $ABCD$, где су координате уочених тачака $A(3, -1)$, $B(8, 0)$, $C(9, 4)$ и $D(7, 2)$. По претходном, за векторе $a, b \in \mathbb{R}^3$ израз $\|a \times b\|$ представља површину паралелограма над векторима a, b, одакле следи да $\frac{1}{2} \cdot \|a \times b\|$ представља површину троугла чије су странице a и b. Ако је $a = (a_1, a_2)^T, b = (b_1, b_2)^T \in \mathbb{R}^2$, утапањем у $\mathbb{R}^3$ се ови вектори могу видети као $(a_1, a_2, 0)^T, b = (b_1, b_2, 0)^T$ (онда има смисла причати о $a \times b$), а у $a \times b$ су координате уз i и j једнаке 0, док је координата уз k једнака $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$, па половина апсолутне вредности овог израза представља површину троугла чије су странице a и b. Како BD припада унутрашњости $ABCD$, следи $P(ABCD) = P(\triangle BDA) + P(\triangle BCD)$, а како је $\overrightarrow{BA} = (-5, -1)^T$, $\overrightarrow{BD} = (-1, 2)^T$, $\overrightarrow{BC} = (1, 4)^T$, важи $P(ABCD) = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{vmatrix} -5 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \right| + \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \right| = \frac{17}{2}$. Претходно се може добити и посматрањем дијагонале AC, но како она не припада унутрашњости $ABCD$, следи $P(ABCD) = P(\triangle ABC) - P(\triangle ADC)$, тј. како је $\overrightarrow{AB} = (5, 1)^T$, $\overrightarrow{AD} = (4, 3)^T$, $\overrightarrow{AC} = (6, 5)^T$, важи $P(ABCD) = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} \right| - \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} \right| = \frac{17}{2}$, а аналогно се, разбијањем на троуглове, може одредити површина произвољног многоугла у $\mathbb{R}^2$. Ако је $a > 0$, $u = (a, 0, 0)$, v вектор који са u и k заклапа углове $\frac{\pi}{3}$ и $\frac{\pi}{2}$, редом, тако да је $\|v\| = a$ и систем (u, v, k) позитивно оријентисан, а w вектор који са u и v заклапа углове $\frac{\pi}{3}$, тако да је $\|w\| = a$ и систем (u, v, w) позитивно оријентисан, одредимо v и w, као и запремину тетраедра одређеног са u, v, w. Ако је $v = (av_1, av_2, av_3)$, следи $v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 1$, $\langle u, v \rangle = a^2 v_1 = \frac{a^2}{2}$ и $\langle v, k \rangle = av_3 = 0$, па је $v_1 = \frac{1}{2}$, $v_3 = 0$ и $v_2 \in \{-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\}$, а како је $[u, v, k] = \begin{vmatrix} a & \frac{a}{2} & 0 \\ 0 & \pm\frac{a\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \pm\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$, пошто је (u, v, k) позитивно оријентисан, следи $v_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Ако је $w = (aw_1, aw_2, aw_3)$, следи $w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 = 1$, $\langle u, w \rangle = a^2 w_1 = \frac{a^2}{2}$, $\langle v, w \rangle = \frac{a^2}{2} w_1 + \frac{a^2\sqrt{3}}{2} w_2 = \frac{a^2}{2}$, па је $w_1 = \frac{1}{2}$, $w_2 = \frac{\sqrt{3}}{6}$ и $w_3 \in \{-\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}\}$. Како је $[u, v, w] = \begin{vmatrix} a & \frac{a}{2} & \frac{a}{2} \\ 0 & \frac{a\sqrt{3}}{2} & \frac{a\sqrt{3}}{6} \\ 0 & 0 & \pm\frac{\sqrt{6}}{3} \end{vmatrix} = \pm\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$, пошто је систем (u, v, w) позитивно оријентисан, следи $w_3 = \frac{\sqrt{6}}{3}$, као и да је запремина посматраног тетраедра $\frac{1}{6} \cdot [u, v, w] = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$. $\triangle$

Пример 52. Ако су a, b вектори две странице троугла, његова површина је $P = \frac{1}{2}\cdot\|a\times b\|$, односно, важи $P^2 = \frac{1}{4}\cdot G(a,b)$. Како је $\langle a,b\rangle = \frac{1}{2}(\|a\|^2+\|b\|^2-\|a-b\|^2) = \frac{1}{2}(\|a\|^2+\|b\|^2-\|c\|^2)$, где је $c = a-b$ вектор који одговара трећој страници уоченог троугла, на овај начин добијамо изражавање површине троугла преко дужина његових страница (тзв. Херонов образац). Дакле, важи $P^2 = \frac{1}{16}\cdot\begin{vmatrix} 2\|a\|^2 & \|a\|^2+\|b\|^2-\|c\|^2 \\ \|a\|^2+\|b\|^2-\|c\|^2 & 2\|b\|^2 \end{vmatrix}$ (ако је $s = \frac{1}{2}\cdot(\|a\|+\|b\|+\|c\|)$ полуобим троугла, последња вредност је једнака $\frac{1}{16}\cdot\Big(4\|a\|^2\|b\|^2-(\|a\|^2+\|b\|^2-\|c\|^2)^2\Big) = \frac{1}{16}\cdot((\|a\|+\|b\|)^2-\|c\|^2)(\|c\|^2-(\|a\|-\|b\|)^2) = \frac{1}{16}\cdot(\|a\|+\|b\|+\|c\|)(\|a\|+\|b\|-\|c\|)(\|c\|-\|a\|+\|b\|)(\|c\|+\|a\|-\|b\|) = s(s-\|a\|)(s-\|b\|)(s-\|c\|)$, што је уобичајан облик у ком се добијени резултат приказује по средњошколским уџбеницима). Аналогно се добија одговарајућа формула и у више димензија, а по претходном, ако је V запремина тетраедра одређеног векторима a,b,c, онда је $V^2 = (\frac{1}{6}\cdot[a,b,c])^2 = \frac{1}{36}\cdot\det G(a,b,c) = \dfrac{1}{288}\cdot\begin{vmatrix} 2\|a\|^2 & \|a\|^2+\|b\|^2-\|c_1\|^2 & \|c\|^2+\|a\|^2-\|b_1\|^2 \\ \|a\|^2+\|b\|^2-\|c_1\|^2 & 2\|b\|^2 & \|b\|^2+\|c\|^2-\|a_1\|^2 \\ \|c\|^2+\|a\|^2-\|b_1\|^2 & \|b\|^2+\|c\|^2-\|a_1\|^2 & 2\|c\|^2 \end{vmatrix}$, где је $c_1 = a-b$, $b_1 = c-a$, $a_1 = b-c$ (тзв. Херонов образац за тетраедар). $\triangle$

Пример 53. За $1\leqslant i\leqslant 3$, нека су $\alpha_i\in\mathbb{R}$ и $a_i\in\mathbb{R}^3$ некопланарни. Одредимо све x тако да је $\langle x,a_i\rangle = \alpha_i$, за $1\leqslant i\leqslant 3$. Како су у питању некопланарни вектори, на основу резултата примера 49, некопланарни су и $a_1\times a_2, a_2\times a_3, a_3\times a_1$, па постоје јединствени x_1,x_2,x_3, како да је $x = x_1a_2\times a_3+x_2a_3\times a_1+x_3a_1\times a_2$, одакле, скаларним множењем са a_i, следи $\alpha_i = x_i\cdot[a_1,a_2,a_3]$, за $1\leqslant i\leqslant 3$, те је $x = \frac{\alpha_1a_2\times a_3+\alpha_2a_3\times a_1+\alpha_3a_1\times a_2}{[a_1,a_2,a_3]}$. $\triangle$

