0. УВОД

У уводној глави дефинисаћемо елементарне операторе, и даћемо кратак преглед онога што ће у даљем тексту бити изложено.

Нека је $\mathfrak{H}$ сепарабилан Хилбертов простор, и $B(\mathfrak{H})$ алгебра свих ограничених линеарних оператора на $\mathfrak{H}$. *Елементаран оператор* је пресликавање $\Lambda : B(\mathfrak{H}) \to B(\mathfrak{H})$ дефинисано са $\Lambda(X) = \sum_{j=1}^{n} A_j X B_j$, где су A_j и B_j фиксирани оператори и $n \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$. Уколико су A_j и B_j комутирајуће фамилије нормалних оператора, онда ћемо такав елементаран оператор звати *нормално репрезентован* елементаран оператор. Број n зовемо *дужина* елементарног оператора. Иако то, можда, није увек наглашено, у овом раду биће посматрани искључиво елементарни оператори коначне дужине. Овакве операторе увели су Лумер (Lumer G.) и Розенблум (Rosenblum M.) у раду [18], и даље су проучавани током седамдесетих и осамдесетих година прошлог века. Најпознатији специјални случајеви елементарних оператора су елементарни множитељ $M_{A,B}(X) = AXB$, деривација $\Delta_A(X) = AX - XA$, и уопштена деривација $\Delta_{A,B}(X) = AX - XB$.

У ствари, елементарни оператори чине подскуп скупа $B(B(\mathfrak{H}))$. Шта више, није тешко проверити да, у случају коначнодимензионалног простора $\mathfrak{H}$, елементарни оператори исцрпљују све ограничене операторе на $B(\mathfrak{H})$. Скуп $B(\mathfrak{H})$, међутим није Хилбертов, већ само Банахов простор, тако да при изучавању елементарних оператора не можемо примењивати уобичајене технике рада са операторима на Хилбертовим просторима.

Следеће четири теме биће предмет нашег интересовања.

1. Ортогоналност слике и језгра. Алгебра $B(\mathfrak{H})$ или неки симетрично нормирани идеал $\mathfrak{I}$ (изузев $\mathfrak{S}_2$) нису Хилбертови, већ само Банахови простори, у којима не важи релација паралелограма. Ипак могуће је на одређени начин дефинисати ортогоналност два вектора.

Дефиниција 0.1. *Нека су x и y вектори неког Банаховог простора. Рећи ћемо да је x ортогоналан на y, уколико за све скаларе λ, $\mu \in \mathbf{C}$ важи*

$$||\lambda x + \mu y|| \geq ||\mu y|| \tag{1}$$

Делећи релацију (1) са $|\lambda|$ ($|\mu|$) видимо да се дефиниција неће променити уколико се један од скалара λ или μ изостави. Такође лако се проверава да је у случају Хилбертовог простора релација (1) еквивалентна са

$$|\lambda|^2 \, ||x||^2 + 2 \operatorname{Re} \lambda\overline{\mu} \, \langle x, y \rangle \geq 0,$$

што онда за $\lambda = \overline{\langle x, y \rangle}$, и $\mu = - ||x||^2$ постаје

$$| \langle x, y \rangle |^2 \, ||x||^2 - 2 \, ||x||^2 \, | \langle x, y \rangle | \geq 0,$$

а то повлачи да је $\langle x, y\rangle = 0$, то јест ортогоналност у уобичајеном смислу. Напоменимо да у Банаховим просторима ова релација не мора бити симетрична, што показује следећи пример.

Пример 0.1. Посматрајмо векторе $x = (-1, 0)$ и $y = (1, 1)$ у Банаховом простору $\mathbf{C}^2$, са max-нормом. Тада је x ортогонално на y, јер је

$$||\lambda x + \mu y|| = ||(\mu - \lambda, \mu)|| = \max\{|\mu - \lambda|, |\mu|\} \geq |\mu| = ||\mu y||\,,$$

али y није ортогонално на x, јер за на пример $\lambda = 2\mu$ имамо

$$||\lambda x + \mu y|| = \max\{|\mu - 2\mu|, |\mu|\} = |\mu| < 2|\mu| = |\lambda| = ||\lambda x||\,.$$

Напомена 0.1. Овакву ортогоналност, увео је Џејмс (James R.C.) у раду [8], па се због тога најчешће говори о ортогоналности у смислу Џејмса.

Напомена 0.2. Дефиниција 0.1. поседује природну геометријску интерпретацију. Наиме, y је ортогонално на x ако и само ако комплексна права $\{x + \lambda y \,|\, \lambda \in \mathbf{C}\}$ не сече отворену лопту $K(0, ||x||)$, то јест ако и само ако је та комплексан права тангентна.

Нормално репрезентовани елементарни оператори су "законити" наследници нормалних оператора на Хилбертовом простору. Заиста, посматрајмо скуп свих елементарних оператора. Он је затворен у односу на сабирање и композицију оператора, и може се показати да чини једну Банахову алгебру. Ова алгебра се може на природан начин снабдети инволуцијом. Наиме, за оператор $\Lambda(X) = \sum_{j=1}^n A_j X B_j$ дефинишемо његов уопштени адјунговани оператор са $\Lambda^*(X) = \sum_{j=1}^n A_j^* X B_j^*$. Кажемо уопштени, зато што оваква инволуција не задовољава услов $||\Lambda^*\Lambda|| = ||\Lambda||^2$, па према томе Банахова алгебра елементарних оператора са оваквом инволуцијом није C^*-алгебра. Нормално репрезентовани елементарни оператори, имају особину да комутирају са својим уопштеним адјунгованим оператором. Нажалост то није нормалан оператор у правом смислу те речи, јер елементарни оператори не чине C^*-алгебру, па немају све особине на које смо навикли.

Показаћемо да нормално репрезентовани елементарни оператори, под неким условима поседују особину нормалних оператора да су језгро и слика међусобно ортогонални, у овом уопштеном смислу. Ове чињенице биће искоришћене у четвртом делу овог рада, при извођењу неких интересантних последица.

2. Потпуност збира слике и језгра. Нормалан оператор на Хилбертовом простору, поред особине да су му слика и језгро међусобно ортогонални, има и особину да они (слика и језгро) у збиру разапињу читав простор. Логично питање је, да ли се директан збир затворења слике, и језгра нормално репрезентованог елементарног оператора поклапа са доменом на коме он дејствује. То може бити $B(\mathfrak{H})$, али и неки од идеала компактних оператора. Ово је важно и због тога што је тај проблем тесно повезан са проблемом комплементарности језгра.

Још почетком седамдесетих година Андерсон (Anderson J.) је показао да и у најједноставнијем случају, то јест случају нормалне деривације, $\Delta_A : B(\mathfrak{H}) \to B(\mathfrak{H})$, то не мора увек бити тако. Наиме тада су увек слика и језгро међусобно ортогонални, али њихов збир попуњава читав простор $B(\mathfrak{H})$ само онда када је спектар оператора A коначан.

Хипотеза да је такав, у општем случају негативан, резултат последица несепарабилности простора $B(\mathfrak{H})$, биће оборена у овом раду. Наиме показаћемо да је одговор позитиван у случају када је домен нормалне деривације идеал $\mathfrak{S}_p$, за $1 < p \leq \infty$, док важи негативан резултат за $p = 1$.

3. Успон елементарног оператора. Успон је нумеричка карактеристика оператора, и дефинише се за произвољан линеаран оператор на било каквом векторском простору.

Дефиниција 3.1. *Успон оператора Λ, у ознаци $\operatorname{asc}\Lambda$, је најмањи природан број n такав да је $\ker\Lambda^n = \ker\Lambda^{n+1}$. Уколико таквог природног броја нема онда је $\operatorname{asc}\Lambda = +\infty$.*

Јасно, ако је $\operatorname{asc}\Lambda = 0$, онда је $\ker\Lambda = \ker I = \{0\}$, па је такав оператор $1-1$. Ако је $\operatorname{asc}\Lambda = 1$ онда слика и језгро таквог оператора имају тривијалан пресек. Заиста, из $Y \in \operatorname{ran}\Lambda \cap \ker\Lambda$ следи $Y = \Lambda(X)$, за неко X и $\Lambda(Y) = 0$, то јест $\Lambda(\Lambda(X)) = 0$. Одавде је $X \in \ker\Lambda^2 = \ker\Lambda$, па је $Y = \Lambda(X) = 0$. Важи и обратно. Ако је Λ 1-1, тада је $\operatorname{asc}\Lambda = 0$, а ако слика и језгро оператора Λ имају нетривијалан пресек, тада је $\operatorname{asc}\Lambda \leq 1$.

Показаћемо, између осталог, да је успон сваког нормално репрезентованог елементарног оператора (на $B(\mathfrak{H})$) коначне дужине коначан. Тим пре, на ужим доменима од $B(\mathfrak{H})$ он може само да се смањи.

4. Теореме типа Фаглида-Патнема. (Fuglede B., Putnam R.C.) Основни резултат у овом правцу је позната теорема Фаглида-Патнема [5], [21]:

Теорема 0.1. *Ако су A и B нормални оператори и $AX = XB$, тада је $A^*X = XB^*$.*

Доказ. Из претпоставке да је $AX = XB$ лако помоћу индукције добијамо да за сваки природан број n важи $A^nX = XB^n$. Множећи затим ове једнакости са $\overline{\lambda}^n/n!$ и сумирајући их, почев од нуле, по свим природним бројевима, имамо $e^{\overline{\lambda}A}X = Xe^{\overline{\lambda}B}$, за све комплексне бројеве λ. Дакле важи $e^{\overline{\lambda}A}Xe^{-\overline{\lambda}B} = X$. Помножимо ову једнакост са лева са $e^{-\lambda A^*}$, и са десна са $e^{\lambda B^*}$. Наравно, у општем случају једнакост $e^{\overline{\lambda}A}e^{-\lambda A^*} = e^{\overline{\lambda}A-\lambda A^*}$ не мора бити тачна, али то овде обезбеђује комутативност оператора $\overline{\lambda}A$ и λA^*. Тако је

$$e^{2i\,\mathrm{Im}\,\overline{\lambda}A}Xe^{-2i\,\mathrm{Im}\,\overline{\lambda}B} = e^{-\lambda A^*}Xe^{\lambda B^*}.$$

Функција $\varphi(\lambda) = e^{-\lambda A^*}Xe^{\lambda B^*}$ је аналитичка, и како су оператори $e^{2i\,\mathrm{Im}\,\overline{\lambda}A}$ и $e^{-2i\,\mathrm{Im}\,\overline{\lambda}B}$ унитарни, то важи $||\varphi(\lambda)|| \leq \left|\left|e^{2i\,\mathrm{Im}\,\overline{\lambda}A}\right|\right| \, ||X|| \, \left|\left|e^{-2i\,\mathrm{Im}\,\overline{\lambda}B}\right|\right| = ||X||$, па је φ и ограничена. Према теореми Лиувила онда следи да је то константна функција. Дакле $e^{-\lambda A^*}Xe^{\lambda B^*} = \varphi(0) = X$, тј. $Xe^{\lambda B^*} = e^{\lambda A^*}X$. Диференцирањем и заменом $\lambda = 0$ добијамо тражену једнакост. $\square$

Доказ који је овде изложен потиче од Розенблума [23], па се ова теорема често назива и теорема Фаглид-Патнем-Розенблума.

Ова теорема се може сагледати и на следећи начин. Ако су A и B нормални оператори, тада $\Delta_{A,B}(X) = 0$ повлачи $(\Delta_{A,B})^*(X) = 0$, то јест језгро нормалне деривације $\Delta_{A,B}$ и њене уопштене адјунговане деривације $(\Delta_{A,B})^* = \Delta_{A^*,B^*}$ се поклапају. Питање које ћемо размотрити јесте уопштење ове теореме са нормалне деривације на било који нормално репрезентован елементарни оператор. Наиме, да ли из $\sum_{j=1}^n A_jXB_j = 0$ произилази $\sum_{j=1}^n A_j^*XB_j^* = 0$, под условом да су A_j и B_j комутирајуће фамилије нормалних оператора. Испоставиће се да такав резултат у општем случају није тачан, али да ипак важи под неким додатним условима.

1. ДЕФИНИЦИЈЕ И ОСНОВНИ СТАВОВИ

Сингуларни бројеви и унитарно инваријантне норме

Пре него што пређемо на излагање резултата, задржаћемо се кратко, на неким важнијим дефиницијама и тврђењима.

Међу основним је појам сингуларног броја компактног оператора. За компактан оператор A, нека је $A = UH$ његово поларно разлагање, то јест $H = (A^*A)^{1/2} \geq 0$, и U парцијална изометрија са $\overline{\operatorname{ran} A^*}$, као почетним и $\overline{\operatorname{ran} A}$, као својим долазним потпростором. Како је H позитиван и компактан то постоји ортонормиран систем вектора φ_j такав да је $H\varphi_j = \lambda_j(H)\varphi_j$, и важи разлагање $H = \sum_{j=1}^{+\infty} \lambda_j \langle \quad, \varphi_j \rangle \varphi_j$, где је $\lambda_j = \lambda_j(H)$ низ сопствених вредности уређен у опадајући поредак, а свака вредност је поновљена онолико пута колика је њена вишеструкост. (Где год у даљем тексту буде писало опадајући низ, мисли се на низ са особином $\lambda_n \geq \lambda_{n+1}$. Наиме, аутор сматра да је далеко прикладније користити термине опадајући и строго опадајући, уместо нерастући и опадајући, респективно.) Помножимо горњу једнакост са лева са U и имамо

$$A = UH = \sum_{j=1}^{+\infty} \lambda_j \langle \quad, \varphi_j \rangle U\varphi_j.$$

Како је U парцијална изометрија, то је $\psi_j = U\varphi_j$ такође ортонормиран систем. Бројеве $\lambda_j(H) = \lambda_j\left((A^*A)^{1/2}\right)$ зовемо *сингуларни бројеви* оператора A, и означавамо са $s_j(A)$. Тако за A имамо такозвани *Шмитов развој*

$$A = \sum_{j=1}^{+\infty} s_j(A) \langle \quad, \varphi_j \rangle \psi_j.$$

Сингуларни бројеви се могу дефинисати и за произвољан ограничен оператор. Тачку λ спектра самоадјунгованог оператора A зовемо тачка есенцијалног спектра, ако је за све $\varepsilon > 0$ $E_A(\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon)\mathfrak{H}$ бесконачно димензионалан подпростор од $\mathfrak{H}$. То ће се, јасно, догодити ако и само ако је λ тачка непрекидног спектра или карактеристична вредност бесконачне вишеструкости. За дати $A \in B(\mathfrak{H})$ број $s_\infty(A)$ дефинисаћемо као супремум есенцијалног спектра оператора $|A| = (A^*A)^{1/2}$. Напоменимо, још, да се може показати да је $s_\infty(A)$ једнак норми класе оператора A у Калкиновој алгебри $B(\mathfrak{H})/\mathfrak{S}_\infty$.

У интервалу $(s_\infty(A), +\infty)$ оператор $|A|$, дакле, има само изоловане карактеристичне вредности коначне вишеструкости. Од тих тачака рачунајући њихову вишеструкост формираћемо опадајући низ. Ако је тај низ бесконачан, онда ћемо по дефиницији узети тај низ за низ $\{s_j(A)\}$. Уколико је пак коначан, рецимо дужине N, онда ћемо тај низ узети за $s_j(A)$, кад је $1 \leq j \leq N$, а за $j > N$ ставићемо $s_j(A) = s_\infty(A)$. У оба случаја је то опадајући низ који конвергира ка

$s_\infty(A)$. У ствари оператор $B = A - s_\infty(A)I - AP$, где је $P = E_{|A|}([0, s_\infty(A)])$, је компактан и $s_j(A) = s_\infty(A) + s_j(B)$.

Наводимо неке особине сингуларних бројева.

Теорема 1.1. *За сингуларне бројеве важи*

(i) $s_j(A) = s_j(A^*)$

(ii) $s_j(AB) \le ||A||\, s_j(B)$

(iii) $s_j(AB) \le s_j(A)\, ||B||$.

Доказ прве теореме је изостављен и може се наћи у [6] странице 26–28.

Теорема 1.2. *Нека је $A \in B(\mathfrak{H})$ и $\varepsilon > 0$. Тада постоје $B \in B(\mathfrak{H})$ и ортонормиран систем $\{e_j\}$ са особинама*

(i) $||B - A|| < \varepsilon$

(ii) *B^*B је дијагоналан*

(iii) *$s_j(B) = s_j(A)$ за $j = 1, 2, \ldots$*

(iv) $B^*Be_j = s_j(A)^2 e_j$.

Доказ. Ако је A компактан можемо узети $B = A$. Зато претпоставимо да A није компактан. Конструкцију оператора B изводимо на следећи начин. Узмимо поделу $0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_n = s_\infty(A)$ интервала $[0, s_\infty(A)]$ такву да је $\max_i(\alpha_{i+1} - \alpha_i) < \varepsilon$, и означимо $\mathfrak{H}_j = E_{|A|}([\alpha_i, \alpha_{i+1}))\mathfrak{H}$ за $0 \le j \le n-2$, $\mathfrak{H}_{n-1} = E_{|A|}([\alpha_{n-1}, \alpha_n])\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}_\infty = E_{|A|}((\alpha_n, +\infty))\mathfrak{H}$. Дефинишемо оператор P са $P|_{\mathfrak{H}_0} = 0$, $P|_{\mathfrak{H}_j} = \alpha_{j+1} I_{\mathfrak{H}_j}$ за $1 \le j \le n-1$, $P|_{\mathfrak{H}_\infty} = |A|\,\big|_{\mathfrak{H}_\infty}$, и ставимо $B = UP$, где је U парцијална изометрија из поларног разлагања оператора A. Ако је $s_j(A) > s_\infty(A)$, онда је e_j одговарајући сопствени вектор оператора $(A^*A)^{1/2}$, а ако је $s_j(A) = s_\infty(A)$ за $j > N$ онда узмимо да је $\{e_j\}_{j=N+1}^{+\infty}$ неки ортонормиран систем из простора $\mathfrak{H}_{n-1}$. (Овај последњи случај наступа једино када је $\mathfrak{H}_\infty$ коначнодимензионалан). Особине (i)-(iv) се, сада, директно проверавају. $\square$

Лема 3.1. [Бине-Коши] *а) Нека је A квадратна матрица типа $n \times n$, и нека су B и C правоугаоне матрице типа $n \times m$, односно $m \times n$, такве да је $A = BC$, при чему је $n < m < +\infty$. Тада је*

$$\det A = \sum_{1 \le l_1 \le l_2 \le \cdots \le l_n \le m} B\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ l_1 & l_2 & \ldots & l_n \end{pmatrix} C\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & \ldots & l_n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix},$$

где су $B\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ l_1 & l_2 & \ldots & l_n \end{pmatrix}$ и $C\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & \ldots & l_n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix}$, ознаке за одговарајуће миноре.

б) Нека је A квадратна матрица типа $n \times n$, и нека су B и C бесконачне матрице типа $n \times +\infty$, односно $+\infty \times n$, такве да је $A = BC$, при чему редови $\sum_{l=1}^{+\infty} b_{jl}c_{lk}$ конвергирају за све j, k. Тада је

$$\det A = \sum_{1 \le l_1 \le l_2 \le \cdots \le l_n} B\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ l_1 & l_2 & \ldots & l_n \end{pmatrix} C\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & \ldots & l_n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix}.$$

Доказ. а) Први део Леме је, у ствари, Теорема 33 *c*) из књиге [17].

б) Други део Леме се доказује на основу првог граничним прелазом. Наиме, нека је $B_m = [b_{jl}]_{j=1,}^{n}{}_{l=1}^{m}$ и $C_m = [c_{lk}]_{l=1,}^{m}{}_{k=1}^{n}$, и нека је $A_m = B_m C_m = [\sum_{l=1}^m b_{jl}c_{lk}]_{j,k=1}^n$. Због конвергенције редова сваки члан матрице A_m конвергира ка одговарајућем члану матрице A. Детерминанта је полиномска функција од својих чланова, и тиме непрекидна, па имамо

$$\det A = \lim_{m\to+\infty} \det A_m = \lim_{m\to+\infty} \sum_{1 \le l_1 \le l_2 \le \cdots \le l_n \le m} B\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ l_1 & l_2 & \ldots & l_n \end{pmatrix} C\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & \ldots & l_n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{1 \le l_1 \le l_2 \le \cdots \le l_n < +\infty} B\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ l_1 & l_2 & \ldots & l_n \end{pmatrix} C\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & \ldots & l_n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix}. \quad \square$$

Теорема 1.3. *За било који систем вектора* $x_1, x_2, \dots, x_k$ *важи неједнакост*

$$\det\left[\langle Ax_j, Ax_k\rangle\right]_{j,k=1}^n \le s_1(A)^2 s_2(A)^2 \dots s_n(A)^2 \det\left[\langle x_j, x_k\rangle\right]_{j,k=1}^n .$$

Доказ. Узмимо оператор B и ортонормиран систем $\{e_j\}$ из Теореме 1.2. и имамо

$$\begin{aligned}\langle Bx_j, Bx_k\rangle = \langle B^*Bx_j, x_k\rangle &= \sum_{l=1}^{+\infty} \langle B^*Bx_j, e_l\rangle \langle e_l, x_k\rangle \\ &= \sum_{l=1}^{+\infty} s_l^2 \langle x_j, e_l\rangle \langle e_l, x_k\rangle ,\end{aligned}$$

то јест $[\langle Bx_j, Bx_k\rangle]_{j,k=1}^n = \mathbf{BB}^*$, где је $\mathbf{B} = [s_j \langle x_k, e_j\rangle]_{k=1,}^{n}{}_{j=1}^{+\infty}$. Сада, према Леми 3.1, имамо

$$\begin{aligned}\det\left[\langle Bx_j, Bx_k\rangle\right]_{j,k=1}^n = &\sum_{1\le l_1\le\dots\le l_n<+\infty} \mathbf{B}\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & n\\ l_1 & l_2 & \dots & l_n\end{pmatrix} \mathbf{B}\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & n\\ l_1 & l_2 & \dots & l_n\end{pmatrix}^* \\ \le & s_1^2 s_2^2 \dots s_n^2 \sum_{1\le l_1\le\dots\le l_n<+\infty} \mathbf{C}\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & n\\ l_1 & l_2 & \dots & l_n\end{pmatrix} \mathbf{C}\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & n\\ l_1 & l_2 & \dots & l_n\end{pmatrix}^* \\ = & s_1^2 s_2^2 \dots s_n^2 \det[\langle x_j, x_k\rangle],\end{aligned}$$

где смо са $\mathbf{B}\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & n\\ l_1 & l_2 & \dots & l_n\end{pmatrix}$, односно $\mathbf{C}\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & n\\ l_1 & l_2 & \dots & l_n\end{pmatrix}$ означили оне миноре, који су добијени од $l_1, l_2, \dots, l_n$-те колоне матрице $\mathbf{B}$, односно $\mathbf{C} = [\langle x_k, e_j\rangle]_{k=1,}^{n}{}_{j=1}^{+\infty}$.

Резултат сада следи на основу непрекидности детерминанте јер разлика $||B - A||$ може бити произвољно мала. $\square$

Теорема 1.4. (*Неједнакост Хорна*) $\prod_{j=1}^k s_j(AB) \le \prod_{j=1}^k s_j(A)s_j(B)$ *за* $k = 1, 2, \dots$

Доказ. На основу претходне теореме имамо, за сваки ортонормиран систем $\{x_j\}$:

$$\begin{aligned}\det\left[\langle ABx_i, ABx_j\rangle\right]_{i,j=1}^k \le & s_1^2(A)\dots s_k^2(A) \det\left[\langle Bx_i, Bx_j\rangle\right]_{i,j=1}^k \\ \le & s_1^2(A)\dots s_k^2(A) s_1^2(B)\dots s_k^2(B) \det\left[\langle x_i, x_j\rangle\right]_{i,j=1}^k \\ = & s_1^2(A)\dots s_k^2(A) s_1^2(B)\dots s_k^2(B).\end{aligned}$$

Сада ћемо на основу Теореме 1.2, одабрати ортонормиран низ $\{x_j\}$, тако да буде испуњена неједнакост $\left|\left|(AB)^*ABx_i - s_i^2(AB)x_i\right|\right| \le \delta/n^2$. У том случају ће норма разлике матрица $[\langle ABx_i, ABx_j\rangle]_{i,j=1}^k$ и $\operatorname{diag}(s_i(AB))$ бити мања од δ. А δ ћемо одабрати тако да разлика детерминанти буде мања или једнака од неког унапред задатог броја ε. То је могуће урадити због непрекидности детерминанте. Тако ће лева страна горње неједнакости бити већа или једнака од $s_1^2(AB)\dots s_k^2(AB) - \varepsilon$. Теорема је овиме доказана јер ε може бити произвољно мало. $\square$

Сада ћемо прећи на појам унитарно инваријантне норме. Нека је $\mathfrak{J}$ неки двострани идеал у $B(\mathfrak{H})$. Норма $\|\ \|$ на $\mathfrak{J}$ је унитарно инваријантна ако једнакост $\|UAV\| = \|A\|$ важи за све унитарне операторе U и V из $B(\mathfrak{H})$, и ако је $\|A\| = ||A|| = s_1(A)$ за сваки оператор A ранга један. Испоставља се да свака унитарно инваријантна норма зависи искључиво од низа $s_j(A)$, и да има свој природан домен у виду неког двостраног идеала. (Подразумева се да је познато да нема нетривијалних двостраних идеала већих од $\mathfrak{S}_\infty$, нити мањих од идеала оператора коначног ранга). У ствари, свака унитарно инваријантна норма генерисана је неком функцијом Φ на скупу низова, са $\|A\| = \Phi(s_1(A), s_2(A), \dots)$, која задовољава особине

(*i*) $\Phi(s) > 0$, за $s \ne 0$

(*ii*) $\Phi(\alpha s) = |\alpha|\Phi(s)$
(*iii*) $\Phi(s+t) \leq \Phi(s) + \Phi(t)$
(*iv*) $\Phi(\xi_1, \xi_2, \dots) = \Phi(|\xi_{j_1}|, |\xi_{j_2}|, \dots)$ за сваку пермутацију $k \to j_k$ природних бројева
(*v*) $\Phi(1, 0, 0, \dots) = 1$.

И обратно, свака таква функција генерише неку унитарно инваријантну норму. Овакве функције зовемо *симетричне нормирајуће функције*, а одговарајуће идеале *симетрично нормирани идеали*.

