ЗАДАЦИ 4

1. Доказати да је:
   - свака права линија у $\mathbb{R}^2$
   - круг у $\mathbb{R}^2$

   скупи Лебегове мере 0.

2. Нека су $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ мерљиве функције. Доказати да је
   $$(\sup f_n)(x) := \sup\{f_n(x) \mid n\in\mathbb{N}\}$$
   мерљива функција.

3. Нека су f, g мерљиве функције. Доказати да је $f\cdot g$ мерљива.
   (ПОМОЋ: показати прво да је f^2 мерљива, а затим искористи да је $f+g$ мерљива).

4. Доказати да за мерљиву функцију f важи:
   f интеграбилна $\Longleftrightarrow$ $|f|$ интеграбилна.
   Наћи пример функције $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ која није Лебег мерљива, а $|f|$ јесте. (ПОМОЋ: $f=\chi_A-\chi_B$ за неке $A,B\subseteq\mathbb{R}$)

5. Нека је $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ диференцијабилна функција. Доказати да је f' Лебег мерљива.

6. Нека је $A\subseteq\mathbb{R}$. Означимо $\mathrm{diff}(A) := \{x-y \mid x,y\in A\}$.
   Доказати да ако је $A\subseteq\mathbb{R}$ Лебег мерљив т.д. $\lambda(A)>0$ тада $\mathrm{diff}(A)$ садржи отворен интервал који садржи 0.

7. Нека је $A\subseteq\mathbb{R}$. Доказати да
   $$\lambda(A)=0 \Longleftrightarrow (\forall B\subseteq A)\ B \text{ је Лебег мерљив}.$$

$\boxed{\text{ЗА ДОМАЋИ ПРЕДАТИ ЗАДАТКЕ 3, 4, 5.}}$