Једначина праве и равни у $\mathbb{R}^3$

На основу разматрања са почетка овог одељка, у случају $n = 3$ простор решења једначине $a_1x+a_2y+a_3z = b$, при чему је $(a_1,a_2,a_3)^T\neq 0$, је димензије 2, те се уочена једначина назива **општи** (имплицитни) **облик** једначине равни (у $\mathbb{R}^3$). Ако је у питању раван α и $M_0(x_0,y_0,z_0)\in\alpha$, онда је уочена једначина еквивалентна са $a_1(x-x_0)+a_2(y-y_0)+a_3(z-z_0) = 0$, те тачка $M(x,y,z)$ припада α ако и само ако је $(a_1,a_2,a_3)^T\perp\overrightarrow{M_0M} = (x-x_0,y-y_0,z-z_0)$, односно $\langle(a_1,a_2,a_3)^T,\overrightarrow{M_0M}\rangle = 0$ (последње се назива и векторска једначина равни). Стога се $(a_1,a_2,a_3)^T$ назива **вектор равни** α и представља вектор нормалан на ту раван. Како је ортокомплемент ненула вектора у $\mathbb{R}^3$ димензије 2, постоје независни $u = (u_1,u_2,u_3)$ и $v = (v_1,v_2,v_3)^T$ који чине базу тог ортокомплемента, те (уз претходну нотацију) су све тачке равни описане са $(x,y,z)^T = (x_0+su_1+tv_1, y_0+su_2+tv_2, z_0+su_3+tv_3)^T = (x_0,y_0,z_0)^T+su+tv$, за произвољне $s,t\in\mathbb{R}$ (тзв. параметарска једначина равни). Из претходног непосредно следи да је раван која садржи неколинеарне тачке $M_i(x_i,y_i,z_i)$, где је $1\leqslant i\leqslant 3$, одређена са $[\overrightarrow{M_1M},\overrightarrow{M_1M_2},\overrightarrow{M_1M_3}] = 0$, тј. све тачке $M(x,y,z)$ које задовољавају претходну једначину представљају тачке те равни, а њен вектор је $\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_1M_2}$.

По аналогији се и у $\mathbb{R}^3$ преносе и резултати добијени за опис праве у $\mathbb{R}^2$. Рецимо, $\frac{x-x_0}{a_1} = \frac{y-y_0}{a_2} = \frac{z-z_0}{a_3}$ представља канонски облик једначине праве у $\mathbb{R}$, која садржи тачку $M(x_0, y_0, z_0)$, а вектор јој је $(a_1, a_2, a_3)^T \neq 0$ (уз аналогни договор тумачења последњег израза у случају да је нека од координата вектора праве једнака 0; рецимо, $\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{0}$ представља једначину x осе), а $(x, y, z)^T = (x_0, y_0, z_0)^T + t(a_1, a_2, a_3)^T$, за $t \in \mathbb{R}$, представља параметарски облик једначине те праве.
Као и у случају рада у $\mathbb{R}^2$, вектори праве и равни нису једнозначно одређени (већ до на множење ненула скаларом), те је и овде уобичајно да се угао између две праве, односно угао између две равни, бира тако да припада $[0, \frac{\pi}{2}]$, па за угао између правих a и b, чији су вектори $(a_1, a_2, a_3)^T$ и $(b_1, b_2, b_3)^T$ важи $\cos\sphericalangle(a, b) = \frac{|a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3|}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$, а за угао између равни α_1 и α_2, где је α_i одређена једначином $a_{i,1}x+a_{i,2}y+a_{i,3}z = b_i$, за $1 \leqslant i \leqslant 2$, важи $\cos\sphericalangle(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{|a_{1,1}a_{2,1}+a_{1,2}a_{2,2}+a_{1,3}a_{2,3}|}{\sqrt{a_{1,1}^2+a_{1,2}^2+a_{1,3}^2}\sqrt{a_{2,1}^2+a_{2,2}^2+a_{2,3}^2}}$.
Питање односа уочених равни се своди на опис решења система $a_{i,1}x + a_{i,2}y + a_{i,3}z = b_i$, за $1 \leqslant i \leqslant 2$. Ако је $n_{\alpha_1} = (a_{1,1}, a_{2,1}, a_{3,1})^T$, $n_{\alpha_2} = (a_{1,2}, a_{2,2}, a_{3,2})^T$ и $n_{\alpha_1} \times n_{\alpha_2} \neq 0$, ранг и матрице система и проширене матрице система је једнак 2, па систем има бесконачно много решења, а простор решења зависи од једног параметра, те је геометријско тумачење да је пресек права (чији је вектор $n_{\alpha_1} \times n_{\alpha_2}$; заправо, права се може и дефинисати на овај начин, преко пресека две равни, што, у неком смислу, највише одговара имплицитном облику једначине праве). Ако је $n_{\alpha_1} \times n_{\alpha_2} = 0$, тј. ако су n_{α_1} и n_{α_2} пропорционални, уколоко су и $(a_{1,1}, a_{1,2}, a_{1,3}, b_1)^T$ и $(a_{2,1}, a_{2,2}, a_{2,3}, b_2)^T$ пропорционални, рангови и матрице и проширене матрице добијеног система су једнаки 1, тј. у том случају је простор решења димензије 2, а геометријско тумачење је да се посматране равни поклапају (обе једначине представљају једначину исте равни), док у случају да последњи вектори нису пропорционални, ранг проширене матрице система је за један већи, те онда посматране равни немају заједничких тачака, а геометријско тумачење је да су онда те равни паралелне. Приметимо и да, уколико n_{α_1} и n_{α_2} нису пропорционални, онда $t(a_{1,1}x + a_{1,2}y + a_{1,3}z - b_1) + s(a_{2,1}x + a_{2,2}y + a_{2,3}z - b_2) = 0$, где је $(s, t) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0.0)\}$, представља прамен равни који садржи пресечну праву равни α_1 и α_2 (претходно се чешће представља у облику $a_{1,1}x + a_{1,2}y + a_{1,3}z - b_1 + s(a_{2,1}x + a_{2,2}y + a_{2,3}z - b_2) = 0$, за $s \in \mathbb{R}$, као и $a_{2,1}x + a_{2,2}y + a_{2,3}z = b_2$, која није наведеног облика; видети и пример 55), а $a_1x + a_2y + a_3z = t$, где је $t \in \mathbb{R}$, представља прамен равни паралелних са $a_1x + a_2y + a_3z = 0$.
За праву p одређену са $(x, y, z)^T = (x_1, y_1, z_1)^T + t(v_1, v_2.v_3)$ (дакле, она садржи $M_1(x_1, y_1, z_1)$, а вектор јој је $v_p = (v_1, v_2, v_3)^T \neq 0$) и раван α, одређену са $a_1(x - x_2) + a_2(y - y_2) + a_3(z - z_2) = 0$ (дакле, она садржи $M_2(x_3, y_3, z_3)$, а вектор јој је $n_\alpha = (a_1, a_2, a_3)^T \neq 0$), важи $p \perp \alpha$ ако и само ако су v_p и n_α пропорционални (тј. ако и само ако је $v_p \times n_\alpha = 0$), а $p \parallel \alpha$ ако и само ако је $v_p \perp \alpha$ (тј. ако и само ако $\langle v_p, n_\alpha\rangle = 0$). На основу дела

