

Приближне вредности; апсолутна и релативна грешка

Чуменски подаци које добијамо као резултате експеримента су ретко потпуно тачни. Бројеви се заокружују, па су и резултати математичких операција над њима заправо приближне вредности. У нумеричким израчунавањима не треба користити више цифара него што је неопходно. Резултате треба заокруживати тако да свака цифра носи корисну информацију, а поред тога треба знати и колика је грешка настала таквим заокруживањем.

* Грешка заокруживања (грешка заокруживања)

Неко је x тачна вредност броја, а x^* његова приближна вредност.

Апсолутна грешка Δx^* , приближног броја x^* дефинише се са:

$$\Delta x^* = |x - x^*|.$$

Како се ова вредност у пракси често одређује (јер не знамо тачну вредност нпр. $\sqrt{2}$) уводи се граница апсолутне грешке Ax^* :

$$\Delta x^* = |x - x^*| \leq Ax^*$$

$$\text{Важно: } x = x^* \pm Ax^* \Leftrightarrow x^* - Ax^* \leq x \leq x^* + Ax^*.$$

$$\text{Пример: } x = \sqrt{2} = 1.4142135$$

$$x^* = 1.41$$

$$|x - x^*| = 0.004213 \leq 0.005 = 0.5 \cdot 10^{-2}$$

$$\text{Релативна грешка } \delta x^*: \quad \delta x^* = \frac{Ax^*}{|x|} \approx \frac{Ax^*}{|x^*|} \leq R x^* \quad \begin{array}{l} R x^* \\ \text{граница} \\ \text{релативне} \\ \text{грешке} \end{array}$$

Релативна грешка даје тачније информације од апсолутне:

$$x_1 = 1.001 \quad x_1^* = 1.00 \quad \Delta x_1^* = 0.001 \quad \delta x_1^* = \frac{0.001}{1.001} \approx 0.001$$

$$x_2 = 0.009 \quad x_2^* = 0.01 \quad \Delta x_2^* = 0.001 \quad \delta x_2^* = \frac{0.001}{0.009} \approx 0.111$$

Знаčajне и сигурне цифре

Сваки број x можемо представити следећим изразом

$$x = \pm (\alpha_1 \cdot 10^n + \alpha_2 \cdot 10^{n-1} + \dots + \alpha_m \cdot 10^{n-m+1} + \dots), \quad \alpha_i \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}, \alpha_1 \neq 0.$$

Нека је x^* његова приближна вредност добијена заокруживањем

$$x^* = \pm (\alpha_1 \cdot 10^n + \alpha_2 \cdot 10^{n-1} + \dots + \alpha_{m-1} \cdot 10^{n-m+2} + \beta_m \cdot 10^{n-m+1}).$$

Знаčajне цифре приближног броја су све цифре његовог записа почевши од прве ненула цифре са леве стране:

$$x^* = 0.0032017$$

$$x^* = 0.32070 \quad \text{— последња нула је значајна јер указује на тачност}$$

Значајна цифра α_k приближног броја x^* је сигурна цифра ако важи:

$$A x^* \leq \omega \cdot 10^{n-k+1}, \quad 0 < \omega \leq 1$$

Ако је $0 < \omega \leq 1/2$ онда кажемо да је α_k сигурна у ужем смислу, а ако је $1/2 < \omega \leq 1$ онда је сигурна у ширем смислу.

- пример: Нека је $x = 99.98$, а $x^* = 100.00$. Одредити сигурне цифре.

$$\Delta x^* = A x^* = |100.00 - 99.98| = 0.2 \cdot 10^1 \quad \text{— максимално одјачавање}$$

Због тога међу 10^1 у броју x^* одговара прва нула иза зареза.

$$\text{То м важи} \quad A x^* \leq \omega \cdot 10^1$$

$$0.2 \cdot 10^1 \leq \omega \cdot 10^1 \quad \text{за неко } \omega \in (0, 1] \quad ? \text{ да!}$$

$\Rightarrow$ Сигурна је у ширем смислу, а како важи и за $\omega = 1/2$?

$$0.2 \cdot 10^1 \leq 0.5 \cdot 10^1,$$

сигурна је и у ужем смислу. Све цифре испред су такође сигурне у ужем смислу. јер:

$$0.2 \cdot 10^1 \leq 0.5 \cdot 10^1 \leq 0.5 \cdot 10^0 \leq 0.5 \cdot 10^0 \leq 0.5 \cdot 10^2$$

2a) Која је последња нула сигурна цифра?

$0.2 \cdot 10^{-1} \leq \omega \cdot 10^{-2}$? Ово не важи за $\omega \in [0, 1] \Rightarrow$ Није сигурна ни у унутрашњем, а ни у ваншњем интервалу.

Правило заокруживања

Бројеве заокружујемо тако да приближно одговарамо значајних цифара, последња цифра која остаје буде сигурна у унутрашњем интервалу.

Релативна грешка указује на број сигурних цифара. Нека је m укупан број сигурних цифара, онда је β_m последња сигурна цифра. Тада је:

$$\omega \cdot 10^{n-m} \leq Ax^* \leq \omega \cdot 10^{n-m+1} \quad / : 1x^*$$

$$\frac{\omega \cdot 10^{n-m}}{\alpha_1 \cdot 10^n + \dots + \beta_m \cdot 10^{n-m+1}} \leq Rx^* \leq \frac{\omega \cdot 10^{n-m+1}}{\alpha_1 \cdot 10^n + \dots + \beta_m \cdot 10^{n-m+1}}$$

$$\frac{\omega \cdot 10^{n-m}}{\alpha_1 \cdot 10^n + 10^n} \leq Rx^* \leq \frac{\omega \cdot 10^{n-m+1}}{\alpha_1 \cdot 10^n}$$

Коначно: $\frac{\omega}{(\alpha_1 + 1)10^m} \leq Rx^* \leq \frac{\omega}{\alpha_1 \cdot 10^{m-1}}$ ✓

Пример: Заокруживање бројеве на три значајне цифре:

1) $x = 0.31691$ $x^* = 0.316$ $Ax^* = 0.91 \cdot 10^{-3} < 0.5 \cdot 10^{-3}$ НЕ!
 $x^* = 0.317$ $Ax^* = 0.9 \cdot 10^{-4} < 0.5 \cdot 10^{-3}$ ДА!

Ако је прва одбачена цифра већа од 5 ($\alpha_{m+1} > 5$) онда је $\beta_m = \alpha_m + 1$.

2) $x = 53.543$ $x^* = 53.5$

Ако је прва одбачена цифра мања од 5 ($\alpha_{m+1} < 5$) онда је $\beta_m = \alpha_m$.

3) $x = 21.051$ $x^* = 21.1$ $Ax^* = 0.049 < 0.5 \cdot 10^{-1}$

Ако је $\alpha_{m+1} = 5$ и иза α_{m+1} имамо цифре различите од 0, онда је $\beta_m = \alpha_m + 1$.

$$4) x = 1.215 \quad x^* = 1.22$$

$$x = 3.225 \quad x^* = 3.22$$

Ако је $2m=5$ и после $m+1$ велика цифра различита од 0
 онда:
 1) ако је m непаран број $\beta_m = \alpha_m + 1$,
 2) ако је m паран број $\beta_m = \alpha_m$.

Грешке приближних вредности функција

Нека је дата ф-ја више аргумената: $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ дефинисана у некој области G својих аргумената $x_1, x_2, \dots, x_n$. Претпоставимо да су непознате неке вредности параметара $x_1, x_2, \dots, x_n$, а да су познате приближне вредности $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$, као и границе апсолутних грешака $|x_i - x_i^*| \leq \Delta x_i^*$, $i = 1, 2, \dots, n$. Као резултат добијемо вредност $y^* = f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$.

Апсолутну грешку дефинишемо са:

$$\Delta y^* = |f(x_1, x_2, \dots, x_n) - f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)| \leq \Delta y^* = \sup_{x \in G} |y(x) - y^*|,$$

$$G = \{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid |x_i - x_i^*| \leq \Delta x_i^*, i = 1, n \}.$$

Претпоставимо да је f непрекидно диференцијабилна ф-ја једне променљиве, онда је:

$$\Delta f^* = |f(x) - f(x^*)| = \frac{|f(x) - f(x^*)|}{|x - x^*|} \cdot |x - x^*|$$

На основу Лагранжевог теореме, постоји таква $\xi \in (x, x^*)$

$$\text{т.ј.} \quad |f(x) - f(x^*)| = |f'(\xi)| |x - x^*|. \quad (\exists \theta \in [0, 1] \quad \xi = x^* + \theta(x - x^*))$$

Сада је:

$$\Delta f^* \leq |f'(\xi)| \cdot \Delta x^*.$$

У пракси увек се ξ узимамо x^* , тј. $\Delta f^* \leq |f'(x^*)| \Delta x^*$

За функције више променљивих когда су апсолутне грешке аргумента даће кориснимо линеарну оцему апсолутне грешке:

$$\Delta f^* \leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} (x_1^*, \dots, x_n^*) \right| \Delta x_i^* = A f^*$$

Линеарна оцему релативне грешке:

$$R f^* = \frac{\Delta f^*}{|f^*|} = \frac{1}{|f^*|} \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} (x_1^*, \dots, x_n^*) \right| \underbrace{\Delta x_i^*}_{\frac{|x_i^*|}{|f^*|}} = \sum_{i=1}^n \frac{|x_i^*| \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} (x_1^*, \dots, x_n^*) \right|}{|f^*|} R x_i^*$$

Апсолутна грешка збира/разлике

Нека је $S(x_1, x_2, \dots, x_n) = g_1 x_1 + g_2 x_2 + \dots + g_n x_n$, $g_i = \pm 1$, $x_i > 0$, $i = 1, \bar{n}$
и нека је $x_i = x_i^* \pm \Delta x_i^*$, $i = 1, \bar{n}$.

$S^* = g_1 x_1^* + g_2 x_2^* + g_3 x_3^* + \dots + g_n x_n^*$ - приближна вредност

$$\Delta S^* = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial S}{\partial x_i} (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \right| \Delta x_i^* = \sum_{i=1}^n |g_i| \Delta x_i^* = \sum_{i=1}^n \Delta x_i^*$$

Дакле, апсолутна грешка збира/разлике једнака је збору апсолутних грешака аргумента. Осим што, појављује се грешка или број са најмањим бројем децимала. Зато има смисла задржавати много више цифара код сабраних бројева.

Пример: Сабрати приближне бројеве:

0.8956, 1.735, 4365, 125.8, 12.34, 0.0456

$\frac{1}{2} 10^{-4}$, $\frac{1}{2} 10^{-3}$, $\frac{1}{2} 10^{-1}$, $\frac{1}{2} 10^1$, $\frac{1}{2} 10^2$, $\frac{1}{2} 10^{-4}$

Ако нам није даја апсолутна грешка, подразумевамо да је последња цифра сигурна у ужном смислу, тј. $\omega = 1/2$.

$$S^* = 0.8956 + 1.735 + 4365 + 125.8 + 12.34 + 0.0456$$

највећа апсолутна грешка

Закруњујемо бројеве на једну децималу више од броја децимала сабирка који има највећу апсолутну грешку (у суштини то не грешка бити много велика).

$$S^{**} = 0.90 + 1.74 + 436.5 + 125.8 + 12.34 + 0.05 = 577.33$$

На крају резултат заокружимо на одељно децимала колико их има број са највећом апсолутном грешком

$$S^{***} = 577.3$$

$$\begin{aligned} AS^{***} &= |S^{***} - S| \leq |S^{***} - S^{**}| + AS^{**}; AS^{**} \leq \sum_{i=1}^n |x_i^{**} - x_i^{*}| + \sum_{i=1}^n |x_i^{*} - x_i| \\ &= 0.03 + 0.0049 + 0.005 + 0.0034 + \dots \\ &= 0.03 + 0.0138 + \frac{1}{2}10^{-1} + \frac{1}{2}10^{-1} + \frac{1}{2}10^{-1} + \frac{1}{2}10^{-1} + \frac{1}{2}10^{-1} + \frac{1}{2}10^{-1} = 0.1494 \end{aligned}$$

$$S = 577.3 \pm 0.15$$

Релативна грешка збира ✓

$$S = x_1 + x_2 + \dots + x_n, \quad x_i > 0 \text{ или су } x_i \text{ истог знака}$$

$$\begin{aligned} RS^* &= \sum_{i=1}^n \frac{|x_i^* \frac{\partial S}{\partial x_i}(x_1^*, \dots, x_n^*)|}{|S^*|} R_{x_i}^* = \sum_{i=1}^n \frac{|x_i^*|}{|S^*|} R_{x_i}^* = \frac{\sum_{i=1}^n |x_i^*|}{|x_1^* + \dots + x_n^*|} R_{x_i}^* \\ &= \frac{1}{|S^*|} (R_{x_1}^* |x_1^*| + R_{x_2}^* |x_2^*| + \dots + R_{x_n}^* |x_n^*|) \leq \max_{1 \leq i \leq n} R_{x_i}^* \frac{1}{|S^*|} |x_1^* + \dots + x_n^*| \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \min_i R_{x_i}^* \leq RS^* \leq \max_i R_{x_i}^* \quad \checkmark$$

Релативна грешка разлике ✓

$$\text{Ако је } x_1, x_2 > 0, \quad D = x_1 - x_2, \quad D^* = x_1^* - x_2^*$$

$$RD^* = \sum_{i=1}^2 \left| x_i^* \frac{\partial D}{\partial x_i}(x_1^*, x_2^*) \right| \frac{1}{|D^*|} R_{x_i}^* = \frac{x_1^*}{|x_1^* - x_2^*|} R_{x_1}^* + \frac{x_2^*}{|x_1^* - x_2^*|} R_{x_2}^*$$

Ако су x_1^* и x_2^* јако блиске тода ће се јавити велика грешка у резулту!

Пример ✓

$$x_1 = \sqrt{3.01} = 1.7349352 \pm 0.5 \cdot 10^{-7}$$

$$x_2 = \sqrt{3} = 1.7320508 \pm 0.5 \cdot 10^{-7}$$

Ако рачунамо са 3 сигурне цифре: $1.73 - 1.73 = 0$, а

$$\text{са } 4: \quad 1.735 - 1.732 = 0.003$$

⇒ Губимо значајне цифре! Желимо да добијемо резултат са истим бројем значајних цифара као и аргументи (и/или мање истих аргументи). Тако можемо истаћи рационализацију.

$$\sqrt{3.01} - \sqrt{3} = \frac{3.01 - 3}{1.735 + 1.732} = \frac{0.01}{3.467} \approx 0.00288$$

⇒ Избегавати дељење!

Грешка производа

Нека је $P = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n$, $x_i = x_i^* \pm \Delta x_i^*$, $i=1, 2, \dots, n$.

$$\frac{\partial P}{\partial x_i} = \frac{\partial P}{\partial x_i} = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{i-1} \cdot x_{i+1} \cdot \dots \cdot x_n = \frac{P}{x_i}$$

$$\Delta P^* = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial P}{\partial x_i} (x_1^*, \dots, x_n^*) \right| \Delta x_i^* = \sum_{i=1}^n \left| \frac{P(x_1^*, \dots, x_n^*)}{x_i^*} \right| \Delta x_i^* = |P^*| \sum_{i=1}^n \frac{\Delta x_i^*}{|x_i^*|} =$$

$$= |P^*| \sum_{i=1}^n R x_i^*$$

$$R P^* = \sum_{i=1}^n \frac{|x_i^*| \frac{\partial P}{\partial x_i} (x_1^*, \dots, x_n^*)}{|P^*|} R x_i^* = \sum_{i=1}^n \frac{|x_i^*| \frac{P^*}{x_i^*}}{|P^*|} R x_i^* = \sum_{i=1}^n R x_i^*, \text{ или још } R P^* =$$

$$R P^* = \frac{\Delta P^*}{|P^*|} = \sum_{i=1}^n R x_i^*$$

Јако је линеарна оцена релативне грешке производа једнака суми релативних грешака множала највећи утицај на грешку ће имати онај множилац који има највећу релативну грешку, иј. онај број који има најмање сигурних цифара. Дакле, нема сврхе користити све сигурне цифре множала који имају већу шансу. Бадрнаваћемо једну или две сигурне цифре више од броја сигурних цифара тиница који има најмање сигурних цифара.

Пример: Израчунавши производ приближних бројева:

$$x_1^* = 3.452, x_2^* = 8.9, x_3^* = 9.0585, x_4^* = 0.0012$$

$$P^* = x_1^* \cdot x_2^* \cdot x_3^* \cdot x_4^* = 3.452 \cdot 8.9 \cdot 9.0585 \cdot 0.0012 = \text{резултат ће имати}$$

$$P^{**} \approx 3.45 \cdot 8.9 \cdot 9.06 \cdot 0.0012 = 0.33382476 \text{ највише 2 сигурне цифре}$$

$$P^{***} = 0.33$$

$$\Delta P^{***} = \Delta P^{**} + |P^{***} - P^{**}|$$

$$\Delta P^{**} = |P^{**}| \sum_{i=1}^n \frac{\Delta x_i^{**}}{|x_i^*|} = 0.33382476 \left(\frac{0.5 \cdot 10^{-3} + 0.002}{13.457} + \frac{0.5 \cdot 10^{-1}}{8.9} + \frac{0.5 \cdot 10^{-4} + 0.001}{9.06} + \frac{0.5 \cdot 10^{-4}}{0.0012} \right) = 0.016$$

$$P^{x \times x} = 0.016 + 0.0038 \approx 0.02$$

$$P = 0.33 \pm 0.02$$

Трешко контишка приближених бројева

Неко је $Q = \frac{x_1}{x_2}$, $x_i = x_i^* \pm \Delta x_i^*$, $i=1,2$ и $Q^* = \frac{x_1^*}{x_2^*}$, $x_2^* \neq 0$

$$\Delta Q^* = \sum_{i=1}^2 \left| \frac{\partial Q}{\partial x_i} (x_1^*, x_2^*) \right| \Delta x_i^* = \frac{1}{x_2^*} \Delta x_1^* + \frac{|x_1^*|}{x_2^{*2}} \Delta x_2^* = \frac{|x_2^*| \Delta x_1^* + |x_1^*| \Delta x_2^*}{x_2^{*2}}$$

$$RQ^* = \sum_{i=1}^2 \frac{|x_i^*| \frac{\partial Q}{\partial x_i} (x_1^*, x_2^*)}{|Q^*|} \quad R x_i^* = \frac{\Delta Q^*}{|Q^*|} = \frac{|x_2^*| \Delta x_1^* + |x_1^*| \Delta x_2^*}{|x_2^*|^2} \cdot \frac{|x_2^*|}{|x_1^*|} =$$

$$= \frac{\Delta x_1^*}{|x_1^*|} + \frac{\Delta x_2^*}{|x_2^*|} = R x_1^* + R x_2^*$$

Пример: одредиш и одржиш волумен, ако је $r = 3.7 \pm 0.5 \cdot 10^{-1}$, $h = 3.142 \pm 0.5 \cdot 10^{-3}$, $H = 8.2 \pm 0.03 = 8.2 \pm 0.3 \cdot 10^{-1}$ и одредиш границу апсолутне и релативне трешке.

$$P = 2r^2 h + 2r h H = 2r h (r + H)$$

(Имамо 2 сигурне цифре $\Rightarrow$ резултат не може имати више од 2 сигурне цифре.)

$$P^* = 2 \cdot 3.7 \cdot 3.142 (3.7 + 8.2) = 276.68452$$

$$P^{**} = 2 \cdot 3.7 \cdot 3.14 \cdot 11.9 = 276.5084$$

$$P^{***} = 280$$

$$\Delta P^{***} = \Delta P^{**} + |P^{***} - P^{**}|$$

$$R(r+H) = \frac{R(r+H)}{r+H}$$

$$\Delta P^{**} = |P^{**}| (R_r^{**} + R_h^{**} + R_{(r+H)}^{**}) =$$

$$= 276.5084 \left(\frac{0.5 \cdot 10^{-1}}{3.7} + \frac{0.5 \cdot 10^{-3} + 0.002}{3.14} + \frac{0.05 + 0.03}{3.7 + 8.2} \right) = 5.81563$$

$$\Delta P^{***} = 5.81563 + 3.49160 = 9.307 < 10$$

$$P = 280 \pm 10 = P^{***} \pm \Delta P^{***}$$

$$R P^{***} = \frac{\Delta P^{***}}{|P^{***}|} =$$

Замети: одредиш запремину

$$V = \pi r^2 h$$

$$V = 350 \pm 14$$

$$V^{**} = (3.7)^2 \cdot 3.14 \cdot 8.2 = 352.4902 \Rightarrow V^{***} = 350$$

$$\Delta V^{***} = \Delta V^{**} + |V^{***} - V^{**}| = |V^{**}| \left(2 \cdot \frac{0.05}{3.7} + \frac{0.5 \cdot 10^{-3} + 0.002}{3.14} + \frac{0.03}{8.2} \right) = 11.097 +$$

Обратићу предлог грешке

Зашто је грешка грешке ϕ је $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и ј:

$$Ay^* \leq M.$$

Задатак: Одредити везу са којом треба изабрати бројеве $x_1^*, \dots, x_n^*$ тако да грешка ϕ је не прелази дозвољену вредност, иј. $Ay^* \leq M$.

Задатак је једнозначно решив само за ϕ ју једног аргумента:

$$Ay^* \leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^*, \dots, x_n^*) \right| \cdot \Delta x_i^*$$

$$\text{За } n=1: Ay^* = |f'(x^*)| \Delta x^* \Leftrightarrow \Delta x^* = \frac{Ay^*}{|f'(x^*)|} \leq \frac{M}{|f'(x^*)|}, \quad f'(x^*) \neq 0.$$

За $n \geq 2$ користимо један од следећих принципа:

① Принцип једнаких утицаја

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^*, \dots, x_n^*) \right| \Delta x_1^* = \dots = \left| \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1^*, \dots, x_n^*) \right| \Delta x_n^*.$$

$$\Rightarrow Ay^* = n \cdot \left| \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1^*, \dots, x_n^*) \right| \Delta x_k^* \Rightarrow \Delta x_k^* = \frac{Ay^*}{n \cdot \left| \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1^*, \dots, x_n^*) \right|}, \quad k=1, 2, \dots, n.$$

② Принцип једнаких апсолутних грешака:

$$\Delta x_1^* = \dots = \Delta x_n^*$$

$$\Rightarrow Ay^* = \Delta x_k^* \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^*, \dots, x_n^*) \right| \Rightarrow \Delta x_k^* = \frac{Ay^*}{\sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^*, \dots, x_n^*) \right|}, \quad k=1, \dots, n.$$

③ Принцип једнаких релативних грешака:

$$R x_1^* = \dots = R x_n^*$$

$$Ay^* = \sum_{i=1}^n |x_i^*| \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^*, \dots, x_n^*) \right| \frac{\Delta x_i^*}{|x_i^*|} = R x_k^* \sum_{i=1}^n \left| x_i^* \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^*, \dots, x_n^*) \right|$$

$$\Rightarrow \Delta x_k^* = \frac{|x_k^*| Ay^*}{\sum_{i=1}^n \left| x_i^* \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^*, \dots, x_n^*) \right|}, \quad k=1, \dots, n.$$

Пример: Дато је ф-ја $f(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1 + x_2^2}{x_3}$ и приближне вредности $x_1^* = 3.2835$, $x_2^* = 0.93221$, $x_3^* = 1.13214$. Користећи принцип једнаких утицаја одредити са којом погрешком треба издати вредности x_1^*, x_2^*, x_3^* иако да је $\Delta f^* \leq \frac{1}{2} 10^{-3}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{1}{x_3}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{2x_2}{x_3}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_3} = -\frac{x_1 + x_2^2}{x_3^2}$$

$$\Delta x_1^* \leq \frac{\Delta y^*}{n \left| \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*, x_3^*) \right|} \leq \frac{\frac{1}{2} \cdot 10^{-3}}{3 \cdot \frac{1}{1.13214}} = 0.19 \cdot 10^{-3}$$

$$\Delta x_2^* = \frac{0.5 \cdot 10^{-3}}{3 \cdot 2 \cdot \frac{0.93221}{1.13214}} = 0.1 \cdot 10^{-3}$$

$$\Delta x_3^* = \frac{0.5 \cdot 10^{-3}}{3 \cdot \frac{3.2835 + 0.93221^2}{1.13214^2}} = 0.052 \cdot 10^{-3}$$

Интерполација

Неко је $y = f(x)$, $Df \subseteq \mathbb{R}$, ф-ја једне променљиве чији експлицитан израз није познат, већ су познате вредности f у y тачкама $x_0, x_1, \dots, x_n \in Df$, $x_i < x_{i+1}$, $i = \overline{0, n-1}$, $y_i = f(x_i)$, $i = \overline{0, n}$.