Други услов у дефиницији унитарно инваријантне норме, који је у ствари неки услов нормализације, изједначује на операторима ранга један две основне норме, униформну и нуклеарну. *Униформна норма* дефинисана на целом $B(\mathfrak{H})$ је у ствари уобичајена операторска норма $||A|| = \sup_{||x||=1} ||Ax|| = s_1(A) = \max_{j\geq 1} s_j(A)$. *Нуклеарна норма* је $||A||_1 = \sum_{j=1}^{+\infty} s_j(A)$. Њен природан домен је скуп оних компактних оператора за које ред $\sum_{j=1}^{+\infty} s_j(A)$ конвергира. Тај скуп означавамо са $\mathfrak{S}_1$ и зовемо идеал *нуклеарних оператора*. Међу свим унитарно инваријантним нормама нуклеарна је највећа, а униформна најмања, то јест за произвољну унитарно инваријантну норму важи неједнакост $||X|| \leq |||X||| \leq ||X||_1$. Самим тим, униформна норма генерише најслабију, а нуклеарна најјачу топологију.

Скуп $\mathfrak{S}_1$ је важан и из других разлога. Наиме, то је максималан скуп оператора на којем је могуће дефинисати траг. Траг оператора A може бити матрични, то јест $\sum_{j=1}^{+\infty} \langle A\varphi_j, \varphi_j\rangle$, за неки ортонормиран систем $\{\varphi_j\}$, или спектрални, збир свих сопствених вредности. Основни резултат о траговима чини теорема Лидског, која тврди да је за било који нуклеаран оператор матрични траг коначан, не зависи од избора ортонормираног система и да је једнак спектралном трагу. На основу тога није тешко извести да је траг ограничен линеаран функционал на простору $\mathfrak{S}_1$, и да му је норма једнака јединици.

Између нуклеарне и униформне норме могу се интерполирати Шатенове (Schatten R.) p-норме $||A||_p = \left(\sum_{j=1}^{+\infty} s_j(A)^p\right)^{1/p}$ чији је природни домен $\mathfrak{S}_p = \{A \in \mathfrak{S}_\infty |\, ||A||_p < +\infty\}$. Међу $\mathfrak{S}_p$ идеалима посебно је интересантан $\mathfrak{S}_2$ идеал Хилберт-Шмитових оператора, јер се он може на природан начин снабдети скаларним производом. Наиме за A, $B \in \mathfrak{S}_2$ оператор AB^* припада $\mathfrak{S}_1$, па дефиниција $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB^*)$ има смисла. Норма која извире из овако дефинисаног скаларног производа је управо Шатенова 2-норма. Сасвим очекиван резултат јесте дуалност између $\mathfrak{S}_p$ и $\mathfrak{S}_q$ $(1/p + 1/q = 1)$. Сваки функционал $\varphi \in \mathfrak{S}_p^*$ једнозначно је генерисан неким оператором $Y \in \mathfrak{S}_q$ на следећи начин, $\varphi(X) = \mathrm{tr}(XY)$. При томе важи $||\varphi||_{\mathfrak{S}_p^*} = ||Y||_{\mathfrak{S}_q}$. Помоћу исте једнакости остварује се изоморфизам између $\mathfrak{S}_1^*$ и $B(\mathfrak{H})$.

Други вид интерполације између нуклеарне и униформне норме чине такозване Ки Фанове (Fan Ky) норме $||A||_{(k)} = \sum_{j=1}^{k} s_j(A)$. За њихов домен може се узети било $\mathfrak{S}_\infty$, било $B(\mathfrak{H})$. Значај ових норми огледа се у следећем правилу, које је познато под именом *доминационо својство Ки Фана*.

Теорема 1.5. *Да би неједнакост $|||A||| \leq |||B|||$ важила за сваку унитарно инваријантну норму неопходно је и довољно да је $||A||_{(k)} \leq ||B||_{(k)}$ за $k = 1, 2, \dots$*

Доказ ове теореме налази се у [6], страница 82.

Спектрално разлагање комутирајуће фамилије нормалних оператора

У овом пододељку подсетићемо се неких чињеница везаних за спектрално разлагање комутирајуће фамилије нормалних оператора и функционални модел. Због обиља техничких детаља докази ће бити изостављени.

Постоје разни облици спектралне теореме, у зависности од тога шта се разлаже. То може бити унитаран оператор, неограничен самоадјунгован, затим нормалан, али и одређене фамилије. Ми ћемо формулисати спектралну теорему за комутирајућу фамилију нормалних оператора, након што дефинишемо појам спектралне мере.

Дефиниција 1.1. *Спектралном мером називамо пресликавање $E : \mathfrak{M} \to B(\mathfrak{H})$, где је $\mathfrak{M}$ нека σ-алгебра на скупу X, и $\mathfrak{H}$ неки Хилбертов простор, ако важе следећи услови. $E(\delta)^2 = E(\delta)^* = E(\delta)$*

за сваки скуп $\delta \in \mathfrak{M}$ (вредности су ортопројектори); $E(\emptyset) = 0$; $E(X) = I$ (јединични оператор) и за сваку пребројиву фамилију дисјунктних скупова важи $E(\sqcup\delta_j) = \sum E(\delta_j)$, при чему ред јако конвергира.

Спектралну меру, дакле, можемо посматрати као меру чије вредности нису бројеви, већ позитивни пројектори.

Теорема 1.6. (*Спектрална теорема*) *Нека су $T_1, T_2, \ldots, T_n \in B(\mathfrak{H})$ нормални оператори, који два по два комутирају. Тада постоји јединствена спектрална мера E на скупу $\mathbf{C}^n$ тако да за све $1 \leq j \leq n$ важи $T_j = \int_{\mathbf{C}^n} z_j \mathrm{d}E$.*

У суштини спектрална теорема је дијагонализација нормалног оператора.

Постоје различити докази спектралне теореме. Један начин, заступљен у [34] је заснован на употреби Гељфандове трансформације. Наиме, посматрајмо минималну C^*-алгебру $\mathcal{A}$ (са јединицом) која садржи све операторе T_j (а то ће рећи алгебру генерисану са I, T_j и T_j^*). Према првој теореми Гељфанда-Најмарка, та је алгебра изоморфна алгебри непрекидних функција на простору њених максималних идеала. Показује се да је то неки подскуп скупа $\mathbf{C}^n$. Тако је свака непрекидна функција на том скупу Гељфандова трансформација $\hat{S}$ неког оператора $S \in \mathcal{A}$. Спектрална теорема тврди да је $S = \int_{\mathbf{C}^n} \hat{S} \mathrm{d}E$ за сваки $S \in \mathcal{A}$ и за погодно одабрану спектралну меру E, што ће рећи да је $\langle Sx, y\rangle = \int_{\mathbf{C}^n} \hat{S} \mathrm{d}\mu_{x,y}$, где је $\mu_{x,y}$ скаларна мера дефинисана са $\mu_{x,y}(\delta) = \langle E(\delta)x, y\rangle$. Доказ се заснива на теореми Риса о репрезентацији позитивних функционала, јер заиста, пресликавање $\hat{S} \mapsto \langle Sx, x\rangle$ јесте позитиван функционал на скупу непрекидних функција. Према теореми Риса постоји јединствена Борелова мера $\mu_{x,x}$. Помоћу ње поларизационим идентитетом могуће је добити мере $\mu_{x,y}$ и даље спектралну меру E.

Постоји и директна конструкција спектралне мере, без употребе Гељфандове трансформације и без теореме Риса, и тај приступ је заступљен у [31].

Дефиниција 1.2. *Носач спектралне мере E из претходне Теореме, назива се здружени (или заједнички) спектар n-торке оператора $T_1, T_2, \ldots, T_n$, и означава са $\sigma(T_1, T_2, \ldots, T_n)$ или $\sigma(T)$.*

Такође важи и ова теорема.

Теорема 1.7. *Сваки оператор који комутира са свим оним операторима који комутирају са свим T_j, може се представити као интеграл неке есенцијално ограничене (у смислу мере E) у односу на спектралну меру фамилије оператора T_j.*

Релативно неприродан услов "комутира са свим што комутира са свим T_j" може се заменити слабијим условом комутира са свим T_j, једино у случају када је спектрална мера фамилије $\{T_j\}$ проста. Овај појам биће образложен нешто касније. Међутим услов под наводницима постаје много мање неприродан ако узмемо у обзир Теорему Нојмана (Neumann J.) о бикомутанту ([33], Теорема 4.1.5).

Теорема 1.8. (*фон Нојмана о бикомутанту*) *Нека је $\mathcal{A}$ нека C^* подалгебра алгебре $B(\mathfrak{H})$, $\Gamma(\mathcal{A})$ њен комутант $\Gamma(\mathcal{A}) = \{X \in B(H) \,|\, \forall A \in \mathcal{A} \;\; AX = XA\}$ и $\Gamma(\Gamma(\mathcal{A}))$ њен бикомутант. Тада се $\Gamma(\Gamma(\mathcal{A}))$ подудара са затворењем алгебре $\mathcal{A}$ у јакој операторној топологији.*

Напомена 1.1. На тај начин је (комутативна) C^*-алгебра изоморфна са $C(K)$ за неки компакт K, док је фон Нојманова алгебра изоморфна са $L^\infty(K)$. Тако се понегде каже да је теорија C^*-алгебри некомутативна топологија, док је теорија фон Нојманових алгебри некомутативна теорија мере.

Сада ћемо приступити опису конструкције функционалног модела. Познато је да Фуријеова трансформација преводи оператор диференцирања у оператор множења независном променљивом, односно да $\partial/\partial x_j$ Фуријеовом трансформацијом прелази у множење са x_j ($\partial/\partial x_j = F^{-1}M_{x_j}F$). Такође, познато је да је Фуријеова трансформација унитарно пресликавање простора L^2, тако да је, у ствари $\partial/\partial x_j$ унитарно еквивалентан оператору M_{x_j}. Уопштење ове просте констатације је конструкција функционалног модела, што, у случају једног оператора, чини главу број 7 у [31]. Ми ћемо дати само скицу ове конструкције.

Теорема 1.9. *Нека је спектрална мера E комутирајуће фамилије нормалних оператора $T_1, T_2, \dots, T_n$ проста. Тада постоји унитаран оператор Φ на простору $L^2(\sigma(T),\mu)$ такав да је за свако j оператор $\Phi^{-1}T_j\Phi$, оператор множења са z_j. Мера μ је, при томе, еквивалентна са E (дефинише исте скупове мере нула).*

Простота спектралне мере се лако дефинише у коначнодимензионалном случају. Наиме, тада је E проста ако и само ако оператори T_j немају вишеструких карактеристичних вредности, са заједничким карактеристичним вектором. Такође важи једноставна карактеризација: фамилија T_j има просту спектралну меру ако и само ако постоји циклични вектор, то јест вектор x, такав да је $\mathcal{L}\{x, T_jx, T_j^2x, \dots\} = \mathfrak{H}$. Заиста, како T_j чине комутирајућу фамилију нормалних оператора, може се одабрати таква база да T_j имају матрице

$$T_j = \begin{bmatrix} \lambda_1^{(j)} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^{(j)} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n^{(j)} \end{bmatrix}.$$

Ако су сви низови $\{\lambda_i^{(j)}\}_{j=1}^m$ међу собом различити тада је вектор $x = (1, 1, \dots, 1)$ циклични. С друге стране, ако је, на пример, $\lambda_1^{(j)} = \lambda_2^{(j)}$, за све j и $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, тада се лако види да је вектор $(-x_2, x_1, 0, \dots, 0)$ ортогоналан на $T_j^k x$ за свако k, j.

У бесконачно димензионалном случају простота спектралне мере се доста теже дефинише, али важи иста карактеризација: Фамилија T_j има просту спектралну меру ако и само ако постоји циклични вектор, то јест такав вектор x да је $\overline{\mathcal{L}\{x, T_jx, T_j^2x, \dots\}} = \mathfrak{H}$, и тада важи горња теорема. У случају када фамилија T_j нема просту спектралну меру, тада су такође сви T_j унитарно еквивалентни оператору множења са z_j, али не на $L^2(\sigma(T),\mu)$ већ на директном интегралу

$$\int_{\sigma(T)}^{\oplus} G(y)\mathrm{d}\mu, \tag{2}$$

где су простори $G(y)$ простори димензије строго веће од један (када је $\dim G(y) = 1$ за скоро свако y тада је интеграл (2) изоморфан са $L^2(\sigma(T))$). Међутим, и када је вишеструкост већа, показује се да је интеграл (2) изоморфан неком простору $L^2(Y,\mu)$. Да би се ово доказало довољно је знати да је $L^2(X_1,\mu_1) \oplus L^2(X_2,\mu_2) \cong L^2(X_1 \bigsqcup X_2, \mu_1 + \mu_2)$, као и да је $L^2(X_1, \mu_1, L^2(X_2,\mu_2)) \cong L^2(X_1 \times X_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$, где је са $L^2(X_1,\mu_1,L^2(X_2,\mu_2))$ означен Хилбертов простор свих функција $f : X_1 \to L^2(X_2,\mu_2)$ таквих да је $||f||^2 = \int_{X_1} ||f(x)||^2_{L^2(X_2,\mu_2)}\mathrm{d}\mu_1(x) < +\infty$. (Последњи изоморфизам је дат са $f(x)(y) \leftrightarrow f(x,y)$.)

Оваквим расуђивањем можемо да изведемо следећу Теорему.

Теорема 1.10. *Нека је $A_1, \dots A_n$ комутирајућа фамилија нормалних оператора. Тада је, до на унитарну еквивалентност, $A_j = M_{\varphi_j}$ оператор множења са φ_j, на неком простору $L^2(Y,\mu)$. Мера μ се може одабрати да буде вероватносна, то јест $\mu(Y) = 1$, а скуп Y је највише пребројива дисјунктна унија скупа $\sigma(\{A_j\})$ и његових делова.*

Напомена 1.2. Заједно са деформацијом простора од $\sigma(T)$ ка Y деформишу се и функције z_j у неке које немају лепе особине.

Како бисмо појаснили појам простоте спектралне мере, размотрићемо и један пример.

Пример 1.1. Нека је $A : L^2(0,1) \to L^2(0,1)$ дат са $Af(t) = tf(t)$, и нека је $T : L^2(0,1) \oplus L^2(0,1) \to L^2(0,1) \oplus L^2(0,1)$ дат са $T = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}$. Може се показати да је $\sigma(T) = [0,1]$ и да је вишеструкост спектралне мере оператора T у свакој тачки једнака 2, без обзира што T нема ниједну карактеристичну вредност. T је унитарно еквивалентан (према горњој конструкцији) са оператором $\tilde{T} : L^2([0,1] \cup [2,3]) \to T : L^2([0,1] \cup [2,3])$ датим са $\tilde{T}f(t) = \varphi(t)f(t)$, где је $\varphi(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t \le 1 \\ t-2 & 2 \le t \le 3 \end{cases}$.

Ово поглавље завршићемо следећом важном теоремом.

Теорема 1.11. Нека је $A_1, A_2, \dots, A_n$ нека фамилија нормалних оператора који два по два комутирају. Тада постоји нормалан оператор A, и ограничене Борелове функције $f_1, f_2, \dots, f_n$, такве да за све $1 \le j \le n$ важи $f_j(A) = A_j$.

Доказ ове теореме, али и детаљи другог дела ове главе, могу се пронаћи у [30], одељак 92 или [22], одељак 130.

Напомена 1.3. Теорему 1.11 можемо и другачије доказати. Наиме Теорема 8 из [24], Глава 14, одељак 3, тврди да за сваку вероватносну Борелову меру μ на сепарабилном метричком простору X, постоји Борелов скуп X_0, μ мере 0, и $Y_0 \subseteq [0,1]$ Лебегове мере 0 и пресликавање $\psi : X \to [0,1]$, које је бијекција, до на скупове X_0 и Y_0. Ако ту Теорему применимо на скуп $\sigma(\{A_j\})$ добићемо функцију $\psi : \sigma(\{A_j\}) \to \mathbf{R}$, која је бијекција (до на скупове мере нула). Како је простор Y из Теореме 1.10 мултиплициран скуп $\sigma(\{A_j\})$, то закључујемо да постоје функција $\varphi : Y \to \mathbf{R}$, и функције $f_j : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ такве да је $\varphi_j = f_j \circ \varphi$. Ако ставимо $A = M_\varphi$ оператор множења са φ на Y, онда смо доказали Теорему 1.11, другачијим путем него што је то урађено у [30] и [22]. Ово ће бити од нарочите користи при доказу Леме 3.2.

2. ОРТОГОНАЛНОСТ СЛИКЕ И ЈЕЗГРА

Наслов ове главе је унеколико скраћен. Наиме, поред ортогоналности слике и језгра посматраћемо још и потпуност њиховог збира.

Ортогоналност

Први резултат у овом правцу припада Андерсону [2], и односи се на нормалне деривације.

Теорема 2.1. *Нека су T, $S \in B(\mathfrak{H})$. Ако је оператор T изометрија или нормалан, онда из $TS = ST$ произилази $||TX - XT + S|| \geq ||S||$.*

Доказ ове теореме извешћемо у неколико корака, а биће нам потребна и једна лема.

Лема 2.1. *Нека су $P_1, P_2, \dots, P_n$ међусобно ортогонални ортопројектори (у ствари битно је једино да важи $P_i P_j = \delta_{ij} P_i$), и нека су $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ n-торке различитих, не нула, комплексних бројева, $Q_1 = \sum_{i=1}^n \lambda_i P_i$ и $Q_2 = \sum_{i=1}^n \mu_i P_i$. Тада се слике пресликавања $\Delta_{Q_1}(X) = Q_1 X - X Q_1$ и $\Delta_{Q_2}(X) = Q_2 X - X Q_2$ поклапају.*

Доказ. Ставимо $P_0 = I - \sum_{j=1}^n P_j$. Лако проверавамо да важи $P_0^2 = P_0$, и $P_0 P_j = P_j P_0 = 0$ за $j > 0$. Ако узмемо $\lambda_0 = \mu_0 = 0$, тада имамо $Q_1 = \sum_{j=0}^n \lambda_j P_j$ и $Q_2 = \sum_{j=0}^n \mu_j P_j$ и онда важи

$$\begin{aligned}\Delta_{Q_1}(X) = Q_1 X I - I X Q_1 &= \left(\sum_{i=0}^n \lambda_i P_i\right) X \left(\sum_{j=0}^n P_j\right) - \left(\sum_{i=0}^n P_i\right) X \left(\sum_{j=0}^n \lambda_j P_j\right) \\ &= \sum_{i,j=0}^n (\lambda_i - \lambda_j) P_i X P_j,\end{aligned}$$

и слично

$$\Delta_{Q_2}(X) = \sum_{i,j=0}^n (\mu_i - \mu_j) P_i X P_j$$

Одавде следи тврђење, јер је $\lambda_i - \lambda_j \neq 0$, $\mu_i - \mu_j \neq 0$ за $i \neq j$. $\square$

Доказ Теореме 2.1. Нека је најпре T изометрија. Ако је $ST = TS$ лако се проверава да важи

$$-nT^{n-1}S = T^n X - X T^n - \sum_{i=0}^{n-1} T^{n-1-i}(TX - XT + S)T^i.$$

Ако узмемо норму леве и десне стране добијамо

$$\begin{aligned} n\,||S|| = n\,\left|\left|T^{n-1}S\right|\right| = &\left|\left|T^nX - XT^n - \sum_{i=0}^{n-1} T^{n-1-i}(TX - XT + S)T^i\right|\right| \\ \leq &\,||T^nX|| + ||XT^n|| + \sum_{i=0}^{n-1} \left|\left|T^{n-1}(TX - XT + S)T^i\right|\right| \\ \leq &2\,||X|| + n\,||TX - XT + S||\,, \end{aligned}$$

то јест

$$||S|| \leq \frac{2}{n}\,||X|| + ||TX - XT + S||\,.$$

Преласком на лимес када n тежи ка бесконачно, добијамо тражену неједнакост.

Нека је сада T самоадјунгован оператор и $U = (T - iI)(T + iI)^{-1}$ његова Кејлијева трансформација. Познато је ([31] страна 101) да је U унитаран оператор, чији спектар не садржи тачку 1 (и према томе изометричан), и да је $T = i(I+U)(I-U)^{-1}$, као и да оператори T и U комутирају. Рачунамо:

$$\begin{aligned} \Delta_T(X) =&(T - iI)X - X(T - iI) = U(T + iI)X - X(T + iI)U \\ =&U(T + iI)X - (T + iI)XU + (T + iI)XU - X(T + iI)U \\ =&\Delta_U((T + iI)X) + \Delta_T(XU), \end{aligned}$$

то јест

$$\Delta_T(X(I - U)) = \Delta_U((T + iI)X).$$

Како су оба оператора $I - U$, и $T + iI$ инвертибилна, закључујемо да оператори Δ_T и Δ_U имају исту слику. Међутим имају и исто језгро, јер како се могу написати један као функција од другог, то из $TS = ST$ следи $US = SU$ и обратно. Сада резултат следи на основу претходног случаја.

Нека је сада T нормалан оператор. Према спектралној теореми T се може представити као униформни лимес оператора облика $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i E(\delta_i)$, где су сви λ_i различити и δ_i дисјунктни подскупови спектра оператора T. Због тога је довољно доказати неједнакост

$$\left|\left|\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i E(\delta_i)\right) X - X\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i E(\delta_i)\right) + S\right|\right| \geq ||S||\,.$$

Међутим због Леме 2.1, скаларе λ_i могуће је заменити неким различитим реалним бројевима μ_i, а $ST = TS$ повлачи да S комутира са свим спектралним пројекторима, то јест са свим $E(\delta_i)$. Резултат сада следи јер је оператор $\sum_{i=1}^{n} \mu_i E(\delta_i)$ самоадјунгован. $\square$

Претходна теорема Андерсона означава да је слика оператора $\Delta_T : B(\mathfrak{H}) \to B(\mathfrak{H})$ датог са $\Delta_T(X) = TX - XT$, ортогонална на његово језгро, у смислу Дефиниције 0.1. Ову теорему је уопштио Китанех [14] (Kittaneh F.), посматрајући операторе $\Delta_T : \mathfrak{J} \to \mathfrak{J}$. Другим речима Китанех је униформну норму у теореми Андерсона заменио произвољном унитарно инваријантном нормом.

Теорема 2.2. *Нека је T нормалан оператор и $TS = ST$. Тада $TX - XT + S \in \mathfrak{J}$ повлачи $\|TX - XT + S\| \geq \|S\|$ у свакој унитарно инваријантној норми. Другим речима, $\operatorname{ran}\Delta_T$ је ортогонални на $\ker\Delta_T$ у сваком симетрично нормираном идеалу $\mathfrak{J}$.*

Доказ. Размотримо најпре случај, када је оператор T дијагоналан. Тада важи разлагање $\mathfrak{H} = \oplus_{i=1}^{+\infty} \ker(T - \lambda_i I)$. У таквој декомпозицији представимо операторе T, S и X матрицама:

$$T = \begin{bmatrix} \lambda_1 I & 0 & \dots \\ 0 & \lambda_2 I & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}; \quad S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \dots \\ S_{21} & S_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}; \quad X = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & \dots \\ X_{21} & X_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Из претпоставке да је $TS = ST$ произилази да сопствени подпростори оператора T разлажу S, а то ће рећи да је $S_{ij} = 0$ за $i \neq j$. Даље простим рачуном добијамо

$$TX - XT + S = \begin{bmatrix} S_{11} & & * \\ & S_{22} & \\ * & & \ddots \end{bmatrix}.$$

Сада користећи Теорему $III4.2.$ из [6] о "пинчинг" оператору имамо:

$$\|TX - XT + S\| = \left\| \begin{bmatrix} S_{11} & & * \\ & S_{22} & \\ * & & \ddots \end{bmatrix} \right\| \geq \left\| \begin{bmatrix} S_{11} & & 0 \\ & S_{22} & \\ 0 & & \ddots \end{bmatrix} \right\| = \|S\|.$$

Размотримо сада општи случај. Нека је $\mathfrak{H}_1 = \oplus_{j=1}^{+\infty} \ker(T - \lambda_j I)$, где су λ_j различите сопствене вредности оператора T и $\mathfrak{H}_2 = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{H}_1$. У односу на разлагање $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$, представимо операторе T, S и X операторним два пута два матрицама:

$$T = \begin{bmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{bmatrix}; \quad S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}; \quad X = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix}.$$

С обзиром да је $TS = ST$, потпростор $\mathfrak{H}_1$ је инваријантан за S, а по теореми Фаглида-Патнема је и $TS^* = S^*T$, па је $\mathfrak{H}_1$ инваријантан и за S^*, то јест $\mathfrak{H}_1$ разлаже S. Тако је $S_{12} = 0$ и $S_{21} = 0$. Доказаћемо да је S_{22} такође једнако нули. Да бисмо то урадили ослонићемо се на познату другу Теорему Гељфанда-Најмарка, која тврди да је свака C^*-алгебра изометрички изоморфна некој подалгебри алгебре ограничених линеарних оператора на неком Хилбертовом простору ([34], Теорема 12.41.)

Из претпоставке да је $\Delta_T(X) + S \in \mathfrak{S}_\infty$ излази да је $\Delta_T(X) + S = 0$ у Калкиновој C^*-алгебри $B(\mathfrak{H})/\mathfrak{S}_\infty$. Када применимо Теорему 2.1 на $B(\mathfrak{H})/\mathfrak{S}_\infty$, као подалгебру алгебре свих ограничених оператора на неком Хилбертовом простору $\hat{\mathfrak{H}}$ (Гељфанд-Најмаркова Теорема) добијамо $S = 0$ у $B(\mathfrak{H})/\mathfrak{S}_\infty$, то јест $S \in \mathfrak{S}_\infty$, па је тиме и $S_{22} = (P_{\mathfrak{H}_2} S P_{\mathfrak{H}_2})\big|_{\mathfrak{H}_2} \in \mathfrak{S}_\infty$. Како је $T_2 S_{22}^* S_{22} = S_{22}^* S_{22} T_2$ и T_2 нема не нула сопствених вредности, нема их ни $S_{22}^* S_{22}$. Значи $S_{22}^* S_{22}$ је компактан самоадјунгован оператор који нема не нула сопствених вредности, а једини такав је 0. Дакле $S_{22}^* S_{22} = 0$, то јест $S_{22} = 0$.

Сада се доказ једноставно завршава, јер користећи доказан специјалан случај имамо:

$$\|TX - XT + S\| = \left\| \begin{bmatrix} T_1 X_{11} - X_{11} T_1 + S_{11} & * \\ * & * \end{bmatrix} \right\| \geq \|T_1 X_{11} - X_{11} T_1 + S_{11}\| \geq \|S_{11}\| = \|S\|,$$

чиме је теорема у потпуности доказана. $\square$

Ова теорема, дакле, уопштава теорему Андерсона, тако што проширује класу норми. Следећих неколико теорема (Кечкић) [10]) проширује класу оператора.