(в) леме 7.5.2 и коментара након ње, постоји јединствена пројекција праве p_1 чији је вектор v_p и која садржи тачку $(x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)$ на раван $a_1x + a_2y + a_3z = 0$ (као и у претходном делу, једини разлог што су уочене права и раван транслиране је то што је поменути резултат исказан за пројекцију на потпростор). У случају да је $v_p \times n_\alpha \neq 0$, та пројекција је права, а угао између праве и те пројекције сматрамо углом између праве и равни, те је, због уочене транслације, он једнак углу између праве p и равни α (и по поменутом резултату, могао се дефинисати и као минимални угао између вектора праве и ненула вектора који припадају α). Следи да је $\sin\sphericalangle(p,\alpha) = \frac{|\langle v_p, n_\alpha\rangle|}{\|v_p\|\cdot\|n_\alpha\|}$ (приметимо да се овде појављује синусна, а не косинусна функција, из разлога што је вектор равни нормалан на ту раван, а вектор праве колинеаран са том правом, као и да се резултат поклапа са добијеним у случају да је права нормална на раван). Аналогно, из дела (в) леме 7.5.2 следи да постоји $\min\limits_{X\in p}\|\overrightarrow{MX}\|$ и $\min\limits_{X\in \alpha}\|\overrightarrow{MX}\|$, где је $M(x_0, y_0, z_0)$ (и достиже се ако је X нормална пројекција тачке M на p, односно α). Приметимо да је $d(M,p) = \frac{\|\overrightarrow{MX}\times u_p\|}{\|u_p\|}$, за произвољну $X \in p$ (пошто израз у бројиоцу последњег разломка одговара површини паралелограма над векторима $\overrightarrow{MX}$ и u_p, која је једнака дужини његове странице u_p, помноженој са одговарајућом висином), као и да у случају $z_0 = z_1 = v_3 = 0$ се добијена формула своди на резултат добијен за растојање тачке од праве у $\mathbb{R}^2$. Слично, ако је $(x,y,z)^T = (x_1,y_1,z_1)^T + su + tv$, где је $s,t \in \mathbb{R}$, параметарски облик једначине α (чија је једначина $a_1x + a_2y + a_3z - b = a_1(x - x_1) + a_2(y - y_1) + a_3(z - z_1) = 0$ и важи $n_\alpha = u \times v$), онда је $d(M,\alpha) = \frac{[u,v,\overrightarrow{MX}]}{\|u\times v\|}$, где је X произвољна тачка α (пошто израз у бројиоцу последњег разломка одговара запремини паралелопипеда над векторима $a, v, \overrightarrow{MX}$, а именилац површини паралелограма над u, v, те тај разломак представља дужину висине на ту страну уоченог паралелопипеда), што доводи до

$$d(M,\alpha) = \frac{|a_1(x_0-x_1)+a_2(y_0-y_1)+a_3(z_0-z_1)|}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}} = \frac{|a_1x_0+a_2y_0+a_3z_0-b|}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}$$

(у последњем облику се добијено најчешће приказује по литератури). Поменимо и да се у геометријским применама појављују и други облици приказа једначине равни, попут нормалног, у ком се раван представља у облику $\langle n,(x,y,z)^T\rangle = r > 0$, при чему је $\|n\| = 1$ (јасно, овај облик постоји ако раван не садржи координатни почетак, на основу малопре добијених резултата је растојање тачке $(0,0,0)$ до уочене равни једнако $\frac{|r|}{\|n\|} = r$, па ако је њена општа једначина $a_1x+a_2y+a_3z = d$, следи $r = \frac{|d|}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}$, као и $n = \left(\frac{|d|}{d}\cdot\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}, \frac{|d|}{d}\cdot\frac{a_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}, \frac{|d|}{d}\cdot\frac{a_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}\right)$, а како је $\|n\| = 1$, следи да је $n = (\cos\alpha_x, \cos\alpha_y, \cos\alpha_z)$, где $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ представљају углове између вектора n и вектора i, j, k, редом), као и сегментни, у ком се једначина приказује у облику $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, а a, b, c представљају одсечке које на координатним осама одсеца раван (дакле, та раван садржи тачке $(a,0,0)$, $(0,b,0)$, $(0,0,c)$, раван се може представити у овом облику ако није паралелна ниједној од координатних оса и не садржи координатни почетак; у том случају је њена општа једначина $a_1x+a_2y+a_3z=d$, при чему су a_1,a_2,a_3,d различити од 0, а онда су параметри наведени у сегментном облику $a=\frac{d}{a_1}, b=\frac{d}{a_2}, c=\frac{d}{a_3}$). Као и у случају $\mathbb{R}^2$, поред јасног геометријског тумачења, предност последње наведених облика је што су, ако постоје, јединствени (а по литератури у којој се добијено користи за даље проучавање геометријских особина, виђа се и да се дозвољава да неки од параматара који се појављују у сегментном обику (и праве и равни) буде ∞, уз одговарајуће тумачење, слично оном које је приказано приликом дељења са 0 у канонском облику, да би се на тај начин приказале и праве за које то није могуће уз класично тумачење).

Остаје питање међусобног односа две праве у $\mathbb{R}^3$. Нека су у питању p_i, која садржи $M_i(x_i,y_i,z_i)$ и вектор јој је $a_i=(a_{i,1},a_{i,2},a_{1,3})^T$, за $1\leqslant i\leqslant 2$. Ако је $a_1\times a_2=0$ (тј. ако су a_1 и a_2 колинеарни), онда је $p_1 \parallel p_2$, при чему у случају да је и $\overrightarrow{M_1M_2}$ колинеаран са њима (тј. ако је и $a_1\times\overrightarrow{M_1M_2}=0$), онда се ради о истој правој, а ако то није случај, уочене праве су паралелне и различите. Ако је $a_1\times a_2\neq 0$, а $[a_1,a_2,\overrightarrow{M_1M_2}]=0$ (тј. ако су a_1 и a_2 линеарно независни, а $a_1,a_2,\overrightarrow{M_1M_2}$ линеарно зависни (дакле, копланарни су)), онда се p_1 и p_2 секу. Коначно, ако је $[a_1,a_2,\overrightarrow{M_1M_2}]\neq 0$, ради се о мимоилазним правама. У том случају је вектор $n=a_1\times a_2$ нормалан на a_1 и a_2, раван која садржи M_1 и векторе a_1 и n сече p_2 у некој тачки N_2, а ако је N_1 подножје нормале из N_2 на p_1, онда је права одређена тачкама N_1 и N_2 нормална и на p_1 и на p_2 (тзв. заједничка нормала мимоилазних правих p_1 и p_2). Ако је $d(p_1,p_2)=\inf\limits_{X\in p_1, Y\in p_2}\|\overrightarrow{XY}\|$ (растојање p_1 и p_2), као и у доказу дела (в) леме 7.5.2 (видети и коментаре након ње), следи да уочени инфимум постоји (и као минимум) и да је једнак $\|\overrightarrow{N_1N_2}\|$ (заиста, ако је $X\in p_1$, $Y\in p_2$ и $u=\overrightarrow{XN_1}+\overrightarrow{N_2Y}$, онда је $\|\overrightarrow{XY}\|^2=\|\overrightarrow{XN_1}+\overrightarrow{N_1N_2}+\overrightarrow{N_2Y}\|^2=\|\overrightarrow{N_1N_2}+u\|^2=\|\overrightarrow{N_1N_2}\|^2+\|u\|^2\geqslant\|\overrightarrow{N_1N_2}\|^2$, пошто је $u\perp\overrightarrow{N_1N_2}$). Приметимо и се да при одређивању растојања наведених правих не морају експлицитно одређивати тачке N_1 и N_2 (тј. није нужно одредити заједничку нормалу уочених правих), пошто је то растојање једнако $\frac{|[\overrightarrow{XY},a_1,a_1]|}{\|a_1\times a_2\|}$, где су $X\in p_1$, $Y\in p_2$ произвољне (заиста, именилац последњег разломка представља површину паралелограма над a_1 и a_2, а бројилац запремину паралелопипеда над $a_1,a_2,\overrightarrow{XY}$, која је једнака површини поменутог паралелограма помноженој са његовом висином, која, по претходној дискусији, износи $\|\overrightarrow{N_1N_2}\|$), као и да се одређивање растојања две паралелне праве своди на одређивање растојања произвољне тачке једне од њих од друге праве.