Како одредити вредности f је f у произвољној тачки $x \in Df$?

Потребно је одредити ф-ју $g(x)$ која ће бити блиска f и f у неком смислу, тј. апроксимирати ф-ју f .

Линеарна апроксимација: $g(x) = \sum_{i=0}^n c_i \varphi_i(x)$,

где су $\varphi_0(x), \dots, \varphi_n(x)$ ли. незав. ф-је, а c_i коэф. које треба одредити. Ако се они одређују из услова:

$$f(x_i) = g(x_i), \quad i = \overline{0, n},$$

ада се такав облик апроксимације зове интерполација.

Лагранжов интерполациони полином

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n \left(\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right) f(x_i) = \sum_{i=0}^n l_i(x) f(x_i)$$

l_i - базисни полиноми, бази полинома

$$\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n) \quad \text{-- под. п. } n+1$$

$$\omega_{n+1}'(x) = \sum_{k=0}^n \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n (x - x_j), \quad \omega_{n+1}'(x_i) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x_i - x_j)$$

Други облик Лагранжовог интерполационног полинома:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{\omega_{n+1}(x) f(x_i)}{(x - x_i) \omega_{n+1}'(x_i)}$$

Трешка: $R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot \omega_{n+1}(x)$,

ξ је некаква тачка припадајућа минималном интервалу који садржи $x, x_0, \dots, x_n$.

- Ако $x \in [x_0, x_n]$ - интерполација

- Ако $x \notin [x_0, x_n]$ - екстраполација (велика трешка)

Када $f \in C^{n+1}$ користимо оцену:

$$|R_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\omega_{n+1}(x)|, \quad M_{n+1} = \max_{x \in [x_0, x_n]} |f^{(n+1)}(x)|$$

Ако није дат аналитички израз функције f , трешку не можемо проценити.

① Конструисати Лагранжов интерполациони полином $L_2(x)$ за функцију $f(x) = \sqrt{x}$. Изврши интерполацију су $x_0 = 100, x_1 = 121, x_2 = 144$. Израчунај $L_2(115)$ и процени трешку.

x_i	100	121	144
y_i	10	11	12

$$L_2(x) = \sum_{i=0}^2 \left(\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^2 \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right) f(x_i)$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f(x_2)$$

$$L_2(x) = \frac{(x-121)(x-144)}{(100-121)(100-144)} \cdot 10 + \frac{(x-100)(x-144)}{(121-100)(121-144)} \cdot 11 + \frac{(x-100)(x-121)}{(144-100)(144-121)} \cdot 12$$

У облику $L_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$, са 5 децимала:

$$L_2(x) = 4.14568 + 0.0672x + 0.00009x^2 \rightarrow L_2(115) = 10.72023$$

$$L_2(115) = \frac{-6 \cdot (-29)}{21 \cdot (-44)} \cdot 10 + \frac{15 \cdot (-29)}{21 \cdot (-23)} \cdot 11 + \frac{15 \cdot (-6)}{44 \cdot 23} \cdot 12 = \frac{1740}{924} + \frac{4785}{483} - \frac{1080}{1012} = 10.72275551$$

Трећа: $|R_2(x)| \leq \frac{M_3(x)}{3!} |\omega_3(x)| = \frac{M_3(x)}{3!} (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad f''(x) = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}}, \quad f'''(x) = \frac{3}{8} x^{-5/2}$$

Максимум $f'''(x)$ на $[100, 144]$? $f''' = \frac{-15}{16} x^{-7/2} = -\frac{15}{16} \frac{1}{\sqrt{x^7}} \neq 0$,

али $f''' < 0$ на $[100, 144]$, тј. $f'''(x)$ монотонно опада на $[100, 144]$
 $\rightarrow \max_{x \in [100, 144]} |f'''(x)| = |f'''(100)| = \frac{3}{8} \sqrt{100^5} = \frac{3}{8} \cdot 10^5$

$$|R_2(115)| \leq \frac{3/8 \cdot 10^5}{6} |(115-100)(115-121)(115-144)| = 163.125 \cdot 10^{-5} = 0.16 \cdot 10^2$$

Упоредили резултат са ω из преједног: $|L_2(115) - \sqrt{115}| = 0.35 \cdot 10^2$

што је веће од границе за $|R_2(x)| \Rightarrow$ Коэффициенте је требало рачунаати са више децимала.

$\Rightarrow$ Избежавати роунање коеф. (закруживање)!

пм. Ако је f монотонна на $[a, b]$ онда се максимум модула $f - f$ допине у једном од крајевих сегмената.

Рокво пм. Нека је $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрекидана на $[a, b]$, диференцијабилна на (a, b) и $f(a) = f(b)$. Тада постоји тачка $c \in (a, b)$ т.д. $f'(c) = 0$.

Матрица метода; Стабилизација ројног решења

$$\begin{bmatrix} x-x_0 & x_0-x_1 & x_0-x_2 & \dots & x_0-x_n \\ x_1-x_0 & x_1-x_1 & x_1-x_2 & \dots & x_1-x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n-x_0 & x_n-x_1 & x_n-x_2 & \dots & x_n-x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_0 \\ D_1 \\ \vdots \\ D_n \end{bmatrix}$$

$$L_n(x) = \omega_{n+1}(x) \sum_{i=0}^n \frac{f(x_i)}{(x-x_i)\omega'_{n+1}(x_i)}$$

$\omega_{n+1} = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$ - елем. са стабилизације
 $(x-x_i)\omega'_{n+1}(x_i) = D_i$

$$\textcircled{1} \begin{bmatrix} 115-100 & 100-121 & 100-144 \\ 121-100 & 115-121 & 121-144 \\ 144-100 & 144-121 & 115-144 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & -21 & -44 \\ 21 & -6 & -23 \\ 44 & 23 & -29 \end{bmatrix}$$

$$\omega_3(115) = (115-100)(115-121)(115-144) = 15(-6)(-29) = 2610$$

$$D_0 = 13860, D_1 = 2898, D_2 = -29348$$

$$L_2(115) = 2610 \left(\frac{10}{13860} + \frac{11}{2898} - \frac{12}{29348} \right) =$$

$$= 10.7227555056$$

$$= 10.72276$$

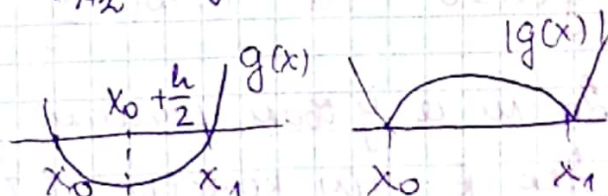
$$L_2(115) = 10.723 \pm 0.2 \cdot 10^{-2}$$

② Нека је $M_2 = \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|$. Покажите да се функција $f(x)$ на интервалу $[a,b]$ може апроксимирати са кораком $h \leq \sqrt{\frac{8\varepsilon}{M_2}}$ и-д. трећом линеарне интерполације не буде већа од ε .

$$|R_1(x)| \leq \frac{M_2}{2!} |(x-x_0)(x-x_1)|$$

$$x_0, x_1 = x_0 + h, \text{ } h\text{-корак}$$

$$|R_1(x)| \leq \frac{M_2}{2!} |g(x)| \leq \varepsilon, \quad \forall x \in [x_0, x_1], \quad g(x) = (x-x_0)(x-x_1) = (x-x_0)(x-x_0-h)$$



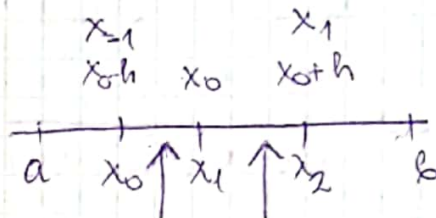
Одговарајуће $\frac{M_2}{2!} \max_{x \in [x_0, x_1]} |g(x)| \leq \varepsilon$. Како функција $g(x)$ достиже минимум у тачки $x = x_0 + \frac{h}{2}$ на $[x_0, x_1]$, то функција $|g(x)|$

у овој шацки досијине максимуми иј:

$$\frac{M_2}{2!} g(x_0 + \frac{h}{2}) \leq \epsilon \Leftrightarrow \frac{M_2}{2!} \frac{h^2}{4} \leq \epsilon \Rightarrow h \leq \sqrt{\frac{8\epsilon}{M_2}}$$

③ Нека је $M_3 = \max_{x \in [0,6]} |f'''(x)|$. Доказати да се апроксимацијом f је квадратним интерполационим полиномом не проби према велич ϵ ако се за корак узме $h \leq \sqrt[3]{\frac{9\sqrt{3}\epsilon}{M_3}}$.

$$|R_2(x)| \leq \frac{M_3}{3!} |(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)|$$



$$|R_2(x)| \leq \frac{M_3}{6} |(x-x_0+h)(x-x_0)(x-x_0-h)|$$

$$= \frac{M_3}{6} g(x) \leq \epsilon \quad \forall x \in [x_{-1}, x_1]$$

$$\Leftrightarrow \frac{M_3}{6} \max_{x \in [x_{-1}, x_1]} g(x) \leq \epsilon$$

$$g(x) = \begin{cases} (x-x_0+h)(x-x_0)(x-x_0-h), & x_0-h \leq x \leq x_0 \\ -(x-x_0+h)(x-x_0)(x-x_0-h), & x_0 \leq x \leq x_0+h \\ ((x-x_0)^2-h^2)(x-x_0), & x_0-h \leq x \leq x_0 \\ -((x-x_0)^2-h^2)(x-x_0), & x_0 \leq x \leq x_0+h \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (x-x_0)^3 - h^2(x-x_0), & x_0-h \leq x \leq x_0 \\ -(x-x_0)^3 + h^2(x-x_0), & x_0 \leq x \leq x_0+h \end{cases}$$

$$g'(x) = \begin{cases} 3(x-x_0)^2 - h^2, & x_0-h \leq x \leq x_0 \\ -3(x-x_0)^2 + h^2, & x_0 \leq x \leq x_0+h \end{cases}$$

$$g'(x) = 0 \quad \text{за} \quad (x-x_0)^2 = \frac{h^2}{3} \quad \text{и} \quad x = x_0 \pm \frac{h}{\sqrt{3}}, \quad \text{где:} \quad x_0 - \frac{h}{\sqrt{3}} \in (x_0-h, x_0) \quad \text{и} \quad x_0 + \frac{h}{\sqrt{3}} \in (x_0, x_0+h)$$

Да ли се у овим шацкама досијине максимуми или минимуми?

Ако је $g(x)$ конкава: биће максимум.

$$g''(x) = \begin{cases} 6(x-x_0), & x_0-h \leq x \leq x_0 \\ -6(x-x_0), & x_0 \leq x \leq x_0+h \end{cases} \Rightarrow g''(x) < 0 \quad \forall x \in (x_{-1}, x_0) \cup (x_0, x_1)$$

$\Rightarrow$ Поже $x_{1,2} = x_0 \pm \frac{h}{\sqrt{3}}$ су шацки максимума.

$$\text{смена: } z = \frac{x-x_0}{h}$$

$$\tilde{g}(z) = h^3 z(z^2-1)$$

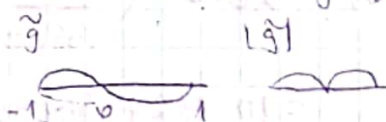
$$\tilde{g}'(z) = h^3 (3z^2-1)$$

$$\tilde{g}''(z) = 6zh^3$$

$$z_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{макс. за } \tilde{g}'(z)$$

$$z_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{мин. за } \tilde{g}'(z)$$

$$\text{оде макс. за } |\tilde{g}''(z)|$$



$$g(x_1) = (x-x_0) \left[\frac{(x-x_0)^2 - h^2}{3} \right] \Big|_{x=x_1} = -\frac{h\sqrt{3}}{3} \left(\frac{h^2}{3} - h^2 \right) = \frac{2\sqrt{3}h^3}{9}$$

$$g(x_2) = - (x-x_0) \left[\frac{(x-x_0)^2 - h^2}{3} \right] \Big|_{x=x_2} = \frac{h\sqrt{3}}{3} \left(\frac{h^2}{3} - h^2 \right) = -\frac{2\sqrt{3}h^3}{9}$$

$$\frac{143}{6} \cdot \frac{2h^3\sqrt{3}}{9} \leq \varepsilon \Leftrightarrow h^3 \leq \frac{9\sqrt{3}\varepsilon}{143} \Leftrightarrow h \leq \sqrt[3]{\frac{9\sqrt{3}\varepsilon}{143}}$$

④ На интервалу $[10, 13]$ шоблемирати функцію $y = \ln x$ ш.г. функція квадратичне інтерполяції не буде відрізнятися від $0.2 \cdot 10^{-3}$ і зменши приблизно взірзувати $\ln(10.8)$ і $\ln(14.1)$. "0.0002

Прейходимо задачі: $h \leq \sqrt[3]{\frac{9\sqrt{3}\varepsilon}{143}}$

$$M_3 = \max |f^{(3)}(x)|$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad f'''(x) = \frac{2}{x^3}, \quad f^{(4)}(x) = -\frac{6}{x^4}$$

$f^{(4)}(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f'''(x)$ є монотонно зменшується функція. (очевидно бачити)

$$\Rightarrow M_3 = f'''(10) = 2 \cdot 10^{-3}$$

$$h \leq \sqrt[3]{\frac{9\sqrt{3} \cdot 0.2 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-3}}} = 1.15949...$$

Ради лакшії розуму візьмемо $h=1$.

Шоблемирати функцію:

$\varepsilon = 0.2 \cdot 10^{-3}$ - розумно по бачити 4
децимале, тип 5

x_i	10	11	12	13
y_i	2.30259	2.39790	2.48491	2.56495

За квадратичну інтерполяцію нам треба 3 точки.

$$\begin{bmatrix} x-x_0 & x_0-x_1 & x_0-x_2 \\ x_1-x_0 & x-x_1 & x_1-x_2 \\ x_2-x_0 & x_2-x_1 & x-x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10.8-10 & 10-11 & 10-12 \\ 11-10 & 10.8-11 & 11-12 \\ 12-10 & 12-11 & 10.8-12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & -1 & -2 \\ 1 & -0.2 & -1 \\ 2 & 1 & -1.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_0 \\ D_1 \\ D_2 \end{bmatrix}$$

$$\omega = 0.8(-0.2)(-1.2) = 0.192$$

$$D_0 = 1.6, \quad D_1 = +0.2, \quad D_2 = -2.4$$

$$L(10.8) = \frac{0.192}{1.6} \cdot 2.30259 + \frac{0.192}{0.2} \cdot 2.39790 + \frac{0.192}{-2.4} \cdot 2.48491 = 2.3795$$

$$|\ln 10.8 - L_2(10.8)| \leq 0.5 \cdot 10^{-4} \text{ (залишилося крок)}$$

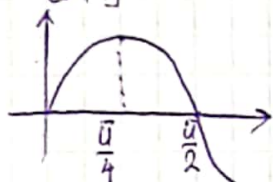
За гравити: $L_2(14.1) = 2.64494$.

⑤ Нека је $f(x) = \int_0^x \sin^2 t dt$ дефинисано у интервалу $[a, 1]$ са равномерно разврћењем зборовима и кораком h . Одредити $\alpha = \alpha(h, \epsilon)$ т.ј. трезка линеарне интерполације не буде већа од ϵ на интервалу $[a, 1]$. Како h треба узети да би се постигло тошћом 0.005 за $\alpha = 0.1$?

Из задатка ②: $|R_1(x)| \leq \frac{1}{2} \max_{[a, 1]} |f''(x)| \frac{h^2}{4} \leq \epsilon$

$$f(x) = \int_0^x \sin^2 t dt, \quad f'(x) = \sin^2 x, \quad f''(x) = 2 \sin x \cos x = \sin 2x$$

$$M_2 = \max_{[a, 1]} |\sin 2x| = ?$$



$$M_2 = \begin{cases} 1, & 0 \leq 2x \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \\ \sin 2x, & \frac{\pi}{4} \leq x < 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow |R_1(x)| \leq \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{h^2}{4}, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \\ \frac{\sin 2x}{2} \frac{h^2}{4}, & \frac{\pi}{4} \leq x < 1 \end{cases}$$

$$\text{За } \frac{\pi}{4} \leq x < 1: \quad \frac{\sin 2x}{2} \frac{h^2}{4} \leq \epsilon \Leftrightarrow \sin 2x \leq \frac{8\epsilon}{h^2} \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2} \arcsin \frac{8\epsilon}{h^2}$$

$$\text{За } \alpha = 0.1 \left(\alpha < \frac{\pi}{4} \right): \quad \frac{1}{2} \frac{h^2}{4} \leq \epsilon \Leftrightarrow h \leq \sqrt{8\epsilon} = 0.2$$

Нутњенов интерполациони полином са одређеним разликама

Уводимо одређене разлике:

- реда 0: $f[x_0] = f(x_0)$

- реда 1: $f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$

- реда 2: $f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$

- реда n : $f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_n] - f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}$

① $f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{\sum_{i=0}^n \frac{f(x_i)}{\omega'_{n+1}(x_i)}}{\omega'_{n+1}(x_i)}$

① $f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{\sum_{i=0}^n \frac{f(x_i)}{\omega'_{n+1}(x_i)}}{\omega'_{n+1}(x_i)}$

$$(2) (\alpha f + \beta g)[x_0, x_1, \dots, x_n] = \alpha f[x_0, x_1, \dots, x_n] + \beta g[x_0, x_1, \dots, x_n]$$

③ $f[x_0, x_1, \dots, x_n] = f[x_0, x_1, \dots, x_n] - (i_0, i_1, \dots, i_n)$ - δυνάμεις υπεργωνισμός α
αγών (1, 2, ..., n).

Подобие разлике рогунама и пољуш поближе

$$\begin{array}{l} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{array} \begin{array}{l} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n-1} \\ f_n \end{array} \begin{array}{l} > \frac{f[x_0, x_1]}{f[x_1, x_2]} > \frac{f[x_0, x_1, x_2]}{f[x_0, x_1, \dots, x_n]} \\ > \frac{f[x_{n-2}, x_{n-1}]}{f[x_{n-1}, x_n]} > \frac{f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]}{f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]} \end{array}$$

Интерполяционный полином с заданным разложением:

$$L_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x-x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x-x_0)(x-x_1) + \dots + f[x_0, x_1, \dots, x_n](x-x_0) \dots (x-x_{n-1})$$

(Представка уопитног парцијалне суме Тејлоровог реда)

Трешка:

Корисливо везу: $\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \approx f[x, x_0, \dots, x_n]$

$$* |R_n(x)| \leq |f[x_1, x_0, \dots, x_n]| |w_{n+1}(x)|$$

① Зн. шодливо задамь фт'у ф оредмий вредмий у шавки $x=1.16$

картине $f(x)$ имеем $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

	x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$
x_0	1.1275	<u>0.11971</u>			
x_1	1.1503	0.13957	<u>0.871053</u>		
x_2	1.1735	<u>0.15931</u>	0.850862	<u>-0.438935</u>	
x_3	1.1972	0.17902	0.831646	-0.409723	<u>0.419110</u>

Натасилин дрѣз деушка! (+1)

$$L_3(1.16) = 0.11971 + 0.871053(1.16 - 1.1275) + (-0.438935)(1.16 - 1.1275)(1.16 - 1.1503) + 0.419110(1.16 - 1.1275)(1.16 - 1.1503)(1.16 - 1.1735) = 0.14788$$

Бушнов интерполациони полином са константним разликама

Нека су зборови еквидистантни, тј. $h = x_i - x_{i-1}$ $i=1, n$, тј. имамо равномерно распоређене зворове: $x_i = x_0 + ih$.

уводимо константне разлике: (унапред)

- реда 1 : $\Delta f(x_i) = f(x_{i+1}) - f(x_i)$

- реда 2 : $\Delta^2 f(x_i) = \Delta(f(x_{i+1}) - f(x_i)) = \Delta f(x_{i+1}) - \Delta f(x_i) = f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)$

- реда n : $\Delta^n f(x_i) = \Delta^{n-1} f(x_{i+1}) - \Delta^{n-1} f(x_i) = \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} f_{i+n-j}$

Ознака: $f(x_i) = f_i$; Таблица

Особина: $f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] = \frac{\Delta^k f_i}{h^k k!}$

I Бушнов интерполациони полином (унапред)

Нека је $x \in (x_0, x_1)$ или $x < x_0$, тј. x_0 је најближи звор важи x .

уводимо променљиву z : $x = x_0 + zh \Leftrightarrow z = \frac{x - x_0}{h}$. ($x - x_i = h(z - i)$)

Полином са подељеним разликама се сада може написати у облику:

$$P_n^I(x) = P_n^I(x_0 + zh) = f(x_0) + \Delta f_0 z + \Delta^2 f_0 z(z-1) \frac{1}{2!} + \Delta^3 f_0 z(z-1)(z-2) \frac{1}{3!} + \dots + \Delta^n f_0 z(z-1) \dots (z-n+1) \frac{1}{n!}$$

II Бушнов интерполациони полином (уназад)

Нека је x_n звор најближи важи x и нека је $x = x_n + zh$, тј.

$$z = \frac{x - x_n}{h} \quad (x - x_i = h(z + n - i))$$

Полином са подељеним разликама се сада може написати у облику:

$$P_n^E(x) = P_n^E(x_n + zh) = f_n + \Delta f_{n-1} z + \Delta^2 f_{n-2} z(z+1) \frac{1}{2!} + \dots + \Delta^n f_0 z(z+1) \dots (z+n-1) \frac{1}{n!}$$

Фрекка:

$$|R_n(x)| \leq \frac{\max |f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!} |\omega_{n+1}(x)|$$

Користићемо везе: $\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} = f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{\Delta^{n+1} f(x)}{h^{n+1} (n+1)!}$ и добијемо

$$|R_n(x)| \leq \frac{|\Delta^{n+1} f|}{(n+1)! h^{n+1}} |\omega_{n+1}(x)| = \begin{cases} \frac{|\Delta^{n+1} f|}{(n+1)!} \frac{1}{2(2-1) \dots (2-n)} & \text{I Ђушн} \\ \frac{|\Delta^{n+1} f|}{(n+1)!} \frac{1}{2(2+1) \dots (2+n)} & \text{II Ђушн} \end{cases}$$

За $|\Delta^{n+1} f|$ се узима $\max_i |\Delta^{n+1} f_i| + \underbrace{2^{n+1} \epsilon}_{\text{Фрекка погрешка}}$

① функција је задата таблицом. Израчунајте $f(18)$, $f(12)$, $f(53)$ и оценимо Фрекку.