Теорема 2.3. *Нека су A и B комутирајући нормални оператори, такви да је $A^*A + B^*B > 0$ (то јест $\ker A \cap \ker B = \{0\}$). Тада, уколико је $ASB = BSA$, онда је*

$$\|AXB - BXA + S\| \geq \|S\|,$$

у свакој унитарно инваријантној норми. Другим речима слика оператора $E(X) = AXB - BXA$ ортогонална је на његово језгро.

Доказ. Доказ ћемо спровести у три корака.

(i) Нека је, за почетак, B инвертибилан оператор. Тада једнакости $ASB = BSA$ и $AB = BA$ повлаче $AB^{-1}S = SAB^{-1}$, па према Теореми 2.2, примењеној на операторе AB^{-1}, S и BXB имамо

$$\|AXB - BXA + S\| = \|AB^{-1}(BXB) - (BXB)AB^{-1} + S\| \geq \|S\|.$$

(ii) Нека је сада B "$1-1$" оператор. Нека је $\Delta_n = \{z \in \mathbf{C} \,|\, |z| \le 1/n\}$ и $P_n = I - E_B(\Delta_n)$, где је $E_B(\Delta_n)$ одговарајући спектрални пројектор. Низ P_n је, јасно, растући низ пројектора, и он јако конвергира ка пројектору на минимални подпростор, који садржи слике свих пројектора P_n, а то ће рећи ка $I - E_B(\{0\})$, што је у ствари I, због тога што је B "$1-1$". Тиме низ оператора P_nSP_n јако (а довољно је и слабо) конвергира ка S. Како A и B комутирају и при томе су нормални, то $P_n\mathfrak{H}$ разлаже A. Тако, у односу на разлагање $\mathfrak{H} = P_n\mathfrak{H} \oplus (I - P_n)\mathfrak{H}$ имамо

$$B = \begin{bmatrix} B_1^{(n)} & 0 \\ 0 & B_2^{(n)} \end{bmatrix}; \quad A = \begin{bmatrix} A_1^{(n)} & 0 \\ 0 & A_2^{(n)} \end{bmatrix}; \quad S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}; \quad X = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix},$$

при чему је $B_1^{(n)}$ инвертибилан, што се лако види, јер му спектар не садржи диск Δ_n. Сада је према претходном случају

$$\|AXB - BXA + S\| \ge \|P_n(AXB - BXA + S)P_n\| = \\ \left\| A_1^{(n)}X_{11}B_1^{(n)} - B_1^{(n)}X_{11}A_1^{(n)} + S_{11} \right\| \ge \|S_{11}\| = \|P_nSP_n\|.$$

Узимајући супремум имамо $\sup_n \|P_nSP_n\| < +\infty$, и $P_nSP_n \to S$, слабо, па се према Леми III5.1. из [6] закључује да $S \in \mathfrak{J}$, и $\|S\| \le \sup_n \|P_nSP_n\| \le \|AXB - BXA + S\|$.

(iii) Најзад, нека је $\ker B \cap \ker A = \{0\}$. Разложимо простор $\mathfrak{H}$ на ортогоналну суму $\ker B \oplus (\ker B)^\perp$. Нормалност оператора A и B и $AB = BA$ обезбеђују да они имају следеће блок-матрице у односу на ово разлагање

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_1 \end{bmatrix}; \qquad A = \begin{bmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix},$$

при чему су оператори B_1 и A_0 $1-1$, а с обзиром на нормалност и слике су им густе. Ако ставимо

$$X = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix}; \qquad S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix},$$

онда рачун показује да је

$$AXB - BXA = \begin{bmatrix} 0 & A_0X_{12}B_1 \\ -B_1X_{21}A_0 & A_1X_{22}B_1 - B_1X_{22}A_1 \end{bmatrix},$$

а иста структура важи и за $ASB - BSA$, па ако је $ASB = BSA$, тада је $A_0S_{12}B_1 = 0$, $-B_1S_{21}A_0 = 0$, одакле је $S_{12} = 0$, $S_{21} = 0$, и $A_1S_{22}B_1 = B_1S_{22}A_1$. Сада на основу теореме о "пинчинг" оператору

$$\|AXB - BXA + S\| = \left\| \begin{bmatrix} S_{11} & A_0X_{12}B_1 \\ -B_1X_{21}A_0 & A_1X_{22}B_1 - B_1X_{22}A_1 + S_{22} \end{bmatrix} \right\| \\ \ge \left\| \begin{bmatrix} S_{11} & 0 \\ 0 & A_1X_{22}B_1 - B_1X_{22}A_1 + S_{22} \end{bmatrix} \right\|.$$

Да бисмо сада завршили доказ на основу претходног случаја, довољно је доказати да из $\|X\| \le \|Y\|$ за сваку унитарно инваријантну норму произилази $\|X \oplus Z\| \le \|Y \oplus Z\|$ за сваку унитарно инваријантну норму, а то је тачно, јер за Ки Фанове норме имамо

$$||X \oplus Z||_{(n)} = ||X||_{(k)} + ||Z||_{(n-k)} \le ||Y||_{(k)} + ||Z||_{(n-k)} \le ||Y \oplus Z||_{(n)}.$$

Овиме је доказ завршен. $\square$

Услов $\ker A \cap \ker B = \{0\}$ је од есенцијалног значаја, што показује следећи пример.

Пример 2.1. Нека су α, β, γ реални бројеви, $\alpha > 0$, и оператори A, B, X, S дефинисани на Хилбертовом простору $\mathbf{C}^4$ матрицама

$$B^* = A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}; \quad X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \gamma & -\gamma \\ 1 & 1 & -\gamma & \gamma \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}.$$

Лако се израчунава да је $ASB - BSA = ASA^* - A^*SA = 0$, и да је

$$Q = AXB - BXA + S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \gamma & -\gamma \\ 1 & 1 & -\gamma & \gamma \\ 0 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \beta & \alpha \end{bmatrix};$$

$$S^*S = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 2\gamma^2 + \alpha^2 & -2\gamma^2 \\ -2\gamma^2 & 2\gamma^2 + \alpha^2 \end{bmatrix}; \quad Q^*Q = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 2\gamma^2 + \alpha^2 + \beta^2 & 2\alpha\beta - 2\gamma^2 \\ 2\alpha\beta - 2\gamma^2 & 2\gamma^2 + \alpha^2 + \beta^2 \end{bmatrix}.$$

Тако су карактеристичне вредности $\lambda_j(S^*S)$ нуле полинома$((\lambda-2)^2-4)((\lambda-2\gamma^2-\alpha^2)^2-4\gamma^4) = \lambda(\lambda-4)(\lambda-\alpha^2-4\gamma^2)(\lambda-\alpha^2)$, док су карактеристичне вредности $\lambda_j(Q^*Q)$ нуле полинома $((\lambda-2)^2-4)((\lambda-2\gamma^2-\alpha^2-\beta^2)-(2\alpha\beta-2\gamma^2)^2) = \lambda(\lambda-4)(\lambda-\alpha^2-2\alpha\beta-\beta^2)(\lambda-4\gamma^2-\alpha^2-\beta^2+2\alpha\beta)$. Како за сваки оператор T вреди $s_j(T) = \lambda_j(T^*T)^{1/2}$ то закључујемо да се низ $s_j(S)$ састоји од бројева 0, 2, α, $\sqrt{\alpha^2+4\gamma^2}$, а низ $s_j(AXB - BXA + S)$ од бројева 0, 2, $|\alpha+\beta|$, $\sqrt{4\gamma^2+(\alpha-\beta)^2}$.

Сада за $\beta = 1/2\,\alpha$, $\gamma = \sqrt{\alpha\beta}$, $\alpha \geq 4/3$ налазимо

$$\frac{||AXB - BXA + S||}{||S||} = \frac{3\alpha/2}{\alpha\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} < 1,$$

а за $\beta = -\alpha$, $\gamma = \alpha\sqrt{2}$

$$\frac{||AXB - BXA + S||_1}{||S||_1} = \frac{2 + \alpha 2\sqrt{3}}{2 + 4\alpha} \to \frac{\sqrt{3}}{2} < 1 \quad (\text{кад } \alpha \to \infty).$$

Дакле, неједнакост $||AXB - BXA + S|| \geq ||S||$ у општем случају, не може се постићи, ни у униформној, ни у нуклеарној норми.

Међутим, могуће је добити сличну, али нешто слабију неједнакост, која такође може да се искористи.

Теорема 2.4. *Нека су A и B нормални оператори, такви да је $AB = BA$, и $S \in B(\mathfrak{H})$ такав да је $ASB = BSA$. Тада је*
(i) $|||AXB - BXA + S||| \geq (1/3)\,|||S|||$ *у свакој унитарно инваријантној норми;*
(ii) $||AXB - BXA + S||_p \geq 2^{-|1-2/p|}\,||S||_p$*;*
(iii) У Хилберт-Шмитовој норми је $||AXB - BXA + S||_2^2 = ||AXB - BXA||_2^2 + ||S||_2^2$.

За доказ ове теореме биће нам потребне две једноставне леме. Друга од њих је преузета из рада [15].

Лема 2.2.
а) Ако за потпросторе X, Y неког Банаховог простора важи $||x+y|| \geq ||y||$, за све $x \in X$, $y \in Y$, онда за све $x \in X$, $y \in Y$ важи $||x+y|| \geq (1/2)\,||x||$;
б) Ако за потпросторе X, Y неког Банаховог простора важи $||x+y|| \geq (1/2)\,||x||$, за све $x \in X$, $y \in Y$, онда за све $x \in X$, $y \in Y$ важи $||x+y|| \geq (1/3)\,||y||$.

Доказ. Имамо $||x|| = ||x+y-y|| \leq ||x+y|| + ||y|| \leq 2\,||x+y||$, и слично $||y|| = ||y+x-x|| \leq ||y+x|| + ||x|| \leq 3\,||y+x||$. $\square$

Лема 2.3. *Ако неки компактан оператор T има матрично представљање $T = [T_{ij}]_{i,j=1}^2$ у односу на неко ортогонално разлагање Хилбертовог простора $\mathfrak{H}$, онда важе неједнакости:*
а) $2^{p-2}\sum_{i,j=1}^2 ||T_{i,j}||_p^p \leq ||T||_p^p \leq \sum_{i,j=1}^2 ||T_{i,j}||_p^p$, *за* $1 \leq p \leq 2$;
б) $\sum_{i,j=1}^2 ||T_{i,j}||_p^p \leq ||T||_p^p \leq 2^{p-2}\sum_{i,j=1}^2 ||T_{i,j}||_p^p$, *за* $2 \leq p$.

Доказ. Познате Кларксон-МекКартијеве неједнакости гласе

$$2^{p-1}(||R||_p^p + ||S||_p^p) \leq ||R+S||_p^p + ||R-S||_p^p \leq ||R||_p^p + ||S||_p^p, \quad \text{за } 1 \leq p \leq 2,$$

односно

$$||R||_p^p + ||S||_p^p \leq ||R+S||_p^p + ||R-S||_p^p \leq 2^{p-1}(||R||_p^p + ||S||_p^p), \quad \text{за } 2 \leq p.$$

Нека је сада унитаран оператор U задат са $U = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}$. У том случају је $UTU^* = \begin{bmatrix} T_{11} & -T_{12} \\ -T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}$, па се лако проверава да је $||T||_p^p = ||UTU^*||_p^p$, $||T+UTU^*||_p^p = 2^p(||T_{11}||_p^p + ||T_{22}||_p^p)$, $||T-UTU^*||_p^p = 2^p(||T_{12}||_p^p + ||T_{21}||_p^p)$, и сада резултат лако следи, ако у Кларксон-МекКартијеве неједнакости ставимо $R = T$, $S = UTU^*$. $\square$

Доказ Теореме 2.4. Нека је $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$; $\mathfrak{H}_1 = \ker A \cap \ker B$; $\mathfrak{H}_2 = \mathfrak{H}_1^\perp$, и нека су

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix}; \quad S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}; \quad X = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix}$$

одговарајуће матричне репрезентације. У простору $\mathfrak{H}_2$ је $\ker A_2 \cap \ker B_2 = \{0\}$. Примењујући Лему 2.2 и Теорему 2.3 имамо

$$\begin{aligned}|||AXB - BXA + S||| = &\left|\left|\left|\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & A_2X_{22}B_2 - B_2X_{22}A_2 + S_{22} \end{bmatrix}\right|\right|\right| \geq \\ &\geq |||A_2X_{22}B_2 - B_2X_{22}A_2 + S_{22}||| \geq \\ &\geq (1/2)\,|||A_2X_{22}B_2 - B_2X_{22}A_2||| = (1/2)\,|||AXB - BXA|||.\end{aligned}$$

Још једна примена Леме 2.2 доказује тачку (i).

Да бисмо доказали тачку (ii) почињемо истим низом неједнакости и примењујемо Лему 2.3 два пута и Теорему 2.3. За $1 \leq p \leq 2$ је:

$$\begin{aligned}||AXB - BXA + S||_p^p = &\left|\left|\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & A_2X_{22}B_2 - B_2X_{22}A_2 + S_{22} \end{bmatrix}\right|\right|_p^p \geq \\ &\geq 2^{p-2}\left(||S_{11}||_p^p + ||S_{12}||_p^p + ||S_{21}||_p^p + ||A_2X_{22}B_2 - B_2X_{22}A_2 + S_{22}||_p^p\right) \geq \\ &\geq 2^{p-2}\left(||S_{11}||_p^p + ||S_{12}||_p^p + ||S_{21}||_p^p + ||S_{22}||_p^p\right) \geq 2^{p-2}\,||S||_p^p,\end{aligned}$$

а за $2 \leq p < +\infty$ је

$$\begin{aligned}||AXB - BXA + S||_p^p = &\left|\left|\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & A_2X_{22}B_2 - B_2X_{22}A_2 + S_{22} \end{bmatrix}\right|\right|_p^p \geq \\ &\geq ||S_{11}||_p^p + ||S_{12}||_p^p + ||S_{21}||_p^p + ||A_2X_{22}B_2 - B_2X_{22}A_2 + S_{22}||_p^p \geq \\ &\geq ||S_{11}||_p^p + ||S_{12}||_p^p + ||S_{21}||_p^p + ||S_{22}||_p^p \geq 2^{2-p}\,||S||_p^p.\end{aligned}$$

Према томе $||AXB - BXA + S||_p^p \geq 2^{-|2-p|} ||S||_p^p$, што је еквивалентно са (ii). Ако је $p = 2$, онда (ii) постаје $||E(X) + S||_2 \geq ||S||_2$, што повлачи (iii) (видети коментар после Дефиниције 0.1.) $\square$

Теорема која следи, и која је лака последица претходне две, уопштава теорему Андерсона на нормално репрезентоване елементарне операторе дужине два, то јест на пресликавања облика $\Lambda(X) = AXB + CXD$, где су A, B, C, D нормални оператори такви да је $AC = CA$ и $BD = DB$. Даље уопштење оваквих теорема на операторе веће дужине, како ће се видети касније, није могуће.

Теорема 2.5. *Ако су A, B, C, D нормални оператори такви да је $AC = CA$, $BD = DB$, $\Lambda(X) = AXB + CXD$, и $\Lambda(S) = 0$, тада је*
(a) $|||\Lambda(X) + S||| \geq (1/3)\,|||S|||$
(b) $||\Lambda(X) + S||_p \geq 2^{-|1-2/p|} ||S||_p$
(c) $||\Lambda(X) + S||_2^2 = ||\Lambda(X)||_2^2 + ||S||_2^2$
(d) Неједнакост $|||\Lambda(X) + S||| \geq |||S|||$ важи под додатном претпоставком да је $A^*A + C^*C > 0$ и $B^*B + D^*D > 0$, то јест $\ker A \cap \ker C = \ker B \cap \ker D = \{0\}$

Доказ. Посматрајмо операторе

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}; \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} -C & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}; \quad \tilde{S} = \begin{bmatrix} 0 & S \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \tilde{X} = \begin{bmatrix} 0 & X \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

на Хилбертовом простору $\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}$. Лако видимо да је

$$\tilde{A}\tilde{X}\tilde{B} - \tilde{B}\tilde{X}\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & AXB + CXD \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \tilde{A}\tilde{B} - \tilde{B}\tilde{A} = \begin{bmatrix} CA - AC & 0 \\ 0 & DB - BD \end{bmatrix},$$

па услови $AC = CA$, $BD = DB$ повлаче $\tilde{A}\tilde{B} = \tilde{B}\tilde{A}$, а $\Lambda(S) = 0$ повлачи $\tilde{A}\tilde{S}\tilde{B} - \tilde{B}\tilde{S}\tilde{A} = 0$. Сада је довољно применити Теорему 2.4 да би добили тврђења (a), (b) и (c), и Теорему 2.3 да бисмо добили тврђење (d). $\square$

Потпуност збира слике и језгра

Помоћу претходних пет теорема показали смо да у одређеном смислу нормално репрезентовани елементарни оператори дужине два, задржавају особину нормалних оператора да је слика ортогонална на језгро. Друга особина нормалних оператора, која употпуњује претходну јесте чињеница да слика и језгро увек разапињу читав простор. Поставља се питање да ли се и та особина може пренети на нормално репрезентоване елементарне операторе. Међутим, испоставља се, како је показао Андерсон [2], да већ у најједноставнијем случају, то јест у случају нормалне деривације, тако нешто важи само под веома специјалним околностима, тачније ако је спектар оператора T коначан.

Теорема 2.6. *Нека је T нормалан оператор и $\Delta_T(X) = TX - XT$. Важи $B(\mathfrak{H}) = \overline{\operatorname{ran} \Delta_T} \oplus \ker \Delta_T$ ако и само ако T има коначан спектар.*

Доказ. Нека су $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ различите не нула сопствене вредности оператора T. Тада је $T = \sum_{i=1}^n \lambda_i P_i$, где су P_i узајамно ортогонални ортопројектори. У односу на разлагање $\mathfrak{H} = \oplus_{i=1}^n (P_i \mathfrak{H}) \oplus \mathfrak{H}_0$ ($\mathfrak{H}_0 = (\oplus_{i=1}^n P_i \mathfrak{H})^\perp$) имамо

$$T = \begin{bmatrix} \lambda_0 & & & 0 \\ & \lambda_1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix},$$

при чему је $\lambda_0 = 0$. Нека је, у односу на исто разлагање простора $\mathfrak{H}$, $X = [\,X_{ij}\,]_{i,j=0}^n$. Имамо

$$TX = XT = \mathrm{diag}(\lambda_j)\,[X_{ij}]_{ij=0}^n - [X_{ij}]_{ij=0}^n\,\mathrm{diag}(\lambda_j) = \begin{bmatrix} 0 & -\lambda_1 X_{01} & \dots & -\lambda_n X_{0n} \\ \lambda_1 X_{10} & 0 & \dots & (\lambda_1 - \lambda_n) X_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_n X_{n0} & (\lambda_n - \lambda_1) X_{n1} & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

и јасно $\ker\Delta_T = \left\{ \begin{bmatrix} X_{00} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & X_{11} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & X_{nn} \end{bmatrix} \middle| X_{ii} \in B(\mathfrak{H}_i) \right\}$, па је јасно да важи чак и више $B(\mathfrak{H}) = \mathrm{ran}\,\Delta_T \oplus \ker\Delta_T$.

Докажимо други део тврђења, то јест претпоставимо да T има бесконачан спектар. Конструисаћемо изометричан оператор V који ће бити ортогоналан и на слику и на језгро оператора Δ_T. У том циљу разликујемо два случаја.

1. T има само коначно много сопствених вредности. Нека је P_0 ортопројектор на (затварање) линеарног омотача свих сопствених вектора, и нека је $T' = (I-P_0)T(I-P_0)$. Спектар $\sigma(T')$ је, како лако видимо, бесконачан и не садржи сопствене вредности, па можемо одабрати Кошијев низ $\lambda_n \in \sigma(T')\backslash\sigma_p(T)$ различитих бројева. Нека је даље $r_n = \inf_{m\neq n} |\lambda_n - \lambda_m| > 0$, и $\delta_n = D(\lambda_n; r_n/3)$. Дискови δ_n су међусобно дисјунктни, па су према томе одговарајући спектрални пројектори $E_n = E_T(\delta_n)$ међусобно ортогонални. Јасно $\dim E_n\mathfrak{H} = +\infty$. Нека је $U_n : E_n\mathfrak{H} \to E_{n+1}\mathfrak{H}$ неки унитаран оператор ($\mathfrak{H}$ је сепарабилан). Дефинишемо сада изометрију V на следећи начин. За $x \in E_n\mathfrak{H}$ ставимо $Vx = U_n x$, и продужимо по линеарности на $\oplus_n E_n\mathfrak{H}$, а за $x \in (\oplus_n E_n\mathfrak{H})^\perp$ ставимо $Vx = x$.

2. Нека T има бесконачно много сопствених вредности. Низ свих сопствених вредности је наравно ограничен и има конвергентан подниз, означимо га са $\{\lambda_n\}$, а са $\{x_n\}$ означимо низ одговарајућих јединичних сопствених вектора, то јест вектора таквих да је $Tx_n = \lambda_n x_n$. Нека је $\mathfrak{H}_n = \mathcal{L}x_n$, $E_n = P_{\mathfrak{H}_n}$, $\mathfrak{H}_0 = (\oplus\mathfrak{H}_n)^\perp$. Дефинишемо изометрију V са $Vx_n = x_{n+1}$, и $Vx = x$ за $x \in \mathfrak{H}_0$. Бројеви r_n задржавају исто значење као и у претходном случају.

Када смо конструисали изометрију V прелазимо на рачун, који је у оба случаја исти. Узмимо $\alpha = ||V - \Delta_T(X) - S||$, где S комутира са T, а самим тим и са свим спектралним пројекторима. Специјално $E_{n+1}SE_n = SE_{n+1}E_n = 0$, одакле имамо

$$\alpha = ||E_{n+1}||\,||V - \Delta_T(X) - S||\,||E_n|| \geq ||E_{n+1}VE_n - E_{n+1}\Delta_T(X)E_n||,$$

то јест

$$\begin{aligned} 1 - \alpha \leq 1 - ||TE_{n+1}XE_n - E_{n+1}XE_nT - E_{n+1}VE_n|| &\leq \\ \leq 1 - |1 - ||TE_{n+1}XE_n - E_{n+1}XE_nT||\,| &= \\ = ||TE_{n+1}XE_n - E_{n+1}XE_nT|| &\leq \\ \leq ||TE_{n+1}XE_n - \lambda_{n+1}E_{n+1}XE_n|| &+ \\ ||\lambda_{n+1}E_{n+1}XE_n - \lambda_nE_{n+1}XE_n|| + ||\lambda_nE_{n+1}XE_n - E_{n+1}XE_nT|| &\leq \\ \leq \frac{r_{n+1}}{3}\,||E_{n+1}XE_n|| + |\lambda_{n+1} - \lambda_n|\,||E_{n+1}XE_n|| + \frac{r_n}{3}\,||E_{n+1}XE_n|| &\leq \\ \left(\frac{r_{n+1} + r_n}{3} + |\lambda_{n+1} - \lambda_n|\right)||X|| \to 0 \text{ кад } n \to \infty & \end{aligned}$$

па је $\alpha \geq 1$, то јест $||V - \Delta_T(X) - S|| \geq 1 = ||V||$. Тако је за било које S и X, оператор $\Delta_T(X) + S$ ортогоналан на V. Ово је крај доказа. $\square$

У [10] и [13] постављено је следеће питање: Да ли се може добити резултат $\overline{\mathrm{ran}\,\Delta_T \cap \mathfrak{S}_\infty} \oplus (\ker\Delta_T \cap \mathfrak{S}_\infty) = \mathfrak{S}_\infty$, то јест да ли оператор Δ_T посматран на простору $\mathfrak{S}_\infty$ има наведену особину да се домен деривације, односно $\mathfrak{S}_\infty$ може разложити на ортогоналну суму језгра и слике.

И више од тога, да ли је $\mathfrak{J} = \overline{\operatorname{ran}\Delta_T \cap \mathfrak{J}} \oplus (\ker \Delta_T \cap \mathfrak{J})$, где је $\mathfrak{J}$ *сепарабилан* симетрично нормиран идеал, и где је затворење узето у смислу норме у $\mathfrak{J}$, то јест уколико је $\mathfrak{J}$ такав да је скуп оператора коначног ранга свуда густ у $\mathfrak{J}$, као и да ли такве особине има и оператор $\Lambda(X) = AXB + CXD$.

Како ћемо управо видети, одговор на то питање је позитиван, али уз већа ограничења. Наиме неопходно је да идеал $\mathfrak{J}$ поред тога што је сепарабилан, буде још и рефлексиван и да има строго конвексан дуал. Специјално, одговор је позитиван за $\mathfrak{S}_p$, где је $1 < p \leq +\infty$, док је у случају идеала $\mathfrak{S}_1$ дат негативан резултат.

Пре него што изведемо ова тврђења неопходно је да се упознамо са техником Гатоовог извода у Банаховим просторима. Наиме, ортогоналност у смислу Џејмса тесно је повезана са тангентним просторима јединичне лопте и са Гатоовим изводом

Дефиниција 2.1. *Вектор x је глатка тачка сфере $S(0, ||x||)$ ако постоји јединствен функционал ослонца, то јест функционал $F_x \in X^*$, такав да је $F_x(x) = ||x||$ и $||F_x|| = 1$.*

Наводимо основни Став који повезује ове појмове. Његов доказ наведен је у раду [8].

Став 2.1. *Ако постоји Гатоов извод норме у тачки x, то јест ако постоји гранична вредност $\lim\limits_{\mathbf{R}\ni t\to 0} \frac{||x+ty||-||x||}{t}$, тада је она једнака $\operatorname{Re} F_x(y)$, где је F_x функционал из претходне дефиниције. Штавише, у том случају је y ортогонално на x ако и само ако је $F_x(y) = 0$.*

Познато је, да је у Банаховом простору X, чији је дуални простор X^* строго конвексан, свака не нулта тачка, глатка тачка одговарајуће сфере. За детаље видети [1] и референце тамо.

Техника Гатоовог извода коришћена је између осталог у [16] и [19], да би се окарактерисали оператори на које је слика деривације ортогонална. У тим радовима пажња је била усмерена ка $\mathfrak{S}_p$ идеалима за $p > 1$, и ка глатким тачкама у $\mathfrak{S}_1$ и $\mathfrak{S}_\infty$, као у следећем ставу, преузетом из [16].