Пример 54. Одредимо једначину равни која садржи пресек равни α и β, одређених једначинама $x+y+z=1$ и $x-y+2z=-2$, редом, а притом полови дуж чији су крајеви пресечне тачке праве p, одређене са $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-2}$, са наведеним равнима, као и растојање праве p од пресечне праве равни α п β. Такође, одредимо углове које заклапа добијена раван са α и p, Вектори наведених равни $n_\alpha = (1,1,1)^T$ и $n_\beta = (1,-1,2)^T$, као и наведене праве $v_p = (1,2,-2)^T$, су по паровима независни, па се те две равни секу, а и наведена права их сече. Параметарски облик p је $(x,y,z) = (t+1, 2t-1, -2t)$, за $t \in \mathbb{R}$, те се заменом у једначине α и β, редом, добија $t = 1$, односно $t = \frac{4}{5}$, па је $p \cap \alpha = (2,1,-2)$ и $p \cap \beta = (\frac{9}{5}, \frac{3}{5}, -\frac{8}{5})$, те су координате средишта дужи одређене добијеним тачкама $\left(\frac{2+\frac{9}{5}}{2}, \frac{1+\frac{3}{5}}{2}, \frac{-2-\frac{8}{5}}{2}\right) = (\frac{19}{10}, \frac{4}{5}, -\frac{9}{5})$. Прамен равни одређен са α и β чине равни $(x+y+z-1) + s(x-y+2z+2) = 0$, за $s \in \mathbb{R}$, као и раван β, те се заменом координата добијене тачке добија $s = -\frac{1}{5}$, одакле је тражена раван $4x + 6y + 3z = 7$ (а њен вектор је $n = (4,6,3)^T$). Вектор пресечне праве α и β је $v_q = n_\alpha \times n_\beta = (3,-1,-2)^T$, а важи $Q(0,0,1) \in \alpha \cap \beta$, те пресечна права q има једначину $\frac{x}{3} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{-2}$. Како $P(1,-1,0) \in p$, следи да је $d(p,q) = \frac{|[\overrightarrow{PQ}, v_p, v_q]|}{\|v_p \times v_q\|} = \frac{5\sqrt{101}}{101}$. Коначно, ако је добијена раван γ, следи $\sphericalangle(\gamma, \alpha) = \arccos \frac{|\langle n, n_\alpha \rangle|}{\|n\| \cdot \|n_\alpha\|} = \arccos \frac{13}{\sqrt{303}}$ и $\sphericalangle(n, p) = \arcsin \frac{|\langle n, p \rangle|}{\|n\| \cdot \|p\|} = \arcsin \frac{10}{3\sqrt{101}}$. △

Пример 55. Одредимо раван која садржи тачку $M(2,1,-2)$, паралелна је са правом p, која је одређена са $x = y - 1 = z + 6$ и удаљена је $\sqrt{2}$ од p, као и тачку која је симетрична са M у односу на p. Тражена раван садржи праву q, која је паралелна са p и садржи M, тј. са $x - 2 = y - 1 = z + 2$, односно, припада прамену равни који садржи q. Права q није паралелна ниједној од координатних оса, постоји раван тог прамена паралелна са x осом (вектор јој је $(1,0,0)^T \times (1,1,1)^T = (0,-1,1)^T$, тј. једначина јој је $-y + z = -3$), као и раван тог прамена паралелна са y осом (вектор јој је $(0,1,0)^T \times (1,1,1)^T = (1,0,-1)^T$, тј. једначина јој је $x - z = 4$), па тај прамен чине равни $(-y + z + 3) + t(x - z - 4) = 0$, за $t \in \mathbb{R}$, као и раван $x - z = 4$. Растојање p од равни која јој је паралелна једнако је растојању неке њене тачке (нпр. $(0,1,-6)$) од те равни, па како је растојање од $x - z = 4$ једнако $\frac{|1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 - 1 \cdot (-6) - 4|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$, ова раван задовољава наведене услове, а како је $\frac{|t \cdot 0 - 1 \cdot 1 + (1-t) \cdot (-6) + 3 - 4t|}{\sqrt{t^2 + 1 + (1-t)^2}} = \frac{\sqrt{2} \cdot |t-2|}{\sqrt{t^2 - t + 1}}$, последње је једнако $\sqrt{2}$ ако и само ако је $|t - 2| = \sqrt{t^2 - t + 1}$, тј. ако и само ако је $t = 1$, што доводи до још једне равни која задовољава наведене услове, равни $x - y = 1$. Пројекција M на p се налази у пресеку p и равни која садржи M, а нормална је на p, тј. равни $x + y + z = 1$, па је та пројекција $M'(2,3,-4)$, а тачка симетрична са M у односу на p је симетрична са M у односу на M', тј. у питању је $(2,5,-6)$. △

Криве другог реда у $\mathbb{R}^2$

Крива другог реда је скуп свих тачака $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ који задовољавају полиномску једначину (по две промењиве) другог реда, односно једначину $f(x,y)=a_{1,1}x^2+2a_{1,2}xy+a_{1,2}y^2+2a_1x+2a_2y+c=u^TAu+2Bu+c=0$, где је $u=(x,y)^T$, $A=\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{1,2} & a_{2,2}\end{pmatrix}\neq 0$ и $B=(a_1,a_2)$ (ако је $A=0$, онда је у питању линеарна једначина, што је већ испитан случај). На основу дела (в) леме 7.5.4, постоји ортогонална P, тако да је $PAP^T=\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2)=D$, где су λ_1,λ_2 сопствене вредности A, па је $f(x,y)=u^TP^TDPu+2BP^TPu+c$, односно, ако је $u'=(x',y')^T=Pu$, а наведена функција посматра као функција од u' (како је P ортогонална, пресликавање које вектору u додељује u' је бијекција), онда се претходно своди на испитивање у којем је матрица уз квадратни члан дијагонална. Притом, ако је $\lambda_1\neq 0$, онда се члан $\lambda_i x'^2+2kx'$, где је $2k$ коефицијент који се након горње смене појављује уз x', може записати у облику $\lambda_1(x'+\frac{k}{\lambda_1})^2-\frac{k^2}{\lambda_1}$, те се сменом $x''=x'+\frac{k}{\lambda_1}$ последње своди на функцију у којој је коефицијент уз линеаран члан одговарајуће променљиве једнак 0. Аналоган закључак се постиже и за члан уз y, уколико је $\lambda_2\neq 0$. Наравно, уведене смене мењају полазну функцију, но ако је циљ испитивање особина скупа тачака које чине њено решење, приметимо да последња смена при геометријском тумачењу представља транслацију, а прва, како је у питању трансформација ортогоналном матрицом, представља изометрију (на основу резултата наведених након дефиниције 7.5.3 је $\|Px\|=\|x\|$), те из последње дискусије следи да, уколико су у питању особине које се не мењају изометријским трансформацијама, је довољно посматрати једначине облика $a_{1,1}x''^2+a_{2,2}y''^2+c=0$, где је $a_{1,1},a_{2,2},c\in\mathbb{R}$ и $a_{1,1},a_{2,2}\neq 0$, односно $a_{1,1}x''^2+2a_2y'+c=0$, где је $a_{1,1},a_2,c\in\mathbb{R}$ и $a_{1,1}\neq 0$. Зарад поједностављења нотације, у даљем претпостављамо да је крива већ сведена на неки од описаних облика (односно, променљиве x'' и y'' ћемо означавати са x и y, редом), који се назива **канонски облик** криве другог реда. Приметимо и да није тешко експлицитно изразити описане трансформације (прелаз са x' на x'' представља транслацију, а трансформација која u додељује Pu, на основу резултата примера 43, представља или ротацију или композицију ротације и симетрије (заправо, лако је видети да је довољна трансформација представљена матрицом $M(1,\varphi)$ из поменутог примера, која представља ротацију)), но то излази изван оквира овог текста.