НАПОМЕНА ЗА БР. РЕЗУЛТАТА
ОСТАЈЕ ИСТИ!

x_i	$y_i = f_i$	$\Delta f_i \cdot 10^{-4}$	$\Delta^2 f_i \cdot 10^{-4}$	$\Delta^3 f_i \cdot 10^{-4}$	$\Delta^4 f_i \cdot 10^{-4}$
15	0.2588	0.0832			
20	0.3420	832	-0.0016		
25	0.4226	0.0806	-26	-0.0006	
30	0.5100	806	-32	-6	
35	0.5736	0.0724	-38	-0.0032	-0.0006
40	0.6428	736	-44	-0.0044	-6
45	0.7071	0.0652	-49	-0.0049	-5
50	0.7660	692	-54	-0.0054	-5
55	0.8192	0.0613	-57	-0.0057	-3

$$\epsilon = \frac{1}{2} \cdot 10^{-4} \quad 2\epsilon = 10^{-4} \quad 4\epsilon = 2 \cdot 10^{-4} \quad 8\epsilon = 4 \cdot 10^{-4} \quad 16\epsilon = 8 \cdot 10^{-4}$$

Средња вредност из средњу колоне $\Delta^4 f_i$ је наша од процене апсолутне грешке за њу колону, и она сврхе користићемо те вредности да их израчунамо.

$$[x=18] \in (15, 20) \Rightarrow \text{I Ђушнов полином: } z = \frac{x-x_0}{h} = \frac{18-15}{5} = 0.6$$

$$\begin{aligned} P_3^I(18) &= f_0 + \Delta f_0 z + \frac{1}{2!} \Delta^2 f_0 z(z-1) + \frac{1}{3!} \Delta^3 f_0 z(z-1)(z-2) = \\ &= 0.2588 + 0.0832 \cdot 0.6 + \frac{1}{2} (-0.0026) \cdot 0.6 (0.6-1) + \frac{1}{6} (-0.0006) \cdot 0.6 (0.6-1)(0.6-2) \\ &= 0.3090 \end{aligned}$$

$$|R_3(x)| \leq \frac{|\Delta^4 f|}{4!} |2(2-1)(2-2)(2-3)| = \frac{18 \cdot 10^{-4} + 2 \cdot 10^{-4}}{4!} |10 \cdot 6(0.6-1)(0.6-2)(0.6-3)|$$

(4!)
(найб. модуль)
из значений $\Delta^4 f$

$$= 0.34 \cdot 10^{-4}$$

доказу

$$\boxed{x=12} \Rightarrow \eta = \frac{x-x_0}{h} = \frac{12-15}{5} = -0.6$$

$$P_3^I(12) = 0.2588 - 0.6 \cdot 0.0832 - \frac{1}{2} (0.0026) 0.6 \cdot 1.6 + \frac{1}{6} (-0.0006) (-0.6) (-1.6) (-2.6) =$$

$$= 0.2049$$

$$|R_3(12)| \leq \frac{18 \cdot 10^{-4} + 2 \cdot 10^{-4}}{4!} |1 \cdot 0.6 (-1.6) (-2.6) (-3.6)| \leq 0.344 \cdot 10^{-3}$$

$\boxed{x=53} \in (50, 55) - II$ блок

$$\eta = \frac{x-x_n}{h} = -\frac{2}{5} = -0.4$$

$$P_3^{II}(53) = P_n + \Delta P_n \eta + \Delta^2 P_n \frac{\eta(\eta+1)}{2!} + \Delta^3 P_n \frac{\eta(\eta+1)(\eta+2)}{3!}$$

$$= 0.8192 + 0.0532 (-0.4) + \frac{1}{2} (-0.0057) (-0.4) \cdot 0.6 + \frac{1}{6} (-0.0003) (-0.4) \cdot 0.6 \cdot 1.6$$

$$= 0.7986$$

$$|R_3^{II}(53)| \leq \frac{12 \cdot 10^{-4} + 8 \cdot 10^{-4}}{4!} |1 \cdot 0.4 \cdot 0.6 \cdot 1.6 \cdot 2.6| = 0.416 \cdot 10^{-4}$$

Универсальная интерполация

Если же $y=f(x)$ задана таблицей y $n+1$ шагов.

Монотонная ф-я или инверз! (на сегменте)

Ако је таблица монотонна припустимо да је f монотонна.

Ако таблица није монотонна изађујемо оне шаге које кваре монотонност.

① Зорисавањем њених или, поштом одређених вредности за x

н.г. $f(x)=0.25$, $f(x)=0.8$, ако је f задана таблично.

x_i	f_i	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	
10	0.1763				
20	0.2640	0.0877			
30	0.5774	0.2134	0.0257		
40	0.8391	0.2617	0.0483	0.0226	
	$h = 10^{-4}$	$2h = 10^{-4}$	$4h = 2 \cdot 10^{-4}$	$8h = 4 \cdot 10^{-4}$	

$f(x)=0.25$ - за доказу

$$f(x) = 0.8 \Rightarrow x \in (30, 40) \quad x = x_n + 2h, \quad h = 10 \Rightarrow$$

$$x = 40 + 2 \cdot 10$$

$$P_3(40 + 2 \cdot 10) = 0.8391 + 0.2617 \underline{2} + 0.0483 \frac{1}{2!} 2(2+1) + 0.0226 \frac{1}{3!} 2(2+1)(2+2) = 0.8$$

$$2 = -\frac{1}{0.2617} \left(0.0391 + \frac{1}{2} 0.0483 \cdot 2(2+1) + \frac{1}{6} \cdot 0.0226 \cdot 2(2+1)(2+2) \right)$$

$$2 = \varphi(2)$$

Решаванье j -та итерационным путем

$$F(x) = 0 \Leftrightarrow x = \varphi(x)$$

- фиксируем x_0 и конструируем итерационный тез:

$$x_{n+1} = \varphi(x_n)$$

Ато $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ конвергира тогд $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_*$

Услов за конвергенцију: φ мора бити контракцијом.

Одаберимо $z_0 = 0$.

$$z_1 = \frac{-0.0391}{0.2617} = -0.14941 - \text{једна децимала више}$$

$$z_2 = \varphi(z_1) = -0.13430$$

$$z_3 = -0.13556$$

$$z_4 = -0.13575$$

$$z_5 = -0.13546$$

$$z_6 = -0.13546$$

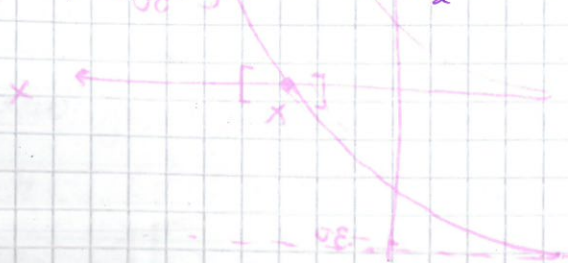
стоп! Заустављамо се када се
појави две децимале.

$$x = 40 + 2 \cdot 10 = 38.6454$$

$$f(x) = 0.25$$

$$2 = -\frac{1}{0.1877} \left(-0.0737 + \frac{0.0257}{2} 2(2+1) + \frac{0.0226}{6} 2(2+1)(2+2) \right)$$

$$z_0 = 0, z_1 = 0.39265, z_2 = 0.40128, z_3 = 0.40138 = z_4, x = 14.0139$$



② Одредити нулу табелице задате ф-је. Разунаити на 5 децимала.

x	2	2.5	3.5	4.0
y	0.9093	0.5985	-0.3508	-0.7568

$y=f(x)$ је монотонна $\Rightarrow$ има инверз $\Rightarrow$ нула се налази у (2.5, 3.5)
Табелица није еквидистантна $\Rightarrow$ користићемо Лагранжов инверполацион метод.

$$f(x)=0 \Rightarrow L_3(x)=0$$

$$x=f^{-1}(y)=? \text{ ил. } x=f^{-1}(0)$$

Инверпована табелица

y	-0.7568	-0.3508	0.5985	0.9093
x	4	3.5	2.5	2

Питањемо $L_3(0)=?$

$$\begin{bmatrix} y-y_0 & y-y_1 & y-y_2 & y-y_3 \\ y_1-y_0 & y_1-y_1 & y_1-y_2 & y_1-y_3 \\ y_2-y_0 & y_2-y_1 & y_2-y_2 & y_2-y_3 \\ y_3-y_0 & y_3-y_1 & y_3-y_2 & y_3-y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7568 & -0.406 & -1.3553 & -1.6661 \\ 0.406 & 0.3508 & -0.9493 & -1.2601 \\ 1.3553 & 0.9493 & -0.5985 & -0.3108 \\ 1.6661 & 1.2601 & 0.3108 & -0.9093 \end{bmatrix}$$

$$D_0 = -0.69381, D_1 = 0.17037, D_2 = 0.23932, D_3 = -0.59333, W = 0.14448$$

$$L_3(0) = \frac{0.14448}{-0.69381} \cdot 4 + \frac{0.14448}{0.17037} \cdot 3.5 + \frac{0.14448}{0.23932} \cdot 2.5 - \frac{0.14448}{0.59333} \cdot 2 = 3.15742$$

③ Инверзиони квадратичном Булиновом инверполацијом израчунајте са тачношћу 10^{-4} решење јне $e^x=30$.

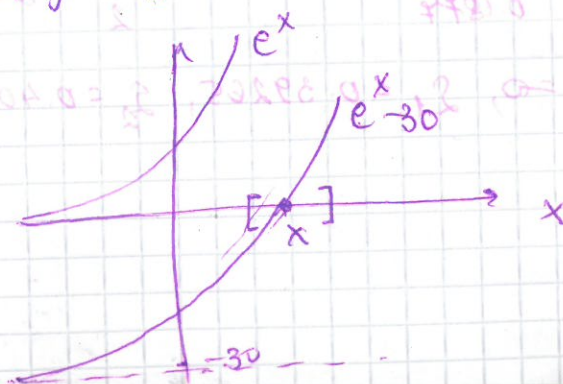
$$\varepsilon = 10^{-4}. \text{ Заправо питањемо нулу ф-је } f(x) = e^x - 30,$$

Најпре га локализујемо нулу:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -30 < 0$$

$$f'(x) = e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) \nearrow$$



Наставимо да узиммо интервал:

$$f(0) = 1 - 30 = -29 < 0 \quad f(5) = e^5 - 30 = 2$$

$$f(3) = e^3 - 30 < 0, \quad f(4) = e^4 - 30 > 0 \Rightarrow x \in (3, 4)$$

$$h_{opt} = \sqrt[3]{\frac{9\sqrt{3}e}{M_3}}, \quad M_3 = \max_{x \in [3, 4]} |f^{(3)}(x)| = e^4 = 54.59815 \text{ уј.}$$

$$h_{opt} = \sqrt[3]{\frac{9\sqrt{3}10^{-4}}{54.59815}} = 0.03056 \quad \boxed{h=0.03} \text{ - јавно мали корак, по чему смањимо интервал.}$$

$$f(3.5) = 0.11545 > 0$$

Разунамо $f(x)$ за $x=3.5, 3.47, 3.44, \dots$ да прве негативне вредности се добије у 3.38. Према том $P_2(x)$, формирамо таблицу:

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$
3.38	-0.62923		
→ 3.41	0.26524	0.89447	
		0.92172	0.02725
3.44	1.18696		

Радимо са 5 децимала јер је $\epsilon = 10^{-4}$,
 да је $\frac{1}{2} \cdot 10^{-4}$ радимо са 4, $\epsilon = 10^{-5}$
 $\boxed{2 \cdot 10^{-4} = \epsilon}$

$$P_2^F(x) = y_0 + \Delta y_0 z + \frac{\Delta^2 y_0}{2} z(z-1) = 0 \Rightarrow z = -\frac{1}{\Delta y_0} (y_0 + \frac{\Delta^2 y_0}{2} z(z-1)),$$

$$z = \frac{x - x_0}{h}, \quad x_0 = 3.38, \quad h = 0.03$$

$$\text{Бирамо } z_0 = 0$$

$$z_1 = 0.703467$$

$$z_2 = 0.709822$$

$$z_3 = 0.709742$$

$$z_4 = 0.709743$$

$$z_5 = 0.709743 \text{ стоп.}$$

$$x = x_0 + z h = 3.38 + 0.03 \cdot 0.70974 = 3.4013$$

$$|e^{3.4013} - x| = 0.0001026 = 1.026 \cdot 10^{-4} > \epsilon$$

Морамо још да пријемо итали x^* . Нека је леви крај интервала
 $x = 3.4 \quad (f(3.4) < 0).$

x	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$
3.4	-0.03590		
		0.91257	
3.43	0.87664		0.078
		0.94034	
3.46	1.81698		

$$L_2(x) = y_0 + \Delta y_0 s + \frac{1}{2} \Delta^2 y_0 s(s-1)$$

$$s = \frac{x - x_0}{\Delta y_0} \left(y_0 + \frac{1}{2} \Delta^2 y_0 s(s-1) \right) = P(s)$$

$$s_0 = 0$$

$$s_1 = 0.03934$$

$$s_2 = 0.04050$$

$$s_3 = 0$$

$$s_4 = s_5 = 0.04053 \quad \text{кој } x = x_0 + s h = 3.4 + 0.03 \cdot 0.04053 = 3.4012159$$

$$x = 3.4012$$

$$|u_{30} - x| = 2.618 \cdot 10^{-6} \quad \checkmark$$

Нумеричко диференцирање

Нека је дајна $y = f(x)$ задана таблично. Задатак је одредити $f'(x^*)$.

$$L_n \approx f(x) \Rightarrow L'_n(x) \approx f'(x)$$

За нумеричко диференцирање користиме но Њутнов универзални интерполациони полином са константним разликама.

$$\text{Изводи } P_n^I(x): P_n^I(x) = f_0 + \Delta f_0 s + \frac{\Delta^2 f_0}{2} s(s-1) + \dots + \frac{\Delta^n f_0}{n!} s(s-1) \dots (s-n+1)$$

$$(P_n^I(x))' = \frac{dP_n(x)}{dx} = \frac{dP_n(x)}{ds} \cdot \frac{ds}{dx}, \quad s = \frac{x-x_0}{h}, \quad \frac{ds}{dx} = \frac{1}{h}$$

$$(P_n^I(x))' = \frac{1}{h} \left[\Delta f_0 + \frac{\Delta^2 f_0}{2} (2s-1) + \frac{\Delta^3 f_0}{6} (3s^2-6s+2) + \frac{\Delta^4 f_0}{24} (4s^3-18s^2+22s-6) + \dots \right]$$

$$(P_n^I(x))'' = \frac{1}{h^2} \left[\Delta^2 f_0 + \Delta^3 f_0 (2s-1) + \frac{\Delta^4 f_0}{24} (12s^2-36s+22) + \dots \right]$$

2) одредити шапку екстремума таблицом задане ф-је коришћењем коначних разлика закључно са редом 3.

x_i	y_i	$\Delta y_i \cdot 10^6$	$\Delta^2 y_i \cdot 10^6$	$\Delta^3 y_i \cdot 10^6$
0.2	0.357771	25635		
0.3	<u>0.383406</u>	<u>-3933</u>	-0.029568	7581
0.4	0.379473	-25920	<u>-21987</u>	<u>4193</u>
0.5	0.353553	-43714	-17794	2667
0.6	0.309839	-58841	-15127	
0.7	0.250998			

$$f'(x) = 0.$$

У околини твора 0.3 први извод мења знак ($f' \rightarrow \downarrow$) одређујемо

тај твора за истражување, ил. $x_0 = 0.3$, $x = x_0 + \xi \cdot h = 0.3 + \xi \cdot 0.1$.

Ако добијемо $\xi < 0$, ил. $x < x_0$ то значи да смо радили екстремума-цију, ил. грешка је велика, па треба решити задатак (уз $\xi > 0$)

помоћ целе таблице ил. $x_0 = 0.2$

$$(P_3^I(x))' = \frac{1}{h} (y_0 + \Delta y_0 \xi + \frac{\Delta^2 y_0}{2} (\xi^2 - 2) + \frac{\Delta^3 y_0}{6} (\xi^3 - 3\xi^2 + 2\xi))' = 0$$

$$= \frac{1}{h} (\Delta y_0 + \Delta^2 y_0 (\xi - 1) + \frac{\Delta^3 y_0}{6} (3\xi^2 - 6\xi + 2)) = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{\Delta^2 y_0}{2} \xi = \Delta y_0 - \frac{\Delta^2 y_0}{2} + \frac{\Delta^3 y_0}{6} (3\xi^2 - 6\xi + 2)$$

$$\xi = \frac{1}{-\Delta^2 y_0} (\Delta y_0 - \frac{\Delta^2 y_0}{2} + \frac{\Delta^3 y_0}{6} (3\xi^2 - 6\xi + 2))$$

$$\xi = (0.0070605 + \frac{0.004193}{6} (3\xi^2 - 6\xi + 2)) \cdot \frac{1}{0.021987}$$

$$\xi_0 = 0$$

$$\xi_5 = 0.3319122$$

$$\xi_1 = 0.3846894$$

$$\xi_6 = 0.3318971$$

$$x = 0.333190$$

$$\xi_2 = 0.3254385$$

$$\xi_7 = 0.3318990$$

$$\xi_3 = 0.3327259$$

$$\xi_8 = 0.3318988$$

$$\xi_4 = 0.3317935$$

$$\xi_9 = 0.3318988$$

сход

II корен:

$$\frac{1}{h} (\Delta y_0 + \Delta^2 y_0 z - \frac{1}{2} \Delta^2 y_0 + \frac{\Delta^3 y_0}{2} z^2 - \Delta^3 y_0 z + \frac{1}{3} \Delta^3 y_0) = 0$$

$$\text{иј. } z = \frac{1}{\Delta^2 y_0 - \Delta^2 y_0} (y_0 - \frac{1}{2} \Delta^2 y_0 + \frac{1}{3} \Delta^3 y_0 + \frac{\Delta^3 y_0}{2} z^2)$$

$$z = \varphi(z)$$

$$z_0 = 0$$

$$z_1 = 0.3230774$$

$$z_2 = 0.3314561$$

$$z_3 = 0.3318742$$

$$z_4 = 0.3318975$$

$$z_5 = 0.3318987$$

$$z_6 = 0.3318988$$

$$z_7 = 0.3318988 \Rightarrow \lambda = 0.333190$$

Избор оптималног корака за нумеричко диференцирање

Користимо Тејлоров развој фје:

Нека је $f \in C^n[a, b]$, $x_0, x_1 \in [a, b]$, $x_1 = x_0 + h$

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(x_0) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(\xi_1), \quad \xi_1 \in (x_0, x_0 + h)$$

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - hf'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(x_0) + \dots + \frac{(-1)^n}{n!} f^{(n)}(\xi_2), \quad \xi_2 \in (x_0 - h, x_0)$$

③ Нека је $f \in C^2[a, b]$ и $x_0, x_1 \in [a, b]$. Докажи да важи:

$$f'(x_0) = \frac{\Delta f_0}{h} - \frac{f''(\xi)}{2} \cdot h, \quad \xi \in (x_0, x_1)$$

$$f'(x_0) \approx \frac{\Delta f_0}{h} - \text{ова апроксимација користи}$$

$$\frac{\Delta f_0}{h} = \frac{1}{h} (f(x_1) - f(x_0)) = \frac{1}{h} (f(x_0 + h) - f(x_0)) = \frac{1}{h} \text{ Тејлоров развој } f$$

$$= \frac{1}{h} (f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{1}{2} f''(\xi)h^2 - f(x_0)) = f'(x_0) + \frac{h}{2} f''(\xi), \quad \xi \in (x_0, x_1)$$

$$\Rightarrow f'(x_0) = \frac{\Delta f_0}{h} - \frac{h}{2} f''(\xi)$$

Затим, прена апроксимација $f'(x_0) \approx \frac{\Delta f_0}{h}$ је

$$|R_M| = |f'(x_0) - \frac{\Delta f_0}{h}| = |f''(\xi) \frac{h}{2}| \leq \frac{M_2}{2} h$$

④ Нека је f класа $C^3[a, b]$. Докажи да важи:

$$f'(\bar{x}) = \frac{\Delta f_0}{h} - \frac{f'''(\xi) h^2}{24}, \text{ за } x_0, x_0+h \in [a, b], \xi \in (x_0, x_0+h).$$

$\bar{x}$, уводимо симетричне тачке

$$\frac{\Delta f_0}{h} = \frac{1}{h} (f(x_1) - f(x_0)), \quad x_1 = \bar{x} + \frac{h}{2}, \quad x_0 = \bar{x} - \frac{h}{2}$$

$$\begin{array}{c} | \\ x_0 \quad \bar{x} \quad x_1 \end{array}$$

$$= \frac{1}{h} (f(\bar{x} + \frac{h}{2}) - f(\bar{x} - \frac{h}{2})) = h \text{ Телоров развој } =$$

$$= \frac{1}{h} (f(\bar{x}) + \frac{h}{2} f'(\bar{x}) + \frac{h^2}{4} \frac{1}{2} f''(\bar{x}) + \frac{h^3}{8} \frac{1}{6} f'''(\xi_1) -$$

$$- f(\bar{x}) + \frac{h}{2} f'(\bar{x}) - \frac{h^2}{4} \frac{1}{2} f''(\bar{x}) + \frac{h^3}{8} \frac{1}{6} f'''(\xi_2)), \quad \xi_1 \in (\bar{x}, \bar{x} + \frac{h}{2})$$

$$\xi_2 \in (\bar{x} - \frac{h}{2}, \bar{x})$$

$$= f'(\bar{x}) + \frac{1}{48} h^2 (f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2))$$

Теорема теорема о континуитету:

Нека је $f(x)$ непрекидна ф-ја на интервалу $[x_1, x_2]$ и a, b узимљиве бројеве. Тада постоји $\xi \in [x_1, x_2]$ у-г.

$$\frac{a}{a+b} f(x_1) + \frac{b}{a+b} f(x_2) = f(\xi), \quad \xi \in [x_1, x_2]$$



$$\text{Затим, } a f'''(\xi_1) + b f'''(\xi_2) = (a+b) f'''(\xi), \quad \xi \in (\xi_1, \xi_2)$$

$$\text{За } a=b=1 \text{ добијамо } f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2) = 2 f'''(\xi) \text{ у-г.}$$

$$\frac{\Delta f_0}{h} = f'(\bar{x}) + \frac{h^2}{24} f'''(\xi), \quad \xi \in [x_0, x_1]$$

$$\text{Затим, прена апроксимација } f'(x_0 + \frac{h}{2}) \approx \frac{\Delta f_0}{h} \text{ је } |R_M| \leq \frac{M_3 h^2}{24}.$$