Став 2.2. *Нека је A ограничен оператор на Хилбертовом простору. Слика деривације δ_A ортогонална је на оператор $S = U|S|$ у $\mathfrak{S}_p$ ако и само ако је $A\tilde{S} = \tilde{S}A$, где је $\tilde{S} = U|S|^{p-1}$.*

Глатке тачке у просторима $\mathfrak{S}_1$ и $\mathfrak{S}_\infty$, окарактерисао је Холуб (Holub J.R.) [7].

Став 2.3. *Оператор X је глатка тачка одговарајуће сфере у простору $\mathfrak{S}_1$ ако и само ако је X ињективан или је X^* ињективан. Оператор X је глатка тачка одговарајуће сфере у простору $\mathfrak{S}_\infty$ ако и само ако достиже норму на јединственом вектору (до на комплексни скалар).*

Техника уобичејног Гатоовог извода показала се, међутим, немоћна када је у питању нека "ћошкаста" тачка. У радовима [11] и [12] развијана је техника делимичног Гатоовог извода или краће φ-Гатоовог извода. Помоћу ње дати су неопходни и довољни услови за ортогоналност вектора y, из произвољног Банаховог простора X, на вектор x (у смислу Џејмса), у терминима φ-Гатоовог извода. Када се ти услови примене на конкретне просторе $\mathfrak{S}_1$ и $\mathfrak{S}_\infty$ добијају се једноставне карактеризације. Помоћу њих, изводимо последице везане за потпуност збира слике и језгра нормалне деривације. Овим темама посвећен је остатак ове главе, а већина материјала преузета је из [11] и [12].

Став 2.4. *Нека су x и y вектори неког Банаховог простора, и нека је $\varphi \in [0, 2\pi)$.*

а) Функција $\alpha_{\varphi,x,y} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, дата са $\alpha_{\varphi,x,y}(t) = ||x + te^{i\varphi}y||$ је конвексна;

б) Гранична вредност $\lim\limits_{t\to 0^+} \frac{||x+te^{i\varphi}y||-||x||}{t}$ једнака је десном изводу функције $\alpha_{\varphi,x,y}$ у тачки нула, и увек постоји.

Доказ. а) Имамо $\alpha_{\varphi,x,y}(\theta t + (1-\theta)s) = ||\theta x + (1-\theta)x + \theta te^{i\varphi}y + (1-\theta)se^{i\varphi}y|| \leq \theta||x + te^{i\varphi}y|| + (1-\theta)||x + se^{i\varphi}y|| = \theta\alpha_{\varphi,x,y}(t) + (1-\theta)\alpha_{\varphi,x,y}(s)$;

б) Очигледно. $\square$

Дефиниција 2.2. *Нека је $(X, ||\quad||)$ произвољан Банахов простор. φ-Гатоов извод норме у тачки x, и у правцу вектора y је $D_{\varphi,x}(y) = \lim\limits_{t\to 0^+} \frac{||x+te^{i\varphi}y||-||x||}{t}$.*

Став 2.5. *а) $D_{\varphi,x}$ је субадитиван, позитивно хомоген функционал на X;*
б) $D_{\varphi,x}(e^{i\theta}y) = D_{\varphi+\theta,x}(y)$;
в) $|D_{\varphi,x}(y)| \le ||y||$.
Доказ. а) Имамо $||x+te^{i\varphi}(y_1+y_2)|| \le ||x/2+te^{i\varphi}y_1||+||x/2+te^{i\varphi}y_2||$, и узимајући лимес добијамо $D_{\varphi,x}(y_1+y_2) = \lim\limits_{t\to 0^+} \frac{||x+te^{i\varphi}(y_1+y_2)||-||x||}{t} \le \lim\limits_{t\to 0^+} \frac{||x+2te^{i\varphi}y_1||+||x+2te^{i\varphi}y_2||-2||x||}{2t} = D_{\varphi,x}(y_1)+D_{\varphi,x}(y_2)$, што доказује субадитивност. Позитивна хомогеност је очигледна;
б) Очигледно;
в) Довољно је уочити да је $\big|\, ||x+te^{i\varphi}y|| - ||x||\, \big| \le ||x+te^{i\varphi}y - x|| = t||y||$. $\square$

Једноставна, претходна конструкција омогућује нам да окарактеришемо ортогоналност у смислу Џејмса, у свим Банаховим просторима (без обзира на глаткост) преко φ-Гатоовог извода.

Теорема 2.7. *Вектор y ортогоналан је на x у смислу Џејмса ако и само ако је $\inf\limits_{\varphi} D_{\varphi,x}(y) \ge 0$.*

Доказ. Докажимо најпре "само ако" део тврђења. Заиста, нека је y ортогонално на x у смислу Џејмса, то јест нека за све $\lambda \in \mathbf{C}$ важи $||x+\lambda y|| \ge ||x||$. Тада је $\frac{||x+te^{i\varphi}y||-||x||}{t} \ge 0$ за све $t > 0$, и прелазећи на лимес добијамо $D_{\varphi,x}(y) \ge 0$ за произвољно φ.

Докажимо сада други, "ако", део тврђења. Реалан број $\frac{||x+te^{i\varphi}y||-||x||}{t}$, представља нагиб праве која сече функцију $\alpha_{\varphi,x,y}$ у тачкама 0 и t, и он је, због конвексности функције $\alpha_{\varphi,x,y}$ увек већи или једнак од десног извода те функције у нули, то јест од $D_{\varphi,x}(y)$, што је по претпоставци увек веће или једнако од нуле. Одатле лако добијамо да је за све φ и све t, $||x+te^{i\varphi}y|| \ge ||x||$. $\square$

Напомена 2.1. Можемо разумети смисао претходне Теореме, ако је посматрамо из другог угла. Наиме, y је ортогонално на x ако и само ако конвексна функција $\alpha_{x,y}(t)$ достиже минимум у координатном почетку.

Погледајмо, сада, примере два класична Банахова простора, који оба имају већи број тачака које нису глатке.

Пример 2.2. У простору $L^1(X,\mu)$ функција g је ортогонална на f, у смислу Џејмса ако и само ако је $\left|\int_{\{f\neq 0\}} e^{-i\theta(t)} g(t)d\mu(t)\right| \le \int_{\{f=0\}} |g(t)|d\mu(t)$, где је $f(t) = |f(t)|e^{i\theta(t)}$.

Заиста, у простору L^1 важи $D_{\varphi,f}(g) = \mathrm{Re}\left\{\int_{\{f\neq 0\}} e^{i\varphi}e^{-i\theta(t)}g(t)d\mu(t)\right\} + \int_{\{f=0\}} |g(t)|d\mu(t)$, јер је

$$\lim_{\rho\to 0^+} \frac{|f(t)+\rho e^{i\varphi}g(t)|-|f(t)|}{\rho} = \begin{cases} \cos(\varphi-\theta(t)+\psi(t))|g(t)|, & f(t)\neq 0 \\ |g(t)|, & f(t) = 0 \end{cases}$$

(при чему је $g(t) = |g(t)|e^{i\psi(t)}$), а такође и $\left|\frac{|f(t)+\rho e^{i\varphi}g(t)|-|f(t)|}{\rho}\right| \le |g(t)|$. Тако, добијамо $g\perp f$ ако и само ако је $\inf\limits_{\varphi} \mathrm{Re}\left\{\int_{\{f\neq 0\}} e^{i\varphi}e^{-i\theta(t)}g(t)d\mu(t)\right\} + \int_{\{f=0\}} |g(t)|d\mu(t) \ge 0$. Међутим, инфимум ће бити достигнут за оно φ, за које је $e^{i\varphi}\int_{\{f\neq 0\}} e^{-i\theta(t)}g(t)d\mu(t) = -\left|\int_{\{f\neq 0\}} e^{-i\theta(t)}g(t)d\mu(t)\right|$, и резултат следи.

Пример 2.3. У простору c_0, $y = (\eta_\nu)$ је ортогонално на $x = (\xi_\nu)$ ако и само ако не постоји отворен угао $D = \{z\,|\,\alpha < \arg z < \beta\}$, уз $\beta - \alpha < \pi$, такав да је $\overline{\xi_\nu}\eta_\nu \in D$ за све оне ν за које важи $|\xi_\nu| = ||x||$.

Нека су $k_1, k_2, \ldots, k_n$ сви они индекси, за које је $|\xi_{k_j}| = ||x||$, и нека је $\delta > 0$ реалан број такав да је $\sup\limits_{\nu \neq k_j} |\xi_\nu| = ||x|| - \delta$. Сада, за $t < \frac{\delta}{2||y||}$ имамо: за $\nu = k_j$ $|\xi_\nu + te^{i\varphi}\eta_\nu| \geq ||x|| - \delta/2$, и за $\nu \neq k_j$ $|\xi_\nu + te^{i\varphi}\eta_\nu| \leq ||x|| - \delta/2$. Тако је $||x + te^{i\varphi}y|| = \max\limits_{1 \leq j \leq n} |\xi_{k_j} + te^{i\varphi}\eta_{k_j}|$, што повлачи $D_{\varphi,x}(y) = \lim\limits_{t \to 0^+} \frac{||x+te^{i\varphi}||-||x||}{t} = ||x|| \lim\limits_{t \to 0^+} \frac{\max\limits_{1 \leq j \leq n} |1+te^{i\varphi}\eta_{k_j}/\xi_{k_j}|-1}{t} = \max\limits_{1 \leq j \leq n} \mathrm{Re}\{e^{i\varphi}e^{-i\theta_{k_j}}\eta_{k_j}\}$, узимајући у обзир да за све n-торке коплексних бројева важи

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{\max\{|1+tz_1|, |1+tz_2|, \ldots, |1+tz_n|\} - 1}{t} =$$
$$= \max\left\{\lim_{t \to 0^+} \frac{|1+tz_1|-1}{t}, \lim_{t \to 0^+} \frac{|1+tz_2|-1}{t}, \ldots, \lim_{t \to 0^+} \frac{|1+tz_n|-1}{t}\right\} = \max\{\mathrm{Re}\, z_1, \mathrm{Re}\, z_2, \ldots, \mathrm{Re}\, z_n\}.$$

Дакле имамо: y је ортогонално на x ако и само ако је $\inf\limits_{\varphi} \max\limits_{\nu = k_j} \mathrm{Re}\, e^{i\varphi}e^{-i\theta_\nu}\eta_\nu \geq 0$. То даље, значи да скуп $\{\bar{\xi}_{k_j}\eta_{k_j} \,|\, 1 \leq j \leq n\}$ при свакој ротацији, за угао φ, сече затворену десну полураван, а то је еквивалентно томе да не постоји отворен угао $D = \{z \,|\, \alpha < \arg z < \beta\}$, уз $\beta - \alpha < \pi$, такав да је $\overline{\xi_\nu}\eta_\nu \in D$ за све оне ν за које важи $|\xi_\nu| = ||x||$.

Сада ћемо извести карактеризацију ортогоналности у смислу Џејмса у просторима $\mathfrak{S}_1$, $B(\mathfrak{H})$ и $\mathfrak{S}_\infty$, али ће нам за то бити потребно неколико техничких Лема. Како би избегли двосмисленост, усвојићемо договор, да је при сваком поларном разлагању $S = U|S|$, неког ограниченог оператора S, оператор U парцијална изометрија из $\overline{\mathrm{ran}\, S^*}$ у $\overline{\mathrm{ran}\, S}$, односно да је $U|_{\ker S} = 0$.

Лема 2.4. *Нека су X и Y нуклеарни оператори, и нека су $X = U|X|$ и $X+tY = V_t|X+tY|$ поларна разлагања оператора X и $X+tY$, нека је Q пројектор на језгро оператора X^*, и нека је $\{\chi_j\}$ неки ортонормиран систем, потпун у $\ker X$. Тада је:*

а) $V_{t_n}x \to Ux$, јако, за све $x \in \overline{\mathrm{ran}\, X^*}$, и за неки низ $t_n \to 0^+$. Такође, $V_{t_n}^*x \to U^*x$, јако, за све $x \in \overline{\mathrm{ran}\, X}$, и за исти низ $t_n \to 0^+$.

б) $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_j \left\langle V_{t_n}^*(I-Q)Y\chi_j, \chi_j\right\rangle = 0$.

Доказ. а) Нека је $\{e_j\}$ неки потпун ортонормиран систем у $\mathfrak{H}$. За свако j, фамилија $\{V_te_j \,|\, t > 0\}$ је ограничена, па постоји низ $t_n^{(j)} \to 0$, такав да $V_{t_n^{(j)}}e_j$ конвергира слабо. И више од тога, путем дијагонализације, закључујемо да постоји низ $t_n \to 0$ такав да $V_{t_n}e_j$ конвергира слабо за све j, и према томе V_{t_n} слабо конвергира. Нека V_0 означава слаби лимес низа V_{t_n}. Сада, за све $y, z \in H$ имамо $\langle V_{t_n}|X+t_nY|z, y\rangle = \langle (X+t_nY)z, y\rangle$. Како $X + t_nY$ јако конвергира (чак и униформно) ка X, а $|X+t_nY|$ јако конвергира ка $|X|$, то прелазећи на лимес добијамо $\langle V_0|X|z, y\rangle = \langle Xz, y\rangle = \langle U|X|z, y\rangle$ за све $z, y \in H$. На тај начин је $V_0x = Ux$ за све $x \in \mathrm{ran}\,|X|$. Како је $\mathrm{ran}\,|X|$ свуда густ у $\overline{\mathrm{ran}\, X^*}$, закључујемо да V_{t_n} слабо конвергира ка Ux за све $x \in \overline{\mathrm{ran}\, X^*}$. Штавише, та конвергенција је и јака. Заиста, нека је x произвољан вектор из $\mathrm{ran}\, X^*$. Тада постоји $z \in H$ такав да је $x = |X|z$. Знамо да $V_{t_n}|X+t_nY|z$ слабо тежи ка Ux. Али, $V_{t_n}|X+t_nY|z = (X+t_nY)z$ што јако тежи ка $Xz = Ux$. Тако $V_{t_n}|X+t_nY|z$ јако тежи ка Ux. Сада имамо $||V_{t_n}x - Ux|| \leq ||V_{t_n}(|X|z - |X+t_nY|z)|| + ||V_{t_n}|X+t_nY|z - Xz||$, што тежи ка нули кад n тежи ка бесконачно.

Како V_{t_n} слабо тежи ка V_0, то и $V_{t_n}^*$, слабо тежи ка V_0^*. Прелазећи на лимес, у једнакости $\langle |X+t_nY|z, y\rangle = \left\langle V_{t_n}^*(X+t_nY)z, y\right\rangle$, закључујемо да је $V_0^* = U^*$ на скупу $\overline{\mathrm{ran}\, X}$. Дакле $V_{t_n}^*$ слабо тежи ка U^* на потпростору $\overline{\mathrm{ran}\, X}$. Да је та конвергенција и јака увериће нас, слично као и малопре неједнакост $||V_{t_n}^*x - U^*x|| \leq ||V_{t_n}^*(Xz - (X+t_nY)z)|| + ||V_{t_n}^*(X+t_nY)z - |X|z||$, где је $Xz = x$.

б) Нека је P ортопројектор на језгро оператора X. На основу а) имамо да $PV_{t_n}^*(I-Q)YP$ јако конвергира ка $PU^*(I-Q)YP$, па према Теореми $III.6.3$ из [6], $PV_{t_n}^*(I-Q)YP$ тежи ка $PU^*(I-Q)YP$ у нуклеарној норми, јер је Y нуклеаран оператор. Међутим, $\sum\limits_j \left\langle V_{t_n}^*(I-Q)Y\chi_j, \chi_j\right\rangle$ је управо траг нуклеарног оператора $PV_{t_n}^*(I-Q)YP$ и према томе тежи ка трагу оператора $PU^*(I-Q)YP$. Али $PU^* = 0$, па је доказ завршен. $\square$

Краћи доказ дела *а*) претходне Леме, и уједно и јачи резултат сугерисао је проф. Јоцић.

Лема 2.4'. *Нека су X и Y нуклеарни оператори, и нека су $X = U|X|$ и $X + tY = V_t|X + tY|$ поларна разлагања оператора X и $X + tY$. Тада $||(V_t^* - U^*)X||$ и $||(V_t - U)X||$ теже ка нули када $t \to 0^+$.*

Доказ. Познато је да за позитивне операторе A и B важи неједнакост $||A^{1/2} - B^{1/2}|| \leq || \, |A - B|^{1/2}||$, ([9] или [3]). Ако у ту неједнакост уместо A и B уврстимо $|A|^2$, односно $|B|^2$ имамо $|| \, |A| - |B| \, ||^2 \leq || \, |A|^2 - |B|^2|| = ||A^*A - B^*B|| = ||\frac{1}{2}((A^* - B^*)(A + B) + (A^* + B^*)(A - B))|| \leq ||A - B|| \, ||A + B||$. Из ове неједнакости следи да $|| \, |X + tY| - |X| \, || \to 0$, кад $t \to 0$.

Сада имамо $||(V_t^* - U^*)X|| = ||V_t^*(X + tY) - U^*X - tV_t^*Y|| \leq || \, |X + tY| - |X| \, || + t||Y|| \to 0$, а такође и $||(V_t - U)X|| = ||V_t|X + tY| - U|X| + V_t|X| - V_t|X + tY| \, || = ||X + tY - X + V_t(|X| - |X + tY|)|| \leq t||Y|| + || \, |X| - |X + tY| \, || \to 0$, то јест $\lim\limits_{t \to 0} ||(V_t^* - U^*)X|| = 0$ и $\lim\limits_{t \to 0} ||(V_t - U)X|| = 0$. $\square$

Напомена 2.2. Јасно је да је Лема 2.4' уопштење Леме 2.4 *а*), јер за све $x = Xz \in \operatorname{ran} X$, важи $||V_t^*x - U^*x|| \leq ||(V_t^* - U^*)X|| \, ||z||$. Такође, за све $x = X^*z \in \operatorname{ran} X^*$ важи $||V_t x - Ux|| \leq ||(V_t - U)X^*|| \, ||z||$. Једноставан аргумент непрекидности увериће нас да се резултат са $\operatorname{ran} X$, односно $\operatorname{ran} X^*$ продужује на затворења $\overline{\operatorname{ran} X}$ и $\overline{\operatorname{ran} X^*}$.

Лема 2.5. *Нека је A ограничен оператор, чија (уобичајена) норма не превазилази јединицу, и нека је $\{\varphi_j\}$ произвољан ортонормиран систем. Тада, имамо $||X||_1 \geq \left| \sum\limits_j \langle AX\varphi_j, \varphi_j \rangle \right|$.*

Доказ. Заиста $| \sum\limits_j \langle AX\varphi_j, \varphi_j \rangle | \leq | \operatorname{tr}(AX)| \leq ||A||_\infty ||X||_1 \leq ||X||_1$. $\square$

Лема 2.6. *Нека је $\{\varphi_j\}$ неки ортонормиран систем (не обавезно потпун) у $\mathfrak{H}$.*

а) За произвољан вектор $f \in \mathfrak{H}$, и за свако $\varepsilon > 0$, постоји вектор f', такав да је $||f - f'|| < \varepsilon$ и $\sum_j | \langle f', \varphi_j \rangle | < +\infty$.

б) Скуп $F = \{A \in \mathfrak{S}_1 \mid \sum_j ||A\varphi_j|| < +\infty\}$ је густ у $\mathfrak{S}_1$.

Доказ. а) Нека је $f = f_1 + f_2$, $f_1 \in \overline{\mathcal{L}\{\varphi_j\}}$, $f_2 \perp \mathcal{L}\{\varphi_j\}$. Како је $||f_1||^2 = \sum_j | \langle f_1, \varphi_j \rangle |^2$, то постоји n_0, са особином $\sum_{j > n_0} | \langle f_1, \varphi_j \rangle |^2 < \varepsilon^2$. Ставимо $f' = \sum_{j \leq n_0} \langle f_1, \varphi_j \rangle \varphi_j + f_2$. Имамо $\sum_j | \langle f', \varphi_j \rangle | = \sum_{j \leq n_0} | \langle f_1, \varphi_j \rangle | < +\infty$, а такође и $||f - f'||^2 = || \sum_{j > n_0} \langle f_1, \varphi_j \rangle \varphi_j ||^2 = \sum_{j > n_0} | \langle f_1, \varphi_j \rangle |^2 < \varepsilon^2$.

б) Нека је $Y \in \mathfrak{S}_1$, и нека је $Z = \sum\limits_{k=1}^{N} \sigma_k \langle \quad, f_k \rangle \, g_k$ $(0 < \sigma_{k+1} \leq \sigma_k$, f_k, g_k ортонормирани системи) оператор коначног ранга, за који важи $||Y - Z||_1 < \varepsilon/2$. Према претходном делу тврђења, постоје вектори f_k', такви да је $\sum_j | \langle f_k', \varphi_j \rangle | < +\infty$, и $||f_k - f_k'|| < \varepsilon/(2^k \sigma_k)$. Нека је $A = \sum\limits_{k=1}^{N} \sigma_k \langle \quad, f_k' \rangle \, g_k$. Имамо $||A - Z||_1 = || \sum_{k=1}^N \sigma_k \langle \quad, f_k - f_k' \rangle \, g_k || \leq \sum_{k=1}^N \sigma_k ||f_k - f_k'|| \leq \varepsilon/2$, и према томе $||A - Y|| < \varepsilon$. Са друге стране $\sum_j ||A\varphi_j|| \leq \sum\limits_{k=1}^{N} \sum_j ||\sigma_k \langle \varphi_j, f_k' \rangle \, g_k|| = \sum\limits_{k=1}^{N} \sigma_k \sum_j | \langle \varphi_j, f_k' \rangle | < +\infty$. $\square$

Лема 2.7. *Нека су X и Y самоадјунговани оператори, $X \geq 0$ и $0 < \varepsilon < ||X||$, $0 < \delta < 1/4$ фиксирани бројеви и $||Y|| \leq \varepsilon\delta$. Нека је даље $\mathfrak{H}_\varepsilon = E_X(||X|| - \varepsilon, ||X||)\mathfrak{H}$, где је E_X спектрална мера оператора X, и $\mathfrak{H}_{\varepsilon,\gamma} = \{f \in \mathfrak{H} \mid f = f_1 + f_2, f_1 \in \mathfrak{H}_\varepsilon, f_2 \in \mathfrak{H}_\varepsilon^\perp, ||f_2|| \leq \gamma ||f_1||\}$. Тада је $||X + Y|| = \sup\limits_{||\varphi||=1, \varphi \in \mathfrak{H}_{\varepsilon,\gamma}} \langle (X + Y)\varphi, \varphi \rangle$, где је $\gamma = \sqrt{2\delta/(1 - 4\delta)}$.*

Доказ. Како је $X + Y$ самоадјунгован то је $||X + Y|| = \sup\limits_{||\varphi||=1} \langle (X + Y)\varphi, \varphi \rangle$. Нека је $\beta > 0$ произвољно, и нека је φ такав јединични вектор да је $\langle (X + Y)\varphi, \varphi \rangle \geq ||X + Y|| - \beta$. Довољно је доказати да φ припада скупу $\mathfrak{H}_{\varepsilon,\gamma}$, за довољно мало β.

Заиста, нека је $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, $\varphi_1 \in \mathfrak{H}_\varepsilon$, $\varphi_2 \in \mathfrak{H}_\varepsilon^\perp$. Тада је $\langle (X + Y)\varphi, \varphi \rangle = \langle (X + Y)\varphi_1, \varphi_2 \rangle + \langle (X + Y)\varphi_2, \varphi_2 \rangle + 2 \operatorname{Re} \langle (X + Y)\varphi_1, \varphi_2 \rangle$. Узимајући у обзир да је $\langle X\varphi_1, \varphi_2 \rangle = 0$ и $||\varphi_1||^2 + ||\varphi_2||^2 = 1$ имамо и

$$\langle (X + Y)\varphi_1, \varphi_1 \rangle \leq ||X + Y|| \, ||\varphi_1||^2$$

$$\langle (X+Y)\varphi_2, \varphi_2\rangle \le (||X|| - \varepsilon + \varepsilon\delta)||\varphi_2||^2 = (||X|| - (1-\delta)\varepsilon)||\varphi_2||^2$$
$$2\operatorname{Re}\langle (X+Y)\varphi_1, \varphi_2\rangle \le 2\varepsilon\delta||\varphi_1||\,||\varphi_2||,$$

па одатле добијамо

$$||X+Y|| - \beta \le \langle (X+Y)\varphi, \varphi\rangle \le ||X+Y||\,||\varphi_1||^2 + (||X|| - (1-\delta)\varepsilon)||\varphi_2||^2 + 2\varepsilon\delta||\varphi_1||\,||\varphi_2||,$$

то јест
$$||X+Y||\,||\varphi_2||^2 \le \beta(||\varphi_1||^2 + ||\varphi_2||^2) + (||X|| - (1-\delta)\varepsilon)||\varphi_2||^2 + 2\varepsilon\delta||\varphi_1||\,||\varphi_2||$$

односно
$$(||X+Y|| - ||X|| + (1-\delta)\varepsilon)||\varphi_2||^2 \le (\beta + \varepsilon\delta)(||\varphi_1||^2 + ||\varphi_2||^2),$$
а како је $||X+Y|| \ge ||X|| - \varepsilon\delta$, то је $((1-3\delta)\varepsilon - \beta)||\varphi_2||^2 \le (\beta+\varepsilon\delta)||\varphi_1||^2$, то је

$$\frac{||\varphi_2||^2}{||\varphi_1||^2} \le \frac{\beta+\varepsilon\delta}{(1-3\delta)\varepsilon - \beta} \le \frac{2\varepsilon\delta}{(1-4\delta)\varepsilon} = \frac{2\delta}{1-4\delta} = \gamma^2,$$

за $\beta < \varepsilon\delta$, што је и требало доказати. $\square$

Лема 2.8. *Нека су A, B и C самоадјунговани оператори и нека су A и C позитивни. Нека је још $\mathfrak{H}_\varepsilon = E_A(||A|| - \varepsilon, ||A||)\mathfrak{H}$, где је E_A спектрална мера оператора A. Тада је*

$$\limsup_{t\to 0^+} \frac{||A+tB+t^2C|| - ||A||}{t} \le \sup_{||\varphi||=1, \varphi\in\mathfrak{H}_\varepsilon} \langle B\varphi, \varphi\rangle .$$

Доказ. Према Леми 2.7, је

$$||A+tB+t^2C|| = \sup_{||\varphi||=1,\varphi\in\mathfrak{H}_{\varepsilon,\gamma}} \left\langle (A+tB+t^2C)\varphi, \varphi\right\rangle \le$$
$$||A|| + t \sup_{||\varphi||=1,\varphi\in\mathfrak{H}_{\varepsilon,\gamma}} \langle B\varphi, \varphi\rangle + t^2 \sup_{||\varphi||=1,\varphi\in\mathfrak{H}_{\varepsilon,\gamma}} \langle C\varphi, \varphi\rangle ,$$

за довољно мало t, при чему $\mathfrak{H}_{\varepsilon,\gamma}$ означава исти скуп, као и у Леми 2.7. Одатле је

$$\limsup_{t\to 0^+} \frac{||A+tB+t^2C|| - ||A||}{t} \le \limsup_{t\to 0^+} \left(\sup_{||\varphi||=1,\varphi\in\mathfrak{H}_{\varepsilon,\gamma}} \langle B\varphi, \varphi\rangle + t \sup_{||\varphi||=1,\varphi\in\mathfrak{H}_{\varepsilon,\gamma}} \langle C\varphi, \varphi\rangle \right) =$$
$$= \sup_{||\varphi||=1,\varphi\in\mathfrak{H}_{\varepsilon,\gamma}} \langle B\varphi, \varphi\rangle .$$

Како је γ произвољно, то је и

$$\limsup_{t\to 0^+} \frac{||A+tB+t^2C|| - ||A||}{t} \le \inf_{\gamma} \sup_{||\varphi||=1,\varphi\in\mathfrak{H}_{\varepsilon,\gamma}} \langle B\varphi, \varphi\rangle .$$

Сада се још треба ослободити броја γ. За јединични вектор $\varphi \in \mathfrak{H}_{\varepsilon,\gamma}$ постоји јединични вектор $\psi \in \mathfrak{H}_\varepsilon$ такав да је $||\varphi-\psi||^2 \le 2(1 - 1/\sqrt{1+\gamma^2})$. (Довољно је узети $\psi = \varphi_1/||\varphi_1||$, где је $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, $\varphi_1 \in H_\varepsilon$, $\varphi_2 \in \mathfrak{H}_\varepsilon^\perp$.) Тада је $\langle B\varphi, \varphi\rangle = \langle B(\varphi-\psi), \varphi\rangle + \langle B\psi, \varphi-\psi\rangle + \langle B\psi, \psi\rangle \le 2||B||\,||\varphi-\psi|| + \sup_{||\psi||=1,\psi\in\mathfrak{H}_\varepsilon} \langle B\psi, \psi\rangle \le \sup_{||\psi||=1,\psi\in\mathfrak{H}_\varepsilon} \langle B\psi, \psi\rangle + 2\sqrt{2}||B||\sqrt{1-1/\sqrt{1+\gamma^2}}$. Односно $\sup_{||\varphi||=1,\varphi\in\mathfrak{H}_{\varepsilon,\gamma}} \langle B\varphi, \varphi\rangle \le \sup_{||\psi||=1,\psi\in\mathfrak{H}_\varepsilon} \langle B\psi, \psi\rangle + 2\sqrt{2}||B||\sqrt{1-1/\sqrt{1+\gamma^2}}$, одакле резултат следи узимајући инфимум по свим позитивним γ. $\square$

Лема 2.9. *Нека су X и Y ограничени оператори. Тада је*

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{||X+tY||-||X||}{t}\le \frac{1}{||X||}\sup_{||\varphi||=1,\varphi\in H_\varepsilon}\operatorname{Re}\langle Y\varphi, X\varphi\rangle\,,$$

где је $H_\varepsilon = E_{X^*X}((||X||-\varepsilon)^2, ||X||^2)\mathfrak{H}$.

