Домаћи - ДеРамова кохомологија

1. Доказати да је диференцијална 1-форма $\omega \in \Omega^1(M)$ тачна ако и само ако је њен интеграл дуж сваке глатке петље у M једнак 0. Доказати да за сваку просто-повезану многострукост M важи да $H^1_{dR}(M) \cong 0$.

2. Нека је $\pi : E \to M$ оријентисано векторско раслојење ранга n над оријентисаном глатком многостукошћу M димензије m. Означимо са $\iota : M \to E$ нулто сечење и $\tau \in \Omega^n_c(E)$ затворена форма. Доказати да је $\pi_* \tau \equiv \lambda \in \mathbb{R}$ ако и само ако за сваку затворену форму $\sigma \in \Omega^m(E)$ важи $\int_E \sigma \wedge \tau = \lambda \int_M \iota^* \sigma$.

3. Доказати да је Ојлерова класа сваког оријентабилног раслојења непарног ранга једнака 0.

4. Посматрајмо $\mathbb{C}P^n = \{l \subseteq \mathbb{C}^{n+1} \mid l \text{ 1-димензиони комплексни потпростор}\}$ и **таутолошко раслојење** $H \to \mathbb{C}P^n$ где је фибра над $l \in \mathbb{C}P^n$ дводимензиони простор $l \subseteq \mathbb{C}^{n+1}$. Означимо са $h \in H^2(\mathbb{C}P^n)$ Поенкареов дуал од $\mathbb{C}P^{n-1}$. Доказати:

(а) h је Ојлерова класа раслојења H, тј. $h = e(H)$.

(б) Доказати да је $h^{\wedge k}$ Поенкареов дуал од $\mathbb{C}P^{n-k}$.