ЗАДАЦИ:

1. Доказати да је свако билинеарно пресликавање $f: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ диференцијабилно и да важи:
$$Df(x,y)(v,w) = f(v,y) + f(x,w).$$
Израчунати $D^2 f$ и $D^3 f$.

2. Аналогно претходном задатку доказати да је свако мултилинеарно пресликавање диференцијабилно и израчунати њихов извод.

3. Доказати да је $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to (0,+\infty)$ диференцијабилно и наћи његов извод. Напомена: $\|(x_1,\dots,x_n)\| = \sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}$.

4. (i) Доказати да је $GL(n,\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^{n\times n}$ отворен.

   (ii) Доказати да за инверзију матрица
$$F : GL(n,\mathbb{R}) \longrightarrow GL(n,\mathbb{R}), \quad A \longmapsto A^{-1}$$
важи: $DF(A)X = -A^{-1}XA^{-1}$.

   (**Помоћ:** Користити се идентитетом $AA^{-1} = Id$ и Лајбницовим правилом из задатка 5.)

5. Нека је $U \subseteq \mathbb{R}^m$ отворен, $x_0 \in U$, $f: U \to \mathbb{R}^{n_1\times n_2}$, $g: U \to \mathbb{R}^{n_2\times n_3}$ пресликавања диференцијабилна у x_0. Доказати Лајбницово правило, тј. за пресликавање
$$fg : U \to \mathbb{R}^{n_1\times n_3} \quad (f(x)\cdot g(x) \text{ је МНОЖЕЊЕ МАТРИЦА})$$
важи:
$$D(f\cdot g)(x_0)v = (Df(x_0)v)\cdot g(x_0) + f(x_0)\cdot Dg(x_0)v.$$

   (**Помоћ:** Записати $f\cdot g$ као композицију ПРЕСЛИКАВАЊА
$$F: U \to \mathbb{R}^{n_1\times n_2}\times\mathbb{R}^{n_2\times n_3}, \quad x_0 \mapsto (f(x_0), g(x_0))$$
и
$$G: \mathbb{R}^{n_1\times n_2}\times\mathbb{R}^{n_2\times n_3} \to \mathbb{R}^{n_1\times n_3}, \quad (A,B) \mapsto A\cdot B$$
Затим искористити чињеницу да је G билинеарно

6. (i) Доказати да $\exists r, r' > 0$ т.д. важи:

$(\forall y \in \mathbb{R}^2)$ $\| y - (1,1) \| < r'$ постоји јединствено

решење $x = x_y \in \mathbb{R}^2$ следећег система једначина:

$$x_1 + e^{x_2} = y_1$$

$$e^{-x_1} + x_2 = y_2$$

које задовољава $\| x_y \| < r$.

(ii) Доказати да је $y \mapsto x_y$ диференцијабилно.

Израчунати извод овог пресликавања у $(1,1)$.

7. Доказати да су ТЕОРЕМА О ИМПЛИЦИТНОЈ Ф-ЈИ и ТЕОРЕМА О ИНВЕРЗНОЈ Ф-ЈИ еквивалентне.

$\boxed{\text{ЗА ДОМАЋИ ПРЕДАТИ ЗАДАТКЕ 3 И 7.}}$