Сходно претходној дискусији, постоје наредне могућности:

(1) важи $\lambda_1,\lambda_2\neq 0$; онда је канонски облик криве $\lambda_1x^2+\lambda_2y^2+c=0$, при чему, без умањења општости, нека је $\lambda_1>0$, па

(1.1) ако је $\lambda_2>0$, $c>0$, скуп решења једначине је $\emptyset$;

(1.2) ако је $\lambda_2>0$, $c=0$, скуп решења је једна тачка $((0,0))$;

(1.3) ако је $\lambda_2>0$, $c<0$, заменом $a=\sqrt{-\frac{c}{\lambda_1}}$, $b=\sqrt{-\frac{c}{\lambda_2}}$, једначина се своди на $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, а добијена крива се назива **елипса** (специјално, ако је $a=b$, у питању је кружна линија);

(1.4) ако је $\lambda_2<0$, $c=0$, заменом $a=\sqrt{\frac{1}{\lambda_1}}$, $b=\sqrt{-\frac{1}{\lambda_2}}$, једначина се своди на $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=(\frac{x}{a}-\frac{y}{b})(\frac{x}{a}+\frac{y}{b})=0$, те се њен скуп решења састоји од две праве, које се секу у $(0,0)$;

(1.5) ако је $\lambda_2<0$, $c<0$, заменом $a=\sqrt{-\frac{c}{\lambda_1}}$, $b=\sqrt{\frac{c}{\lambda_2}}$, једначина се своди на $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, а добијена крива се назива **хипербола**;

(2) ако је $\lambda_2=0$, а, без умањења општости, $\lambda_1>0$, по претходном се једначина своди на облик $\lambda_1x^2+2ky+c=0$, па

(2.1) ако је $k=0$, једначина је $x^2=-c$, па за $c>0$ представља $\emptyset$, за $c=0$ праву $x=0$, односно, за $c<0$ скуп који се састоји од две паралелне праве ($x=\sqrt{-c}$ и $x=-\sqrt{-c}$);

(2.2) ако је $k\neq 0$, заменом $p=-\frac{k}{\lambda_1}$, $y'=y+\frac{c}{2k}$, једначина се своди на $x^2=2py'$, а добијена крива се назива **парабола**.

Приметимо да у случају (1) није разматрана могућност $\lambda_2<0$, $c>0$, пошто се она, заменом улога x и y, своди на случај (1.5). Наведимо основне особине елипсе, хиперболе и параболе (остале криве другог реда су већ, у извесној мери, проучене, јер се, у случајевима у којима је скуп решења бесконачан, приказују као (коначна) унија правих).

Елипса. По претходном, канонска једначина елипсе је $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, за неке $a,b>0$, при чему, без умањења општости, можемо сматрати да је $a\geqslant b$ (иначе се симетријом може добити тај случај). Ако је $a=b$, у питању је кружна линија, а у наставку овог дела ћемо посматрати случај $a>b$. Уочена крива сече координатне осе у тачкама $A_1(a,0), A_2(0,-a), B_1(0,b), B_2(0,-b)$, које се називају темена елипсе, а симетрична је у односу ка координатни почетак (тачку $O(0,0)$), тзв. центар елипсе. Наведена једначина је еквивалентна са $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$, односно $a^2(x^2+y^2)=(a^2-b^2)x^2+a^2b^2=c^2x^2-a^2c^2+a^4$, где је $c=\sqrt{a^2-b^2}$, тј. са $a^2((x+c)^2+y^2)=c^2x^2+2a^2cx+a^4=(a^2+cx)^2$. Ако је (x,y) тачка која припада елипси, јасно је да је $|x|\leqslant a$, а важи и $c\leqslant a$, па је $a^2+xc\geqslant 0$, те једначина постаје $4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=4(a^2+xc)=4a^2+(x+c)^2-(x-c)^2=4a^2+((x+c)^2+y^2)-((x-c)^2+y^2)$, односно, еквивалентна је са $(x-c)^2+y^2=\left(2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2$, а, како је $(x+c)^2+y^2\leqslant 2x^2+2c^2+y^2\leqslant 2a^2+2(a^2-b^2)+b^2=4a^2-b^2\leqslant 4a^2$, важи $\sqrt{(x+c)^2+y^2}\leqslant 2a$, следи да је еквивалентна и са

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a.$$

Последње добијени израз представља збир растојања тачке (x,y) од тачака $F_1(c,0)$ и $F_2(-c,0)$, које се називају **жиже** елипсе, тј. елипса је крива у $\mathbb{R}^2$ која се састоји од свих тачака којима је збир растојања од уочених тачака F_1 и F_2 једнако $2a$, што се често виђа и да игра улогу дефиниције елипсе. Такође, како је једначина елипсе еквивалентна са $\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a+\frac{cx}{a}=\frac{c}{a}\cdot(x+\frac{a^2}{c})>0$, она је еквивалентна и са $\frac{\sqrt{(x+c)^2+y^2}}{x+\frac{a^2}{c}}=\frac{c}{a}=e$, а како израз на левој страни претходног израза представља количник растојања тачке (x,y) од тачке F_2 и растојања

