

Екстремалне фамилије независних скупова

Миодраг Живковић

Фамилија $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$ подскупова скупа $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ је независна ако не садржи $k + 1 \geq 3$ различитих скупова A_0, A_1, \dots, A_k таквих да је $A_0 = \cup_{i=1}^k A_i$. За $n = 3$ то је нпр. фамилија $\{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$. Други пример је фамилија која се састоји од свих k -чланих подскупова скупа $[n]$, за произвољно $k, 1 \leq k < n$.

Нека је b_n величина највеће независне фамилије у $2^{[n]}$. Непосредним израчунавањем добија се да је $b_n = 1, 2, 4, 7, 13, 24$ за $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Клајтман је 1976. године показао да је

$$b_n'' \leq b_n \leq \binom{n}{\lceil n/2 \rceil} + \frac{2^n}{n+1} + O\left(\binom{n}{\lceil n/4 \rceil}\right),$$

где је

$$b_n'' = \binom{n}{\lceil n/2 \rceil} + \left\lceil \frac{1}{n} \binom{n}{\lceil n/2 \rceil - 1} \right\rceil.$$

Једноставна конструкција показује да је $b_n \geq b'_n$, где је $b'_n = \sum_{i=1}^{n-1} \binom{i}{\lceil i/2 \rceil}$, тј. и b'_n је доња граница за b_n . Испоставља се да је граница b'_n боља за непарне, а b_n'' за парне $n, n \geq 11$.