5) Пусть ϵ задано и требуется найти $f(x) \in C^n[a, b]$ такую функцию ϵ и такая же M_n максимум модуля n -го извода на $[a, b]$. Найти оптимальные коэф. для численного дифференцирования по формулам:

$$a) f'(x_0) \approx \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h}$$

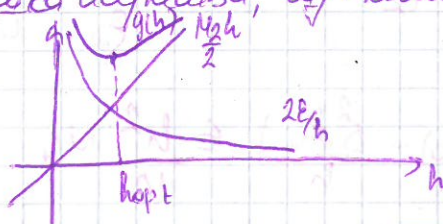
$$b) f'(x_0 + \frac{h}{2}) \approx \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h} \quad \text{или} \quad f'(x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_{-1}))}{2h}$$

$$b) f''(x_0) = \frac{f(x_0-h) - 2f(x_0) + f(x_0+h))}{h^2}$$

$$a) |R| \leq |R_n + R_k| \leq \frac{M_2 h}{2} + \frac{2\epsilon}{h} = g(h)$$

Оптимальный коэф. знаем, го же функция $g(h)$ минимизуемо по h .

$$g(h) = \frac{M_2 h}{2} + \frac{2\epsilon}{h}$$



$$g'(h) = \frac{M_2}{2} - \frac{2\epsilon}{h^2} = 0 \quad \text{за} \quad \frac{2\epsilon}{h^2} = \frac{M_2}{2} \quad \text{и} \quad h = \sqrt{\frac{4\epsilon}{M_2}} = 2\sqrt{\frac{\epsilon}{M_2}}$$

$$R_{opt} \leq \frac{M_2}{2} \cdot 2\sqrt{\frac{\epsilon}{M_2}} + 2\epsilon \cdot \frac{\sqrt{M_2}}{2\sqrt{\epsilon}} = 2\sqrt{M_2\epsilon} \sim \sqrt{\epsilon} \quad \text{— минимальная погрешность на заданном уровне точности}$$

$$b) |R| \leq |R_n| + |R_k| = \frac{M_3 h^2}{24} + \frac{2\epsilon}{h} = g(h)$$

$$g'(h) = \frac{M_3 h}{12} - \frac{2\epsilon}{h^2} = 0 \quad \text{за} \quad \frac{2\epsilon}{h^2} = \frac{M_3 h}{12} \quad \text{и} \quad h = \sqrt[3]{\frac{24\epsilon}{M_3}}$$

$$h_{opt} = \sqrt[3]{\frac{24\epsilon}{M_3}}$$



$$R_{opt} \leq \frac{M_3}{24} \cdot \sqrt[3]{\frac{96\epsilon^2}{M_3^2}} + 2\epsilon \cdot \frac{\sqrt[3]{M_3}}{2\sqrt[3]{3\epsilon}} \approx \epsilon^{2/3}$$

$$b) f''(x_0) \approx \frac{f(x_0-h) - 2f(x_0) + f(x_0+h)}{h^2} = \frac{\Delta^2 f_0}{h^2}$$

$$|R| \leq |R_L| + |R_R| \leq |R_L| + \frac{4\varepsilon}{h^2} \quad |R_L| = ?$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta^2 f_0}{h^2} &= \frac{1}{h^2} (f(x_0) - hf'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(x_0) - \frac{h^3}{6} f'''(x_0) + \frac{h^4}{24} f^{(4)}(\xi_1) - \\ &\quad - f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(x_0) + \frac{h^3}{6} f'''(x_0) + \frac{h^4}{24} f^{(4)}(\xi_2)) \\ &= \frac{1}{h^2} (h^2 f''(x_0) + \frac{h^4}{24} (f^{(4)}(\xi_1) + f^{(4)}(\xi_2))) \\ &= f''(x_0) + \frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi) \quad \xi_1 \in (x_0-h, x_0) \\ &\quad \xi_2 \in (x_0, x_0+h), \quad \xi \in (x_0-h, x_0+h) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |R_L| = |f''(x_0) - \frac{\Delta^2 f_0}{h^2}| \leq \frac{h^2}{12} M_4$$

$$|R| \leq \frac{h^2}{12} M_4 + \frac{4\varepsilon}{h^2} = g(h)$$

$$g'(h) = \frac{h M_4}{6} - \frac{8\varepsilon}{h^3} = 0 \Leftrightarrow M_4 h^4 = 48\varepsilon \Leftrightarrow h = \sqrt[4]{\frac{48\varepsilon}{M_4}}$$

$$h_{opt} = 2 \sqrt[4]{\frac{3\varepsilon}{M_4}}$$

$$R_{opt} = \frac{M_4}{12} 2 \sqrt[4]{\frac{3\varepsilon}{M_4}} + \frac{4\varepsilon}{2 \sqrt[4]{\frac{3\varepsilon}{M_4}}} \sim \varepsilon^{1/2}$$



6. Немој је максималну модулу кривој извода f је $f(x) \in C^k[a, b]$ једнак M_k . Са којим кораком треба интерполирати f ју на $[a, b]$ ш.г. укупна грешка буде минимална ако се користи f на:

$$a) f'(x_n) = y'_n \approx \frac{1}{h} (\Delta y_{n-1} + \frac{1}{2} \Delta^2 y_{n-2})$$

$$b) f'''(x_n + \frac{h}{2}) \approx \frac{\Delta^3 y_{n-1}}{h^3}$$

$$\begin{aligned}
 a) \frac{1}{h} (\Delta y_{n+1} + \frac{1}{2} \Delta^2 y_{n-2}) &= \frac{1}{h} (y_n - y_{n-1} + \frac{1}{2} (y_n - 2y_{n+1} + y_{n-2})) = \frac{1}{h} (\frac{3}{2} y_n - 2y_{n+1} + \frac{1}{2} y_{n-2}) \\
 &= \frac{1}{h} (\frac{3}{2} f(x_n) - 2f(x_{n+1}) + \frac{1}{2} f(x_{n-2})) = \\
 &= \frac{1}{h} (\frac{3}{2} f(x_n) - 2f(x_{n-h}) + \frac{1}{2} f(x_{n-2h})) = \\
 &= \frac{1}{h} (\frac{3}{2} f(x_n) + \\
 &\quad - 2f(x_n) + 2hf'(x_n) - \frac{2h^2}{2} f''(x_n) + \frac{2h^3}{6} f'''(\xi_1) + \\
 &\quad + \frac{1}{2} f(x_n) - \frac{12h}{2} f'(x_n) + \frac{14h^2}{2} f''(x_n) + \frac{8h^3}{6} f'''(\xi_2)) \\
 &= \frac{1}{h} (hf'(x_n) + \frac{1}{3} h^3 f'''(\xi_1) - \frac{2}{3} h^3 f'''(\xi_2)) \\
 &= f'(x_n) + \frac{1}{3} h^2 f'''(\xi_1) - \frac{2}{3} h^2 f'''(\xi_2), \quad \xi_1 \in (x_{n-h}, x_n) \\
 &\quad \xi_2 \in (x_{n-2h}, x_n)
 \end{aligned}$$

Here we are using the
Taylor series

$$\begin{aligned}
 |R_n| &= |f'(x_n) - \frac{1}{h} (\Delta y_{n+1} + \frac{1}{2} \Delta^2 y_{n-2})| = \frac{1}{3} h^2 |f'''(\xi_1) - 2f'''(\xi_2)| \leq \\
 &\leq \frac{1}{3} h^2 (|f'''(\xi_1)| + 2|f'''(\xi_2)|) \\
 &\leq \frac{1}{3} h \cdot 3M_3 = h^2 M_3
 \end{aligned}$$

$$|R| \leq |R_n| + |R_1| \leq h^2 M_3 + \frac{4\varepsilon}{h} = g(h)$$

$$g'(h) = 2hM_3 - \frac{4\varepsilon}{h^2} = 0 \Leftrightarrow 2h^3 M_3 = 4\varepsilon \Leftrightarrow h = \sqrt[3]{\frac{2\varepsilon}{M_3}}$$

$$\text{Opt } h \leq \sqrt[3]{\frac{4\varepsilon^2}{M_3^2}} M_3 + 4\varepsilon \sqrt[3]{\frac{M_3}{2\varepsilon}} \sim \varepsilon^{2/3}$$

$$(g(x) \sim f(x) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = \text{const})$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\Delta^3 y_{n-1}}{h^3} &= \frac{1}{h^3} (\Delta^2 y_n - \Delta^2 y_{n-1}) = \frac{1}{h^3} (\Delta y_{n+1} - \Delta y_n - \Delta y_n + \Delta y_{n-1}) = \\
 &= \frac{1}{h^3} (y_{n+2} - 3y_{n+1} + 3y_n - y_{n-1}) = \text{three-point backward y over } \bar{x} = x_n + \frac{h}{2} \\
 &= \frac{1}{h^3} (f(\bar{x} + \frac{3h}{2}) - 3f(\bar{x} + \frac{h}{2}) + 3f(\bar{x} - \frac{h}{2}) - f(\bar{x} - \frac{3h}{2})) = \\
 &= \frac{1}{h^3} (f(\bar{x}) + \frac{3h}{2} f'(\bar{x}) + \frac{9h^2}{4} f''(\bar{x}) + \frac{27h^3}{8} \frac{1}{6} f'''(\bar{x}) + \frac{81h^4}{16} \frac{1}{24} f^{(4)}(\xi_1) \\
 &\quad - 3f(\bar{x}) - 3 \cdot \frac{h}{2} f'(\bar{x}) - 3 \cdot \frac{h^2}{4} f''(\bar{x}) - 3 \cdot \frac{h^3}{8} \frac{1}{6} f'''(\bar{x}) - 3 \cdot \frac{h^4}{16} \frac{1}{24} f^{(4)}(\xi_2) \\
 &\quad + 3f(\bar{x}) - 3 \cdot \frac{h}{2} f'(\bar{x}) + 3 \cdot \frac{h^2}{4} f''(\bar{x}) - 3 \cdot \frac{h^3}{8} \frac{1}{6} f'''(\bar{x}) + 3 \cdot \frac{h^4}{16} \frac{1}{24} f^{(4)}(\xi_3) \\
 &\quad - f(\bar{x}) + \frac{3}{2} h f'(\bar{x}) - \frac{9h^2}{4} f''(\bar{x}) + \frac{27h^3}{8} \frac{1}{6} f'''(\bar{x}) - \frac{81h^4}{16} \frac{1}{24} f^{(4)}(\xi_4)) =
 \end{aligned}$$

$$\frac{\Delta^3 y}{h^3} = \frac{1}{h^3} \left(h^3 f'''(\bar{x}) + \frac{8h^4}{24 \cdot 16} f^{IV}(\xi_1) - \frac{3h^4}{24 \cdot 16} f^{IV}(\xi_2) + \frac{3h^4}{24 \cdot 16} f^{IV}(\xi_3) - \frac{8h^4}{24 \cdot 16} f^{IV}(\xi_4) \right)$$

$$= f'''(\bar{x}) + \frac{3h}{24 \cdot 16} (27f^{IV}(\xi_1) - f^{IV}(\xi_2) + f^{IV}(\xi_3) - 27f^{IV}(\xi_4))$$

$$|R_n| = |f'''(\bar{x}) - \frac{\Delta^3 y}{h^3}| = \left| \frac{3h}{24 \cdot 16} (27f^{IV}(\xi_1) - f^{IV}(\xi_2) + f^{IV}(\xi_3) - 27f^{IV}(\xi_4)) \right| \leq \frac{3h}{24 \cdot 16} \cdot 56 M_4$$

$$\Rightarrow |R_n| \leq \frac{7}{16} M_4 \cdot h, \quad |R_R| = \frac{8E}{h^3}$$

$$|R| = |R_n| + |R_R| \leq \frac{7}{16} M_4 h + \frac{8E}{h^3}$$

$$g(h) = \frac{7}{16} M_4 h + \frac{8E}{h^3}$$

$$g'(h) = \frac{7M_4}{16} - \frac{24E}{h^4} = 0 \Leftrightarrow 7M_4 h^4 = 16 \cdot 24 E \Leftrightarrow h_{opt} = \sqrt[4]{\frac{384E}{7M_4}}$$

$$R_{opt} \leq \frac{7M_4}{16} \sqrt[4]{\frac{384E}{7M_4}} + \frac{8E}{\sqrt[4]{\frac{384E}{7M_4}}} \sim E^{1/4}$$

Численка интеграција

Зато је универзал облик: $I(f) = \int_a^b p(x) f(x) dx$, при чему $f \in C[a, b]$,

$p(x) > 0, x \in [a, b]$ и $p(x) \in C(a, b)$.

Функцију апроксимирамо интерполационим полиномом:

$$f(x) = L_n(x) + R_n(x).$$

$$I(f) = \int_a^b p(x) (L_n(x) + R_n(x)) dx = \int_a^b p(x) L_n(x) dx + \int_a^b p(x) R_n(x) dx.$$

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n l_i(x) f(x_i), \quad l_i(x) = \begin{cases} 0, & i \neq k \\ 1, & i = k \end{cases}$$

$$I(f) = \int_a^b p(x) \sum_{i=0}^n l_i(x) f(x_i) dx + \int_a^b p(x) R_n(x) dx$$

$$= \sum_{i=0}^n f(x_i) \underbrace{\int_a^b p(x) l_i(x) dx}_{C_i} + \int_a^b p(x) R_n(x) dx$$

$$= \sum_{i=0}^n C_i f(x_i) + R_n(f) = S_n(f) + R_n(f)$$

C_i — коеф. квадратурне формуле

(не зависи од f , већ само од тежишта ρ)

I Њуџн-Коџесове квадратурне формуле (творови задаци)

Зобијају се замишљеном полиномом $P_n(x)$ Лагранжовим интерполационим полиномом чије творови деле интервал интеракције на једнаке делове.

① Извесити квадратурну формулу облика:

$$\textcircled{1} \int_0^1 f(x) dx = C_0 f\left(\frac{1}{4}\right) + C_1 f\left(\frac{1}{2}\right) + C_2 f\left(\frac{3}{4}\right) + R(f) = \sum_{i=0}^2 C_i f(x_i) + R(f)$$

Сетимо се: $\forall f(x) \in C^n[a, b] \quad f! \quad \ln(x)$.

$\Rightarrow$ Ако је $f(x)$ полином степена $\leq n$ онда мора бити $f(x) = \ln(x) \Rightarrow R_n(x) = 0$

$\Rightarrow$ Имамо 3 твора $\Rightarrow$ формула ① мора бити тачна за полиноме степена 0, 1, 2, иј. за њих $R_n(x) = 0$.

$$0: f(x) = 1 \quad \int_0^1 1 dx = 1 = C_0 + C_1 + C_2$$

$$1: f(x) = x \quad \int_0^1 x dx = \frac{1}{2} = \frac{1}{4} C_0 + \frac{1}{2} C_1 + \frac{3}{4} C_2$$

$$2: f(x) = x^2 \quad \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} = \frac{1}{16} C_0 + \frac{1}{4} C_1 + \frac{9}{16} C_2$$

Зобијамо систем:

$$C_0 + C_1 + C_2 = 1$$

$$C_0 + 2C_1 + 3C_2 = 2$$

$$C_0 + 4C_1 + 9C_2 = \frac{16}{3}$$

$$\begin{array}{l} 2-1: \\ 3-1: \end{array} \quad \begin{array}{l} C_1 + 2C_2 = 1 \\ 2C_1 + 6C_2 = \frac{10}{3} \end{array} \quad \begin{array}{l} (-2) \\ \leftarrow \end{array}$$

$$2C_2 = \frac{4}{3} \Rightarrow C_2 = \frac{2}{3}$$

$$C_1 = -\frac{1}{3}$$

$$C_0 = \frac{2}{3}$$

Грешка: $\frac{1}{3!}$

$$|R_2(f)| = \left| \int_0^1 P_2(x) R_2(x) dx \right| \leq \int_0^1 \frac{M_3}{3!} \left| (x - \frac{1}{4})(x - \frac{1}{2})(x - \frac{3}{4}) \right| dx$$

Приметимо:

$$\int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}$$

Из формуле: $\int_0^1 x^3 dx = \frac{2}{3} \cdot 64 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} + \frac{2}{3} \cdot \frac{27}{64} = \frac{1}{4}$

Да ли је тагностич вета?

Лема 1 Ако је.

- ① f је парна у односу на средину одсегка $[a, b]$
- ② зборови су симетрично распоређени у односу на средину одсегка $[a, b]$,
онда су коефицијенти који одговарају симетрично распоређеним зборовима једнаки.
($c_0 = c_2$ у задатку)

Лема 2 Нека важе услови леме 1 и нека је f је $f(x)$ нејарна у односу на средину одсегка $[a, b]$ ($f(x_i) = -f(x_{i+1})$)
Тада је $I(f) = S_n(f)$ за произвољно n . ($R_n(f) = 0 \forall n$)

$$(S_n(f) = \int_a^b \underbrace{\rho(x)}_{\text{парна}} \underbrace{f(x)}_{\text{нејарна}} dx = 0)$$

Лема 3 Нека важе услови леме 1 и нека је број збора нејаран.
Тада је квадратурна формула реда тагностич вета за један:

$$I(f) = S_n(f) + \int_a^b \rho(x) R_{n+1}(x) dx, \quad n\text{-јарно}$$

n -јарно $\Rightarrow (x - \frac{a+b}{2})^{n+1}$ - нејарна f је у односу на $\frac{a+b}{2}$

$R_n(f) = 0$ за $P_n(x)$ - према конструкцији кв. ф.

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + c(x - \frac{a+b}{2})^{n+1}$$

$$R(c(x - \frac{a+b}{2})^{n+1}) = 0 \quad (n\text{-јарно Лема 2}) \Rightarrow R(f) = \int_a^b \rho(x) R_{n+1}(x) dx$$

Враїимо се на задаток:

$$R(f) = \int_0^1 p(x) R_3(x) dx, \quad p(x) = 1.$$

Пошмо деламо 4 ебора, средина дуплирамо.

$$\begin{aligned} |R(f)| &\leq \int_0^1 \left| \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \left(x - \frac{1}{4}\right) \left(x - \frac{3}{4}\right) \right| dx \cdot \frac{\mu_4}{4!} = \\ &= \left[\int_0^{\frac{1}{4}} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \left(x - \frac{1}{4}\right) \left(x - \frac{3}{4}\right) dx + \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \left(x - \frac{1}{4}\right) \left(\frac{3}{4} - x\right) dx + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\frac{3}{4}}^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \left(x - \frac{1}{4}\right) \left(x - \frac{3}{4}\right) dx \right] \frac{\mu_4}{4!} = \dots = \frac{1}{2^7} \frac{\mu_4}{4!} \end{aligned}$$

② Израчунајте вредност интеграла $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx$ помоћу квадратурне формуле из задатка 1.

$$I(f) = \int_0^1 f(x) dx = \frac{2}{3} f\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{3} f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{2}{3} f\left(\frac{3}{4}\right) + R(f).$$

Интервал $\left[\frac{\bar{u}}{4}, \frac{\bar{u}}{2}\right]$ преба уресликавши линеарном сменом на $[0, 1]$.

$$x \in \left[\frac{\bar{u}}{4}, \frac{\bar{u}}{2}\right], \quad t \in [0, 1]$$

$$x = at + b$$

$$\frac{\bar{u}}{4} = a \cdot 0 + b \quad \left. \begin{array}{l} a = b = \frac{\bar{u}}{4} \\ \text{смена:} \end{array} \right\}$$

$$\frac{\bar{u}}{2} = a \cdot 1 + b \quad \left. \begin{array}{l} x = \frac{\bar{u}}{4}(t+1) \\ dx = \frac{\bar{u}}{4} dt \end{array} \right\}$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^1 \frac{\sin \frac{\bar{u}}{4}(t+1)}{\frac{\bar{u}}{4}(t+1)} \frac{\bar{u}}{4} dt = \int_0^1 \frac{\sin \frac{\bar{u}}{4}(t+1)}{t+1} dt = \int_0^1 F(t) dt$$

$$I(f) = \frac{2}{3} F\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{3} F\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{2}{3} F\left(\frac{3}{4}\right) = 0.61178$$

③ Одредити Ђуџин-Коџесове формуле зајвореног тита (крајеви интервала интеграције су зворови) облика:

$$\int_0^1 \rho(x) f(x) dx = \sum_{i=0}^n c_i f(x_i) + R(f)$$

за $n=1$ и $n=2$ ако је $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ и проценити грешку.

$n=1$, $x_0=0$, $x_1=1$ (параи број зворова и симетрично су распоређени, али $\rho(x)$ није парна у односу на $1/2$ па не важи лема 1)

формула мора бити ваљна за све полиноме степена 0, 1.

$$0: \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2x^{1/2} \Big|_0^1 = 2 = C_0 + C_1$$

$$1: \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} x dx = \int_0^1 \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} x^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{2}{3} = C_0 \cdot 0 + C_1 \Rightarrow C_1 = \frac{2}{3}, C_0 = \frac{4}{3}$$

Пошто услови леме нису задовољени треба проверити да ли је формула ваљна и за полиноме већег степена (до овог, када добијемо $R(f) \neq 0$).

$$\int_0^1 \rho(x) x^2 dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} x^2 dx = \int_0^1 x^{3/2} dx = \frac{2}{5} x^{5/2} \Big|_0^1 = \frac{2}{5}$$

$$\tilde{I}(x^2) = \frac{4}{3} x^2 \Big|_0^1 + \frac{2}{3} x^2 \Big|_1^1 = \frac{2}{3} \Rightarrow R(x^2) = \frac{2}{5} - \frac{2}{3} \neq 0$$

$$|R(f)| \leq \int_0^1 \frac{M_2}{2!} \frac{|x(x-1)|}{\sqrt{x}} dx \quad (R(f) = \int_0^1 \rho(x) R_1(x) dx)$$

$$|R(f)| \leq \frac{M_2}{2!} \int_0^1 \sqrt{x} (1-x) dx = \frac{M_2}{2} \frac{2}{3} x^{3/2} \Big|_0^1 - \frac{M_2}{2} \frac{2}{5} x^{5/2} \Big|_0^1 = \frac{M_2}{2} \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{5} \right) = \frac{2M_2}{15}$$

$n=2$ $x_0=0$, $x_2=1$, x_1 бирамо сами, најбоље да зворови буду

симетрични $\Rightarrow x_1 = 1/2$

$\rho(x)$ - није парна $\Rightarrow$ не важи лема 1.

$$I(f) \approx S_2(f)$$

$$0: \quad 2 = C_0 + C_1 + C_2$$

$$1: \quad 2/3 = C_0 \cdot 0 + C_1 \cdot \frac{1}{2} + C_2 \Rightarrow \frac{4}{3} = C_1 + 2C_2$$

$$2: \quad 2/5 = C_0 \cdot 0 + C_1 \cdot \frac{1}{4} + C_2 \cdot 1 \Rightarrow \frac{8}{5} = C_1 + 4C_2$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{4}{3} = C_1 + 2C_2 \\ \frac{8}{5} = C_1 + 4C_2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2C_2 = \frac{8}{5} - \frac{4}{3} = \frac{24-20}{15} = \frac{4}{15} \\ \Rightarrow C_2 = \frac{2}{15} \end{array}$$

$$C_1 = \frac{4}{3} - 2 \cdot \frac{2}{15} = \frac{20-4}{15} = \frac{16}{15}$$

$$C_0 = 2 - \frac{16}{15} - \frac{2}{15} = \frac{12}{15}$$

④. Одредити коефицијенте A, B и C и проценити грешку квадратурне формуле:

$$\int_0^{2h} x^2 f(x) dx = (2h)^3 (A f_0 + B \Delta f_0 + C \Delta^2 f_0) + R(f), \quad f_k = f(k \cdot h), \quad k=0,1,2,$$

тако да буде тачно за полиноме највећег могућег степена.