тачке (x, y) од праве $x = -\frac{a^2}{c}$, добијамо још један еквивалент дефиниције елипсе (као скуп свих (x, y) којима је поменути количник једнак $e \in (0, 1)$). Симетрично, елипса се може дефинисати и као скуп свих (x, y) чији је количник растојања од тачке F_1 и праве $x = \frac{a^2}{c}$ једнак e, а праве $x = -\frac{a^2}{c}$ и $x = \frac{a^2}{c}$ се називају **директрисе** елипсе.
По питању параметризације елипсе важе слични коментари дати у делу 5.3 приликом испитивања кружне линије (рецимо, променљива x не може параметризовати елипсу око њених темена на x оси, а променљива y око њених темена на y оси), а параметризација која се најчешће користи приликом испитивања особина елипсе је $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, за $t \in [0, 2\pi)$ (наравно, може се изабрати и други скуп по коме се крећу вредности параметара). На основу леме 5.3.3, следи да је уочена функција глатка, вредност извода у тачки $(x_0, y_0) = (a\cos t_0, b\sin t_0)$ различитој од темена A_1, A_2 је $\frac{b\cos t_0}{-a\sin t_0} = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$, те је тангента елипсе у тој тачки $y = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}\cdot(x - x_0) + y_0$, односно $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$. У случају тачака A_1 и A_2, узевши нпр. y као параметар, долазимо до закључка да је тангента криве $x = a$, односно $x = -a$ (тј. и у овом случају се може користити последње добијена формула у случају преосталих тачака; овде је, наравно, проблем је настао услед тога што се права паралелна y оси не може представити у облику $y = kx + n$). Из претходног следи да је $(-a^2y_0, b^2x_0)^T$ вектор тангенте у тачки (x_0, y_0) елипсе $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$, као и да је права $y = kx + n$ тангента елипсе ако и само ако је $a^2k^2 + b^2 = n^2$ (заиста, онда је у питању тангента у (x_0, y_0), која је различита од A_1, A_2, тј. у питању је $y = k(x - x_0) + y_0$, па је $k = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$ и $n = y_0 - kx_0 = \frac{a^2y_0^2+b^2x_0^2}{a^2y_0} = \frac{b^2}{y_0}$, па је $a^2k^2 - n^2 = \frac{b^4x_0^2}{a^2y_0^2} - \frac{b^4}{y_0^2} = \frac{b^2(b^2x_0^2-a^2b^2)}{a^2y_0^2} = -b^2$). Ако тачка $M_0(x_0, y_0)$ припада елипси $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, вектор тангенте на елипсу у тој тачки је $t = (-a^2y_0, b^2x_0)^T$, док су $f_1 = \overrightarrow{F_1M_0} = (x_0 - c, y_0)^T$ и $f_2 = \overrightarrow{F_2M_0} = (x_0 + c, y_0)^T$, па је $\|t\|\cdot\cos\sphericalangle(t, f_1) = \frac{a^2cy_0-a^2x_0y_0+b^2x_0y_0}{\sqrt{(x_0-c)^2+y_0^2}} = \frac{a^2cy_0-c^2x_0y_0}{\sqrt{(x_0-c)^2+y_0^2}} = c^2y_0\cdot\frac{\frac{a^2}{c}-x_0}{\sqrt{(x_0-c)^2+y_0^2}} = c^2y_0\cdot\frac{1}{e} = c^2y_0\cdot\frac{\frac{a^2}{c}+x_0}{\sqrt{(x_0+c)^2+y_0^2}} = \frac{a^2cy_0+a^2x_0y_0-b^2x_0y_0}{\sqrt{(x_0+c)^2+y_0^2}} = -\|t\|\cdot\cos\sphericalangle(t, f_2)$, тј. ако су T_1 и T_2 тачке тангенте, тако да је M_0 између њих, важи $\sphericalangle T_1M_0F_1 = \sphericalangle F_2M_0T_2$ (последње се по литератури често виђа у формулацији да, ако огледало има облик елипсе, светлосни зрак који пролази кроз једну од жижа након рефлексије пролази и кроз другу).

Пример 56. Ако су $M_i(x_i, y_i)$, за $1 \leqslant i \leqslant 2$, тачке елипсе $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, тако да права M_1M_2 не садржи тачку $O(0, 0)$, докажимо да права која садржи O и пресечну тачку тангенти елипсе у M_1 и M_2 садржи средиште дужи M_1M_2. Тангента у M_i, за $1 \leqslant i \leqslant 2$, је $\frac{x_ix}{a^2} + \frac{y_iy}{b^2} = 1$, те је пресечна тачка P решење добијеног система. Притом је детерминанта матрице тог система $\frac{y_2x_1-y_1x_2}{a^2b^2} \neq 0$, пошто тачке M_1, M_2, O нису колинеарне, па се наведене тангенте заиста секу, а решавањем система се добија $P\left(\frac{a^2(y_2-y_1)}{y_2x_1-y_1x_2}, -\frac{b^2(x_2-x_1)}{y_2x_1-y_1x_2}\right)$, односно, једначина праве p која садржи O и P је $y = -\frac{b^2(x_2-x_1)}{a^2(y_2-y_1)} \cdot x$, па како је $-\frac{b^2(x_2-x_1)}{a^2(y_2-y_1)} \cdot \frac{x_1+x_2}{2} = -\frac{b^2x_2^2-b^2x_1^2}{2a^2(y_2-y_1)} = \frac{b^2x_1^2-b^2x_2^2}{2a^2(y_2-y_1)} = \frac{(a^2b^2-a^2y_1^2)-(a^2b^2-a^2y_2^2)}{2a^2(y_2-y_1)} = \frac{y_1+y_2}{2}$, следи да p садржи средиште дужи M_1M_2, тачку $(\frac{x_1+x_2}{2}\,\frac{y_1+y_2}{2})$. △

Хипербола. Канонска једначина хиперболе је $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, за неке $a, b > 0$ (случај посматрања једначине $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ се своди на претходни ротацијом за $\frac{\pi}{2}$). У овом делу ћемо навести основне особине хиперболе, а доказе изостављамо, пошто су аналогни доказима одговарајућих тврђења за елипсу.

Хипербола чија је једначина $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, за неке $a, b > 0$, сече x осу у тачкама $(-a, 0)$ и $(a, 0)$ (темена хиперболе), не сече y осу, симетрична је у односу на тачку $(0, 0)$ (центар хиперболе), а праве $y = -\frac{b}{a} \cdot x$ и $y = \frac{b}{a} \cdot x$ су њене асимптоте (и у $-\infty$ и у ∞). Ако је $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, тачке $F_1(c, 0)$ и $F_2(-c, 0)$ се називају **жиже** хиперболе, а еквилалентна дефиниција ове криве је да је то скуп свих тачака чија је апсолитна вредност разлике растојања од жижа једнака $2a$ (дакле, скуп свих $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ за које је $\left|\sqrt{(x + c)^2 + y^2} - \sqrt{(x - c)^2 + y^2}\,\right| = 2a$). Праве $x = -\frac{a^2}{c}$ и $x = \frac{a^2}{c}$ се називају **директрисе** хиперболе, а еквивалент дефиниције хиперболе је да је то скуп свих тачака којима је однос растојања од жиже F_1 и директрисе $x = \frac{a^2}{c}$ (симетрично, од жиже F_2 и директрисе $x = -\frac{a^2}{c}$) једнак $\frac{c}{a} = e \in (1, \infty)$. Хипербола је глатка крива, једначина тангенте у њеној тачки (x_0, y_0) је $\frac{x_0x}{a^2} - \frac{y_0y}{b^2} = 1$, вектор тангенте у (x_0, y_0) је $(a^2y_0, b^2x_0)^T$, а права $y = kx + n$ је тангента у некој њеној тачки ако и само ако је $a^2k^2 - n^2 = b^2$. Ако су T_1 и T_2 тачке тангенте хиперболе у тачки M_0, које се налазе са исте стране тачке M_0, онда је $\sphericalangle T_1M_0F_1 = \sphericalangle F_2M_0T_2$, тј. тангента у M_0 је симетрала $\sphericalangle F_1M_0F_2$ (ако огледало има облик хиперболе, светлосни зрак који пролази кроз једну од жижа након рефлексије се креће по правој која садржи другу жижу, али се удаљава од ње). У применама, најчешће параметризације хиперболе (поред класичних Декартових координата) су $x = \frac{a}{\cos t}$, $y = b \operatorname{tg} t$, за $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ и $x = a \operatorname{ch} t$, $y = b \operatorname{sh} t$, односно $x = -a \operatorname{ch} t$, $y = b \operatorname{sh} t$, за $t \in \mathbb{R}$.