Доказ. Заиста примењујући Лему 2.8, имамо:

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0^+}\frac{||X+tY||-||X||}{t} &= \lim_{t\to 0^+}\frac{||X+tY||^2-||X||^2}{t(||X+tY||+||X||)} = \\ &= \frac{1}{2||X||}\lim_{t\to 0^+}\frac{||X^*X+t(Y^*X+X^*Y)+t^2Y^*Y||-||X^*X||}{t} \le \\ &\le \frac{1}{2||X||}\sup_{\varphi\in H_\varepsilon,||\varphi||=1}\langle (Y^*X+X^*Y)\varphi,\varphi\rangle = \\ &= \frac{1}{||X||}\sup_{\varphi\in H_\varepsilon,||\varphi||=1}\operatorname{Re}\langle Y\varphi, X\varphi\rangle\,. \quad \square\end{aligned}$$

Сада смо у позицији да окарактеришемо ортогоналност у смислу Џејмса у просторима $\mathfrak{S}_1$, $B(\mathfrak{H})$ и $\mathfrak{S}_\infty$.

Теорема 2.8. *Нека су X, $Y \in \mathfrak{S}_1$. Тада важи* $\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{||X+tY||_1-||X||_1}{t} = \operatorname{Re}\{\operatorname{tr}(U^*Y)\} + ||QYP||_1$, *где је $X = U|X|$ поларно разлагање оператора X, $P = P_{\ker X}$, $Q = P_{\ker X^*}$.*

Доказ. Нека је $X = \sum\limits_j s_j\langle\quad,\varphi_j\rangle\,\psi_j$ Шмитов развој оператора X, и нека је χ_j неки потпун ортонормиран систем у $\ker X$. Нека је, даље, $V|QYP|$ поларно разлагање оператора QYP. Оператори V и U су сконцентрисани на међусобно ортогоналним просторима, па је $||U+V||=1$. Осим тога, важи $V\varphi_j = 0$ и $U\chi_j = 0$, па примењујући Лему 2.5 на оператор $U+V$ имамо:

$$\begin{aligned}\frac{1}{t}\{||X+tY||_1-||X||_1\} &= \frac{1}{t}\left\{||X+tY||_1-\sum_j s_j\right\}\ge \\ &\ge \frac{1}{t}\left(\left|\sum_j\langle U^*(X+tY)\varphi_j,\varphi_j\rangle+\sum_j\langle V^*(X+tY)\chi_j,\chi_j\rangle\right|-\sum_j s_j\right),\end{aligned}$$

Даље

$$\begin{aligned}&\frac{1}{t}\{||X+tY||_1-||X||_1\}\ge \\ &\qquad\ge\frac{1}{t}\left\{\left|\sum_j\langle |X|\varphi_j,\varphi_j\rangle+t\sum_j\langle U^*Y\varphi_j,\varphi_j\rangle+\sum_j\langle V^*(X+tY)\chi_j,\chi_j\rangle\right|\right. \\ &\qquad\qquad\left.-\sum_j s_j\right\} = \\ &= \frac{1}{t}\left\{\left|\sum_j s_j+t\left(\sum_j\langle U^*Y\varphi_j,\varphi_j\rangle+\sum_j\langle V^*Y\chi_j,\chi_j\rangle\right)\right|-\sum_j s_j\right\}.\end{aligned}$$

Али, како је $V^*Q = V^*$ и $P\chi_j = \chi_j$ последњи израз једнак је

$$\begin{aligned}&\frac{1}{t}\left\{\left|\sum_j s_j+t\left(\sum_j\langle U^*Y\varphi_j,\varphi_j\rangle+\sum_j\langle V^*QYP\chi_j,\chi_j\rangle\right)\right|-\sum_j s_j\right\} \\ &\qquad= \frac{\left|\sum_j s_j + t\,(\operatorname{tr}(U^*Y)+||QYP||_1)\right|-\sum_j s_j}{t} \\ &\qquad\longrightarrow \operatorname{Re}\left(\operatorname{tr}(U^*Y)+||QYP||_1\right),\end{aligned}$$

и према томе $\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{||X+tY||_1-||X||_1}{t}\geq \operatorname{Re}\left(\operatorname{tr}(U^*Y)\right)+||QYP||_1$.

Обратну неједнакост извешћемо за $Y\in F=\{A\in\mathfrak{S}_1\mid \sum_j ||A\varphi_j||<+\infty\}$. То је довољно јер ћемо тиме добити два субадитивна непрекидна функционала $Y\mapsto \lim\limits_{t\to 0^+}\frac{||X+tY||_1-||X||_1}{t}$ и $Y\mapsto \operatorname{Re}\operatorname{tr}(U^*Y)+||QYP||_1$, који се поклапају на скупу F, који је, према Леми 2.6, свуда густ у $\mathfrak{S}_1$. Такође, у даљем тексту, где год стоји V_t кад $t\to 0^+$, мисли се на V_{t_n} кад $n\to+\infty$, где је t_n низ из Леме 2.4. (Прелазак на подниз је коректан, јер због Става 2.4 б) лимес који разматрамо увек постоји.) Као прво имамо

$$\begin{aligned}&\frac{1}{t}\left\{||X+tY||_1-||X||_1\right\}=\\ &\qquad=\frac{1}{t}\left\{\sum_j\left\langle|X+tY|\varphi_j,\varphi_j\right\rangle+\sum_j\left\langle|X+tY|\chi_j,\chi_j\right\rangle-\sum_j s_j\right\}.\end{aligned}\tag{3}$$

Међутим

$$\frac{1}{t}\sum_j\left\langle|X+tY|\chi_j,\chi_j\right\rangle=\frac{1}{t}\sum_j\left\langle V_t^*(X+tQY)\chi_j,\chi_j\right\rangle+\sum_j\left\langle V_t^*(I-Q)Y\chi_j,\chi_j\right\rangle,$$

а такође и

$$\begin{aligned}||QYP||_1\geq&\left|\sum_j\left\langle V_t^*QYP\chi_j,\chi_j\right\rangle\right|=\left|\sum_j\left\langle V_t^*QY\chi_j,\chi_j\right\rangle\right|=\\ =&\frac{1}{t}\left|\sum_j\left\langle V_t^*(X+tQY)\chi_j,\chi_j\right\rangle\right|,\end{aligned}$$

тако да је реалан број $\frac{1}{t}\sum\limits_j\left\langle|X+tY|\chi_j,\chi_j\right\rangle$ једнак збиру једног комплексног броја модула мањег или једнаког од $||QYP||_1$, и другог комплексног броја, чији је модуо, за t довољно мало, мањи или једнак од ε (Лема 2.4 б)). Тако, за t довољно мало, добијамо $\frac{1}{t}\sum\limits_j\left\langle|X+tY|\chi_j,\chi_j\right\rangle\leq||QYP||_1+\varepsilon$. С друге стране, према Јенсеновој неједнакости примењеној на интеграцију у односу на спектралну меру имамо:

$$\begin{aligned}\sum_j\left\langle|X+tY|\varphi_j,\varphi_j\right\rangle\leq&\sum_j\sqrt{\left\langle|X+tY|^2\varphi_j,\varphi_j\right\rangle}=\\ &=\sum_j\sqrt{s_j^2+2t\operatorname{Re}\left\langle Y\varphi_j,s_j\psi_j\right\rangle+t^2||Y\varphi_j||^2}\end{aligned}$$

и примењујући (3)

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{t}\{||X+tY||_1-||X||_1\}\le\\
&\le\frac{\sum_j\sqrt{s_j^2+2t\operatorname{Re}\langle Y\varphi_j,s_j\psi_j\rangle+t^2||Y\varphi_j||^2}-\sum_j s_j}{t}+||QYP||_1+\varepsilon=\\
&=\sum_j\frac{\sqrt{s_j^2+2t\operatorname{Re}\langle Y\varphi_j,s_j\psi_j\rangle+t^2||Y\varphi_j||^2}-s_j}{t}+||QYP||_1+\varepsilon=\\
&=\sum_j\frac{t2\operatorname{Re}\langle Y\varphi_j,s_j\psi_j\rangle+t^2||Y\varphi_j||^2}{t\left(\sqrt{s_j^2+2t\operatorname{Re}\langle Y\varphi_j,s_j\psi_j\rangle+t^2||Y\varphi_j||^2}+s_j\right)}+||QYP||_1+\varepsilon\longrightarrow\\
&\longrightarrow\sum_j\operatorname{Re}\langle Y\varphi_j,\psi_j\rangle+||QYP||_1+\varepsilon=\\
&=\sum_j\operatorname{Re}\langle Y\varphi_j,U\varphi_j\rangle+||QYP||_1+\varepsilon=\\
&=\operatorname{Re}(\operatorname{tr}U^*Y)+||QYP||_1+\varepsilon.
\end{aligned}$$

Гранични прелаз под знаком суме, оправдан је неједнакошћу $\left|\frac{t2\operatorname{Re}\langle Y\varphi_j,s_j\psi_j\rangle+t^2||Y\varphi_j||^2}{t(\sqrt{s_j^2+2t\operatorname{Re}\langle Y\varphi_j,s_j\psi_j\rangle+t^2||Y\varphi_j||^2}+s_j)}\right|\le$ $|2\operatorname{Re}\langle Y\varphi_j,\psi_j\rangle|+||Y\varphi_j||$. Резултат сада следи, јер ε може бити произвољно мало. $\square$

Напомена 2.3. Проф. Јоцић сугерисао је краћи доказ првог дела ове Теореме. Показујемо прво, да је оператор U^*+PV^*Q норме мање или једнаке од један. Наиме, како је $U^*Q=0$ и $PU^*=0$, то је $||(U^*+PV^*Q)f||^2=||((I-P)U^*(I-Q)+PV^*Q)f||^2\le||U^*(I-Q)f||^2+||V^*Qf||^2\le||(I-Q)f||^2+||Qf||^2=||f||^2$. Тако, према Леми 2.5, имамо $||X+tY||_1\ge|\operatorname{tr}((U^*+PV^*Q)(X+tY))|=|\operatorname{tr}(U^*X+tU^*Y+PV^*QX+tPV^*QY)|=|\,||X||_1+t(\operatorname{tr}(U^*Y)+||QYP||_1|\ge||X||_1+t(\operatorname{Re}\operatorname{tr}(U^*Y)+||QYP||_1)$, одакле једноставно излази $\lim\limits_{t\to0^+}\frac{||X+tY||_1-||X||_1}{t}\ge\operatorname{Re}\operatorname{tr}(U^*Y)+||QYP||_1$.

Последица 2.1. *Оператор Y је ортогоналан на оператор X у простору $\mathfrak{S}_1$ ако и само ако је $|\operatorname{tr}(U^*Y)|\le||QYP||_1$.*

Доказ. Према Теореми 2.7, Y је ортогонално на X ако и само ако је $\inf\limits_{\varphi}D_{\varphi,X}(Y)\ge0$. Међутим, по Теореми 2.8, важи $\inf\limits_{\varphi}D_{\varphi,X}(Y)=\inf\limits_{\varphi}\operatorname{Re}\left(e^{i\varphi}\operatorname{tr}(U^*Y)\right)+||QYP||_1$, па резултат добијамо, бирајући најподесније φ. $\square$

Сада прелазимо на простор $B(\mathfrak{H})$.

Теорема 2.9. *Оператор Y ортогоналан је на оператор X у простору $B(\mathfrak{H})$ у смислу Џејмса ако и само ако постоји низ јединичних вектора φ_n такав да $||X\varphi_n||\to||X||$ и $\langle Y\varphi_n,X\varphi_n\rangle\to0$ кад $n\to\infty$.*

Доказ. Нека постоји низ са назначеним особинама и нека је $\lambda\in\mathbf{C}$ произвољан. Тада је $||X+\lambda Y||^2\ge||(X+\lambda Y)\varphi_n||^2=||X\varphi_n||^2+2\operatorname{Re}\lambda\langle Y\varphi_n,X\varphi_n\rangle+|\lambda|^2||Y\varphi_n||^2\ge||X\varphi_n||^2+2\operatorname{Re}\lambda\langle Y\varphi_n,X\varphi_n\rangle\to||X||^2$ када $n\to+\infty$.

Докажимо други смер. Нека је Y ортогонално на X у смислу Џејмса. Тада за свако $\theta\in[0,2\pi)$ важи $\lim\limits_{t\to0^+}\frac{||X+te^{i\theta}Y||-||X||}{t}\ge0$, па је према Леми 2.9, за свако $\theta\in[0,2\pi)$

$$\sup_{||\varphi||=1,\varphi\in\mathfrak{H}_\varepsilon}\operatorname{Re}e^{i\theta}\langle Y\varphi,X\varphi\rangle\ge0. \tag{4}$$

Но како је $\{\langle Y\varphi,X\varphi\rangle\mid||\varphi||=1,\varphi\in H_\varepsilon\}$ у ствари нумерички ранг оператора X^*Y на потпростору H_ε, то је он, по теореми Теплица-Хаусдорфа конвексан. То онда значи да је услов (4) еквивалентан томе да затворење тог нумеричког ранга садржи нулу, то јест да постоји $\varphi\in H_\varepsilon$ такав да је $|\langle Y\varphi,X\varphi\rangle|<\varepsilon$. Узимајући да ε пролази скуп $1/\mathbf{N}$ добијамо тражени низ. $\square$

Простор $\mathfrak{S}_\infty$ је потпростор простора $B(\mathfrak{H})$, са наслеђеном нормом, па у њему важи иста карактеризација ортогоналности, као и у $B(\mathfrak{H})$. Међутим, ако се посматрају компактни оператори X и Y, тада се може израчунати φ-Гатоов извод.

Теорема 2.10. *Нека су X, $Y \in \mathfrak{S}_\infty$. Тада имамо $\lim\limits_{t\to 0^+} \frac{||X+tY||_\infty - ||X||_\infty}{t} = \max\limits_{f\in\Phi, ||f||=1} \operatorname{Re}\langle U^*Yf, f\rangle$, где је $X = U|X|$, и Φ карактеристични потпростор оператора $|X|$ у односу на сопствену вредност s_1.*

Доказ. Као прво, према Леми 2.9, имамо

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{||X+tY||_\infty - ||X||_\infty}{t} \leq \frac{1}{||X||} \sup_{f\in\mathfrak{H}_\varepsilon, ||f||=1} \operatorname{Re}\langle Yf, Xf\rangle .$$

Ако је X компактан оператор, тада је $H_\varepsilon = \Phi$, за ε довољно мало. С друге стране

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2||X||} \lim_{t\to 0^+} \frac{||X^*X + t(X^*Y + Y^*X) + t^2Y^*Y|| - s_1^2}{t} \geq \\
&\geq \frac{1}{2||X||} \lim_{t\to 0^+} \frac{\max\limits_{f\in\Phi, ||f||=1} \left\langle (X^*X + t(X^*Y+Y^*X) + t^2Y^*Y)f, f\right\rangle - s_1^2}{t} = \\
&= \frac{1}{2||X||} \lim_{t\to 0^+} \max_{f\in\Phi, ||f||=1} \left[\langle (X^*Y + Y^*X)f, f\rangle + t\,\langle Y^*Yf, f\rangle\right] = \\
&= \frac{1}{||X||} \max_{f\in\Phi, ||f||=1} \operatorname{Re}\langle Yf, Xf\rangle = \max_{f\in\Phi, ||f||=1} \operatorname{Re}\langle U^*Yf, f\rangle ,
\end{aligned}$$

одакле следи резултат. $\square$

Последица 2.2. *У простору $\mathfrak{S}_\infty$ следећа три услова су међусобно еквивалентна:*

(i) *Y је ортогонално на X у смислу Џејмса;*

(ii) $\inf\limits_{0\leq\varphi<2\pi} \max\limits_{f\in\Phi, ||f||=1} \operatorname{Re} e^{i\varphi}\langle U^*Yf, f\rangle \geq 0$, *где је $X = U|X|$ и Φ потпростор где $|X|$ достиже норму;*

(iii) *Постоји вектор $f \in \Phi$ такав да је $Yf \perp Xf$.*

Доказ. Еквиваленција између (i) и (ii) следи из Теорема 2.7 и 2.10. Међутим, услов (ii) нам говори да је нумерички ранг оператора $U^*Y|_\Phi$ има такав положај у коплексној равни да садржи најмање једну вредност са позитивним реалним делом при свакој ротацији око нуле, то јест да није садржан ни у каквој отвореној полуравни, чија граница садржи координатни почетак. Али према Теореми Теплица-Хаусдорфа нумерички ранг је конвексан скуп, а како је Φ коначно димензионалан простор, то је он и затворен. Последњи услов је, дакле, еквивалентан услову да нумерички ранг оператора U^*Y садржи нулу. Како вектори Uf и Xf имају увек исти правац, закључујемо да је (iii) еквивалентно са (ii). $\square$

Применићемо сада добијене карактеризације ортогоналности да бисмо добили неке позитивне и неке негативне резултате, везане за елементарне операторе дужине два.

У уводном поглављу упознали смо се са уопштеним адјунгованим елементарним оператором. Мађутим, да бисмо показали резултате који следе потребно је да се упознамо и са конјугованим оператором на дуалном простору датог идеала $\mathfrak{J}$. Подсетимо се да је дуални простор произвољног сепарабилног симетрично нормираног идеала $\mathfrak{J}$, изометрички изоморфан неком другом симетрично нормираном идеалу $\mathfrak{J}^*$, при чему оператору Y одговара функционал $\varphi_Y(X) = \operatorname{tr}(XY)$. Могуће је и експлицитно одредити идеал $\mathfrak{J}^*$. (Детаљи се могу наћи у [6], глава III, одељак 11.) Због тога ћемо у даљем тексту поистоветити дуални простор и идеал $\mathfrak{J}^*$, премда су елементи првог простора функционали, а другог оператори.

Став 2.6. *Нека је $\mathfrak{J}$ неки сепарабилан идеал компактних оператора, и нека је $\Lambda : \mathfrak{J} \to \mathfrak{J}$ елементаран оператор дат са $\Lambda(X) = \sum_{j=1}^n A_jXB_j$. Тада његов конјугован оператор $\Lambda^* : \mathfrak{J}^* \to \mathfrak{J}^*$ има облик $\Lambda^*(Y) = \sum_{j=1}^n B_jYA_j$.*

Доказ. Имамо $\varphi_Y(\Lambda(X)) = \mathrm{tr}(\Lambda(X)Y) = \mathrm{tr}(\sum_{j=1}^n A_j X B_j Y) = \mathrm{tr}(X\sum_{j=1}^n B_j Y A_j) = \mathrm{tr}(X\Lambda^*(Y)) = \varphi_{\Lambda^*(Y)}(X)$. $\square$

Посматрајмо произвољан сепарабилан идеал компактних оператора $\mathfrak{J}$, такав да је $\mathfrak{J}^*$ строго конвексан. Из строге конвексности дуала следи да за све $X \in \mathfrak{J}$ постоји јединствен оператор $\tilde{X} \in \mathfrak{J}^*$ такав да је $\tilde{X}(X) = ||X||$ и $||\tilde{X}|| = 1$. Ако је, још, $\mathfrak{J}$ рефлексиван тада је пресликавање $X \mapsto \tilde{X}$, $\tilde{X} = \omega(X)$ бијекција (и такође инволуција) јединичних сфера простора $\mathfrak{J}$ и $\mathfrak{J}^*$. Штавише, Y је ортогонално на X у простору $\mathfrak{J}$ ако и само ако је $\tilde{X}(Y) = 0$.

Теорема 2.11. *Нека је $\mathfrak{J}$ рефлексиван идеал у $B(\mathfrak{H})$ такав да је $\mathfrak{J}^*$ строго конвексан, и нека је $\Lambda : \mathfrak{J} \to \mathfrak{J}$ елементаран оператор дат са $\Lambda(X) = \sum_{j=1}^n A_j X B_j$. Тада је $\overline{\mathrm{ran}\,\Lambda}$ ортогонално (у смислу Џејмса) на оператор S ако и само ако важи $\omega(S) = \tilde{S} \in \ker \Lambda^*$, при чему Λ^* означава конјугован оператор.*

Доказ. Узимајући у обзир Ставове 2.1 и 2.6, имамо да је $\overline{\mathrm{ran}\,\Lambda} \perp S$, што повлачи да за све $X \in \mathfrak{J}$ важи $\tilde{S}(\Lambda(X)) = 0$, односно $(\Lambda^*(\tilde{S}))(X) = 0$, за све X, и према томе $\Lambda^*(\tilde{S}) = 0$. $\square$

Напомена 2.4. Теорема 2.11 је општи резултат и важи у произвољном Банаховом простору.

Теорема 2.12. *Нека $\mathfrak{J}$ задовољава претпоставке претходне Теореме, и нека је $\Lambda : \mathfrak{J} \to \mathfrak{J}$ елементаран оператор дат са $\Lambda(X) = AXB + CXD$, где су A, B, C и D нормални оператори такви да важи $AC = CA$, $BD = DB$ и $A^*A + C^*C > 0$, $B^*B + D^*D > 0$. Тада је $\overline{\mathrm{ran}\,\Lambda}$ ортогонално на S ако и само ако је $S \in \ker \Lambda$.*

Доказ. У Теореми 2.5, доказали смо да је слика таквог елементарног оператора ортогонална на његово језгро, па према томе и према претходној Теореми имамо следећи низ импликација:

$$\begin{aligned}\Lambda(S) = 0 \Rightarrow \forall X \in \mathfrak{J} \quad |||\Lambda(X) + S||| \geq |||S||| \Rightarrow \Lambda^*(\tilde{S}) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \forall X \in \mathfrak{J}^* \quad |||\Lambda^*(X) + \tilde{S}||| \geq |||\tilde{S}||| \Rightarrow \Lambda^{**}(\tilde{\tilde{S}}) = 0 \Leftrightarrow \Lambda(S) = 0,\end{aligned}$$

који завршава доказ. $\square$

Следећа Лема и Став, преузети из [28], омогући ће нам да констатујемо да затворење слике и језгро елементарног оператора Λ у директном збиру чине идеал $\mathfrak{J}$.

Лема 2.11. *Нека је X рефлексиван Банахов простор и V његов затворен потпростор. Ако је $V_\perp := \{x \in X \,|\, \forall v \in V \ ||v + x|| \geq ||x||\} = \{0\}$, тада је $V = X$.*

Доказ. Претпоставимо да је V прави потпростор од X. Тада је $V \subseteq \ker \varphi$ за неки не нулти функционал $\varphi \in X^*$. Како је X рефлексиван, то постоји јединични вектор x са особином $\varphi(x) = ||\varphi||$. Тада за $v \in V$ имамо $||\varphi||\,||x|| = \varphi(x) = \varphi(x + v) \leq ||\varphi||\,||x + v||$, одакле је $x \in V_\perp$. Овде је контрадикција. $\square$

Став 2.7. *Нека је X рефлексиван Банахов простор, V његов затворен потпростор. Нека је још $V^\perp = \{x \in X \,|\, \forall v \in V \ ||v + x|| \geq ||v||\}$ линеаран потпростор (што у општем случају није тако!) и нека је $(V^\perp)_\perp = V$. Тада је $X = V + V^\perp$.*

Доказ. Докажимо, најпре, да је $V + V^\perp$ затворен потпростор. Заиста, нека $V + V^\perp \ni x_n + y_n \to z$. Тада је низ $x_n + y_n$ Кошијев, а због $||x_n - x_m + (y_n - y_m)|| \geq ||x_n - x_m||$ и низ x_n је такође Кошијев, па $x_n \to x \in V$, а одатле и $y_n = x_n + y_n - x_n \to z - x =: y$. Ако, сада, на неједнакост $||v + y_n|| \geq ||v||$ делујемо лимесом. закључићемо да је $y \in V^\perp$. Тиме смо доказали да је $V + V^\perp$ затворен.