Користећи дату формулу приближно одредити: $I = \int_0^1 x^2 (1+x)^{3/2} dx$ и проценити грешку.

Полном $f(x) = x^2$ није парна у односу на средину одсека $\Rightarrow$ не важи лема!

$$x_0 = 0, \quad x_1 = h, \quad x_2 = 2h$$

$$\Delta f_0 = f_1 - f_0, \quad \Delta^2 f_0 = f_2 - 2f_1 + f_0.$$

$$\int_0^{2h} x^2 f(x) dx = (2h)^3 \{ (A-B+C) f_0 + (B-2C) f_1 + C f_2 \} + R(f)$$

Зато имамо $\Rightarrow$ формула мора бити тачна за полиноме степена 0, 1, 2.

$$0: \quad \int_0^{2h} x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^{2h} = \frac{8h^3}{3} = (2h)^3 \{ (A-B+C) + (B-2C) + C \}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} = A$$

$$1: \quad \int_0^{2h} x^2 \cdot x dx = \frac{x^4}{4} \Big|_0^{2h} = \frac{(2h)^4}{4} = (2h)^3 \{ (A-B+C) \cdot 0 + (B-2C)h + C \cdot 2h \}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = B$$

$$2: \quad \int_0^{2h} x^2 \cdot x^2 dx = \frac{x^5}{5} \Big|_0^{2h} = \frac{(2h)^5}{5} = (2h)^3 \{ (A-B+C) \cdot 0 + (B-2C)h^2 + C(2h)^2 \}$$

$$\frac{4}{5} = B + 2C \Rightarrow 2C = \frac{4}{5} - \frac{1}{2} \Rightarrow C = \frac{3}{20}$$

$$\int_0^{2h} x^2 f(x) dx \approx (2h)^3 \left\{ -\frac{1}{60} f_0 + \frac{1}{5} f_1 + \frac{3}{20} f_2 \right\} = (2h)^3 \left\{ -\frac{1}{60} f_0 + \frac{1}{5} f(h) + \frac{3}{20} f(2h) \right\}$$

Da nije istina u za $f(x) = x^3$?

$$\int_0^{2h} x^2 x^3 dx = \frac{(2h)^6}{6}$$

$$S_2(x) = (2h)^3 \left\{ \frac{1}{5} h^3 + \frac{3}{20} (2h)^3 \right\} = (2h)^6 \left\{ \frac{1}{5 \cdot 2^3} + \frac{3}{20} \right\} \neq \frac{(2h)^6}{6}$$

$\Rightarrow$ nije istina za $f(x) = x^3$.

$$|R_2(f)| = \left| \int_0^{2h} x^2 R_2(x) dx \right| \leq \frac{M_3}{3!} \int_0^{2h} x^2 |x(x-h)(x-2h)| dx =$$

$$= \frac{M_3}{3!} \left\{ \int_0^h x^3 (x-h)(x-2h) dx + \int_h^{2h} x^3 (x-h)(2h-x) dx \right\} =$$

$$= \frac{M_3}{3!} \left\{ \int_0^h \left(x^6 - 3hx^5 + 2h^2x^4 \right) dx - \int_h^{2h} \left(x^6 - 3hx^5 + 2h^2x^4 \right) dx \right\}$$

$$= \frac{M_3}{3!} \left\{ \frac{h^6}{6} - \frac{3h^6}{5} + \frac{1}{2} h^6 - \left(\frac{(2h)^6}{6} - \frac{3(2h)^6}{5} + \frac{1}{2} (2h)^6 \right) \right\}$$

$$= \frac{M_3 h^6}{6} \left\{ \frac{1}{3} - \frac{6}{5} + \frac{2}{3} - \left(\frac{64}{3} - \frac{192}{5} + \frac{64}{3} \right) \right\} = \frac{M_3 h^6}{6} \frac{5 - 18 - 5 \cdot 2^5 + 9 \cdot 2^5 - 15 \cdot 2^3}{15}$$

$$= \frac{M_3 h^6}{6} \frac{-13 + 4 \cdot 2^5 - 15 \cdot 2^3}{15} = \frac{M_3 h^6}{6} \frac{-13 + 128 - 120}{15} = \frac{M_3 h^6}{6} \frac{10}{15} = \frac{M_3 h^6}{9}$$

7

$$M_3 = \max_{[0,1]} \left| \frac{-3}{8(x+1)^{3/2}} \right| = \frac{3}{8}$$

$$\int_0^1 \underbrace{x^2}_{f(x)} (1+x)^{3/2} dx = \left(2 \cdot \frac{1}{2}\right)^3 \left\{ -\frac{1}{60} (1+0)^{3/2} + \frac{1}{5} (1+\frac{1}{2})^{3/2} + \frac{3}{20} (1+1)^{3/2} \right\} = 0.7750$$

$$R_2(f) = \frac{M_3 h^6}{9} = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2^6} = 0.651 \cdot 10^{-3}$$

Стандартне Нунт - Кошиеве формуле

$$\rho(x) = 1$$

$$\begin{aligned} I(f) &= \int_a^b f(x) dx = \int_a^b L_n(x) dx + \int_a^b R_n(x) dx \\ &= \int_a^b \sum_{i=0}^n L_i(x) f(x_i) dx + \int_a^b R_n(x) dx \\ &= \sum_{i=0}^n f(x_i) \underbrace{\int_a^b L_i(x) dx}_{C_i} + \int_a^b R_n(x) dx \end{aligned}$$

$$L_i(x_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

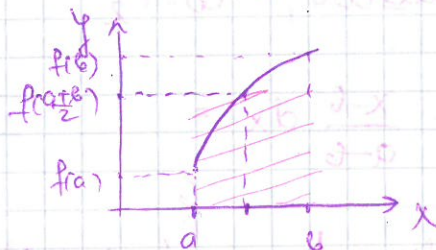
$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Основне формуле

I формула правоугаоника: $n=0$, $x_0 = \frac{a+b}{2}$ (ајворевој тачка)

$$C_0 = \int_a^b dx = b-a$$

$$S_0(f) = (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$



Нунт су др. зворова, симетрично су распоређени, $\rho(x) = 1$ је парна функција $\Rightarrow$ нунт је ред тачности:

$$\begin{aligned} |R_0(f)| &= \left| \int_a^b R_1(x) dx \right| \leq \frac{M_2}{2} \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 dx = \frac{M_2}{2} \frac{1}{3} \left((b - \frac{a+b}{2})^3 - (a - \frac{a+b}{2})^3 \right) \\ &= \frac{M_2}{6} \left(\left(\frac{b-a}{2}\right)^3 - \left(-\frac{b-a}{2}\right)^3 \right) = \frac{M_2}{6} 2 \left(\frac{b-a}{2}\right)^3 = \frac{(b-a)^3}{24} M_2 \end{aligned}$$

II формула трапеза: $n=1$, $x_0=a$, $x_1=b$

Зворови су симетрично распоређени, $\rho(x)$ парна $\Rightarrow C_0 = C_1$

$$\begin{aligned} C_0 = C_1 &= \int_a^b \frac{x-b}{a-b} dx = \frac{1}{a-b} \left(\frac{1}{2} x^2 \Big|_a^b - b x \Big|_a^b \right) = \frac{1}{a-b} \left(\frac{1}{2} b^2 - \frac{1}{2} a^2 - b^2 + ab \right) \\ &= \frac{1}{-2(a-b)} (b^2 - 2ab + a^2) = \frac{b-a}{2} \end{aligned}$$

$$S_1(f) = \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b))$$

$$\begin{aligned}
 |R_1(x)| &\leq \frac{M_2}{2!} \int_a^b |(x-a)(x-b)| dx = \frac{M_2}{2} \int_a^b (x-a)(b-x) dx \\
 &= \frac{M_2}{2} \int_a^b (x^2 + (a+b)x - ab) dx = \frac{M_2}{2} \left(\frac{x^3}{3} \Big|_a^b + (a+b) \frac{x^2}{2} \Big|_a^b - ab \cdot x \Big|_a^b \right) = \\
 &= \frac{M_2}{2} \left(-\frac{1}{3}b^3 + \frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{2}b^2(a+b) - \frac{1}{2}a^2(a+b) - ab(b-a) \right) = \\
 &= \frac{M_2}{2} \frac{1}{6} (-2b^3 + 2a^3 + 3ab^2 + 3b^3 - 3a^3 - 3a^2b - 6ab^2 + 6a^2b) = \\
 &= \frac{M_2}{2 \cdot 6} (b^3 - a^3 - 3ab^2 + 3a^2b) = \frac{M_2}{12} (b-a)^3
 \end{aligned}$$

III формула Симпсона: $n=2$, $x_0=a$, $x_1=\frac{a+b}{2}$, $x_2=b$.

Пейдараа дэој пвороба, симетрична у расшоретости, $f(x)=1$ парна
 могоз $\Rightarrow$ тогной ибвишени, $C_0=C_2$

$$\begin{aligned}
 C_0 = C_2 &= \int_a^b \frac{x - \frac{a+b}{2}}{a - \frac{a+b}{2}} \cdot \frac{x-b}{a-b} dx = \\
 &= \int_a^b \frac{2x-a-b}{a-b} \cdot \frac{x-b}{a-b} dx = \frac{1}{(a-b)^2} \int_a^b (x-b+x-b)(x-b) dx = \left. \begin{matrix} x-b=z \\ dx=dz \end{matrix} \right\} = \\
 &= \frac{1}{(a-b)^2} \int_{a-b}^0 (2z+b-a)z dz = \frac{1}{(b-a)^2} \int_{a-b}^0 2z^2 + (b-a)z dz = \\
 &= \frac{1}{(b-a)^2} \left(\frac{2}{3} z^3 \Big|_{a-b}^0 + \frac{(b-a)}{2} z^2 \Big|_{a-b}^0 \right) = \frac{1}{(b-a)^2} \left(\frac{2}{3} (b-a)^3 + \frac{1}{2} (b-a)(a-b)^2 \right) = \\
 &= (b-a) \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{6} (b-a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \int_a^b \frac{x - \frac{a+b}{2}}{\frac{a+b}{2} - a} \cdot \frac{x-b}{\frac{a+b}{2} - b} dx = 4 \int_a^b \frac{x-a}{b-a} \cdot \frac{x-b}{a-b} dx = \\
 &= \frac{4}{(b-a)^2} \int_a^b (x-a)(b-x) dx \stackrel{\text{рачунам}}{=} \frac{4}{(b-a)^2} \frac{(b-a)^3}{6} = \frac{4}{6} (b-a)
 \end{aligned}$$

$$S_2(f) = \frac{b-a}{6} (f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b))$$

$$|R_2(f)| \leq \frac{M_4}{4!} \int_a^b |(x-a)(x-\frac{a+b}{2})(x-b)| dx = \frac{M_4}{90} \left(\frac{b-a}{2}\right)^5$$

Друге формуле

Познате и веома често коришћене дужине интервала на коме се примењује основна формула.

① Џорџијева формула правоугаоника: n подинтервала дужине h и са сваким применимо формулу.

$$S_0^h(f) \approx \int_a^b f(x) dx \approx h \cdot \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)$$

$$|R_0^h(f)| \leq \frac{(b-a)h^2 M_2}{24}$$

② Џорџијева формула трапеза:

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx S_1^h(f) = \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (f(x_i) + f(x_{i+1})) = \frac{h}{2} (f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n))$$

$$|R_1^h(f)| \leq \frac{(b-a)h^3 M_3}{12}$$

③ Џорџијева формула Симпсона (формула квадрата мора бити паран број подинтервала, барем)

$$S_2^h(f) = \frac{h}{3} \sum_{i=0}^{n-1} \left(f(x_i) + 4f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) + f(x_{i+1}) \right) \text{ или једнако:}$$

$n=2m$:

$$S_2^h(f) = \frac{h}{3} \sum_{i=0}^{m-1} (f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2})) =$$

$$= \frac{h}{3} \left(f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{m-1} f(x_{2i}) + 4 \sum_{i=1}^m f(x_{2i-1}) + f(x_{2m}) \right)$$

$$|R_2^h(f)| \leq \frac{(b-a)h^4 M_4}{180}$$

Рунгеова оцена грешке метода

* Кориснило када функција није задата аналитички. Препоручује се да се одговарајући извод не мења много на интервалу (a, b) .

$$I(f) = S^h(f) + Mh^k \approx S^{2h}(f) + M(2h)^k, \quad \begin{array}{l} k=2 \text{ правоугаоник,} \\ \text{трапец} \\ k=4 \text{ Симпсон.} \end{array}$$

$$\Rightarrow M \approx \frac{S^{2h} - S^h}{h^k(1-2^k)}$$

$$\Rightarrow R_h(f) \leq \frac{|S^h - S^{2h}|}{2^k - 1} \quad \text{Рунгеова оцена грешке}$$

Када корисимо Рунгеову оцену морало узгледати и грешку разлика.

$$|R| \leq |R_h| + |R_k|$$

$$S(f) = \sum_{i=0}^n c_i f(x_i), \quad \text{Ако су } f(x_i) \text{ сразумаше са грешком } \delta$$

$$|R_k| \leq \sum_{i=0}^n |c_i| \delta = \delta \sum_{i=0}^n c_i$$

$$\begin{aligned} \text{Ако } f(x) &\equiv 1: \int_a^b 1 dx = \sum_{i=0}^n c_i \\ b-a &= \sum_{i=0}^n c_i \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |R_k| \leq \delta(b-a)$$

Ако уредба да важи: $|R| \leq |R_h| + |R_k| \leq \epsilon$ бирамо

$$|R_k| \leq \frac{\epsilon}{2} \Rightarrow \delta(b-a) \leq \frac{\epsilon}{2} \Rightarrow \delta \leq \frac{\epsilon}{2(b-a)} \quad \begin{array}{l} \text{на основу} \\ \text{овог бирамо} \\ \text{ка колико} \\ \text{жељимо мали} \end{array}$$

$$\Rightarrow |R_h| \leq \epsilon - |R_k| \quad \text{— добијемо када ово буде задовољено.}$$

① Определим значения интеграла $\int_0^{\bar{u}} \frac{\bar{u}}{1+\cos x} dx$ так, чтобы ошибка была от $\varepsilon = 10^{-3}$. Используем Рунге-Кутсу формулу. и
а) Симпсона формулу трапеции упрощенную формулу.

$$|R| \leq |R_R| + |R_M| \leq \varepsilon = 10^{-3}$$

$$|R_R| \leq \frac{\varepsilon}{2} \Leftrightarrow \delta(\bar{u}-0) \leq \frac{1}{2} \cdot 10^{-3} \Rightarrow \delta \leq \frac{1}{2\bar{u}} \cdot 10^{-3}$$

можно взять $\delta = \frac{1}{2} 10^{-4}$

$$\Rightarrow |R_M| \leq \varepsilon - R_R = 10^{-3} - \frac{1}{2} 10^{-4} \bar{u} = 0.843 \cdot 10^{-3}$$

а) $h = \bar{u}/2$

x_i	f_0, f_m	f_{2i}	f_{2i+1}
0	1.0000		
$\bar{u}/2$			0.6366
$\bar{u}$	0.4669		
Σ	1.4669		0.6366

$$S_{\bar{u}} = \frac{\bar{u}}{2} (1.4669 + 4 \cdot 0.6366) = 2.1014$$

$h = \bar{u}/4$

x_i	f_0, f_m	f_{2i}	f_{2i+1}
0	1.0000		
$\bar{u}/4$			0.6700
$\bar{u}/2$		0.6366	
$3\bar{u}/4$			0.6064
$\bar{u}$	0.4669		
Σ	1.4669	0.6366	1.2764

$$S_{\bar{u}} = \frac{\bar{u}}{4} (1.4669 + 2 \cdot 0.6366 + 4 \cdot 1.2764) = 2.0540$$

$$|R_M| \leq \frac{|S_{\bar{u}} - S_{\bar{u}/4}|}{15} = 0.32 \cdot 10^{-2} > 0.843 \cdot 10^{-3}$$

$h = \bar{u}/8$

x_i	f_0, f_m	f_{2i}	f_{2i+1}
0	1.0000		
$\bar{u}/8$			0.7595
$\bar{u}/4$		0.6700	
$3\bar{u}/8$			0.6407
$\bar{u}/2$		0.6366	
$5\bar{u}/8$			0.6326
$3\bar{u}/4$		0.6064	
$7\bar{u}/8$			0.5779
$\bar{u}$	0.4669		
Σ	1.4669	1.913	2.5807

$$S_{\bar{u}} = \frac{\bar{u}}{8} (1.4669 + 2 \cdot 1.913 + 4 \cdot 2.5807) = 2.0441$$

$$|R_M| \leq \frac{|S_{\bar{u}} - S_{\bar{u}/8}|}{15} = 0.66 \cdot 10^{-3} < 0.843 \cdot 10^{-3}$$

$$I \approx 2.0441$$

② Одредити корак h којим се понаду Симпсонове квадратурне формуле може изразити вредности интеграла $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ тако да ukupna грешка буде мања од $\epsilon = 10^{-4}$.

$$|R| \leq |R_L| + |R_R| \leq \epsilon$$

$$|R_R| \leq \delta(b-a) \leq \frac{1}{2} \cdot 10^{-4} \Rightarrow \delta \leq \frac{1}{2} \cdot 10^{-4} \Rightarrow \text{довољно је узети са 4 децимала}$$

$$|R_L| \leq \frac{(b-a)}{180} n_4 h^4 \leq 10^{-4} - \frac{1}{2} 10^{-4} = \frac{1}{2} 10^{-4}$$

$$\Rightarrow h^4 \leq \frac{90}{n_4} 10^{-4}$$

$$f(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f' = \frac{-1}{(1+x)^2}, \quad f'' = \frac{2}{(1+x)^3}, \quad f''' = \frac{-6}{(1+x)^4}, \quad f^{(4)} = \frac{24}{(1+x)^5}$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{-120}{(1+x)^6} < 0 \text{ на } [0,1] \Rightarrow f^{(4)} \searrow \Rightarrow M_4 = \max_{[0,1]} |f^{(4)}(x)| = f^{(4)}(0) = 24$$

$$\Rightarrow h \leq \sqrt[4]{\frac{90 \cdot 10^{-4}}{24}} = 0.139, \text{ бирамо } h = 0.1$$

x_i	f_0, f_m	f_{2i+1}	f_{2i}
0	1.0000		
0.1		0.9091	
0.2			0.8333
0.3		0.7692	
0.4			0.7143
0.5		0.6667	
0.6			0.6250
0.7		0.5882	
0.8			0.5556
0.9		0.5263	
1	0.5		
Σ	1.5	3.4595	2.7282

$$S_{0.1} = \frac{0.1}{3} (1.5 + 4 \cdot 3.4595 + 2 \cdot 2.7282) = 0.6931.$$

Други задатак δ : $S^{u/2} = 2.1521$

$$h = \frac{\bar{u}}{4} \quad S_1^h(f) = \frac{1}{2} \frac{\bar{u}}{4} (1.4669 + 2(0.6366 + 1.2764)) = 2.0797$$

$$h = \frac{\bar{u}}{8} \quad S_1^{\frac{h}{2}}(f) = \frac{1}{2} \frac{\bar{u}}{8} (1.4669 + 2(0.6366 + 1.2764 + 2.5807)) = 2.0527$$

$$h = \frac{\bar{u}}{16} \quad S_1^{\frac{h}{4}}(f) = 2.0458, \quad h = \frac{\bar{u}}{32} \quad S_1^{\frac{h}{8}}(f) = 2.0438$$

① Изразуемъи вьредности интеграла: $I = \int_2^{\infty} \frac{dx}{1+x^3}$ сь шьащюу 10⁻². Кориситиь Руніеву оцень фреуке.

$$I = \int_2^M \frac{dx}{1+x^3} + \int_M^{\infty} \frac{dx}{1+x^3}$$

Вьрезуемо M шьг $\left| \int_M^{\infty} \frac{dx}{1+x^3} \right| \leq \frac{\epsilon}{2}$.

Како же $\int_M^{\infty} \frac{dx}{1+x^3} \leq \int_M^{\infty} \frac{dx}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2M^2} \right) = \frac{1}{2M^2}$

M дурамо шьг. $\frac{1}{2M^2} \leq \frac{\epsilon}{2} \Rightarrow M^2 \geq \frac{1}{\epsilon} \Rightarrow M \geq \sqrt{10^2}$

Вьрамо M=10.

Рьуемо $I_1 = \int_2^{10} \frac{dx}{1+x^3}$ сь шьащюу $\epsilon_1 = \frac{1}{2} \cdot 10^{-2} = 0.45 \cdot 10^{-2} + 0.05 \cdot 10^{-2}$

$|R_p| \leq \delta(b-a) \leq 0.05 \cdot 10^{-2} \Rightarrow \delta \leq \frac{0.05}{8} \cdot 10^{-2} = 0.625 \cdot 10^{-4}$

$\Rightarrow$ говоламо рьдншю иь 4 геуемаре

$|R_M| \leq \epsilon_1 - |R_p| = 0.5 \cdot 10^{-2} - 0.5 \cdot 10^{-4} \cdot 8 = 0.46 \cdot 10^{-2}$

h=2

x_i	f_0, f_m	f_{2i+1}	f_{2i}
2	0.1111		
4		0.0154	
6			0.0046
8		0.0019	
10	0.0010		
Σ	0.1121	0.0173	0.0046

$S_2^h(f) = \frac{2}{3} (0.1121 + 4 \cdot 0.0173 + 2 \cdot 0.0046) = 0.1270$

$\frac{h}{2} = 1$

x_i	f_{2i+1}
3	0.0375
5	0.0079
7	0.0029
9	0.0014
Σ	0.0479

$S_2^{\frac{h}{2}}(f) = \frac{1}{3} (0.1121 + 4 \cdot 0.0479 + 2 \cdot (0.0173 + 0.0046)) = 0.1158$

$|R_M| = \left| \frac{S_2^{\frac{h}{2}}(f) - S_2^h(f)}{15} \right| = 0.75 \cdot 10^{-3} < 0.46 \cdot 10^{-2}$

$I_1 \approx 0.1158$

$I = 0.12 \pm (0.75 \cdot 10^{-3} + 4 \cdot 10^{-4} + 0.5 \cdot 10^{-2}) = 0.12 \pm 0.6125 \cdot 10^{-2}$

Квадратурне формуле Гаусовог типа

$$I = \int_a^b \rho(x) f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n c_i f(x_i) \quad (1)$$

Одређујемо коеф. c_i и торови x_i из формуле буде тачна за полиноме степена вишег од $n-1$. У формули (1) имамо $2n$ неизнаних, па је максимални систем за који оне важе $2n-1$.