Пример 57. Ако елипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ и хипербола $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ имају исте жиже, одредимо угао под којим се секу. Под наведеним условима је $a > b$ и важи $a^2 - b^2 = c^2 = \alpha^2 + \beta^2$. Пресечна тачка је решење система $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, одакле је $x^2 \cdot \left(\frac{1}{a^2\beta^2} + \frac{1}{b^2\alpha^2}\right) = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{\beta^2}$, односно $x^2 = a^2\alpha^2 \cdot \frac{b^2+\beta^2}{a^2\beta^2+b^2\alpha^2} = a^2\alpha^2 \cdot \frac{b^2+\beta^2}{(b^2+c^2)\beta^2+b^2(c^2-\beta^2)} = \frac{a^2\alpha^2}{c^2}$, те је тачка пресека у првом квадранту $(\frac{a\alpha}{c}, \frac{b\beta}{c})$. Вектори тангенте на елипсу и хиперболу у тој тачки су, редом, $(-\frac{a^2b\beta}{c}, \frac{b^2a\alpha}{c})^T$ и $(\frac{\alpha^2b\beta}{c}, \frac{\beta^2a\alpha}{c})^T$, а како је њихов скаларни производ 0, следи да се уочене криве у тој тачки секу под углом $\frac{\pi}{2}$ (а, по симетрији, под тим углом се секу и у преосталим пресечним тачкама). △

Парабола. Канонска једначина параболе је $x^2 = 2py$, за неко $p \neq$

0 (јасно, без умањења општости, можемо изабрати $p > 0$), односно, ротацијом за $-\frac{\pi}{2}$, добијамо једначину $y^2 = 2px$. Ова крива сече y осу у $(0,0)$ (тзв. теме параболе), симетрична је у односу на x осу, а важи $x \sim \frac{y^2}{2p}$ кад $y \to \pm\infty$, те нема ни хоризонталну ни косу асимптоту. Наведена једначина је еквивалентна са $y^2 + (x - \frac{p}{2})^2 = (x + \frac{p}{2})^2$, а, како је $x \geqslant 0$, и са $\sqrt{y^2 + (x - \frac{p}{2})^2} = x + \frac{p}{2}$, те је еквивалент дефиниције уочене параболе да је у питању крива којој је однос растојања од тачке $F(\frac{p}{2}, 0)$ и праве d, чија је једначина $x = -\frac{p}{2}$ једнак $e = 1$ (притом се F назива **жижа**, а d **директриса** параболе; овде видимо и разлог због којег смо посматрали једначину у облику $y^2 = 2px$, а не $x^2 = 2py$, да би директрисе свих проучаваних кривих биле паралелне y оси). Парабола је глатка крива, вектор тангенте у (x_0, y_0) која припада параболи је $(y_0, p)^T$, па је њена тангента у тој тачки $\frac{x-x_0}{y_0} = \frac{y-y_0}{p}$, односно $p(x - x_0) = y_0(y - y_0) = y_0 y - 2px_0$, тј. $y_0 y = p(x + x_0)$. Такође, следи да је права $y = kx + n$ тангента параболе ако и само ако је $2kn = p$ (онда је у питању тангента у тачки $(x_0, y_0) \neq (0,0)$, тј. $k = \frac{p}{x_0}$ и $n = \frac{px_0}{y_0}$, односно $2kn = \frac{2p^2x_0}{y_0^2} = \frac{2p^2x_0}{2px_0} = p$). Ако тачка $M_0(x_0, y_0)$ припада параболи $y^2 = 2px$ и ако је $\overrightarrow{M_0T} = (y_0, p)^T = t$ (онда T припада тангенти на параболу у M_0), важи $\overrightarrow{M_0F} = (\frac{p}{2} - x_0, y_0)^T$, па је $\|t\| \cdot \cos\sphericalangle TM_0F = \frac{y_o(\frac{p}{2}-x_0)+py_0}{\sqrt{(\frac{p}{2}-x_0)^2+y_0^2}} = -\frac{y_0(x_0+\frac{p}{2})}{\sqrt{(x+\frac{p}{2})^2}} = -y_0 = -\|t\| \cdot \langle t, i\rangle$, где је $i = (1,0)^T$ (јер је $x + \frac{p}{2} > 0$), па је $\sphericalangle TM_0F$ суплементан углу који t гради са једничним вектором x осе (ако огледало има облик параболе, светлосни зрак који пролази кроз жижу након рефлексије се креће паралелно оси параболе).

Пример 58. Ако су $M_i(x_i, y_i)$, за $1 \leqslant i \leqslant 2$, различите тачке параболе $y^2 = 2px$, где је $p > 0$, докажимо да пресечна тачка тангенти у M_1 и M_2 припада симетрали $\sphericalangle M_1FM_2$. За $1 \leqslant i \leqslant 2$, тангента у M_i је $y_i y = p(x + x_i)$, координате пресечне тачке P уочених тангенти је решење добијеног система, тј. $x = \frac{y_2x_1-y_1x_2}{y_1-y_2} = \frac{y_1y_2(y_1-y_2)}{2p(y_1-y_2)} = \frac{y_1y_2}{2p}$, $y = \frac{p(x_1-x_2)}{y_1-y_2} = \frac{y_1^2-y_2^2}{2(y_1-y_2)} = \frac{y_1+y_2}{2}$ (дакле, уочене тангенте се секу), па је $v_i = \overrightarrow{FM_i} = (x_i - \frac{p}{2}, y_i)^T$ и $v_P = \overrightarrow{FP} = (\frac{y_1y_2}{2p} - \frac{p}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})^T$, одакле је $\|v_p\| \cdot \cos\sphericalangle M_iFP = \frac{\langle v_i, v_P\rangle}{\|v_i\|} = \frac{(x_i-\frac{p}{2})(\frac{y_1y_2}{2p}-\frac{p}{2})+y_i\cdot\frac{y_1+y_2}{2}}{\sqrt{(x_i-\frac{p}{2})^2+y_i^2}} = \frac{(x_i+\frac{p}{2})(\frac{y_1y_2}{2p}-\frac{p}{2})-p(\frac{y_1y_2}{2p}-\frac{p}{2})+y_i\cdot\frac{y_1+y_2}{2}}{x_i+\frac{p}{2}} = \frac{y_1y_2}{2p} - \frac{p}{2} + \frac{\frac{1}{2}(y_i^2+p^2)}{\frac{y_i^2}{2p}+\frac{p}{2}} = \frac{y_1y_2}{2p} + \frac{p}{2}$, па је $\cos\sphericalangle M_1FP = \cos\sphericalangle M_2FP$. △

Пример 59. Ако је $\mathcal{P} = \{y^2 = 2px + p^2 \mid p > 0\}$ и $\mathcal{Q} = \{y^2 = 2qx + q^2 \mid q < 0\}$, фамилије $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ се састоје од парабола, чија је жижа $(0,0)$. Ако се неке две параболе из уочених скупова секу, следи $y^2 = 2rx + r^2$, $y^2 = 2sx + s^2$, за неке ненула $r \neq s$, одакле је $x = -\frac{r+s}{2}$, $y^2 = -rs$. Следи да су графици произвољне две различите параболе из $\mathcal{P}$, као и произвоље две различите параболе из $\mathcal{Q}$, дисјунктни, док се $y^2 = 2px + p^2$ и $y^2 = 2qx + q^2$, где је $q < 0 < p$, секу у тачкама $A_1(-\frac{p+q}{2}, \sqrt{-pq})$ и $A_2(-\frac{p+q}{2}, -\sqrt{-pq})$.