Одредимо сада скуп $(V + V^\perp)_\perp$. Нека је $||x + y + z|| \geq ||z||$, за све $x \in V$ и све $y \in V^\perp$. Ако ставимо да је $x = 0$, тада закључујемо да $z \in (V^\perp)_\perp$ што је једнако V по претпоставци. Ставимо сада $x = -z$, и $y = 0$, па ћемо имати $z = 0$. Доказ, сада, завршавамо применом Леме 2.11. $\square$

Последица 2.3. *а) Нека је $\mathfrak{J}$ неки сепарабилан идеал у $B(\mathfrak{H})$, са строго конвексним дуалом, и нека је $\Lambda : \mathfrak{J} \to \mathfrak{J}$, $\Lambda(X) = AXB + CXD$, где су A, B, C и D као у Теореми 2.12. Тада је $\mathfrak{J} = \ker \Lambda + \overline{\mathrm{ran}\,\Lambda}$.*

б) Ако је $\mathfrak{J} = \mathfrak{S}_p$ ($1 < p < +\infty$), тада поред претходног закључка важи и више. За сваки елементарни оператор на $\mathfrak{S}_p$ важи да је $\overline{\operatorname{ran}\Lambda}$ ортогонално на S ако и само ако је $\Lambda^*(|S|^{p-1}U^*) = 0$, и тиме $\mathfrak{S}_p = \ker\Lambda + \overline{\operatorname{ran}\Lambda}$.

Доказ. а) Према Теореми 2.12, важи $\operatorname{ran}\Lambda = (\ker\Lambda)^{\perp}$, па закључак следи на основу Става 2.7, јер су $\overline{\operatorname{ran}\Lambda}$ и $\ker\Lambda$ затворени потпростори.

б) Добро је познато да важи $\mathfrak{S}_p^* \cong \mathfrak{S}_q$ ($q > 1$), и да је простор $\mathfrak{S}_q$ строго конвексан (Кларксон МекіКартијеве неједнакости [26]). Осим тога, лако се проверава да је у случају простора $\mathfrak{S}_p$, $\tilde{S} = \frac{1}{||S||_p^{p/q}}|S|^{p-1}U^*$, што завршава доказ. $\square$

Напомена 2.5. Поред једнакости $\mathfrak{J} = \ker\Lambda + \overline{\operatorname{ran}\Lambda}$, доказали смо још и да је $\ker\Lambda$ комплементаран простор у $\mathfrak{J}$, и да постоји пројекција са $\mathfrak{J}$ на $\ker\Lambda$ норме један!

Напомена 2.6. Специјалан случај ове Теореме је Став 3 из рада [16].

Овакви резултати не могу се показати само на основу сепарабилности, без претпоставки о рефлексивности и строгој конвексности дуала. Наиме, већ за нормалне деривације такав резулат није тачан у простору $\mathfrak{S}_1$ који је сепарабилан.

Теорема 2.13. *Постоји нормална деривација $\Delta_A : \mathfrak{S}_1 \to \mathfrak{S}_1$, $\Delta_A(X) = AX - XA$, ($AA^* = A^*A$) таква да је $\mathfrak{S}_1 \neq \overline{\operatorname{ran}\Delta_A} \oplus \ker\Delta_A$.*

Доказ. Нека је $\mathfrak{H} = l^2(\mathbf{Z})$, и нека је A оператор двостраног помака, то јест за све $n \in \mathbf{Z}$ је $Ae_n = e_{n-1}$. Добро је познато да је $A^*e_n = e_{n+1}$, за све $n \in \mathbf{Z}$, као и да је A нормалан оператор (чак унитаран).

Покажимо, прво, да је језгро деривације Δ_A тривијално. Заиста, нека је $X \in \ker\Delta_A$. Тада $AX = XA$, повлачи $\langle Xe_i, e_j\rangle = \langle Xe_i, A^*e_{j-1}\rangle = \langle AXe_i, e_{j-1}\rangle = \langle XAe_i, e_{j-1}\rangle = \langle Xe_{i-1}, e_{j-1}\rangle$. Међутим, узимајући у обзир компактност оператора X добијамо $0 = \lim\limits_{n\to+\infty} \langle Xe_{i+n}, e_{j+n}\rangle = \langle Xe_i, e_j\rangle$, за све i, $j \in \mathbf{Z}$, и према томе $X = 0$. Тако $\overline{\operatorname{ran}\Delta_A} \oplus \ker\Delta_A = \overline{\operatorname{ran}\Delta_A}$.

Конструишимо, сада, оператор $S \in \mathfrak{S}_1$ на следећи начин. $Se_j = 0$ за $j \leq 0$, и $Se_j = \frac{1}{2^j}e_{j-1}$ за $j > 0$. Ако је $S = U|S|$ тада је јасно да је $U^*e_j = 0$ за $j < 0$, и $U^*e_j = e_{j+1}$ за $j \geq 0$. Показаћемо да је $\overline{\operatorname{ran}\Delta_A}$ ортогонално на S. Заиста, та ортогоналност је, према Последици 2.1, еквивалентна са $|\operatorname{tr}(U^*(AX - XA))| \leq ||Q(AX - XA)P||_1$, где је $P = P_{\ker S}$ и $Q = P_{\ker S^*}$. Међутим $|\operatorname{tr}(U^*(AX-XA))| = |\operatorname{tr}((AU^*-U^*A)X)|$, док је $AU^*-U^*A = \langle \quad, e_0\rangle\, e_0$, односно $|\operatorname{tr}(U^*(AX-XA))| = |\langle Xe_0, e_0\rangle|$. С друге стране лако се проверава да је $P = P_{\overline{\mathcal{L}(\dots,e_{-2},e_{-1},e_0)}}$, $Q = P_{\overline{\mathcal{L}(\dots,e_{-2},e_{-1})}}$, па добијамо (узимајући у Леми 2.8 ограничен оператор A^*)

$$\begin{aligned}
||Q(AX - XB)P||_{\mathfrak{S}_1} &\geq \left|\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \langle Q(AX - XA)Pe_{j+1}, e_j\rangle\right| = \\
&= \left|\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \langle (AX - XA)Pe_{j+1}, Qe_j\rangle\right| = \\
&= \left|\sum_{j=-\infty}^{-1} (\langle AXe_{j+1}, e_j\rangle - \langle XAe_{j+1}, e_j\rangle)\right| = \\
&= \left|\sum_{j=-\infty}^{-1} (\langle Xe_{j+1}, e_{j+1}\rangle - \langle Xe_j, e_j\rangle)\right| = |\langle Xe_0, e_0\rangle|,
\end{aligned}$$

чиме је доказ завршен. $\square$

Напомена 2.7. Тривијалност језгра деривације из претходне Теореме је потпуно неважан детаљ. Заиста, посматрајући Хилбертов простор $H \oplus H$ и оператор $A \oplus I$ на њему, можемо конструисати нормалну деривацију са истим особинама као она у Теореми 2.13, и чије ће језгро бити нетривијално.

Теорема 2.14. *Постоји нормална деривација* $\Delta_B : \mathfrak{S}_\infty \to \mathfrak{S}_\infty$, $\Delta_B(X) = BX - XB$, *(*$BB^* = B^*B$*), и оператор* $S \in \mathfrak{S}_\infty$ *такви да је* $\operatorname{ran}\Delta_B$ *ортогонално на* S*, и* $S \notin \ker\Delta_B$*.*

Доказ. Нека је A оператор из доказа претходне Теореме, и нека је $B = A \oplus I$ оператор на простору $H = l^2(\mathbf{Z}) \oplus \mathbf{C}$. Даље, нека је $S = S_1 \oplus 2I$, при чему је $S_1 : l^2(\mathbf{Z}) \to l^2(\mathbf{Z})$ произвољан оператор норме не веће од један. Оператор S достиже норму на јединственом (до на скалар) вектору $\varphi = 0 \oplus 1 \in l^2(\mathbf{Z}) \oplus \mathbf{C}$. Очигледно је $S\varphi = 2\varphi$, $B\varphi = B^*\varphi = \varphi$, и према томе

$$\langle (BX - XB)\varphi, S\varphi \rangle = 2\langle X\varphi, B^*\varphi\rangle - 2\langle XB\varphi, \varphi\rangle = 2\langle X\varphi, \varphi\rangle - 2\langle X\varphi, \varphi\rangle = 0.$$

Тако је $\operatorname{ran}\Delta_B \perp S$. Са друге стране $BS = SB$ повлачи $AS_1 = S_1A$, односно $S_1 = 0$. Па узимајући $S_1 \neq 0$ завршавамо доказ. $\square$

Напомена 2.8. Није могуће доказати $\mathfrak{S}_\infty \neq \overline{\operatorname{ran}\Delta_B} \oplus \ker\Delta_B$. Напротив, сума $\overline{\operatorname{ran}\Delta_B} \oplus \ker\Delta_B$ је увек једнака $\mathfrak{S}_\infty$. Наиме, нека је $f_Y \in \mathfrak{S}_\infty^*$ функционал облика $f_Y(X) = \operatorname{tr}(XY)$ за неко $Y \in \mathfrak{S}_1 \cong \mathfrak{S}_\infty^*$ који анулира $\operatorname{ran}\Delta_B$. Непосредно добијамо $BY^* - Y^*B = 0$, то јест $Y^* \in \ker\Delta_B$. Како је $f_Y(Y^*) \neq 0$, f_Y не може да анулира $\ker\Delta_B$. На тај начин је $\operatorname{ran}\Delta_B + \ker\Delta_B$ увек свуда густ у $\mathfrak{S}_\infty$.

Напомена 2.9. Може се учинити да је Напомена 2.8 у колизији са Теоремом 2.14. Међутим, то је последица тога што оба скупа $V^\perp = \{X \in \mathfrak{S}_\infty \,|\, \forall U \in V \; ||X + U|| \geq ||U||\}$ и $V_\perp = \{X \in \mathfrak{S}_\infty \,|\, \forall U \in V \; ||X + U|| \geq ||X||\}$, у оштем случају не чине потпростор, већ конус!

3. УСПОН ЕЛЕМЕНТАРНОГ ОПЕРАТОРА И СПЕКТРАЛНА АНАЛИЗА

Теореме о ортогоналности слике и језгра, лако се примењују на израчунавање успона оператора Λ.

Став 3.1. *Нека је $\Lambda(X) = AXB + CXD$ нормално репрезентован оператор, то јест $AC = CA$, $BD = DB$, и A, B, C, D су нормални. Тада је* $\operatorname{asc}\Lambda \leq 1$.

Доказ. Нека је $\Lambda^2(X) = 0$. Тада је $-\Lambda(X) \in \ker\Lambda$ па због Теореме 2.5 *a*) важи неједнакост $\|\Lambda(X) - \Lambda(X)\| \geq (1/3)\,\|\Lambda(X)\|$, то јест $\Lambda(X) = 0$. Тако је $\ker\Lambda^2 = \ker\Lambda$.

У радовима [35] и [37] Шуљман (Шульман В.С.) је доказао да је успон произвољног елементарног оператора коначне дужине, коначан. Докази тих резултата до сада нису објављивани, а овде ће бити изложени љубазношћу професора Шуљмана, који ми је у неколико писама предочио поменуте доказе. Да би се ти резултати извели неопходно је увести неколико нових појмова, и развити технике рада са њима. Ти појмови су: квазидијагоналност, скоро инверзна укрштања и спектрални носач.

Квазидијагоналност

Ове технике су први пут (колико је аутору познато) изложене у раду [36], где су примењене на нека питања трага комутатора. Већина резултата које ћемо упознати у овој глави изложени су у [37] и [38], док су њихови докази преузети из [25] и [39]. У [37] и [39] је та техника примењена и на резултате који се тичу трага суме неколико комутатора, што овде неће бити излагано.

Дефиниција 3.1. *Нека је $\mathfrak{J}$ некакав идеал у $B(\mathfrak{H})$. Кажемо да је оператор A $\mathfrak{J}$-квазидијагоналан ако постоји растући низ пројектора коначног ранга P_m, такав да $P_m \to I$, јако, и $\lim\limits_{m\to+\infty} ||AP_m - P_mA||_{\mathfrak{J}} = 0$. Слично, кажемо да је A $\mathfrak{J}$-полудијагоналан ако постоји растући низ пројектора коначног ранга P_m који јако конвергира јединичном оператору, такав да је $\sup\limits_m ||AP_m - P_mA||_{\mathfrak{J}} < +\infty$.*

Напомена 3.1. Како је наведено у [36], овакву дефиницију увео је Халмош, а касније се тиме бавио и Војкулеску. Он је наиме увео модул неквазидијагоналности $\operatorname{qd}_{\mathfrak{J}}(A) = \inf \liminf\limits_{m\to+\infty} ||AP_m - P_mA||_{\mathfrak{J}}$, где се inf узима по свим растућим низовима пројектора коначног ранга таквих да P_m јако тежи ка I. Тада је A $\mathfrak{J}$-квазидијагоналан ако и само ако је $\operatorname{qd}_{\mathfrak{J}}(A) = 0$, а $\mathfrak{J}$-полудијагоналан ако и само ако је $\operatorname{qd}_{\mathfrak{J}}(A) < +\infty$. Уместо гломазне ознаке $\operatorname{qd}_{\mathfrak{S}_p}$, писаћемо краће qd_p.

Напомена 3.2. Класе $\mathfrak{J}$-квазидијагоналних (полудијагоналних) оператора, у ознакама $QD(\mathfrak{J})$ и $SD(\mathfrak{J})$ затворене су у односу на пертурбацију оператором из $\mathfrak{J}$, што није тешко уочити. Такође лако се проверава неједнакост $\mathrm{qd}_{\mathfrak{J}}(\oplus A_j) \leq \sum \mathrm{qd}_{\mathfrak{J}}(A_j)$, одакле следи да је коначна сума $\mathfrak{J}$-полудијагоналних, такође $\mathfrak{J}$-полудијагоналан, као и да је пребројива сума $\mathfrak{J}$-квазидијагоналних такође $\mathfrak{J}$-квазидијагоналан.

Да бисмо оправдали термин докажимо следећи став.

Став 3.2. *Нека је A оператор чије матрично представљање у односу на неку базу има коначно много не-нултих дијагонала. Тада је A $\mathfrak{S}_1$-полудијагоналан.*

Доказ. Нека је e_j таква база да је $\langle Ae_i, e_j\rangle = 0$ за $|i-j| > n$, и нека је P_m пројектор на линеарни омотач вектора $e_1, e_2, \dots e_m$. Није тешко установити да је ранг оператора $AP_m - P_mA$ мањи или једнак од $2n+1$, па је $||AP_m - P_mA||_1 \leq (2n+1)||AP_m - P_mA|| \leq 2(2n+1)||A||$. $\square$

Дефиниција 3.2. *Нека је $\{A_k\}$ нека фамилија ограничених оператора. Кажемо да је та фамилија $\mathfrak{S}_p$-квазидијагонална (полудијагонална) ако низ $\left(\sum_k ||A_kP_m - P_mA_k||_p^p\right)^{1/p}$ тежи нули (ограничен је), за неки растући низ P_m пројектора коначног ранга који јако тежи јединичном оператору.*

Напомена 3.3. Ако је фамилија коју посматрамо коначна тада се претходна дефиниција своди на то да $||A_kP_m - P_mA_k||_p$ тежи ка нули за свако k. На тај начин може се увести и $\mathfrak{J}$-квазидијагоналност (полудијагоналност) коначне фамилије $\{A_k\}$, за произвољно $\mathfrak{J}$. Ако та фамилија није коначна, већ само пребројива, тада се $\mathfrak{J}$-квазидијагоналност (полудијагоналност) дефинише помоћу релације $\Phi\left(\{||A_kP_m - P_mA_k||\}_{k=1}^{+\infty}\right) \to 0$ кад $m \to +\infty$, при чему је Φ симетрична нормирајућа функција која дефинише идеал $\mathfrak{J}$.

Следећих неколико тврђења показују како Хаусдорфова димензија здруженог спектра утиче на квазидијагоналност (полудијагоналност) у односу на просторе $\mathfrak{S}_p$.

Дефиниција 3.3. *а) Хаусдорфова p-мера метричког простора (M,d) (у ознаци $m_p(M)$) је најмањи реалан број, такав да за свако $\delta > 0$, постоји коначно разлагање $M = \bigsqcup_k \beta_k$, простора M, такво да је за све k, $\mathrm{diam}\,\beta_k < \delta$, и такво да је збир $\sum\limits_{k=1}^{n} (\mathrm{diam}\,\beta_k)^p$ мањи или једнак од тог броја.*

б) Хаусдорфова димензија метричког простора M је $\inf\limits_{m_p(M)<+\infty} p$.

Други део дефиниције је коректан јер за $p < q$, важи $m_p(M) > m_q(M)$, што видимо, ако уочимо $\delta < 1$.

Лема 3.1. *Нека је $A = \{A_k\}_{k=1}^n$ фамилија нормалних оператора са простом заједничком спектралном мером, и нека је $1 \leq p \leq 2$. Тада је $\mathrm{qd}_p(A) \leq 2n^{1/p} m_p(\sigma(A_1, A_2, \dots A_n))^{1/p}$.*

Доказ. Због услова простоте спектралне мере можемо сматрати да су сви опера̄ттори A_k оператори множења са z_k на њиховом заједничком спектру.

Нека је $\mathcal{B} = \{\beta_j\}_1^N$ нека фамилија дисјунктних подскупова скупа $\sigma(\{A_j\})$, и нека је $P_{\mathcal{B}}$ пројектор на линеарни омотач карактеристичних функција скупова β_j. Доказаћемо прво да важи неједнакост

$$||A_kP_{\mathcal{B}} - P_{\mathcal{B}}A_k||_p \leq 2\left(\sum_j (\mathrm{diam}\,\beta_j)^p\right)^{1/p}. \tag{6}$$

Заиста нека је $e_j = \chi_{\beta_j}/||\chi_{\beta_j}||$, и нека је $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \beta_j$. Тада важи $||(I-P_{\mathcal{B}})A_kP_{\mathcal{B}}e_j|| = ||(I-P_{\mathcal{B}})(A_k - \lambda_kI)P_{\mathcal{B}}e_j|| \leq ||(A_k-\lambda_kI)e_j|| \leq ||(A_k-\lambda_k)E_{A_k}(\beta_j)|| \leq \sup\limits_{\mu\in\beta_j} |\lambda_k - \mu_k| \leq \mathrm{diam}\,\beta_j$. Одатле је $||(I-P_{\mathcal{B}})A_kP_{\mathcal{B}}|| \leq \left(\sum_j ||(I-P_{\mathcal{B}})A_kP_{\mathcal{B}}e_j||^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_j (\mathrm{diam}\,\beta_j)^p\right)^{1/p}$. Примењујући исти поступак на оператор A_k^* добићемо $||P_{\mathcal{B}}A_k(I-P_{\mathcal{B}})|| = ||(I-P_{\mathcal{B}})A_k^*P_{\mathcal{B}}|| \le \left(\sum_j (\operatorname{diam}\beta_j)^p\right)^{1/p}$, па одатле важи (6).

Нека је сада $\mathcal{B}^{(i)}$ фамилија разлагања скупа $\sigma(\{A_k\})$ са особинама $|\mathcal{B}^{(i)}| = \sup\operatorname{diam}\beta_j^{(i)} \to 0$ и $|\mathcal{B}^{(i)}|_p = \left(\sum_j (\operatorname{diam}\beta_j^{(i)})^p\right)^{1/p} \to m_p(\sigma(\{A_k\})^{1/p}$. Тада очито $P_{\mathcal{B}^{(i)}}$ тежи јако ка јединичном оператору, и важи $\liminf\limits_{i\to+\infty} \left(\sum_k ||[P_{\mathcal{B}^{(i)}}, A_k]||_p^p\right)^{1/p} \le \liminf\limits_{i\to+\infty} \left(\sum_k 2^p \sum_j (\operatorname{diam}\beta_j)^p\right)^{1/p}$, а последњи израз тежи ка $2n^{1/p}m_p(\sigma(\{A_k\})^{1/p}$, кад i тежи ка $+\infty$. $\square$

Став 3.3. *Нека је $\{A_k\}$ комутирајућа фамилија нормалних оператора, $\alpha = \sigma(\{A_k\})$, и $p \le 2$.*
а) Ако је $m_p(\alpha) = 0$, онда је фамилија $\{A_k\}$ $\mathfrak{S}_p$-квазидијагонална;
б) Ако је $m_p(\alpha) < +\infty$ и спектрална мера фамилије $\{A_k\}$ има коначну вишеструкост, тада је та фамилија $\mathfrak{S}_p$-полудијагонална.

Доказ. Довољно је представити операторе A_k као директну суму оператора чија је заједничка спектрална мера проста, и затим применити претходну лему. $\square$

Скоро инверзна укрштања

Наредне дефиниције и ставови односе се на појам скоро инверзног укрштања. Они су исказани на нивоу тополошких векторских простора са произвољном топологијом. Докази су рутински, али можда превише "далеки". Како би се, одмах при првом читању могао стећи утисак како ће се ти ставови применити на питања елементарних оператора треба да имамо у виду следећи пример $\mathcal{X} = \mathfrak{S}_2$ и $\mathcal{Y} = B(\mathfrak{H})$, и $\Phi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ природно утапање, при чему је $B(\mathfrak{H})$ снабдевен слабом-* топологијом (колико да његов дуал буде $\mathfrak{S}_1$), док је $\mathfrak{S}_2$ снабдевен слабом топологијом (и наравно дуалан је сам себи, до на антилинеарност). Ова слаба топологија проистиче из структуре Банаховог простора на $\mathfrak{S}_2$, а не из структуре полазног Хилбертовог простора. Тачније, ове технике су развијане да би се све лепе особине које имају елементарни оператори на $\mathfrak{S}_2$ пренели на $B(\mathfrak{H})$.

Елементарни оператор означаваћемо, као и до сада са Λ, док ћемо његов уопштени адјунговани означавати са $\tilde{\Lambda}$. Његову рестрикцију на скуп $\mathfrak{S}_2$ означаваћемо са Λ_1, док ће ознака Λ_1^* остати резервисана за уобичајен адјунговани оператор ове рестрикције.

Дефиниција 3.4. *Нека су $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ тополошки векторски простори. Нека су $\Phi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, $S : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ и $T : \mathcal{Y} \to \mathcal{Y}$ непрекидна линеарна пресликавања. Тројка (Φ, S, T) је укрштање ако важи $T\Phi = \Phi S$. Кажемо да тројка (Φ, S, T) има скоро инверзно укрштање (скраћено АОС) ако постоји низ непрекидних линеарних пресликвања $F_n : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ таквих да важи $F_n\Phi \to I$, $\Phi F_n \to I$, и $F_nT - SF_n \to 0$. Слично кажемо да тројка (Φ, S, T) има скоро инверзно полуукрштање (скраћено АОП) ако постоји низ F_n са истим особинама као и малопре, осим што тражимо да низ $F_nT - SF_n$ буде ограничен, уместо да тежи нули.*

Напомена 3.4. Конвергенције наведене у претходној дефиницији су "тачка по тачка" и у односу на топологију датог простора. Исто важи и за ограниченост.

Напомена 3.5. Ознака АОС је скраћеница од *апроксимативное обратное сплетение*, а АОП од *апроксимативное обратное полусплетение.*

Став 3.4. *Нека тројка (Φ, S, T) има АОС. Тада је $\Phi^{-1}(\operatorname{ran} T) \subseteq \overline{\operatorname{ran} S}$.*

Доказ. Нека је $x \in \Phi^{-1}(\operatorname{ran} T)$, то јест $\Phi x = Ty$ за неко y. Тада је $x = \lim F_n\Phi x = \lim F_nTy = \lim((F_nT - SF_n)y + SF_ny) = \lim SF_ny \in \overline{\operatorname{ran} S}$. $\square$

Последица 3.1. *Нека је $\mathcal{X} = \mathfrak{H}$ - Хилбертов простор и (Φ, S, T) има АОС. Тада је $\Phi(\ker S^*) \cap \operatorname{ran} T = \{0\}$.*

Доказ. Према претходном ставу је $\Phi(\ker S^*) \cap \operatorname{ran} T \subseteq \Phi(\ker S^* \cap \Phi^{-1}(\operatorname{ran} T)) \subseteq \Phi(\ker S^* \cap \overline{\operatorname{ran} S}) = \{0\}$. $\square$

Став 3.5. *Нека је $\mathcal{X}$ Банахов, а $\mathcal{Y}$ тополошки векторски простор, и нека је $\Phi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$. Претпоставимо да тројке (Φ, S_i, T_i) $(i = 1, 2)$ имају заједничко АОС, и да за свако $x \in \mathcal{X}$ важи $||S_2 x|| \leq ||S_1 x||$. Тада је:*
а) $T_1^{-1}(\operatorname{ran} \Phi) \subseteq T_2^{-1}(\operatorname{ran} \Phi)$;
б) за све $y \in T_1^{-1}(\operatorname{ran} \Phi)$ важи $||\Phi^{-1} T_2 y|| \leq ||\Phi^{-1} T_1 y||$.

Доказ. Под претпоставком о скоро инверзном укрштању, пресликавање Φ је увек инјективно. Заиста, из $\Phi x_1 = \Phi x_2$, следи $x_1 = \lim F_n \Phi x_1 = \lim F_n \Phi x_2 = x_2$. Тако је ознака Φ^{-1} у исказу другог дела става коректна.

Нека је $y \in T_1^{-1}(\operatorname{ran} \Phi)$, тада је $T_1 y = \Phi x_1$, за неко $x_1 \in \mathcal{X}$. Имамо $x_1 = \lim F_n \Phi x_1 = \lim((F_n T_1 - S_1 F_n)y + S_1 F_n y) = \lim S_1 F_n y$, то јест $x_1 \in \overline{\operatorname{ran} S_1}$.

На скупу $\overline{S_1 \mathcal{X}}$ дефинишемо оператор K помоћу $K S_1 x = S_2 x$ (продужен по непрекидности). Јасно је да на домену тог оператора важи $||Kx|| \leq ||x||$. Имамо $K x_1 = \lim K S_1 F_n y = \lim S_2 F_n y = \lim F_n T_2 y$, односно $\Phi K x_1 = \lim \Phi F_n T_2 y = T_2 y$, то јест $T_2 y \in \operatorname{ran} \Phi$. Тиме смо доказали тврђење под а).