Систем једначина не бива линеаран по x_i , па зато желимо да решавамо систем, за одређивање торова користимо следећу лему:

Лема. За сваку непрекидну функцију $\rho(x) > 0$ на (a, b) торови квадратурне формуле (1) су нуле полинома степена n ортогоналног у односу на ту функцију $\rho(x)$.

Ортогонални полиноми су одређени следећим рекурентним формулама:

$$Q_0(x) \equiv 1$$

$$Q_{k+1}(x) = \left(x - \frac{(xQ_k, Q_k)}{(Q_k, Q_k)} \right) Q_k(x) - \underbrace{\frac{(Q_k, Q_k)}{(Q_{k-1}, Q_{k-1})}}_{=0 \text{ за } k=0} Q_{k-1}(x), \quad k=1, 2, \dots$$

$$(Q_i, Q_j) = \int_a^b \rho(x) Q_i(x) Q_j(x) dx = 0 \quad \text{за } i \neq j.$$

$Q_n(x)$ има реалне једносложне нуле које припадају (a, b) .
Када одредимо торове, онда коеф. одређујемо из система n једначина.

Грешка:

$$|R_{2n-1}| \leq \frac{1}{(2n)!} M_{2n} \int_a^b \rho(x) |\omega_n(x)|^2 dx$$

① Известна квадратичная формула Лагерра:

$$\int_0^{\infty} e^{-x} f(x) dx = c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + R(f)$$

Вторую формулу с помощью полинома $Q_2(x)$ ортогонального y относительно на весовую функцию $f(x) = e^{-x}$ и $\rho(x) \in C(0, \infty)$

$$Q_0 = 1$$

$$Q_1(x) = \left(x - \frac{(x, Q_0, Q_0)}{(Q_0, Q_0)} \right) Q_0(x)$$

$$(Q_0, Q_0) = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{-e^x} + e^0 = 1$$

$$(x, Q_0, Q_0) = \int_0^{\infty} x e^{-x} dx = \begin{cases} u = x & dv = e^{-x} dx \\ du = dx & v = -e^{-x} \end{cases} = -x e^{-x} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 0 + 1 = 1$$

$$Q_1(x) = (x - 1)$$

Аналогично $Q_2(x)$:

$$Q_2(x) = \left(x - \frac{(x, Q_1, Q_1)}{(Q_1, Q_1)} \right) Q_1(x) - \frac{(Q_1, Q_0)}{(Q_0, Q_0)} Q_0(x)$$

$$(Q_1, Q_1) = \int_0^{\infty} e^{-x} (x-1)^2 dx = \int_0^{\infty} x^2 e^{-x} dx - 2 \int_0^{\infty} x e^{-x} dx + \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 2 - 2 + 1 = 1$$

$$(x, Q_1, Q_1) = \int_0^{\infty} e^{-x} x(x-1)^2 dx = \int_0^{\infty} x^3 e^{-x} dx - 2 \int_0^{\infty} x^2 e^{-x} dx + \int_0^{\infty} x e^{-x} dx = 6 - 4 + 1 = 3$$

$$Q_2(x) = (x-3)(x-1) - 1 = x^2 - 4x + 2$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-8}}{2} = 2 \pm \sqrt{2}$$

$$x_1 = 2 - \sqrt{2}, \quad x_2 = 2 + \sqrt{2}$$

Коэффициенты c_1 и c_2 определяются из системы:

$$f(x) = 1 : \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1 = C_1 + C_2 \quad / \quad -(2+\sqrt{2})$$

$$f(x) = x : \int_0^{\infty} x e^{-x} dx = 1 = C_1(2-\sqrt{2}) + C_2(2+\sqrt{2})$$

$$C_1(2-\sqrt{2}-2-\sqrt{2}) = 1-2-\sqrt{2}$$

$$-2C_1\sqrt{2} = -1-\sqrt{2}$$

$$C_1 = \frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}, \quad C_2 = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

$$I \approx \frac{2+\sqrt{2}}{4} f(2-\sqrt{2}) + \frac{2-\sqrt{2}}{4} f(2+\sqrt{2})$$

Процена: $|R_3(f)| \leq \frac{1}{4!} M_4 \int_0^{\infty} e^{-x} (x-2-\sqrt{2})^2 (x-2+\sqrt{2})^2 dx =$

$$= \frac{1}{4!} M_4 \int_0^{\infty} e^{-x} (x^2-2)^2 dx = \frac{1}{4!} M_4 \int_0^{\infty} e^{-x} (x^4-4x^2+2) dx =$$

$$= \frac{1}{4!} M_4 \int_0^{\infty} e^{-x} (x^4+16x^2+4-8x^3+4x^2-16x) dx$$

$$= \frac{1}{4!} M_4 (4! + 16 \cdot 2! + 4 - 8 \cdot 3! + 4 \cdot 2 - 16) = \frac{1}{6} M_4$$

Други начин да се одреде зборови

$$\omega_2 = x^2 + v_1 x + v_0 = \prod_{j=1}^2 (x-x_j) = \omega_2(x)$$

Мора да важи: $\int_0^{\infty} e^{-x} \omega_2(x) x^k dx = 0, \quad k=0,1$. Због тога се линеарни систем за v_0, v_1 .

Закључак: Одређивање квадратурне формуле обавља $\int_{-1}^1 f(x) dx = c_0 f(-1) + c_1 f(0) + c_2 f(1) + R(f)$, где су c_0, c_1, c_2 и α константе које треба одређити и.д. ово буде могуће за полиноме степена ≤ 2 и одређивање прецизности. (Напомена: проверити да ли је могуће за полиноме степена ≤ 5)

На сегменту $[-1,1]$ ортогонални полиноми у односу на $p(x)=1$ и $p(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ су Лежандрови и Чебишевљеви полиноми.

Легендрови полиноми

$$p(x) = 1$$

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} ((x^2-1)^n),$$

$$\text{или } \begin{cases} L_n(x) = \frac{2n-1}{n} L_{n-1}(x) \cdot x - \frac{n-1}{n} L_{n-2}(x) \\ L_0(x) = 1, L_1(x) = x \end{cases}$$

$$L_0(x) = 1$$

$$L_1(x) = x$$

$$L_2(x) = \frac{1}{2} (3x^2 - 1)$$

$$L_3(x) = \frac{1}{2} (5x^3 - 3x) \dots$$

Чебышевски полиноми

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = 2x(2x^2 - 1) - x \dots$$

или

$$\begin{cases} T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \\ T_0(x) = 1, T_1(x) = x \end{cases}$$

② Гаусовом квадратурном формули са 3 чвора изграђених

$$\int_0^1 e^{x^2} dx.$$

Потешко је да је $p(x) = 1$, па ћемо користити Легендрове полиноме, али пре свега морамо прећи на интервал $[-1, 1]$.

$$\begin{aligned} x \in [0, 1] \\ t \in [-1, 1] \end{aligned} \quad \begin{cases} x = at + b \\ dx = a dt \end{cases} \quad \begin{cases} 0 = -a + b \\ 1 = a + b \end{cases} \quad \begin{cases} 2b = 1 \\ b = 1/2 \\ a = 1/2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{смена: } x = \frac{t+1}{2}$$

$$I = \int_0^1 e^{x^2} dx = \int_{-1}^1 e^{\left(\frac{t+1}{2}\right)^2} \frac{1}{2} dt$$

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + c_3 f(x_3) + R(f)$$

x_1, x_2, x_3 су узне $L_3(x)$

$$L_3(x) = \frac{1}{2} x (5x^2 - 3) \Rightarrow x_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}}, x_2 = 0, x_3 = \sqrt{\frac{3}{5}}$$

Упоредно су симетричне, $p(x) = 1$ је парна $\Rightarrow c_1 = c_3$

Решавамо систем:

$$f(x) = 1 \quad \int_0^1 1 dx = 1 = c_1 + c_2 + c_3$$

$$f(x) = x \quad \int_0^1 x dx = 0 = -c_1 \sqrt{\frac{3}{5}} + c_2 \cdot 0 + c_3 \sqrt{\frac{3}{5}}$$

$$f(x) = x^2 \quad \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} = c_1 \frac{3}{5} + c_2 \cdot 0 + c_3 \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{6}{5} c_1$$

$$\Rightarrow c_1 = c_3 = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$$

$$\Rightarrow c_2 = \frac{8}{9}$$

$$\int_0^1 f(x) dx \approx \frac{5}{9} f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$$

$$\text{Проверка: } |R(f)| \leq \frac{1}{6!} M_6 \int_0^1 x^2 \left(x^2 - \frac{3}{5}\right)^2 dx = \frac{M_6}{15750}$$

$$I = \frac{1}{2} \left(\frac{5}{9} e^{\left(\frac{-\sqrt{3}+1}{2}\right)^2} + \frac{8}{9} e^{\left(\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{5}{9} e^{\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)^2} \right) \approx 1.4624$$

$$f(t) = e^{\left(\frac{t+1}{2}\right)^2}$$

$$f'(t) = 2 \left(\frac{t+1}{2}\right) \frac{1}{2} e^{\left(\frac{t+1}{2}\right)^2} = \frac{(t+1)}{2} e^{\left(\frac{t+1}{2}\right)^2}$$

③ Са шатимењу $\cos^2$ одређити вредности интеграла

$$\int_0^1 \frac{\cos 2x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Најпре, применимо $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow$ користићемо Лебнџеве теорему, пробаћемо је интервал једном. Јако је $\cos 2x$ парна функција односу на 0, важи:

$$\int_0^1 \frac{\cos 2x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{\cos 2x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x) \text{ или}$$

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$$

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x$$

$\Rightarrow$ коеф уз највиши степена и ред. нон је 2^{n-1}

Уводимо нормализоване Лебнџеве полиноме:

$$\bar{T}_n(x) = 2^{1-n} T_n(x) = \omega_n(x)$$

$$\Rightarrow |R| \leq \frac{M_{2n}}{(2n)!} \int_{-1}^1 \frac{\omega_n^2(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \cdot \frac{1}{2} = \frac{M_{2n}}{(2n)!} (2^{1-n})^2 \int_{-1}^1 \frac{T_n^2(x) dx}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\text{Разућамо } \int_{-1}^1 \frac{T_n^2(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx:$$

$$n \neq 0 \quad \int_{-1}^1 \frac{T_n^2(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{-1}^1 \frac{\cos^2(n \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 t}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 t dt = \frac{-n}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos^2 t dt = \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2n} \int_0^{\pi} \cos 2t dt =$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

$$n=0: \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \Big|_{-1}^1 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

$$(T_n, T_m) = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \bar{u}, & n=m=0 \end{cases}$$

$$M_{2n} = \max_{[-1,1]} |f^{(2n)}(x)|$$

$$f(x) = \cos 2x, f'(x) = -2 \sin 2x, f''(x) = -4 \cos 2x, f'''(x) = 8 \sin 2x, f^{(4)}(x) = 16 \cos 2x$$

$$f^{(2n)}(x) = (-1)^n 2^{2n} \cos 2x$$

$$|f^{(2n)}(x)| = 2^{2n} |\cos 2x|$$

$$|R_{2n+1}(x)| = \frac{1}{(2n+1)!} \max_{[-1,1]} |\cos 2x| \cdot 2^{2n} (2^{1-n})^2 \frac{\bar{u}}{2} \cdot \frac{1}{2} < \frac{\bar{u}}{(2n)!}$$

$$\text{Требуется чтобы } |R_{2n+1}(x)| < 10^{-2} \Leftrightarrow \frac{\bar{u}}{(2n)!} < 10^{-2}$$

$$(2n)! > \bar{u} \cdot 10^2$$

$$(2n)! > 314.15$$

$$6! = 720 > 314.15$$

$$\Rightarrow \boxed{n=3}$$

Решим с 3 звора. Требуется найти корни функции $T_3(x)$.

$$T_3(x) = \cos(3 \arccos x) = 0 \quad \text{то} \quad 3 \arccos x = \frac{\bar{u}}{2} + k\bar{u}, k=0,1,2$$

$$3 \arccos x = \frac{\bar{u}}{2} + (k-1)\bar{u} \quad k=1,2,3$$

$$x_k = \cos\left(\frac{(2k-1)\bar{u}}{6}\right), k=1,2,3$$

$$\Rightarrow x_1 = -\sqrt{3}/2$$

$$x_2 = 0$$

$$x_3 = \sqrt{3}/2$$

Определимо коэффициенты.

$$f(x) = 1 \quad \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \bar{u} = c_1 + c_2 + c_3$$

$$f(x) = x \quad \int_{-1}^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-1}^1 x dx = \cos t dt \quad \left. \begin{array}{l} x = \sin t \\ dx = \cos t dt \end{array} \right\} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin t \cos t dt}{\cos t} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin t dt = 0$$

$$0 = -\frac{\sqrt{3}}{2} c_1 + 0 \cdot c_2 + \frac{\sqrt{3}}{2} c_3$$

$$f(x) = x^2 \quad \int_{-1}^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 t dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = \frac{1}{2} \cdot \bar{u}$$

$$0 = \frac{\bar{u}}{2} = c_1 \frac{3}{4} + c_2 \cdot 0 + c_3 \frac{3}{4}$$

Так как у второго симметрично расположено, $\rho_{x1} = \rho_{x3} \Rightarrow c_1 = c_3$

$$\bar{u} = 2c_1 + c_2$$

$$\frac{\bar{u}}{2} = \frac{3c_1}{2} \Rightarrow c_1 = \frac{\bar{u}}{3} \Rightarrow c_2 = \frac{\bar{u}}{3} \quad \text{Односно.}$$

$$c_k = \frac{\bar{u}}{n}, \quad k=1, 2, \dots, n, \quad x_k = \cos\left(\frac{(2k-1)}{2n} \cdot \bar{u}\right)$$

$$\int_0^1 \frac{\cos 2x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{\cos 2x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\bar{u}}{3} \left(\cos\left(2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \cos 0 + \cos\left(2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right) \approx 0.355 = 0.36$$

④ Гауссови квадратурни формули са 4 чвора изравнани

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$$

$$x \in [0, 1] \rightarrow [-1, 1] \text{ и } t$$

$$x = at + b$$

$$0 = -1 + b$$

$$1 = a + b$$

$$\begin{cases} b = \frac{1}{2} = a \end{cases}$$

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \begin{cases} x = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2} \\ dx = \frac{dt}{2} \end{cases} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{e^{2t/2}}{\sqrt{\frac{t+1}{2} \cdot \frac{1-t}{2}}} = \int_{-1}^1 \frac{e^{t/2}}{\sqrt{1-t^2}}$$

Користи́мо Чебы́евљево правило! Радујемо узне $T_4(x)$.

$$x_k = \cos \frac{(2k-1)\bar{u}}{8}, \quad k=1, 2, 3, 4$$

$$x_1 = \cos \frac{\bar{u}}{8}, \quad x_2 = \cos \frac{3\bar{u}}{8}, \quad x_3 = \cos \frac{5\bar{u}}{8}, \quad x_4 = \cos \frac{7\bar{u}}{8}$$

$$c_k = \frac{\bar{u}}{4}, \quad k=1, 2, 3, 4$$

$$I \approx \frac{\bar{u}}{4} \left(e^{\frac{2 \cos(\frac{\bar{u}}{8})}{8}} + e^{\frac{2 \cos(\frac{3\bar{u}}{8}) + 2}{8}} + e^{\frac{2 \cos(\frac{5\bar{u}}{8}) + 2}{8}} + e^{\frac{2 \cos(\frac{7\bar{u}}{8}) + 2}{8}} \right) \approx 52,9156$$

Формула: $|R_{n+1}(f)| \leq \frac{M_{2n}}{(2n)!} (2^{n+1})^2 \int_{-1}^1 \frac{T_n^2(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$

$$|R_7(f)| \leq \frac{M_8}{8!} 2^{-6} \frac{\bar{u}}{2}$$

$$f(x) = e^{2(x+1)}, f' = 2e^{2(x+1)}, \dots, f^{(8)} = 2^8 e^{2(x+1)}$$

$$M_8 = \max_{[1,1]} |f^{(8)}| = 2^8 e^4$$

$$|R_7(f)| \leq \frac{2e^4 \bar{u}}{8!} = 0,85 \cdot 10^{-2}$$

Системи лінійних рівнянь

I Гаусово метод елімінації

- „істак" метод, практичне за велике системи

Решаемо систему $Ax=b$, A - квадратна матриця, $\det A \neq 0$.

Формуємо таблицю розрахунків матриць.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

умов $a_{11} \neq 0$. Якщо a_{11} близько нуля (останній елемент) треба додати до великого збільшення ітерацій.

2. Як вибрати перший рядок / колонку м.г.м.м.

$\bar{a}_{11}$ буде:

a) $|\bar{a}_{11}| = \max_{1 \leq j \leq n} |a_{1j}|$ - величина мінімізації

б) $|\bar{a}_{11}| = \max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}|$ - повна мінімізація (вибір повної матриці)

① Решить систему $Ax=b$ Гауссовым методом исключения с выбором главного элемента. Результат с 4 десятичными.

$$2.74x_1 - 1.18x_2 + 3.17x_3 = 2.18$$

$$1.12x_1 + 0.83x_2 - 2.16x_3 = -1.15$$

$$0.18x_1 + 1.27x_2 + 0.76x_3 = 3.23$$

m_i	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	b_i		
	2.74	-1.18	3.17	2.18	I	$\max a_{ij} = 3.17$
-0.6814	1.12	0.83	-2.16	-1.15	II	$m_1 = \frac{-2.16}{3.17} = -0.6814$
0.2397	0.18	1.27	0.76	3.23	III	$m_2 = \frac{0.76}{3.17} = 0.2397$
	2.9870	0.0259	0	0.3355	I'	II - m_1 * I
-0.1596	-0.4768	1.5522	0	2.7075	II'	III - m_2 * I, $m_3 = \frac{-0.4768}{2.9870}$
	0	1.5569	0	2.7610		
		X	x_1	0.0969		
			x_2	1.7734		
			x_3	1.2641		

$$x_2 = \frac{2.7610}{1.5569} = 1.7734$$

$$x_1 = \frac{1}{2.9870} (0.3355 - 0.0259x_2) = 0.0969$$

$$x_3 = \frac{1}{3.17} (2.18 - 2.74x_1 + 1.18x_2) = 1.2641$$

Проверка: $E = b - Ax = \begin{bmatrix} -0.000091 \\ 0.000006 \\ -0.000376 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.091 \\ 0.006 \\ 0.376 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4}$

$$\det(A) = \pm (3.17 \cdot 2.9870 \cdot 1.5569) = 14.7420$$

LU декомпозиция

$$Ax=b, \det A \neq 0, A (n \times n)$$

Матрицу A разложить на матрицы L и U

$$A = L \cdot U, L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} * & * & * \\ & * & * \\ & & * \end{bmatrix}$$

$$Ax = L \cdot Ux = b$$

$$\Leftrightarrow Ux = y, Ly = b$$

Сложенија метода од Гаусове (више операција), али ако се одређује инверзна матрица онда је боља.

$$L = [l_{ij}]$$

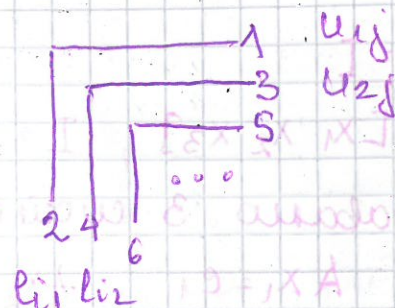
$$U = [u_{ij}]$$

I L-једначице на дијагонали

$$u_{ij} = a_{ij} \quad , \quad l_{ii} = \frac{a_{ii}}{a_{ii}}$$

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj}$$

$$l_{ij} = \frac{1}{u_{ji}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj} \right)$$



① LU декомпозицијом решити систем

$$2x_1 - 4x_2 - 3.25x_3 + x_4 = 4.84$$

$$8x_1 - 3x_2 - 4.3x_3 + 8x_4 = 8.89$$

$$x_1 - 5x_2 + 3.3x_3 - 20x_4 = -14.01$$

$$2.5x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 8x_4 = -20.29$$

Рачунање на 3 децимале

$$Ax = b \Leftrightarrow LUx = b \Leftrightarrow Ly = b \wedge Ux = y$$

Одређујемо y, а затим x.

$A(i,1)$	$A(i,2)$	$A(i,3)$	$A(i,4)$	$b(i)$
2	-4	-3.25	1	4.84
3	-3	-4.3	8	8.89
1	-5	3.3	-20	-14.01
2.5	-4	2	-3	-20.29
1	-4	-3.25	1	4.84
1.5	1	0.575	6.5	1.63
0.5	-1	1	-14	-14.8
1.25	0.333	1.067	1	-11.091

y₁
y₂
y₃
y₄

$$Ux = y$$

$$x_4 = \frac{y_4}{8.524} = \frac{-11.091}{8.524} = -1.301$$

$$x_3 = \frac{(-14.8 + 14 \cdot (-1.301))}{5.5} = -6.003$$

$$x_2 = \frac{(1.63 - 0.575 \cdot (-6.003) - 6.5 \cdot (-1.301))}{3} = 4.513$$

$$x_1 = \frac{(4.84 + 4 \cdot 4.513 + 3.25 \cdot (-6.003) - (-1.301))}{2} = 2.37$$

② Средний интервал лапрангу лапрангу A.

$$A = \begin{bmatrix} 24.21 & 2.42 & 3.85 \\ 2.31 & 31.49 & 1.52 \\ 3.49 & 4.85 & 28.72 \end{bmatrix}$$

Радим са S гегуана.

$$AA^{-1} = I$$

$$A^{-1} = [x_1 \ x_2 \ x_3], \quad I = [e_1 \ e_2 \ e_3], \quad e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Решавано 3 система:

$$Ax_1 = e_1, \quad Ax_2 = e_2, \quad Ax_3 = e_3$$

a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	e_1	e_2	e_3
24.21	2.42	3.85	1	0	0
2.31	31.49	1.52	0	1	0
3.49	4.85	28.72	0	0	1
1	24.21	2.42	1	0	0
0.09542	1	31.25908	-0.09542	1	0
0.14416	0.14399	1	-0.13042	-0.14399	1
			0.04233	-0.00240	-0.00555
			-0.00288	0.03218	-0.00132
			-0.00466	-0.00514	0.03572

y_i
 $A^{-1}x$

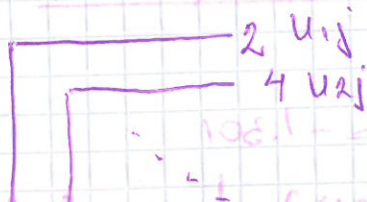
II U - јединице на гујатонам

$$l_{ii} = a_{ii}, \quad u_{ii} = \frac{a_{ii}}{l_{ii}}, \quad i = 1, \dots, n$$

$$l_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj}, \quad 1 < j \leq i \leq n$$

$$u_{ij} = (a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj}) \cdot \frac{1}{l_{ii}}, \quad 1 < i < j \leq n$$

$$Lx=b \Leftrightarrow Ly=b, \quad Ux=y$$



$$y = xU$$

$$100.1 = \frac{1}{2.0} (100.1 - (-1.1) - 2.1) = 2x$$

$$812.2 = \frac{1}{1.0} (100.1 - 2.0 - (-100.2) - 2.0 - 82.1) = 2x$$

$$248.8 = \frac{1}{1.0} (100.1 - 2.0 - (-100.2) - 2.0 - 82.1) = 2x$$

Решити систему ЛЛ деконволюцією.

$$3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 6$$

$$-5x_1 + x_2 + 3x_3 - 4x_4 = -12$$

$$2x_1 + \quad + x_3 - x_4 = 1$$

$$x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 3$$

Розшир са 4 децимале.

a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	b_i
3	1	-1	2	6
-5	1	3	-4	-12
2	0	1	-1	1
1	-5	3	-3	3
3	1	0.3333	0.6667	2.0000
-5	2.6665	1	-0.2500	-0.7500
2	-0.6666	2.0000	-1.2500	-1.7500
1	-5.3333	6.0005	2.5006	2.9996

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.9999 \\ x_2 &= -1.0000 \\ x_3 &= 1.9995 \\ x_4 &= 2.9996 \end{aligned}$$

$$l_{i2} = a_{i2} - l_{i1} u_{1j}$$

$$u_{2j} = \frac{1}{l_{22}} (a_{2j} - l_{21} u_{1j})$$

$$l_{i3} = a_{i3} - (l_{i1} u_{1j} + l_{i2} u_{2j})$$

Топеска деконволюція (метод квадратних кореня)

Решавано систему $Ax=b$, $\det(A) \neq 0$.