Тангентни вектори на уочене параболе у A_1 су $(\sqrt{-pq}, p)^T$ и $\sqrt{-pq}, q)^T$, редом, па, како је скаларни производ ових вектора 0, те криве се у A_1 секу под правим углом (а, због симетрије, исто важи и у A_2). $\triangle$

По претходним разматрањима, следи да се елипса, парабола и хипербола могу дефинисати као скуп свих тачака у равни, којима је однос растојања од уочене тачке и уочене праве једнак e и припада $(0,1)$, $\{1\}$, $(1,\infty)$, редом. Одавде се лако добија и представљање тих кривих у поларном координатном систему (видети део посвећен применама Римановог интеграла у геометрији у делу 6.3). На пример, ако је центар система (r,φ) у жижи, а директриса сече и нормална је на поларну осу (полуправу $\varphi = 0$), растојање тачке од жиже је r, а од уочене праве $d - r\cos\varphi$ или $r\cos\varphi - d$ (у зависности да ли тачка и жижа припадају истој полуравни одређеној директрисом или не), што доводи до $\frac{r}{d-r\cos\varphi} = \pm e$, односно $r = \frac{\pm ed}{1\pm e\cos\varphi}$. Заправо, није тешко видети да је у случају елипсе и параболе довољно посматрати претходну једначину у облику $r = \frac{ed}{1+e\cos\varphi}$, пошто се све тачке криве налазе у истој полуравни одређеној директрисом као и жижа (што се може видети и на основу тога што је онда $1 + e\cos\varphi \geqslant 1 - e \geqslant 0$).

Аналогно урађеном за једначину $f(x,y) = 0$, где је f полином другог степена две променљиве, може се спровести одговарајући поступак за једначину $f(x,y,z) = 0$, где је f полином другог степена три реалне променљиве, а скуп решења такве једначине се назива **површ другог реда** (квадрика). Како је поступак аналоган спроведеном за криве другог реда (наравно, услед тога што се појављује једна више променљива, дискусија је сложенија), изостављамо га, а за крај ове главе ћемо навести неке од канонских облика добијених на овај начин, при чему је избор извршен на основу потреба наставка текста.

Једначина $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = 1$, где су $a,b,c > 0$ представља површ у $\mathbb{R}^3$, која се назива **елипсоид**. Специјално, ако је $a = b = c$, у питању је сфера (са центром у $(0,0,0)$, популречника a), а ако су два од a,b,c једнака, површ се може видети као ротациона површ, те се за њебо проучавање могу применити резултати добијени у делу 6.3).

Једначине $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = c^2$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = c^2$, $x^2 - 2py = 0$, где су $a,b,c,p > 0$, представљају једначине тзв. **цилиндаричне површи**. Услед отсуства једне променљиве (у претходном је то z), оне се могу видети као унија свих правих паралелних са z осом које садрже тачке криве коју описују наведене једначине у $\mathbb{R}^2$ (тзв. генератрисе). Видимо да овакве површи имају смисла и уколико се не ради са квадратним површима, а уобичајно је да се оне називају по генератриси, те се наведени цилиндри, у редоследу у ком су наведени, називају елиптички (специјално, ако је $a = b$, назива се и кружни), хиперболички и параболички.

Једначина $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z^2 = 0$, где су $a,b > 0$, представља површ у $\mathbb{R}^3$, која се назива **елиптички конус**. Она се може видети као унија правих, које садрже тачку $(0,0,0)$ и неку тачку криве $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $z = 1$ (што је елипса у равни $z = 1$, одакле потиче и назив ове површи). Уочене праве се називају изводнице те површи. Приметимо и да, ако је $a = b$ (онда се уочена површ назива и кружни конус), је у питању ротациона површ (настала ротацијом њене произвољне изводнице око z осе).

Једначине $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2cz$ и $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2cz$, где су $a, b > 0$, $c \neq 0$, представљају површи у $\mathbb{R}^3$, које се називају, редом, **елиптички параболоид** и **хиперболички параболоид** (називи су настали из разлога што су пресеци са равнима нормалним на x или y осу параболе, а на раван нормалну на z осу је у првом случају елипса, а у другом хипербола). Уколико уочене једначине посматрамо у облику $z = \frac{1}{2c} \cdot (\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2})$, односно $z = \frac{1}{2c} \cdot (\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2})$, тј. у облику $z = f(x, y)$, можемо из схватити као функцију из $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}$, која, у неком смислу, одговара квадратној функцији, уколико посматрамо аналоган проблем за функције из $\mathbb{R}$ у $\mathbb{R}$. Притом је $f(0, 0) = 0$, у случају елиптичког параболиоида и $c > 0$ је $(0, 0)$ и минимум функције f, у случају елиптичког параболиоида и $c < 0$ је $(0, 0)$ и максимум функције f, док у случају хиперболичког параболоида тачка $(0, 0)$ није екстремна вредност рестрикције f на $\{(x, y) \,|\, x^2 + y^2 \leqslant r^2\}$, за произвољно $r > 0$. У последњем случају, темена парабола која се добијају при пресецима са равнима $x = d \in \mathbb{R}$ су максимуми функције $z(y) = \frac{1}{2c} \cdot (\frac{d^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2})$, а темена парабола која се добијају при пресецима са равнима $y = d \in \mathbb{R}$ су минимуми функције $z(x) = \frac{1}{2c} \cdot (\frac{x^2}{a^2} - \frac{d^2}{b^2})$, те се оваква тачка често назива **седласта тачка** уочене површи (а, у неформалном говору, често се виђа и да се, због обика на који подсећа, ова површ назива седло).

Пример 60. Скуп решења једначине $x^2 + y^2 = z^2$ представља кружни конус у $\mathbb{R}^3$ (добијен ротацијом праве $x = \frac{y}{0} = z$ око z осе). Пресек тог конуса са равни $z = 0$ је једна тачка, а са равни $y = 0$ је скуп који се састоји од две праве (у питању је $x^2 - z^2 = (x - z)(x + z) = 0$, тј. те праве су изводнице $x = \frac{y}{0} = z$ и $x = \frac{y}{0} = -z$). За $a \in \mathbb{R}$, пресек тог конуса са $ax + z = 1$ (свака од уочених равни је паралелна са y осом и садржи $(0, 0, 1)$) је одређен са $(1 - a^2)x^2 + y^2 + 2ax = 1$, те у случају $|a| < 1$ представља елипсу (ако је $a = 0$, та елипса је кружна линија), ако је $|a| > 1$ хиперболу, а ако је $a = 1$ параболу (приметимо да се парабола добија у случају када је уочена раван паралелна са изводницом $x = \frac{y}{0} = z$). $\triangle$

По геометријској литератури се често виђа да се резултати претходног примера користе при дефинисању кривих другог реда (као криве које се добијају пресецима равни са конусом), тј. те криве се могу дефинисати и на овај начин. Заправо, проучавање ових кривих је и започето пре открића координатног система, а на основу последњег се може доћи и до закључака добијених у претходном делу (који су овде добијени апаратом аналитичке геометрије, пошто нам је њен приказ био основни мотив). Из наведених разлога се те криве често називају и **конусни пресеци** (конике).