За $y \in T_1^{-1}(\operatorname{ran} \Phi)$ је $||\Phi^{-1} T_2 y|| = ||K x_1|| \leq ||x_1|| = ||\Phi^{-1} T_1 y||$, чиме је завршен и доказ другог дела. $\square$

Последица 3.2. *Нека је, уз ознаке и претпоставке претходног става, још и $\mathcal{X} = \mathfrak{H}$ - Хилбертов простор, $S_1 = S$, $S_2 = S^*$. Тада је $||\Phi^{-1} T_2 y|| = ||\Phi^{-1} T_1 y||$ за све $y \in \mathcal{Y}$ и посебно* $\ker T_1 = \ker T_2$.

Доказ. Довољна је проста примена Става 3.5. $\square$

Означимо са $\mathcal{X}^*$ простор непрекидних антилинеарних функционала на $\mathcal{X}$, са слабом-* топологијом. (Одатле је $\mathfrak{H}^* \cong \mathfrak{H}$ у случају да је $\mathcal{X} = \mathfrak{H}$ - Хилбертов простор.) Задржимо претходне ознаке. Ако тројке (Φ, S, T_1) и (Φ, S^*, T_2) имају АОС, и ако конјуговане тројке (Φ^*, T_1^*, S^*) и (Φ^*, T_2^*, S) такође имају АОС, путем низа F_n^* (што није нужно јер операција конјуговања није јако непрекидна), где је $\Phi^* : \mathcal{Y}^* \to \mathfrak{H}$ итд. Тада и тројка $(\Phi\Phi^*, T_1^*, T_2)$ има АОС (и то је низ $F_n^* F_n$), где је $\Phi\Phi^* : \mathcal{Y}^* \to \mathcal{Y}$. Овакво размишљање мотивише следећу дефиницију.

Дефиниција 3.5. *Нека је $\mathfrak{H}$ Хилбертов, а $\mathcal{Y}$ тополошки векторски простор. Нека су даље $\Phi : \mathfrak{H} \to \mathcal{Y}$, $S : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$, $T_{1/2} : \mathcal{Y} \to \mathcal{Y}$, непрекидна линеарна пресликавања, и нека су Φ^*, S^*, и $T_{1/2}^*$ њихова конјугована пресликавања, где смо за дуални простор узели простор антилинеарних непрекидних функционала. Ако је низ $F_n^* F_n$ АОС за тројку $(\Phi\Phi^*, T_1^*, T_2)$ тада кажемо да је F_n звезда скоро инверзно укрштање (скраћено *-АОС) четворке (Φ, T_1, T_2, S). Аналогно се дефинише и *-АОП.*

Став 3.6. *Нека је F_n *-АОП неке четворке (Φ, T_1, T_2, S). Тада је*

$$\operatorname{ran} T_1 \cap T_2^{-1}(\Phi\Phi^*(\mathcal{Y}^*)) \subseteq \Phi(\mathfrak{H}).$$

Доказ. Нека је $y \in \operatorname{ran} T_1 \cap T_2^{-1}(\Phi\Phi^*(\mathcal{Y}^*))$, то јест $y = T_1 y_1$ и $T_2 y = \Phi\Phi^* z$ за неке $z \in \mathcal{Y}^*$, $y_1 \in \mathcal{Y}$. Тада је према претпоставци о *-АОП низ оператора $F_n^* F_n T_2 - T_1^* F_n^* F_n$ ограничен. Међутим како је $F_n^* F_n T_2 y = F_n^* F_n \Phi\Phi^* z \longrightarrow z$, то је ограничен и низ $T_1^* F_n^* F_n y$. Одатле и из једнакости $||F_n y||^2 = \langle F_n^* F_n y, T_1 y_1 \rangle = \langle T_1^* F_n^* F_n y, y_1 \rangle$ добијамо да је низ вектора $F_n y$ ограничен. (У последњој једнакост, угласте заграде су искориштене, како за означавање скаларног производа у $\mathfrak{H}$, тако и за упаривање вектора и функционала на $\mathcal{Y}$, односно $\mathcal{Y}^*$.) То значи да постоји његов подниз који слабо конвергира, на пример $F_{n_k} y \to h$. Одатле је $y = \lim \Phi F_{n_k} y = \Phi h \in \Phi(\mathfrak{H})$, чиме је завршен доказ. $\square$

Последица 3.3. *Задржимо претпоставке претходног става. Тада важи* $\operatorname{ran} T_1 \cap \ker T_2 = 0$.

Доказ. Очигледно важи $\ker T_2 \subseteq T_2^{-1}(\Phi\Phi^*(\mathcal{Y}^*))$, па одатле и према претходном ставу имамо $\operatorname{ran} T_1 \cap \ker T_2 \subseteq \Phi(\mathfrak{H})$. Сада укључујући Последицу 3.1 имамо $\operatorname{ran} T_1 \cap \ker T_2 = \operatorname{ran} T_1 \cap \ker T_2 \cap \Phi(\mathfrak{H}) = \operatorname{ran} T_1 \cap \Phi(\ker S^*) = \{0\}$. $\square$

Наредна тврђења посвећена су вези између полудијагоналности и АОС.

Нека је $\mathfrak{J}$ неки идеал у $B(\mathfrak{H})$. Нека је $\mathfrak{J}' = \{X \mid XY \in \mathfrak{S}_2 \text{ за } \forall Y \in \mathfrak{J}\}$, $\mathfrak{J}^* = \{X \mid XY \in \mathfrak{S}_1 \text{ за } \forall Y \in \mathfrak{J}\}$ и $\tilde{\mathfrak{J}} = \{X \mid XY \in \mathfrak{J}^* \text{ за } \forall Y \in \mathfrak{J}\}$.

Непосредно се проверава да је $\mathfrak{S}_p^* = \mathfrak{S}_{p/(p-1)}$ за $p > 1$, $\mathfrak{S}_p' = \begin{cases} \mathfrak{S}_{2p/(p-2)}, & p > 2 \\ B(\mathfrak{H}), & p \leq 2 \end{cases}$, $\tilde{\mathfrak{S}}_p = \mathfrak{S}_{p/(p-2)}$ за $p > 2$, затим $\mathfrak{S}_1^* = B(\mathfrak{H})$ и $B(\mathfrak{H})^* = \mathfrak{S}_1$, $B(\mathfrak{H})' = \mathfrak{S}_2$, $\tilde{B}(\mathfrak{H}) = \mathfrak{S}_1$.

Став 3.7. *Нека је $\mathfrak{J} \supseteq \mathfrak{S}_2$ неки идеал у $B(\mathfrak{H})$.*

а) Ако је фамилија A_k $\mathfrak{J}'$-полудијагонална и $\Phi : \mathfrak{S}_2 \to \mathfrak{J}$ природно утапање, тада $(\Phi, \Lambda|_{\mathfrak{S}_2}, \Lambda|_{\mathfrak{J}})$ има АОС;

б) Ако је фамилија $\{A_k\}$ $\tilde{\mathfrak{J}}$-полудијагонална тада четворка $(\Phi, \Lambda, \tilde{\Lambda}, \Lambda_1)$ има *-АОС.

(Наравно $\Lambda(X) = \sum_{k=1}^n A_k X B_k$, и $\Lambda_1 = \Lambda|_{\mathfrak{S}_2}$)

Доказ. Доказ ћемо извести у случају када је $\mathfrak{J}'$ неки од идеала $\mathfrak{S}_p$, односно ако је $\mathfrak{J}$ неки од идеала $\mathfrak{S}_{p'}$ за $p' = 2p/(p-2)$ или $B(\mathfrak{H})$. Овај последњи случај је и најинтересантнији.

а) Нека је P_m низ пројектора који обезбеђује $\mathfrak{J}'$ полудијагоналност, и нека су бројеви r и q дефинисани релацијама $1/p + 1/q = 1$, $1/p + 1/r = 1/2$. Ставимо $F_m(X) = P_m X$ ($F_m : \mathfrak{J} \to \mathfrak{S}_2$). Очито важи $F_m \Phi \to I$ и $\Phi F_m \to I$. Рачунамо $(\Lambda_1 F_m - F_m \Lambda)(X) = \sum_k A_k P_m X B_k - \sum_k P_m A_k X B_k = \sum_k (A_k P_m - P_m A_k) X B_k$, па одатле добијамо низ неједнакости $||(\Lambda_1 F_m - F_m \Lambda)(X)||_2 \leq \sum_k ||A_k P_m - P_m A_k||_p ||X B_k||_r \leq (\sum ||X B_k||_r^q)^{1/q} (\sum ||A_k P_m - P_m A_k||_p^p)^{1/p} \leq ||X||_r (\sum ||B_k||^q)^{1/q} \operatorname{qd}_p(A_k) \leq const. ||X||_r$, то јест F_m је АОП.

Означимо са X_m низ $(\Lambda_1 F_m - F_m \Lambda)(X)$. Доказали смо да је низ X_m ограничен. Међутим, није тешко проверити да важи $\Phi X_m = \Phi(\Lambda_1 F_m - F_m \Lambda)(X) = (\Lambda \Phi F_m - \Phi F_m \Lambda)(X) \to 0$, у слабој топологији простора $\mathfrak{J}$, која је слабија од норма топологије простора $\mathfrak{S}_2$. Како је у тој топологији $\mathfrak{S}_2$ дуалан сам себи то по Алаоглуовој теореми низ X_m има конвергентан подниз X_{m_k}. Али тај подниз у слабијој топологији тежи ка нули. Дакле низ X_m има подниз који конвергира ка нули. Како је у норма топологији, простор $\mathfrak{S}_2$ сепарабилан, то процесом дијагонализације, сада, можемо добити подниз F_{m_k} који онда представља АОС;

б) Као и малопре ставимо $F_m(X) = P_m X$, где је P_m низ пројектора који обезбеђује $\tilde{\mathfrak{J}}$-полудијагоналност. Даљи ток доказа је исти као и под а), с тим што користимо неједнакост $||(\Lambda^* F_m^* F_m - F_m^* F_m \tilde{\Lambda})(X)||_{\mathfrak{J}^*} \leq \sum_k ||A_k^* P_m - P_m A_k^*||_{\tilde{\mathfrak{J}}} ||X B_k||_{\mathfrak{J}}$. $\square$

Напомена 3.6. Интересантно је да закључак прећашњег Става, не зависи од фамилије $\{B_k\}$!

Последица 3.4. *Ако је фамилија $\{A_k\}$ 1-полудијагонална, тада је* $\ker \tilde{\Lambda}\Lambda = \ker \Lambda$.

Доказ. Фамилија $\{A_k\}$ је $\mathfrak{S}_1$ полудијагонална, односно $\widetilde{B(\mathfrak{H})}$ полудијагонална. Према Ставу 3.7 б), то значи да четворка $(\Phi, \Lambda, \tilde{\Lambda}, \Lambda_1)$ има *-АОС. Сада примењујући Последицу 3.3, за $\mathfrak{H} = \mathfrak{S}_2$, $\mathcal{Y} = B(\mathfrak{H})$, $T_1 = \Lambda$ и $T_2 = \tilde{\Lambda}$, $S = \Lambda_1$, имамо $\ker \tilde{\Lambda} \cap \operatorname{ran} \Lambda = \{0\}$. Одатле излази $\ker \tilde{\Lambda}\Lambda = \ker \Lambda$. $\square$

Спектрална Анализа

Ако су $\{A_k\}$ и $\{B_k\}$ две комутирајуће фамилије нормалних оператора, тада се сви A_k могу представити као ограничене мерљиве функције од неког нормалног оператора A, и слично, сви B_k се могу представити као ограничене мерљиве функције од неког нормалног оператора B - Теорема 1.11. На основу тога елементарни оператор можемо посматрати у облику $\Lambda(X) = \sum_{j=1}^n f_j(A) X g_j(B)$, где су f_j и g_j ограничене мерљиве функције, а A и B нормални оператори.

Дефиниција 3.6. Нека је $\Lambda : \mathfrak{J} \to \mathfrak{J}'$ елементаран оператор, а $\mathfrak{J}$ и $\mathfrak{J}'$ идеали (не обавезно прави) у $B(\mathfrak{H})$.

а) Спектрални носач оператора Λ је скуп $\Gamma = \Gamma_\Lambda = \{(s,t) \,|\, \sum_{j=1}^n f_j(s)g_j(t) = 0\}$.

б) 0-спектрални потпростор (или коренски потпростор) оператора Λ је скуп $\mathcal{E}_\Lambda(0) = \{X \in B(\mathfrak{H}) \,|\, \lim\limits_{m\to+\infty} ||\Lambda^m(X)||^{1/m} = 0\}$.

в) $\mathfrak{M}(\Gamma) = \{X \in \mathfrak{J} \,|\, E_A(\alpha)XE_B(\beta) = 0$, за све $\alpha \subset \sigma(A), \beta \subset \sigma(B), \alpha\times\beta\cap\Gamma = \emptyset\}$.

Став 3.8. *Важе инклузије*

а) $\ker\Lambda \subseteq \mathcal{E}_\Lambda(0)$*;*

б) $\ker\Lambda \subseteq \mathfrak{M}(\Gamma)$*;*

в) Ако $X \in \mathfrak{M}(\Gamma)$*, тада и* $\Lambda(X) \in \mathfrak{M}(\Gamma)$*.*

Доказ. Непосредна провера. $\square$

Став 3.9. $\mathcal{E}_\Lambda(0) \subseteq \mathfrak{M}(\Gamma)$

Доказ. Доказ ћемо извести у три корака. У сва три корака кључна је чињеница да је оператор $\Lambda_{\alpha,\beta} : B_{\alpha,\beta} \to B_{\alpha,\beta}$, дат са $\Lambda_{\alpha,\beta}(X) = \sum_{k=1}^m E_A(\alpha)A_kE_A(\alpha)XE_B(\beta)B_kE_B(\beta)$ инвертибилан, ако је $\alpha\times\beta\cap\Gamma = \emptyset$. (Увели смо ознаку $B_{\alpha,\beta} = \{X \in B(\mathfrak{H}) \,|\, E_A(\alpha)XE_B(\beta) = X\}$.) Заиста, то следи из гељфандовске теорије. Наиме важи $\sigma(\Lambda_{\alpha,\beta}) \subseteq \sum_{k=1}^m \sigma(E_A(\alpha)A_kE_A(\alpha))\sigma(E_B(\beta)B_kE_B(\beta)) \subseteq \sum_{k=1}^m f_k(\alpha)g_k(\beta)$, а овај последњи скуп не садржи нулу. Реалан број $||\Lambda_{\alpha,\beta}^{-1}||^{-1}$ означићемо са K.

1. корак. Ако је $||E_A(\alpha)\Lambda(X)E_B(\beta)|| \le C$, тада је $||E_A(\alpha)XE_B(\beta)|| \le C/K$. Заиста, имамо $||E_A(\alpha)XE_B(\beta)|| \le K^{-1}||\Lambda_{\alpha,\beta}(E_A(\alpha)XE_B(\beta))|| = K^{-1}||E_A(\alpha)\Lambda(X)E_B(\beta)|| \le C/K$.

2. корак. Ако је $||\Lambda^n(X)|| \le \varepsilon^n$, тада је $||E_A(\alpha)XE_B(\beta)|| \le (\varepsilon/K)^n$. Заиста, из горње неједнакости излази и $||E_A(\alpha)\Lambda^n(X)E_B(\beta)|| \le \varepsilon^n$, а одатле, због првог корака $||E_A(\alpha)\Lambda^{n-1}(X)E_B(\beta)|| \le \varepsilon^n/K$, па ако први корак применимо још $n-1$ пута добићемо $||E_A(\alpha)XE_B(\beta)|| \le (\varepsilon/K)^n$.

3. Нека је $X \in \mathcal{E}_\Lambda(0)$, и нека је $\varepsilon < K$. Тада постоји природан број n_0, такав да за $n \ge n_0$ важи $||\Lambda^n(X)|| \le \varepsilon^n$. Одатле према другом кораку важи $||E_A(\alpha)XE_B(\beta)|| \le (\varepsilon/K)^n$, одакле, пуштајући да $n \to +\infty$ добијамо $||E_A(\alpha)XE_B(\beta)|| = 0$, односно $X \in \mathfrak{M}(\Gamma)$. $\square$

Обратну инклузију $\mathfrak{M}(\Gamma) \subseteq \mathcal{E}_\Lambda(0)$, за сада нисмо у могућности да докажемо. Међутим, ако се домен елементарног оператора Λ, сузи на Хилберт-Шмитове операторе онда важи $\mathfrak{M}(\Gamma_{\Lambda_1}) \subseteq \ker\Lambda_1$, и тиме наравно $\mathfrak{M}(\Gamma_{\Lambda_1}) \subseteq \mathcal{E}_{\Lambda_1}(0)$. Тачније, важи тврђење.

Став 3.10. *Ако је* $X \in \mathfrak{S}_2 \cap \mathfrak{M}(\Gamma_\Lambda)$*, тада је* $\Lambda(X) = 0$*.*

Доказ. Представимо полазни Хилбертов простор $\mathfrak{H}$ на два начина, као $L^2(\Omega_1,\mu_1)$, односно као $L^2(\Omega_2,\mu_2)$, тако да оператори A и B буду представљени као оператори множења функцијом $s(\omega_1)$ на $L^2(\Omega_1,\mu_1)$, односно функцијом $t(\omega_2)$ на $L^2(\Omega_2,\mu_2)$. Тада се оператори A_j представљају као оператори множења функцијама $f_j(s(\omega_1))$, а B_j као оператори множења функцијама $g_j(t(\omega_2))$.

Познато је да је простор $\mathfrak{S}_2$, у овом случају, изометрички изоморфан простору $L^2(\Omega_1\times\Omega_2)$, при чему се Хилберт-Шмитов оператор X представља као интегрални оператор са језгром $K(\omega_1,\omega_2) \in L^2(\Omega_1\times\Omega_2)$. Није тешко проверити да је $\mathfrak{M}(\Gamma)\cap\mathfrak{S}_2 \cong \{K \in L^2(\Omega_1\times\Omega_2) \,|\, K(\omega_1,\omega_2) = 0$, за $(s(\omega_1),t(\omega_2)) \notin \Gamma\}$. Ако оператору X одговара језгро K, онда оператору $\sum_{j=1}^n A_jXB_j$ одговара језгро $\sum_{j=1}^n f_j(s(\omega_1))K(\omega_1,\omega_2)g_j(t(\omega_2)) \equiv 0$. (Све исказане једнакости су "скоро свуда" у односу на производ мера μ_1 и μ_2.) $\square$

Имамо после Става 3.10 све разлоге да се ослонимо на $\mathfrak{S}_2$-случај. Да бисмо то извели, помоћи ће нам следећи Став, или тачније, критеријум за припадност простору $\mathfrak{S}_2$.

Став 3.11. *Нека је* (Ω,μ) *простор коначне мере, и нека на* Ω *постоји метрика са особином* $m_p(\Omega) < +\infty$ *за неко* p *(*m_p *- мера Хаусдорфа). Тада, ако* $T : L^2(\Omega,\mu) \to \mathfrak{H}$ *задовољава услов*

$$||TP_\alpha||^2 \le C(\operatorname{diam}\alpha)^p,$$

за свако $\alpha \subset \Omega$*, (у питању је* $B(\mathfrak{H})$*-норма), где је* P_α *пројектор* $P_\alpha f = \chi_\alpha f$*, онда* $T \in \mathfrak{S}_2(L^2,\mathfrak{H})$ *и још важи*

$$||T||_{\mathfrak{S}_2}^2 \le Cm_p(\Omega)^p.$$

Доказ. За произвољно разлагање $\mathcal{B} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ простора Ω, ставимо $|\mathcal{B}| = \sum_{k=1}^{n} (\operatorname{diam} \beta_k)^p$. Нека је $e_k = \chi_{\beta_k}/||\chi_{\beta_k}||$, нормирана карактеристична функција скупа β_k, и нека је $Q_{\mathcal{B}}$ пројектор на линеарни омотач скупа $\{e_k\}_{k=1}^{n}$. Имамо

$$
\begin{aligned}
||TQ_{\mathcal{B}}||_2^2 = \sum_{k=1}^{n} ||Te_k||^2 = \sum_{k=1}^{n} ||TP_{\beta_k} e_k||^2 \leq \\
\leq \sum_{k=1}^{n} ||TP_{\beta_k}||^2 \leq \sum_{k=1}^{n} C(\operatorname{diam} \beta_k)^p = C|\mathcal{B}|.
\end{aligned}
$$

Изаберимо низ разлагања $\mathcal{B}_j$, такав да $Q_{\mathcal{B}_j}$ растуће јако тежи јединици, и да је $\limsup |\mathcal{B}_j| \leq m_p(\Omega)$, па ћемо имати према Леми $III5.1$ из [6] да важи $T \in \mathfrak{S}_2$ и $TQ_{\mathcal{B}_j} \to T$ у норми простора $\mathfrak{S}_2$, као и одговарајућу неједнакост. Овиме је доказ завршен. $\Box$

Лема 3.2. *Нека је Хаусдорфова димензија здруженог спектра $\sigma(\{A_k\})$ мања или једнака од $2n$ и нека фамилија $\{A_k\}$ има циклични вектор (то јест просту заједничку спектралну меру). Тада је за све $X \in \mathfrak{M}(\Gamma)$, оператор $\Lambda^n(X)$ Хилберт-Шмитов.*

Доказ. Доказ ће бити готов, ако изведемо неједнакост $||E_{\{A_k\}}(\alpha)\Lambda(X)||^2 \leq K(\operatorname{diam} \alpha)^2 ||X||^2$, где је α произвољан подскуп скупа $\sigma(\{A_k\})$. Заиста, тада индукцијом лако добијамо оцену $||(\Lambda^n(X))^* E_{\{A_k\}}(\alpha)|| = ||E_{\{A_k\}}(\alpha)\Lambda^n(X)||^2 \leq C(\operatorname{diam} \alpha)^{2n}$, па је према Ставу 3.11, оператор $(\Lambda^n(X))^*$ Хилберт-Шмитов, а са њим и $\Lambda^n(X)$.

Вратимо се на нашу неједнакост. Како фамилија $\{A_k\}$ има циклични вектор, то се сви оператори A_k могу представити као множење са z_k, на простору $L^2(\Omega_1) = L^2(\sigma(\{A_k\}))$. Оператор A ћемо на простору $L^2(\Omega_1)$ представити као оператор множења есенцијално ограниченом функцијом $s(\omega_1)$. Због простоте спектралне мере можемо узети да је s бијекција, до на скуп мере нула, са Ω_1 на $\sigma(A)$ (видети Напомену 1.3), као и да је $f_k \circ s = \pi_k$ - k-та пројекција. Слично ћемо урадити и за фамилију B, само ће простор бити означен са Ω_2 уместо Ω_1, а функција са $t(\omega_2)$, уместо $s(\omega_1)$. Поред скупа Γ уочићемо и скуп $\Gamma' = \{(\omega_1, \omega_2) \in \Omega_1 \times \Omega_2 \mid \sum_{k=1}^{n} f_k(s(\omega_1)) g_k(t(\omega_2)) = 0\}$. Како је $E_{\{A_k\}}(\alpha) = E_A(s(\alpha))$, то није тешко уочити да је $\mathfrak{M}(\Gamma) = \mathfrak{M}(\Gamma')$.

Нека је $\hat{\alpha} = \pi_2(\pi_1^{-1}(\alpha))$, то јест, нека је $\hat{\alpha}^C$ (комплемент скупа $\hat{\alpha}$) највећи подскуп скупа $\sigma(\{B_k\})$, такав да $\alpha \times \hat{\alpha}^C$ не сече Γ'. Како је $X \in \mathfrak{M}(\Gamma) = \mathfrak{M}(\Gamma')$ то је онда $E_{\{A_k\}}(\alpha)\Lambda(X) = \sum_{k=1}^{n} A_k E_{\{A_k\}}(\alpha) X (E_{\{B_k\}}(\hat{\alpha}) + E_{\{B_k\}}(\hat{\alpha}^C)) B_k = \sum_{k=1}^{n} A_k E_{\{A_k\}}(\alpha) X E_{\{B_k\}}(\hat{\alpha}) B_k$.

Нека је $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ произвољна тачка из α. Тада имамо $E_{\{A_k\}}(\alpha)\Lambda(X) = \sum_{k=1}^{n} E_{\{A_k\}}(\alpha)(A_k - \lambda_k I) X B_k E_{\{B_k\}}(\hat{\alpha}) + \sum_{k=1}^{n} E_{\{A_k\}}(\alpha) \lambda_k X B_k E_{\{B_k\}}(\hat{\alpha})$. Сваки сабирак ћемо сада оценити посебно. За први сабирак имамо

$$
||\sum_{k=1}^{n} E_{\{A_k\}}(\alpha)(A_k - \lambda_k I) X B_k E_{\{B_k\}}(\hat{\alpha})|| \leq \operatorname{diam}(\alpha) \sum_{k=1}^{n} ||XB_k|| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} ||B_k|| \right) \operatorname{diam}(\alpha) ||X||.
$$

Да бисмо оценили други сабирак приметимо да за свако $\omega_2 \in \hat{\alpha}$ постоји $\omega_1 = \omega_1(\omega_2) \in \alpha$ такво да $(\omega_1, \omega_2) \in \Gamma'$, а тиме и $(s(\omega_1), t(\omega_2)) \in \Gamma$. То онда значи да је $\sum_{k=1}^{n} f_k(s(\omega_1(\omega_2))) g_k(t(\omega_2)) = 0$, односно $\sum_{k=1}^{n} \pi_k(\omega_1(\omega_2)) g_k(t(\omega_2)) = 0$. Тако је $|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k g_k(t(\omega_2))| = |\sum_{k=1}^{n} (\lambda_k - \pi_k(\omega_1(\omega_2))) g_k(t(\omega_2))|$ $\leq (\operatorname{diam} \alpha) \sum_{k=1}^{n} ||g_k||_\infty$, а тиме и $||\sum_{k=1}^{n} \lambda_k g_k(B)|| \leq (\operatorname{diam} \alpha) \sum_{k=1}^{n} ||g_k||_\infty$, јер је у питању оператор множења функцијом $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k g_k(t(\omega_2))$. Тако је и други сабирак оцењен. Ово представља крај доказа. $\Box$

Напомена 3.7. Уместо претпоставке да фамилија $\{A_k\}$ поседује циклични вектор, може се претпоставити да су све функције f_k Липшиц-непрекидне, и тврђење остаје на снази уз исти доказ.