Нека A :

- 1) реална ($a_{ij} \in \mathbb{R}$)

- 2) симетрична ($A^T = A$)

- 3) позитивно дефинисана $x^T A x > 0 \quad \forall x \neq 0$

Тада матрица јединствено одређена доде правоугаона матрица L и u $A = LL^T$.

$$Ax = b \Leftrightarrow LL^T x = b \Leftrightarrow Ly = b \quad \text{и} \quad L^T x = y$$

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{nn} \end{bmatrix}, \quad L^T = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \\ l_{21} & l_{22} & \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow a_{ii} = l_{ii}^2 \Rightarrow l_{ii} = \sqrt{a_{ii}}$$

$$l_{i1} = \frac{a_{i1}}{l_{11}}, \quad l_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2}$$

$$l_{ij} = \frac{1}{l_{jj}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} l_{jk} \right), \quad 1 \leq j < i \leq n.$$

① Конспект decomposition рекурсивно сисем. Page 5
дефиниция.

$$Ax = b.$$

$$A = \begin{bmatrix} 1.00 & 0.42 & 0.54 & 0.66 \\ 0.42 & 1 & 0.32 & 0.44 \\ 0.54 & 0.32 & 1 & 0.22 \\ 0.66 & 0.44 & 0.22 & 1 \end{bmatrix},$$

$$b = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.5 \\ 0.7 \\ 0.9 \end{bmatrix}.$$

a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	b_i
1.00	0.42	0.54	0.66	0.3
0.42	1	0.32	0.44	0.5
0.54	0.32	1	0.22	0.7
0.66	0.44	0.22	1	0.9
1.00	0.42	0.54	0.66	0.3
0.42	0.90752	0.10270	0.17939	0.41211
0.54	0.10270	0.83538	-0.18533	0.59335
0.66	0.17939	-0.18533	0.70560	1.04597
		x_1	x_2	-1.2577
		x_2	x_3	0.04349
		x_3	x_4	1.03914
			x_4	1.48238

$$LL^T x = b$$

$$Ly = b, \quad L^T x = y$$

y_i ↓
 x_i ↑

Числене стабилност

Норме вектора

- абсолютна $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$
 - еуклидова $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2}$
 - општи случај $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}$
 - максимална $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$
- Међусобно еквивалентност
 $\exists c_1, c_2 > 0$
 $c_1 \|x\|_A \leq \|x\|_B \leq c_2 \|x\|_A$

Норме матрице : $\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$

- максимална $\|A\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$

- $\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$

- $\|A\|_2 = \sqrt{\max_{1 \leq j \leq n} \lambda_j(A^T A)}$

- $\|A\|_F = \sqrt{\sum |a_{ij}|^2}$

Условљеност матрице A (регуларне) : $\text{cond}(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$

- $\text{cond}(I) = 1$

- $\text{cond}(A) = \|A\| \|A^{-1}\| \geq \|AA^{-1}\| = \|I\| = 1$

$\Rightarrow 1 \leq \text{cond}(A) < \infty$

Матрица је лошије условљена што је $\text{cond}(A)$ веће (велика је регуларна грешка), стога користимо Гаусову методу.

Итеративне методе (боље за лошије условљене системе)

Решавамо систем $Ax=b$, $\det(A) \neq 0$.

Одаберемо почетни вектор $x^{(0)}$ и формирамо итеративни низ

① $x^{(n)} = \bar{A} x^{(n-1)} + \bar{b}$, $n=1, 2, \dots$ - метод итерације

$$\Rightarrow n = 0.2$$

Итерациони процес ① конвертира ако је било која норма матрице $\bar{A}$ мања од 1, тј. $\|\bar{A}\| < 1$.

Нека је x^* тачно решење и $x^{(n)}$ решење из n -те итерације.

Тада важи:

$$\|x^* - x^{(n)}\| = \|\bar{A}x^* + b - \bar{A}x^{(n-1)} - b\| \leq \|\bar{A}\| \|x^* - x^{(n-1)}\| \leq \dots \leq \|\bar{A}\|^n \|x - x^{(0)}\|$$

Осим тога: $\|x^{k+1} - x^k\| = \|\bar{A}x^k + b - \bar{A}x^{k-1} - b\| \leq \|\bar{A}\| \|x^k - x^{k-1}\|$

$$\|x^{k+p} - x^k\| \leq \|x^{k+p} - x^{k+p-1}\| + \|x^{k+p-1} - x^{k+p-2}\| + \dots + \|x^{k+1} - x^k\|$$

$$\leq \|\bar{A}\|^{p-1} \|x^{k+1} - x^k\| + \|\bar{A}\|^{p-2} \|x^k - x^{k-1}\| + \dots + \|x^{k+1} - x^k\|$$

$$= \|x^{k+1} - x^k\| (\|\bar{A}\|^{p-1} + \|\bar{A}\|^{p-2} + \dots + \|\bar{A}\|)$$

$$= \|x^{k+1} - x^k\| \frac{1 - \|\bar{A}\|^p}{1 - \|\bar{A}\|}$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1 - \|\bar{A}\|^p}{1 - \|\bar{A}\|} = \frac{1}{1 - \|\bar{A}\|} \quad \|\bar{A}\| < 1$$

$$\|x^k - x^k\| \leq \frac{1}{1 - \|\bar{A}\|} \|x^{k+1} - x^k\| \leq \frac{\|\bar{A}\|}{1 - \|\bar{A}\|} \|x^k - x^{k-1}\|$$

Критеријум заустављања: $\|x^k - x^{k-1}\| \leq \frac{\|\bar{A}\|}{1 - \|\bar{A}\|} \|x^k - x^{k-1}\| \leq \epsilon$

Нека је задата тачност ϵ . Означимо $\|\bar{A}\| = q$.

Заустављање се каже важи:

$$\|x^k - x^{k-1}\| \leq \frac{1-q}{q} \epsilon$$

$$\|\bar{A}\| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

Ако је дат број децимала заустављање се каже и све оклопе.

① Методом просте итерације решити систем $Ax=b$. Разунава на 4 децимале.

$$1.02x_1 - 0.05x_2 - 0.10x_3 = 0.795$$

$$-0.11x_1 + 1.03x_2 - 0.05x_3 = 0.849$$

$$-0.11x_1 - 0.12x_2 + 1.04x_3 = 1.398$$

Трансформирамо систем у $x = \bar{A}x + \bar{b}$

$$x_1 = \frac{1}{1.02} (0.795 + 0.05x_2 + 0.10x_3)$$

$$x_2 = \frac{1}{1.03} (0.849 + 0.11x_1 + 0.05x_3)$$

$$x_3 = \frac{1}{1.04} (1.398 + 0.11x_1 + 0.12x_2)$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \frac{0.05}{1.02} & \frac{0.10}{1.02} \\ \frac{0.11}{1.03} & 0 & \frac{0.05}{1.03} \\ \frac{0.11}{1.04} & \frac{0.12}{1.04} & 0 \end{bmatrix}}_{\bar{A}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{0.795}{1.02} \\ \frac{0.849}{1.03} \\ \frac{1.398}{1.04} \end{bmatrix}}_{\bar{b}}$$

Да ли ће процес конвергираити? Да ли је $\|\bar{A}\|_\infty < 1$?

$$\|\bar{A}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq 3} \sum_{j=1}^3 |a_{ij}| = \max \left\{ \frac{0.15}{1.02}, \frac{0.16}{1.03}, \frac{0.23}{1.04} \right\} = \frac{0.23}{1.04} < 1 \quad \checkmark$$

$$x^{(n)} = \bar{A} x^{(n-1)} + \bar{b}, \quad n=1,2,3,\dots$$

$$x^{(0)} = \bar{b} \quad \text{или} \quad x^{(0)} = b$$

Разунамо где се ће изјавити све децимале!

	x_1	x_2	x_3
0	0.7794	0.8243	1.3442
1	0.9516	0.9728	1.5218
2	0.9763	0.9998	1.5671
3	0.9811	1.0041	1.5629
4	0.9818	1.0049	1.5639
5	0.9820	1.0050	1.5640
6	0.9820	1.0051	1.5641
7	0.9820	1.0051	1.5641

$$x \approx \lambda^{(7)} = (0.9820, 1.0051, 1.5641)$$

Модификована метода итерације (Гаус-Зайделя метод)
 - Одмах користимо добијене резултате, брине конвергенца

$$x_1^{(1)} = a_{11}x_1^{(0)} + a_{12}x_2^{(0)} + \dots + a_{1n}x_n^{(0)} + b_1$$

$$x_2^{(1)} = a_{21}x_1^{(1)} + a_{22}x_2^{(0)} + \dots + a_{2n}x_n^{(0)} + b_2$$

$$\vdots$$

$$x_n^{(1)} = a_{n1}x_1^{(1)} + a_{n2}x_2^{(1)} + \dots + a_{nn}x_n^{(0)} + b_n$$

Препходни резултат:

	x_1	x_2	x_3
0	0.7794	0.8243	1.3442
1	0.9516	0.9912	1.5593
2	0.9809	1.0047	1.5639
3	0.9820	1.0051	1.5641
4	0.9820	1.0051	1.5641

$$x \approx x^{(4)}$$

$$A = (a_{ij}), \quad Ax = b \Leftrightarrow x = \bar{A}x + \bar{b}$$

$$\|\bar{A}\| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} < 1 \Leftrightarrow$$

$$\sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} < 1 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}| < |a_{ii}| \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

За матрицу за коју важе овај услов кажемо да је дијагонално доминантна. За такве матрице метода итерације конвергира.

② Гаус-Зайделовом методом решити систем са тачношћу $\frac{1}{2} \cdot 10^{-4}$.

$$I \quad 8.3x_1 + 7.7x_2 - 0.3x_3 = 27.10$$

$$II \quad 6.1x_1 + 2.2x_2 + 1.2x_3 = 16.66$$

$$III \quad 3.4x_1 + 4.0x_2 + 5.7x_3 = 27.65$$

Матрица је дијагонално доминантна. Трансформисамо систем (уведи у већи елементи на дијагонали конвергенција је бржа.)

$$\text{II} \quad 6.1x_1 + 2.2x_2 + 1.2x_3 = 16.55$$

$$\text{I}-\text{II} \quad 2.2x_1 + 5.5x_2 - 1.5x_3 = 10.65$$

$$\text{II}+\text{II}-\text{I} \quad 1.2x_1 + (-1.5)x_2 + 7.2x_3 = 17$$

$$x_1 = \frac{1}{6.1} (16.55 - 2.2x_2 - 1.2x_3)$$

$$x_2 = \frac{1}{5.5} (10.65 - 2.2x_1 + 1.5x_3)$$

$$x_3 = \frac{1}{7.2} (17 - 1.2x_1 + 1.5x_2)$$

Критеријум заустављања:

$$\|x^{(n)} - x^{(n+1)}\|_{\infty} \leq \frac{1-2}{2} \varepsilon$$

$$1. \quad 2 = \|A\|_{\infty} = \max \left\{ \frac{3.1}{6.1}, \frac{3.7}{5.5}, \frac{2.7}{7.2} \right\} = 0.67273 < 1$$

$$\|x^{(n)} - x^{(n+1)}\|_{\infty} \leq 0.243 \cdot 10^{-4}$$

	x_1	x_2	x_3
0	2.71311	1.91818	2.36111
1	1.56683	1.93939	2.50568
2	1.52074	1.99325	2.52291
3	1.49793	2.00708	2.52950
4	1.49162	2.01142	2.53156
5	1.48967	2.01274	2.53215
6	1.48908	2.01314	2.53233
7	1.48890	2.01326	2.53240
8	1.48884	2.01330	2.53241
9	1.48883	2.01331	2.53241

Нелинеарне једначине

Нека је дата ј-та $f(x)=0$, где је $f(x)$ дефинисана и непрекидно на неком интервалу (a,b) . Сваки број ξ и.г. $f(\xi)=0$ назива се кореном ј-те $f(x)=0$ или нулом ф-је $f(x)$.

Ако непрекидно ф-ја $f(x)$ мења знак на крајевима сегмента $[\alpha, \beta]$, ит. $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$, тада унутар сегмента постоји бар једна нула ф-је f , ит. $\exists \xi \in (\alpha, \beta), f(\xi)=0$.

Да би нула била јединствена први извод мора бити константног знака.

тл Нека је ξ тачка и $\bar{x}$ приближна вредност корена ј-те $f(x)=0$, на сегменту $[\alpha, \beta]$, при чему је $|f'(x)| \geq m$ за $x \in [\alpha, \beta]$. Тада је:

$$|\bar{x} - \xi| \leq \frac{|f(\bar{x})|}{m_1}$$

$$m_1 = \min |f'(x)| = m_1 > 0$$

Доказ: Лагранжова или о средњој вредности:

$$f(\bar{x}) - f(\xi) = f'(\zeta)(\bar{x} - \xi), \quad \zeta \in (\bar{x}, \xi) \cup (\xi, \bar{x})$$

$$f(\xi) = 0 \text{ и } |f'(\zeta)| \geq m_1 \Rightarrow$$

$$|f(\bar{x})| \geq m_1 |\bar{x} - \xi| \Rightarrow |\bar{x} - \xi| \leq \frac{|f(\bar{x})|}{m_1} \quad \square$$

Ако нам је задато иако је ϵ :

$$|\bar{x} - \xi| \leq \frac{|f(\bar{x})|}{m_1} < \epsilon \Rightarrow$$

$$|f(\bar{x})| < \epsilon \cdot m_1$$

Допунски критеријум
заустављања.

Задаци се састоје из 3 дела:

1) локализација решења, тј. одређивање сегмента (a, b) на ком $f' \neq 0$

2) испитивање услова за примену методе на (a, b)

3) примена методе - формирање итеративних из $x_n: x_n \rightarrow \xi$
 $n \rightarrow \infty$

I Метода половања интервала

Решавамо $f(x) = 0, \quad f' \neq 0 \in [a, b]$

Услови методе:

$$1^\circ f(x) \in C[a, b]$$

$$2^\circ f(a)f(b) < 0$$

Бирамо тачку $x_0 = \frac{a+b}{2}$

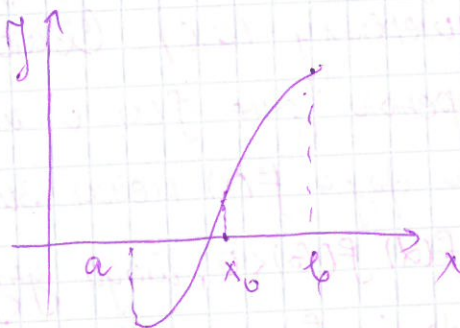
Ако је $f(x_0) = 0 \Rightarrow \xi = x_0$

Ако је $f(x_0) \neq 0$, за нови сегмент (a_1, b_1) бирамо (a, x_0) или (x_0, b) ш.г. важи $f(a_1)f(b_1) < 0$. Настављамо поступак.

На овај начин добијемо низ подсегмената:

$$[a, b] \supseteq [a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq \dots \supseteq [a_n, b_n] \supseteq \dots$$

за које важи $f(a_n)f(b_n) < 0$



$$b_n - a_n = \frac{1}{2} (b_{n-1} - a_{n-1}) = \frac{1}{2^2} (b_{n-2} - a_{n-2}) = \dots = \frac{1}{2^n} (b - a) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

$$\text{Оскільки } a_n \uparrow, b_n \downarrow \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \xi$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) - \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) \leq 0$$

$$f(\lim a_n) - f(\lim b_n) \leq 0$$

$$f^2(\xi) \leq 0 \Rightarrow \underline{f(\xi) = 0}$$

Нека зі заданою точністю ϵ : Такого из сегмента за
крий ваши $b_n - a_n < \epsilon$ можна узяти ділянку яку іменуємо
решення. Найкраще а бира $\bar{x} = \frac{a_n + b_n}{2}$.

Брої потрібних ітерацій:

$$\bar{x} = \frac{a_n + b_n}{2}$$

$$|\xi - \bar{x}| \leq \frac{1}{2} (b_n - a_n) = \frac{1}{2^{n+1}} (b - a) \leq \epsilon$$

$$b - a \leq 2^{n+1} \epsilon$$

$$2^{n+1} \geq \frac{b-a}{\epsilon} \quad | \ln 2$$

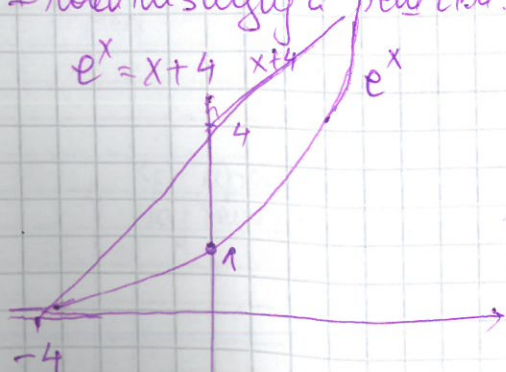
$$n \geq \left\lceil \frac{\ln(\frac{b-a}{\epsilon})}{\ln 2} \right\rceil$$

$$\text{или } n+1 \geq \frac{\ln(\frac{b-a}{\epsilon})}{\ln 2}$$

$$n \geq \frac{\ln(\frac{b-a}{\epsilon})}{\ln 2} - 1$$

① Са точністю $\epsilon = 10^{-3}$ одредити приблизно рішення ј-не: $e^x - x - 4 = 0$
(розширено)

Локалізація рішення:



$$f(0) = 1 - 0 - 4 = -3 < 0$$

$$f(2) = e^2 - 2 - 4 = 1.389$$

Умови: 1° $f \in C[1,2]$

$$2^\circ f(1)f(2) < 0$$

$$a_0 = 1, b_0 = 2$$

$$\text{Бр ітерацій: } n \geq \left\lceil \frac{\ln(\frac{2-1}{10^{-3}})}{\ln 2} \right\rceil = \underline{\underline{[8.9658]}}$$

$$x_0 = \frac{a_0 + b_0}{2} = 1.5 \quad f(x_0) = -1.0183 < 0 \Rightarrow [a_1, b_1] = [1.5, 2]$$

$$x_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} = 1.75 \quad f(x_1) = 0.0046 > 0 \Rightarrow [a_2, b_2] = [1.5, 1.75]$$

$$x_2 = \frac{a_2 + b_2}{2} = 1.625 \quad f(x_2) = -0.5466 < 0 \Rightarrow [a_3, b_3] = [1.625, 1.75]$$

$$x_3 = \frac{a_3 + b_3}{2} = 1.6875 \quad f(x_3) = -0.2816 < 0 \Rightarrow [a_4, b_4] = [1.6875, 1.75]$$

$$x_4 = \frac{a_4 + b_4}{2} = 1.7188 \quad f(x_4) = -0.1411 < 0 \Rightarrow [a_5, b_5] = [1.7188, 1.75]$$

$$x_5 = \frac{a_5 + b_5}{2} = 1.7344 \quad f(x_5) = -0.0689 < 0 \Rightarrow [a_6, b_6] = [1.7344, 1.75]$$

$$x_6 = \frac{a_6 + b_6}{2} = 1.7422 \quad f(x_6) = -0.0324 < 0 \Rightarrow [a_7, b_7] = [1.7422, 1.75]$$

$$x_7 = \frac{a_7 + b_7}{2} = 1.7461 \quad f(x_7) = -0.0139 < 0 \Rightarrow [a_8, b_8] = [1.7461, 1.75]$$

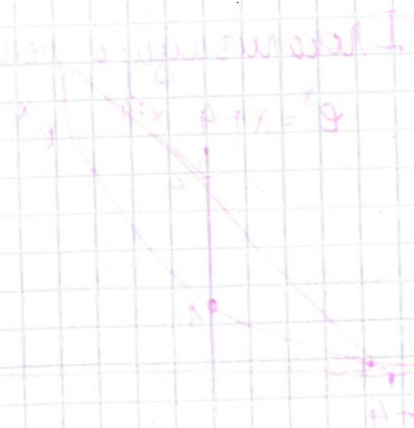
$$x_8 = \frac{a_8 + b_8}{2} = 1.7480 \quad f(x_8) = 0.0047 > 0 \Rightarrow [a_9, b_9] = [1.7480, 1.75]$$

$$x_9 = \frac{a_9 + b_9}{2} = 1.7490 \quad \text{— некорректно: } |1.7480 - 1.75| = 0.002 > \epsilon$$

↑
Здесь закрываемся.

$$x^* = \frac{1.7480 + 1.75}{2} = 1.7490$$

$$f(x^*) = -0.0002$$



II Метод Рунге-Кутсы и метод Серенсе

Решавано $f(x) = 0$, $\forall \xi \in [a, b]$ $f(\xi) \neq 0$

Услови:

1° $f(a)f(b) < 0$

2° $f \in C^1[a, b]$

3° f', f'' на $[a, b]$ и константниот знак

4° x_0 - произволно точка: $f'(x_0)f(x_0) > 0$, x_0 или a или b
 x_1 - пресекот на af

Метод Серенсе

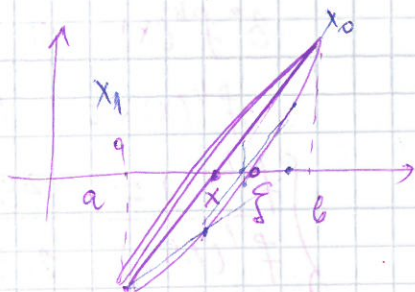
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} (x_{n+1} - x_n), \quad n=1, 2, \dots$$

Идеја:

$$\frac{x_0 - a}{b - a} = \frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)}$$

За $x = \xi$ $y = 0$

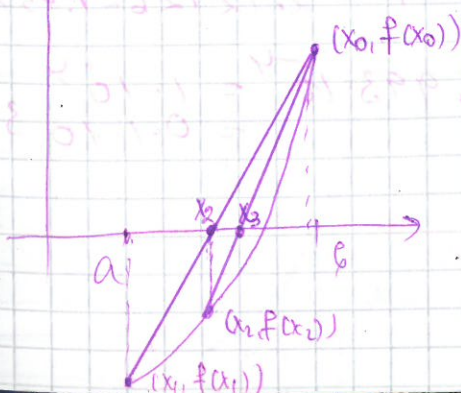
$$\xi = a - \frac{f(a)}{f(b) - f(a)} (b - a)$$



Метод Рунге-Кутсы:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} (x_0 - x_n), \quad n=1, 2, \dots$$

x_0 - произволно точка из (a, b)
 и притоа a или b



Критериуми за завршување:

1° $|f(x_n)| < \epsilon m_1$

$$m_1 = \min_{x \in [a, b]} |f'(x)|$$

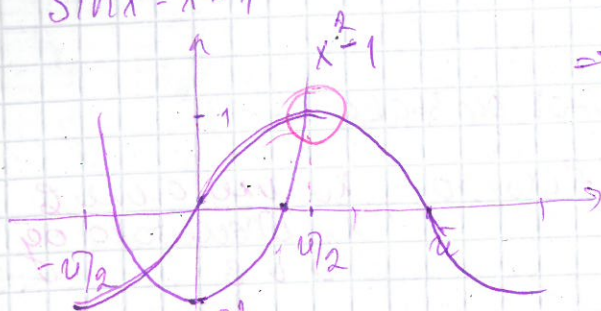
2° $|x_n - x_{n-1}| \leq \frac{\epsilon}{m_1 - m_2}$

② Метод Рунге-Кутты: а) решить задачу Коши или свести к задаче на поиск корней уравнения $\sin x + 1 = x^2$ с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$.

Решить задачу:

$$f(x) = \sin x + 1 - x^2 = 0$$

$$\sin x = x^2 - 1$$



⇒ уединенная точка!

$$f(0) = 1$$

$$f(1) = 0.8414770$$

$$f(1.5) = -0.25251 < 0$$

↑
радикали!

Условия метода на $[1, 1.5]$

$$1^\circ f(1) f(1.5) < 0$$

$$2^\circ f'(x) = \cos x - 2x \in C[1, 1.5]$$

$$3^\circ f''(x) = -\sin x - 2$$

$$f''(x) < 0 \quad \forall x \in [1, 1.5]$$

$$\begin{cases} f'(1) = -1.45970 < 0 \\ m_1 = 1.45970 \end{cases}$$

$$f'(1.5) = -2.92926 < 0$$

$$f'' \text{ — монотонно убывает } < 0$$

$$\Rightarrow f'(x) \downarrow \Rightarrow f' \text{ монотонно убывает}$$

$$4^\circ x_0 = 1.5 \quad x_1 = 1$$

Критерий остановки: 1) $|f(x_n)| \leq \varepsilon \cdot m_1$

$$= 1.45970 \cdot 10^{-4}$$

$$|f(x_n)| \leq 0.000146$$

$$2) |x_n - x_{n-1}| \leq \frac{m_1 \varepsilon}{m_2 - m_1} = \frac{1.45970 \cdot 10^{-4}}{2.92926 - 1.45970}$$

$$|x_n - x_{n-1}| \leq 0.993 \cdot 10^{-4} = 1 \cdot 10^{-4} = 0.1 \cdot 10^{-3}$$

а) Ресурсы-данные

б) Ресурсы

n	x_n	$f(x_n)$
0 (F)	1.5	-0.25251
1	1	0.84147
2	1.38459	0.06562
3	1.40840	0.00325
4	1.40956	0.00017
5	1.40962	0.00001 (< 0.0001)

$$\bar{x} = x_5$$

n	x_n	$f(x_n)$
0	1.5	-0.25251
1	1	0.84147
2	1.38459	0.06562
3	1.41712	-0.02001
4	1.40952	0.00028
5	1.40962	0.00001 (< 0.0001)

$$\bar{x} = x_5$$

Нужно использовать

Условия:

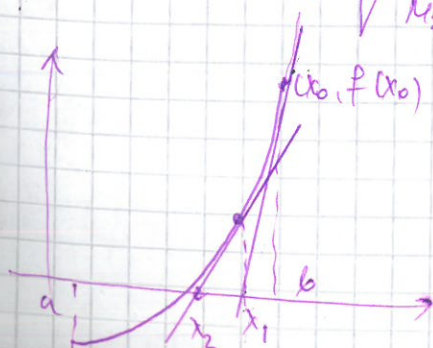
- 1° $f(a)f(b) < 0$
- 2° $f \in C'[a, b]$
- 3° f, f', f'' и констан. су знака на $[a, b]$
- 4° $f'(x) \neq 0$ на $[a, b]$
- 5° $x_0: f(x_0'') f(x_0) > 0$ (или 0 или b)

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n=0, 1, 2, \dots$$

Примеры для использования:

$$1^\circ \text{ если } |f(x_n)| \leq \epsilon M_1$$

$$2^\circ |x_n - x_{n+1}| \leq \sqrt{\frac{2m_1 \epsilon}{M_2}}$$

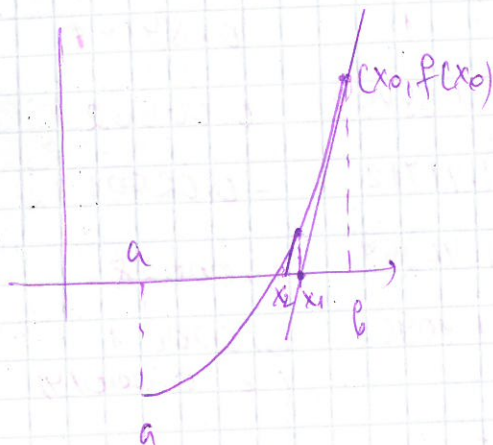


$$M_2 = \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|$$

Модифицированная Ньютона:

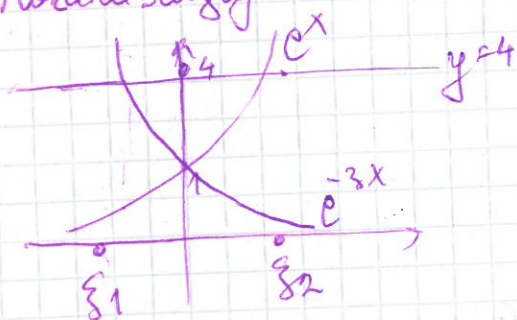
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}, \quad n=1, 2, \dots$$

(Правое направление ищется у x_0)



③ Ньютонов методом імітуйте наші два рішення $f(x)$:
 $f(x) = e^x + e^{-3x} - 4 = 0, \quad \epsilon = 10^{-4}$
 імітуйте рішення

Локалізація:



$$f(0) = -2 < 0$$

$$f(1) = -1.23193 < 0$$

$$f(2) = 3.39154$$

$$f(-1) = 16.45342$$

$$\xi_2 \in [1, 2]$$

$$\xi_1 \in [-1, 0]$$

Умови:

$$1^\circ f(1)f(2) < 0$$

$$2^\circ f'(x) = e^x - 3e^{-3x} \in C[1, 2]$$

$$3^\circ f''(x) = e^x + 9e^{-3x} \neq 0 \quad \forall x \in [1, 2]$$

$$\Rightarrow f'(x) \rightarrow$$

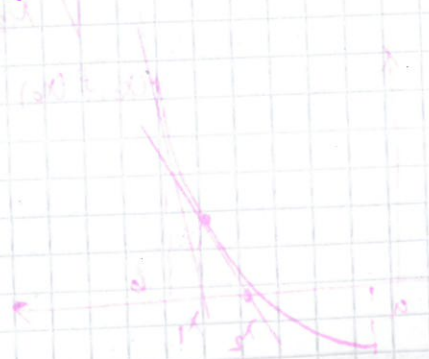
$$f'(1) = 2.56892$$

$$f'(2) = 7.38162$$

$$f'(x) > 0 \quad \forall x \in [1, 2]$$

$$4^\circ f'(x) \neq 0$$

$$5^\circ x_0 = 2 \quad f(x_0)f''(x_0) > 0$$



Критериуми заустављања:

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \sqrt{\frac{2m_1 \epsilon}{M_2}}$$

$$f'(x) = e^x - 3e^{-3x}$$

$$f''(x) = e^x + 9e^{-3x}$$

$M_2 = ?$

$$f'''(x) = e^x - 27e^{-3x}$$

$$f^{IV}(x) = e^x + 81e^{-3x} > 0$$

$$m_1 = \min_{[1,2]} |f'(x)| = f'(1) = 2.56892$$

$$\Rightarrow f'''(x) \rightarrow \text{монотонно} \quad f'''(1) = 1.374, \quad f'''(2) = 7.322$$

$$\Rightarrow f'''(x) > 0 \quad \text{на } [1,2]$$

$$\Rightarrow f'' \text{ је монотонна на } [1,2] \quad (\uparrow)$$

$$f'' > 0 \Rightarrow M_2 = f''(2) = 7.41136$$

$$\Rightarrow |x_n - x_{n-1}| \leq \sqrt{\frac{2 \cdot 2.56892 \cdot 10^{-7}}{7.41136}} = 0.00833 \rightarrow \text{разлика бар на 3 децимале}$$

$$f(x) = e^x + e^{-3x} - 4$$

$$f'(x) = e^x - 3e^{-3x}$$

k	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$
0	2	3.39153	7.38162
1	1.54054	0.67695	4.63760
2	1.39457	0.04848	3.98751
3	1.38241	0.00030	3.93707
4	1.38233		

$$\bar{x} = x_4$$

$$\text{За нови критериум: } |f(x_k)| \leq 2.568 \cdot 10^{-4} = 0.00025$$

Кординована метода

$$f(x) \approx 0, \quad \forall x \in [a, b]$$

Исти услови као код Њутнове методе

Идеја: формирамо два низа: $(x_k, f(x_k))$ - нумеричка таблица, $(\bar{x}, f(\bar{x}))$ - Њутнов метод

$$\bar{x}_{u+1} = \bar{x}_u - \frac{f(\bar{x}_u)}{f'(\bar{x}_u)}, \quad u=1, 2, \dots$$

l'быур

$$\bar{x}_0 = a \vee \bar{x}_0 = b$$

$$x_0 = b \vee x_0 = a$$

$$x_{u+1} = x_u - \frac{f(x_u)}{f(\bar{x}_0) - f(x_u)} (\bar{x}_0 - x_u) \quad \text{Лемма}$$

Примеру'лел зауайавнальс:

$$1^\circ \text{ Диним: } |f(x_u)| \leq m_1 \epsilon$$

$$2^\circ |x_u - \bar{x}| < \epsilon$$

$$\Rightarrow \xi \approx \frac{x_u + \bar{x}}{2}$$

④ Са шомарлы 10⁴ калы уагына реверсе жул $(x-2)e^x = x+2$

$$f(x) = (x-2)e^x - x - 2 = 0$$

Нека је $g(x) = (x-2)e^x$. Ишмизуево ову ф'у.

$$g'(x) = e^x + e^x(x-2) = e^x(x-1)$$

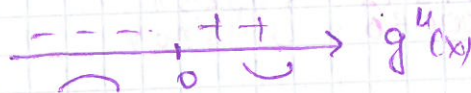
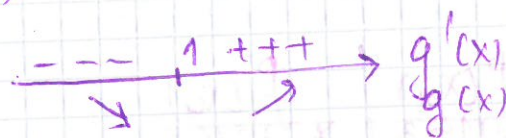
$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$g(1) = -e = -2.718$$

$$g''(x) = e^x + e^x(x-1) = xe^x$$

$$g''(x) = 0 \text{ за } x = 0$$

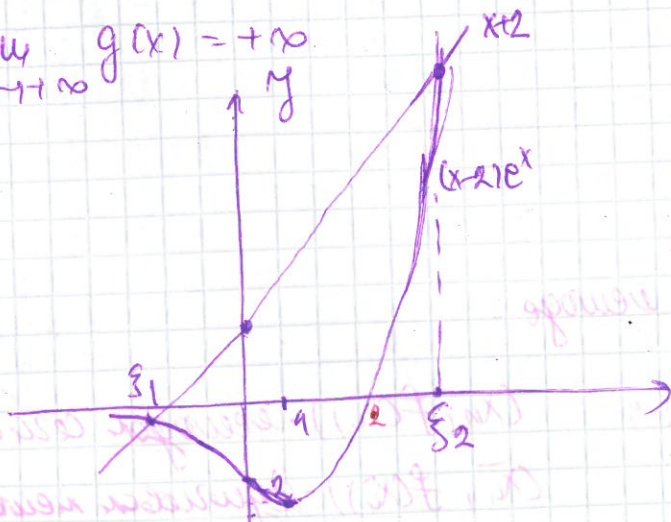
$$g(0) = -2$$



↑ переверна макс

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x-2)e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-2}{e^{-x}} \stackrel{\text{Л'О}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-e^x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+2) \frac{e^x}{(x+2)} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+2) \left[\frac{e^x(x-2)}{x+2} - 1 \right] + \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-2}{e^x} - (x+2) \right) = 0 - (+\infty) = -\infty$$

$$\begin{aligned} f(-3) &= 0.75064 > 0 \\ f(-2) &= -0.54134 < 0 \end{aligned}$$

Умови нулевої на $[-3, -2]$:

$$1^\circ f(-2)f(-3) < 0$$

$$2^\circ f'(x) = (x-2)e^x + e^x - 1 = e^x(x-1) - 1 \text{ не пер. до } \mathbb{R}$$

$$f'(x) \in C[-3, -2]$$

$$3^\circ f''(x) = e^x(x-1) + e^x = xe^x < 0 - \text{вектор-знак на } [-3, -2]$$

$$\Rightarrow f'(x) \searrow \text{ на } [-3, -2]$$

$$f'(-3) = -1.19915$$

$$f'(-2) = -1.40601$$

$$\Rightarrow f' < 0 \text{ на } [-3, -2] \quad (1^\circ, 3^\circ f' \text{ уніка.})$$

$$4^\circ f'(x) \neq 0 \text{ на } [-3, -2]$$

$$5^\circ x_0: f(x_0)f''(x_0) > 0 \Rightarrow \bar{x}_0 = -2, x_0 = -3$$

Критерій збіжності:

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \varepsilon$$

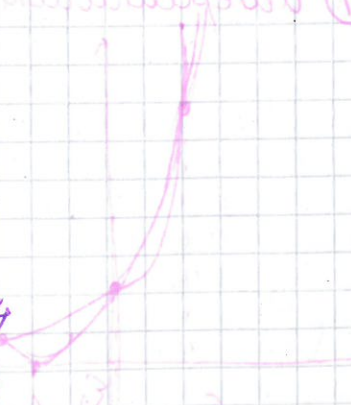
$$|f(x_n)| \leq m, \varepsilon, \quad m = \max_{[-3, -2]} |f'(x)| \Rightarrow |f(x_n)| \leq 1.19 \cdot 10^{-4}$$

$$\bar{x}_{n+1} = \bar{x}_n - \frac{f(\bar{x}_n)}{f'(\bar{x}_n)} - \text{формула Ньютона} \quad n=0, 1, \dots$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(\bar{x}_n)} (\bar{x}_n - x_n) \text{ формула Рунге} \quad n=0, 1, \dots$$

n	$\bar{x}_n$	$f(\bar{x}_n)$	$f'(\bar{x}_n)$	x_n	$f(x_n)$
0	-2	-0.54134	-1.40601	-3	0.75106
1	-2.38502	-0.01878	-1.31172	-2.41886	0.02548
2	-2.39934	-0.00002	-1.30858	-2.39938	0.00003

$$\xi \approx x^* = \frac{\bar{x}_2 + x_2}{2} = -2.39936 \quad \text{уя.} \quad x^* = -2.3994$$



Метода итерације

Решавамо j -ту $f(x)=0$, $f(x) \in [a,b]$, $\nexists! \xi \in [a,b]$.

Ово се може написати у еквивалентном облику:

$$f(x)=0 \Leftrightarrow x = \varphi(x).$$

Конструисамо низ приближних вредности $\{x_n\}$ решења x^* користећи релацију:

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad n=0,1,2,\dots$$

почевши од неке тачке $x_0 \in [a,b]$.

$$\text{Тодо је } \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n) = \varphi(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = \underline{\underline{\varphi(\bar{x})}} = \underline{\underline{\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1}}} = \underline{\underline{\bar{x}}}$$

(исказио фиксну тачку).

1. Премањивање $y = \varphi(x)$ је мање $[a,b] \rightarrow [a,b]$ је контракција ако важи број $0 \leq q < 1$ и-г.

$$\forall x_1, x_2 \in [a,b] \quad |\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \leq q |x_1 - x_2|$$

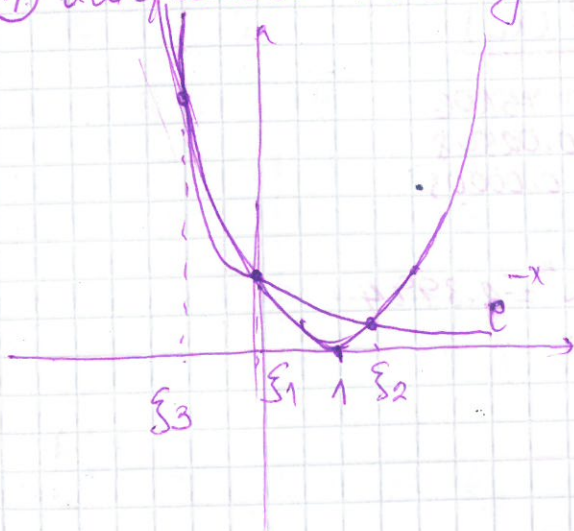
Ако је φ диференцијабилна ф-ја онда је овај услов еквивалентан услову: $|\varphi'(x)| \leq q < 1$ и-г $[a,b]$.

За x_0 се обично узима $x_0 = \frac{a+b}{2}$.

$$\text{Критеријум заустављања: } |x_n - x_{n+1}| \leq \frac{1-q}{2} \epsilon,$$

$$q = \max_{x \in [a,b]} |\varphi'(x)|$$

⑦ Итеративном методом наћи сва решења j -те $(x-1)^2 = e^{-x}$.



ξ_3 : на итеративном делу x -осе e^{-x} имамо јошне раме од $(x-1)^2$ и-г се пресеку.

$$\boxed{\xi_1 = 0}$$

$$f(x) = (x+1)^2 e^{-x}$$

$$f'(x) = 2(x+1)e^{-x}$$

$$f''(x) = 2 - e^{-x}$$

$$f'''(x) = e^{-x} > 0 \Rightarrow f''(x) \uparrow \text{ op-jia}$$

$$f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^{-x} \leq 2$$

$$\text{wj: } x \geq \ln \frac{1}{2} \\ x \geq -0.693$$

$$\xi_2: \left. \begin{aligned} f(1) &= -e^{-1} = -0.36788 < 0 \\ f(2) &= 0.86466 > 0 \end{aligned} \right\} \xi_2 \in [1, 2]$$

$$f'(1) = +0.36788$$

$$f'(2) = 2.13534$$

$$f''(x) \geq 0 \text{ uo } [1, 2] \Rightarrow f'(x) \uparrow \left\{ \begin{aligned} f'(x) &> 0 \text{ uo } [1, 2] \\ \xi_2 &\text{ je! } \text{ nula uo } [1, 2] \end{aligned} \right.$$

$$\xi_3: f(-2) = 1.61094 > 0$$

$$f(-3) = -4.08534 < 0$$

$$f'(-2) = 1.38906$$

$$f'(-3) = 12.08534$$

$$f''(x) < 0 \text{ uo } [-3, -2]$$

$$\Rightarrow f'(x) \downarrow$$

$$f'(x) > 0 \text{ uo } [-3, -2]$$

$$\Rightarrow \xi_3 \text{ je! } \text{ nula uo } [-3, -2].$$

Uokamo $\varphi(x)$:

$$(x-1)^2 = e^{-x}$$

$$|x-1| = e^{-x/2}$$

za ξ_2 , wj. uo $[1, 2]$

$$x-1 = e^{-x/2}$$

$$x = 1 + e^{-x/2} \text{ wj. } \varphi(x) = 1 + e^{-x/2}$$

$$\text{Je li je komparativna? } \varphi'(x) = -\frac{1}{2} e^{-x/2}$$

$$\varphi''(x) = \frac{1}{4} e^{-x/2} > 0 \text{ uo } [1, 2] \text{ wj } \varphi'(x) \uparrow \text{ uo } [1, 2]$$

$$\varphi'(x) = -\frac{1}{2} e^{-x/2}$$

$$\varphi'(2) = -\frac{1}{2} e^{-1}$$

$$\Rightarrow \varphi'(x) < 0 \text{ uo } [1, 2]$$

$$|\varphi'(x)| > 0 \text{ uo } [1, 2]$$

$$\text{u } |\varphi'(x)| \downarrow \text{ uo } [1, 2]$$

$$g = \max_{x \in [1, 2]} |\varphi'(x)| = |\varphi'(1)|$$

$$g = \frac{1}{2} e^{-1/2} = 0.30327$$

$$\Rightarrow \varphi \text{ je sve komparativna uo } [1, 2]$$

Критеріуми зусійованості: $|x_k - x_{k+1}| \leq \frac{1-2}{2} \epsilon = 0.00029$

$$x_0 = \frac{a+b}{2} = 1.5$$

n	x_n
0	1.5
1	1.47237
2	1.47894
3	1.47737
4	1.47774
5	1.47765

$\delta = \bar{x} = 1.47765$

Зб δ_3 : на $[-3, -2]$

$$|x-1| = 1-x$$

$$1-x = e^{-x/2} \Rightarrow x = 1 - e^{-x/2}$$

$$\varphi(x) = 1 - e^{-x/2}, \quad \varphi'(x) = \frac{1}{2} e^{-x/2} > 0$$

$$\varphi''(x) = -\frac{1}{4} e^{-x/2} < 0$$

$\Rightarrow \varphi(x)$ - опукла

$$\varrho = \max_{[-3, -2]} \varphi'(x) = \varphi'(-3) = \frac{1}{2} e^{3/2} > 1$$

$\Rightarrow \varphi$ не є контракцією на $[-3, -2]$.

Правильно групу функції φ :

$$(x-1)^2 = e^{-x} \quad \text{вл}$$

$$2 \ln|x-1| = -x$$

$$x = -2 \ln|x-1|$$

$$\varphi(x) = -2 \ln|x-1| = -2 \ln(1-x)$$

$$\varphi'(x) = \frac{2}{1-x}, \quad \varphi''(x) = \frac{2}{(1-x)^2} > 0$$

$$\varphi'(x) \nearrow \quad \varphi'(-3) = 1/2$$

$$\varphi'(2) = \frac{2}{3}$$

$$\varphi'(x) > 0 \text{ на } [-3, -2]$$

$$\Rightarrow \varrho = \max_{[-3, -2]} |\varphi'(x)| = \varphi'(2) = \frac{2}{3} < 1$$

$\Rightarrow \varphi$ є контракцією

Критеріуми зусійованості: $|x_k - x_{k+1}| \leq \frac{1-2}{2} \epsilon = 0.5 \cdot 10^{-4}$

$$x_0 = -2.5$$

n	x_n
0	-2.5
1	-2.50553
2	-2.50862
3	-2.51048
4	-2.51151
5	-2.51209
6	-2.51242
7	-2.51261
8	-2.51272
9	-2.51278
10	-2.51282

> 0.00004 ✓

$$x^* = -2.5128$$

< 1