Став 3.12. *Ако је $\dim \sigma(\{A_k\}) \leq 2$, тада је $\mathfrak{M}(\Gamma) \subseteq \ker \Lambda$ и тиме $\mathcal{E}_\Lambda(0) = \ker \Lambda$.*

Доказ. Нека је $X \in \mathfrak{M}(\Gamma)$. Тада је према Леми 3.2 $\Lambda(X) \in \mathfrak{S}_2$, или прецизније $\Lambda(X) \in \Phi(\mathfrak{S}_2)$, где је $\Phi : \mathfrak{S}_2 \to B(\mathfrak{H})$ природно утапање. Нека је даље $\tilde{\Lambda} : B(\mathfrak{H}) \to B(\mathfrak{H})$, уопштени адјунговани оператор оператора Λ, и нека су Λ_1, осносно Λ_1^*, оператори који сликају $\mathfrak{S}_2$ у $\mathfrak{S}_2$, и имају исти облик као и Λ, односно $\tilde{\Lambda}$. Јасно је да је Λ_1 нормалан оператор (на Хилбертовом простору $\mathfrak{S}_2$) и да су Λ_1 и Λ_1^* један другом адјунговани. Даље имамо $\Lambda(X) \in \mathfrak{M}(\Gamma) \cap \mathfrak{S}_2$. Међутим према Ставу 3.10 последњи скуп је управо $\ker \Lambda_1 = \ker \Lambda_1^*$ (јер је Λ_1 нормалан оператор). Односно прецизно $\Lambda(X) \in \Phi(\ker \Lambda_1^*) \cap \operatorname{ran} \Lambda$.

Претпоставимо за почетак да фамилија $\{A_k\}$ има просту спектралну меру. Како је димензија заједничког спектра мања или једнака од 2, то је онда та фамилија, према Ставу 3.3, $\mathfrak{S}_2$ полудијагонална. На основу тога и Става 3.7 а) тројка $(\Phi, \Lambda_1, \Lambda)$ има AOC, па је према Последици 3.2 $\Phi(\Lambda_1^*) \cap \operatorname{ran} \Lambda = \{0\}$. Тиме смо доказали тврђење у случају када фамилија $\{A_k\}$ има циклични вектор.

Ако то није случај, тада ћемо Хилбертов простор $\mathfrak{H}$ разложити на суму цикличних простора $\mathfrak{H} = \oplus_{j=1}^{+\infty} \mathfrak{H}_j$. Потпростори $\mathfrak{H}_j$ су инваријантни у односу на фамилију $\{A_k\}$ и фамилије рестрикција $\{A_k|_{\mathfrak{H}_j}\}$ имају циклични вектор (видети [30], одељак 86, или [31], Глава 7). Тада је $B(\mathfrak{H}) = \oplus_{j=1}^{+\infty} B(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}_j)$ и за свако $X = \oplus_j X_j$ важи $\Lambda(X) = \oplus_j \Lambda_{(j)}(X_j)$. Ако сада $X \in \mathfrak{M}(\Gamma)$, тада је $X_j \in \mathfrak{M}_{\Lambda_{(j)}}(\Gamma) = \ker \Lambda_{(j)}$, и отуда $X \in \ker \Lambda$. $\square$

Слично тврђење може се извести и када се неједнакост $\dim \sigma(\{A_k\}) \leq 2$ замени слабијом, али тада нисмо у могућности да користимо Став 3.3. Због тога морамо прво да покажемо наредну Лему, која ће нам једнакост $\ker \Lambda_1 \cap \operatorname{ran} \Lambda = \{0\}$ обезбедити и без употребе Става 3.3.

Лема 3.3. *Нека је $\Lambda : B(H) \to B(H)$ елементаран оператор, и нека је Λ_1 његова рестрикција на скуп $\mathfrak{S}_2$. Тада важи $\ker \Lambda_1 \cap \overline{\operatorname{ran} \Lambda} = \{0\}$.*

Доказ. У раду [27] доказано је да, ако $\Lambda(X) \in \mathfrak{S}_2$, тада постоји низ X_n Хилберт-Шмитових оператора такав да је $\lim\limits_{n\to+\infty} \Lambda(X_n) = \Lambda(X)$, у $\mathfrak{S}_2$ норми. Одатле следи, да ако $Y \in \overline{\operatorname{ran} \Lambda} \cap \ker \Lambda_1$ (затворење је у смислу $\mathfrak{S}_2$-топологије), тада постоји низ $X_n \in \mathfrak{S}_2$, такав да $\Lambda_1(X_n) \to Y$. Међутим $\Lambda_1(X_n) \in \operatorname{ran} \Lambda_1$, $Y \in \ker \Lambda_1$, а Λ_1 је нормалан оператор па је $\operatorname{tr}(\Lambda_1(X_n)Y^*) = 0$, што преласком на лимес постаје $\operatorname{tr}(YY^*) = 0$, односно $Y = 0$. $\square$

Став 3.13. *Ако је $\dim \sigma(\{A_k\}) \leq 2n$, тада је $\mathfrak{M}(\Gamma) \subseteq \ker \Lambda^n$.*

Доказ. Као и у Ставу 3.11, можемо претпоставити да фамилија $\{A_k\}$ има циклични вектор. Према Леми 3.2 важи $\Lambda^n(X) \in \mathfrak{S}_2$ за свако $X \in \mathfrak{M}(\Gamma)$. Ако ствари поставимо прецизно тада је у ствари $\Lambda^n(X) \in \operatorname{ran} \Lambda^n \cap \Phi(\mathfrak{S}_2) \subseteq \mathfrak{M}_\Lambda(\Gamma) \cap \Phi(\mathfrak{S}_2) = \ker \Lambda_1$. Тачније $\Lambda^n(X) \in \operatorname{ran} \Lambda^n \cap \ker \Lambda_1 \subseteq \operatorname{ran} \Lambda \cap \ker \Lambda_1$. Међутим, последњи скуп је, према Леми 3.3, тривијалан. Дакле, $\Lambda^n(X) = 0$. $\square$

Као последицу овог става можемо на једноставан начин оценити успон оператора Λ.

Последица 3.5. *Ако је Хаусдорфова димензија здруженог спектра фамилије $\{A_k\}$ мања или једнака од $2n$, тада је $\mathfrak{M}(\Gamma) = \mathcal{E}_\Lambda(0) = \ker \Lambda^n$ и важи $\operatorname{asc} \Lambda \leq n$.*

Доказ. Заиста, према Ставу 3.12 важи $\mathfrak{M}(\Gamma) \subseteq \ker \Lambda^n$, док са друге стране, према Ставу 3.8, имамо $\ker \Lambda^n \subseteq \mathcal{E}_\Lambda(0) \subseteq \mathfrak{M}(\Gamma)$, чиме смо доказали први део тврђења. Други део је очигледан. $\square$

На основу Последице 3.5, једноставно добијамо оцену $\operatorname{asc}(\Lambda) \leq n$, где је n дужина елементарног оператора Λ. Међутим, та оцена се може побољшати за један, што ћемо видети у наредне три Леме и Ставу. Тиме ћемо и завршити ову главу.

Дефиниција 3.7. Нека је X Банахов простор. Кажемо да је фамилија пројектора $\mathcal{Q}$ *потпуна*, ако за свако $x \in X$, важи $x \in \overline{\mathcal{L}\{Px \mid P \in \mathcal{Q}\}}$.

Лема 3.4. *Нека је T линеаран оператор на Банаховом простору X, и нека је $\mathcal{Q}$ потпуна фамилија пројектора на X, који сви комутирају са T. Тада је $\operatorname{asc}(T) = \sup\limits_{P\in\mathcal{Q}} \operatorname{asc}(TP)$.*

Доказ. Заиста, како је $(TP)^n = T^nP$, то је $\ker(TP)^n = P^{-1}(\ker T^n)$, па ако је $\operatorname{asc} T = m$, онда је $\ker T^m = \ker T^{m+1}$, што повлачи $\ker(TP)^m = \ker(TP)^{m+1}$. Тако за све $P \in \mathcal{Q}$ важи $\operatorname{asc}(TP) \leq \operatorname{asc}(T)$.

Да бисмо доказали супротну неједнакост, уочимо вектор $x \in \ker T^m \setminus \ker T^{m-1}$, то јест вектор x, са особином $T^m x = 0$ и $T^{m-1} \neq 0$. Довољно је показати да постоји $P \in \mathcal{Q}$, такав да је $PT^{m-1}x \neq 0$ (заиста, тада је $T^m Px = PT^m x = 0$ и $T^{m-1}Px = PT^{m-1}x \neq 0$). Међутим то је тривијално јер би у супротном, на основу потпуности фамилије $\mathcal{Q}$, било $T^{m-1}x \in \overline{\mathcal{L}\{PT^{m-1}x \,|\, P \in \mathcal{Q}\}} = \{0\}$, што је у супротности са $T^{m-1}x \neq 0$. $\square$

Лема 3.5. *Нека је T линеаран оператор на Банаховом простору X. За сваки пројектор P, или важи једнакост $\operatorname{asc}(TP) = \operatorname{asc}(TP|_{PX})$ или је $\operatorname{asc}(TP) = 1$ и $\operatorname{asc}(TP|_{PX}) = 0$.*

Доказ. Јасно је да је $\operatorname{asc}(TP|_{PX}) \leq \operatorname{asc}(TP)$, па је довољно доказати неједнакост $\operatorname{asc}(TP) \leq \operatorname{asc}(TP|_{PX})$ под претпоставком $\operatorname{asc}(TP) = m \geq 2$. Нека је $x \in X$ такав да важи $(TP)^m x = 0$ и $(TP)^{m-1}x \neq 0$. Тада за $Px \in PX$ важи $(TP)^m Px = (TP)^m x = 0$ и $(TP)^{m-1}Px = (TP)^{m-1}x \neq 0$. (Претпоставка $m \geq 2$ била је важна због $(TP)^0 \neq T^0 P$!) Овиме је доказ завршен. $\square$

Лема 3.6. *Нека је $S = \{(z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbf{C}^n \,|\, z_1 = 0\}$. Нека је E спектрална мера фамилије $\{A_k\}$, и F спектрална мера фамилије $\{B_k\}$. Пресликавања $L_{E(K_1)}R_{F(K_2)} : B(\mathfrak{H}) \to B(\mathfrak{H})$ дата са $L_{E(K_1)}R_{F(K_2)}(X) = E(K_1)XF(K_2)$, где су K_1 и K_2 затворени подскупови од $\mathbf{C}^n$, који су, или садржани у S, или дисјунктни са S, чине потпуну фамилију пројектора.*

Доказ. Представимо скуп $\mathbf{C}^n$ као унију скупа S и фамилије затворених скупова $K^{(j)} = \{(z_1, z_2, \ldots, z_n) \,|\, |z_1| \geq 1/j\}$. Тада за свако $X \in B(\mathfrak{H})$ важи $X = \lim\limits_{j \to +\infty} L_{E(S)}R_{F(S)}X + L_{E(S)}R_{E(K^{(j)})}X + L_{E(K^{(j)})}R_{E(S)}X + L_{E(K^{(j)})}R_{F(K^{(j)})}X$. $\square$

Став 3.14. Нека је Λ нормално репрезентован елементаран оператор дужине $n > 1$. Тада је $\operatorname{asc}\Lambda \leq n-1$.

Доказ. Ако је $n = 2$ тада је тврђење од раније познато (Став 3.1). Зато претпоставимо да је $n \geq 3$. Доказ ћемо извести у два корака.

Претпоставимо, најпре, да су оператори A_1 и B_1 инвертибилни. Тада је $\Lambda = L_{A_1}R_{B_1}(X + \Lambda'(X))$, где је Λ' такође нормално репрезентован елементаран оператор, али дужине $n-1$, $\Lambda'(X) = \sum_{k=2}^{n}(A_1^{-1}A_k)X(B_k B_1^{-1})$. И пресликавање $X \mapsto X + \Lambda'(X)$ је елементаран оператор. Међутим димензија заједничког спектра фамилије $\{I, A_1^{-1}A_2, \ldots, A_1^{-1}A_n\}$ је мања или једнака од $n-2$, јер је додавање јединичног оператора не мења. Тако је успон тог пресликавања, према Последици 3.5, мањи или једнак од $n-1$. Тиме је и $\operatorname{asc}(\Lambda) \leq n-1$, јер су оператори L_{A_1} и R_{B_1} инвертибилни.

Ослободимо се, сада, претпоставке о инвертибилности оператора A_1 и B_1. У том циљу, уочимо потпуну фамилију пројектора из Леме 3.6, и означимо је са $\mathcal{Q}$. Како оператори A_k, и B_k комутирају са својим спектралним пројекторима, то пројектори из $\mathcal{Q}$ комутирају са Λ. Ако је K_1 или K_2 подскуп скупа S, тада се у композицији $L_{E(K_1)}R_{F(K_2)}\Lambda$ први сабирак анулира, па је његов успон мањи или једнак од $n-1$. Ако су, пак, оба скупа K_1 и K_2 дисјунктна са S, тада су оператори $E(K_1)A_1$ и $F(K_2)B_1$ инвертибилни (на одговарајућем потпростору), па можемо применити већ доказани специјални случај и Лему 3.5, да бисмо закључили да је $\operatorname{asc}(L_{E(K_1)}R_{F(K_2)}\Lambda) \leq n-1$. Примена Леме 3.4 завршава доказ. $\square$

Напомена 3.8. Приметимо да тврђење Става 3.14, није тачно за елементарне операторе дужине 1. Заиста, ако су A и B нормални оператори и ако A има нетривијално језгро, тада и пресликавање $X \mapsto AXB$ такође има нетривијално језгро. Наиме довољно је уочити оператор X, који слику оператора B пресликава (на било који начин) у језгро оператора A. То онда значи да пресликавање $X \mapsto AXB$ није $1-1$, па је његов успон већи или једнак од јединице!

4. ТЕОРЕМЕ ТИПА ФАГЛИДА-ПАТНЕМА

Како је $\mathfrak{S}_2$ Хилбертов простор, у могућности смо да за елементаран оператор $E : \mathfrak{S}_2 \to \mathfrak{S}_2$, одредимо његов адјунгован оператор.

Теорема 4.1. *Ако је $\Lambda : \mathfrak{S}_2 \to \mathfrak{S}_2$, елементаран оператор $\Lambda(X) = \sum_{j=1}^n A_j X B_j$ тада је $\Lambda^*(X) = \sum_{j=1}^n A_j^* X B_j^*$.*

Доказ. За X, $Y \in \mathfrak{S}_2$ имамо

$$\begin{aligned}\langle \Lambda(X), Y\rangle &= \mathrm{tr}(\Lambda(X)Y^*) = \mathrm{tr}\left(\sum_{j=1}^n A_j X B_j Y^*\right) = \\ &= \sum_{j=1}^n \mathrm{tr}(A_j X B_j Y^*) = \sum_{j=1}^n \mathrm{tr}(X B_j Y^* A_j) = \\ &= \mathrm{tr}\left(X\left(\sum_{j=1}^n A_j^* Y B_j^*\right)^*\right). \quad \square\end{aligned}$$

Дакле, испоставило се да се у случају елементарног оператора, чији је домен $\mathfrak{S}_2$ његов уопштени адјунговани оператор поклапа са уобичајеном дефиницијом адјунгованог оператора. Чак и када је домен оператора Λ читав $B(\mathfrak{H})$ ми ћемо и тада, ради краткоће у изражавању, оператор Λ^* звати његовим адјунгованим. Лако се проверава да је услов да је Λ нормално репрезентован довољан да важи $\Lambda\Lambda^* = \Lambda^*\Lambda$. Неизвесно је да ли је тај услов и потребан.

У овом поглављу, бавићемо се питањем уопштења Теореме Фаглида Патнема. Ако се та Теорема протумачи као $\ker \Delta_{A,B} = \ker \Delta_{A^*,B^*}$, онда је логично поставити питање да ли је тачна једнакост $\ker \Lambda = \ker \Lambda^*$. Покушаји да се добије такав резултат трајали су све док у раду [38] није објављен контрапример, који показује да у општем случају тако нешто није тачно. Ипак, и поред тог негативног резултата, постоји обиље позитивних, који једнакост $\ker \Lambda = \ker \Lambda^*$ установљавају под неким додатним претпоставкама које су неки пут јаче, а неки пут прилично слабе. Ми ћемо прво упознати позитивне резултате и на крају контрапример.

Први интересантан резултат лака је последица разматрања из претходног поглавља.

Теорема 4.2. *Коренски потпростор нормално репрезентованог елементарног оператора Λ који одговара сопственој вредности λ једнак је коренском потпростору оператора Λ^* који одговара сопственој вредности $\overline{\lambda}$. Другим речима, ако за неко k и X важи $(\Lambda - \lambda I)^k X = 0$, онда за неко l и за исто X важи $(\Lambda^* - \overline{\lambda} I)^l X = 0$.*

Доказ. Заиста, заједно са Λ и оператор $\Lambda - \lambda I$ је такође елементаран оператор (додуше дужине за један веће). Ако сада за неко природно k важи $(\Lambda-\lambda I)^k X = 0$, то значи да $X \in \ker(\Lambda-\lambda I)^k \subseteq \mathfrak{M}(\Gamma_{\Lambda-\lambda I})$. Међутим, последњи скуп се не мења преласком на адјунговање, па је $X \in \mathfrak{M}(\Gamma_{\Lambda^*-\overline{\lambda}I})$. Сада, према Ставу 3.12, имамо да је $X \in \ker(\Lambda^* - \overline{\lambda} I)^l$ за неко природно l. $\square$

Следећа последица је прво уопштење Теореме Фаглида-Патнема

Последица 4.1. *Нека је* $\Lambda(X) = AXB + CXD$ *нормално репрезентован оператор. Тада* $\Lambda(X) = 0$ *повлачи* $\Lambda^*(X) = 0$.

Доказ. На основу Теореме 4.2, узимајући $\lambda = 0$ имамо да ако за неко k важи $\Lambda^k(X) = 0$ тада за неко l важи $\Lambda^{*l}(X) = 0$. Међутим и Λ и Λ^* су нормално репрезентовани елементарни оператори дужине два, па је према Ставу 3.1, $\operatorname{asc}\Lambda \le 1$, $\operatorname{asc}\Lambda^* \le 1$, а то значи да је $\Lambda^k(X) = 0$ еквивалентно са $\Lambda(X) = 0$, и $\Lambda^{*l}(X) = 0$ еквивалентно са $\Lambda^*(X) = 0$. Овиме је последица доказана. $\square$

У ствари теорема Шуљмана омогућује да се теорема Фаглида-Патнема уопшти за класу нормално репрезентованих елементарних оператора, чији је успон мањи или једнак од један. Тако да имамо и општије тврђење.

Теорема 4.3. *Ако је Хаусдорфова димензија здруженог спектра фамилије* $\{A_k\}$ *мања или једнака од два, тада су једначине* $\Lambda(X) = 0$ *и* $\Lambda^*(X) = 0$ *еквивалентне.*

Доказ. Заиста, према Последици 3.5 је $\operatorname{asc}\Lambda \le 1$, па је $\ker\Lambda = \mathfrak{M}(\Gamma_\Lambda)$, али и $\ker\Lambda^* = \mathfrak{M}(\Gamma_{\Lambda^*})$. Међутим, скупови Γ_Λ и Γ_{Λ^*} се поклапају, што завршава доказ. $\square$

Приступићемо сада уопштењу Теореме Фаглида-Патнема из другог правца. Нека је $X \in \mathfrak{S}_2$. У том случају је нормално репрезентован оператор нормалан (у смислу Хилбертовог простора $\mathfrak{S}_2$), и онда лако видимо да је $\left\|\sum_{j=1}^n A_j X B_j\right\|_2 = \left\|\sum_{j=1}^n A_j^* X B_j^*\right\|_2$, одакле лако следи импликација $\sum_{j=1}^n A_j X B_j = 0 \Longrightarrow \sum_{j=1}^n A_j^* X B_j^* = 0$. Уопштење оваквог тврђења дао је Вајс (Weiss G.) [29].

Теорема 4.4. *Нека је* $\Lambda(X) = \sum_{j=1}^n A_j X B_j$ *нормално репрезентован елементаран оператор. Ако су* $\Lambda(X)$ *и* $\Lambda^*(X)$ *Хилберт-Шмитови, тада је* $\|\Lambda(X)\|_2 = \|\Lambda^*(X)\|_2$.

Доказ. Доказ ћемо извести у случају када је $X \in B(L^2(Y;\mu))$, а $A_j = B_j = M_{\varphi_j}$, оператори множења есенцијално ограниченом функцијом $\varphi_j(x)$ на простору $L^2(Y;\mu)$, где је Y компактан Хаусдорфов тополошки простор, а μ регуларна Борелова, вероватносна мера (Теорема 1.10). Да је могуће узети без губитка на општости $A_j = B_j$, увериће нас, већ уобичајени "Берберианов" 2×2 матрични трик

$$\tilde{A}_j = \begin{bmatrix} A_j & 0 \\ 0 & B_j \end{bmatrix}; \quad \tilde{X} = \begin{bmatrix} 0 & X \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Наиме, лако се види да су нормалност оператора A_j, B_j, као и одговарајући услови комутативности еквивалентни са $\tilde{A}_i \tilde{A}_j^* = \tilde{A}_j^* \tilde{A}_i$. Даље, користећи Теорему 1.10, операторе A_j представимо на описани начин.

Претпоставимо најпре да оператори M_{φ_j} имају особину да су линеарно независни на сваком подпростору $L^2(E) \subseteq L^2(Y)$ таквом да је $\mu E > 0$. (Наравно $L^2(E)$ разлаже све операторе M_{φ_j}). То у ствари значи да је за све n-торке комплексних бројева $(c_1, c_2, \ldots, c_n) \ne (0, 0, \ldots, 0)$

$$\mu\{x \in Y | c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \cdots + c_n\varphi_n(x)\} = 0. \tag{7}$$

Нека су $\Lambda(X)$, $\Lambda^*(X) \in \mathfrak{S}_2$. Тада, са обзиром да је $\mathfrak{S}_2 \cong L^2(Y \times Y)$ постоје функције $G(x,y)$ и $H(x,y) \in L^2(Y\times Y)$ такве да се оператори $\Lambda(X)$ и $\Lambda^*(X)$ репрезентују на следећи начин

$$(\Lambda(X)\varphi)(s) = \int_Y G(s,t)\varphi(t)\,\mathrm{d}\mu(t),$$

$$(\Lambda^*(X)\varphi)(s) = \int_Y H(s,t)\varphi(t)\,\mathrm{d}\mu(t).$$

При томе је наравно $||\Lambda(X)||_2 = ||G||_{L^2(Y\times Y)}$ и $||\Lambda^*(X)||_2 = ||H||_{L^2(Y\times Y)}$

Ако са $\Delta(x,y)$ означимо суму $\sum_{j=1}^n \varphi_j(x)\varphi_j(y)$ тада је функција $\overline{\Delta(x,y)}G(x,y)$ језгро оператора $\sum_{j=1}^n A_j^*\Lambda(X)A_j^*$. Међутим

$$\sum_{j=1}^n A_j^*\Lambda(X)A_j^* = \sum_{j=1}^n\sum_{I=1}^n A_j^*A_iXA_iA_j^* = \sum_{i=1}^n A_i\left(\sum_{j=1}^n A_j^*XA_j^*\right)A_i = \sum_{i=1}^n A_i\Lambda^*(X)A_i,$$

а језгро овог последњег оператора је $\Delta(x,y)H(x,y)$. Под горњом претпоставком (о линеарној независности) је онда $\Delta(x,y)\neq 0$ $\mu\times\mu$-скоро свуда. Заиста из теореме Тонелија би у супротном следило да је за бар једно $x\in Y$ мера скупа $\{y\in Y|\sum_{j=1}^n\varphi_j(x)\varphi_j(y)\}$ строго већа од нуле. Тако је $|G(x,y)| = |H(x,y)|$ $\mu\times\mu$-скоро свуда, па је $||G||_{L^2(Y\times Y)} = ||H||_{L^2(Y\times Y)}$, чиме је доказ завршен у овом случају.

У општем случају доказ ћемо извршити индукцијом по n. За $n=1$ ствар се лако пребацује са $L^2(Y;\mu)$ на $L^2(\operatorname{supp}\varphi_1;\mu)$, а на $\operatorname{supp}\varphi_1$ важи услов (7), што чини базу индукције. Нека је сада $n\in\mathbf{N}$. Формирамо низ бројева α_k и низ скупова E_k индуктивно. Нека је

$$\alpha_1 = \sup_{(c_1,c_2,\dots,c_n)\in\mathbf{C}^n}\mu\{x\in Y|c_1\varphi_1(x)+\dots+c_n\varphi_n(x)=0\}\le\mu Y<+\infty,$$

и нека је E_1 произвољан подскуп скупа Y такав да важи $\mu E_1\ge\alpha_1/2$, и да постоје $c_1,c_2,\dots,c_n$ такви да је $\sum_{j=1}^n c_j\varphi_j(x)=0$ на E_1. Даље, за дате α_k, E_k ставимо да је

$$\alpha_{k+1} = \sup_{(c_1,c_2,\dots,c_n)\in\mathbf{C}^n}\mu\{x\in Y\setminus\left(\cup_{i=1}^k E_i\right)|c_1\varphi_1(x)+\dots+c_n\varphi_n(x)=0\},$$

и да је E_{k+1} неки подскуп скупа $Y\setminus\left(\cup_{i=1}^k E_i\right)$ такав да је $\mu E_{k+1}\ge\alpha_{k+1}/2$, и да постоје $c_1,c_2,\dots,c_n$ такви да је $\sum_{j=1}^n c_j\varphi_j(x)=0$ на E_{k+1}. Јасно је да су E_k дисјунктни скупови па важи $\sum_{k=1}^{+\infty}\alpha_k\le 2\sum_{k=1}^{+\infty}\mu E_k\le 2\mu Y<+\infty$, одакле посебно $\alpha_k\to 0$ када $k\to\infty$.

Установићемо да на скупу $E_0 = Y\setminus\left(\cup_{k=1}^{+\infty}E_k\right)$ функције φ_j имају особину да су линеарно независне на сваком подскупу скупа E_0 строго позитивне мере. Заиста, у супротном из претпоставке да је $\sum_{j=1}^n c_j\varphi_j(x)=0$ на скупу $F\subset E_0$, који је строго позитивне мере, произилази да постоји $\alpha_k<\mu F$, што је у супротности са дефиницијом скупова E_k.

Нека је P_k ортопројектор са простора $L^2(Y)$ на његов подпростор $L^2(E_k)$ за $0\le k<+\infty$. Тада је $\sum_{k=0}^{+\infty}P_k = I$, P_k су међусобно ортогонални, и $P_kA_j = A_jP_k$. Према томе јасно је да важи

$$||\Lambda(X)||_2^2 = \sum_{k,l=0}^{+\infty}||P_k\Lambda(X)P_l||_2^2;\quad ||\Lambda^*(X)||_2^2 = \sum_{k,l=0}^{+\infty}||P_k\Lambda^*(X)P_l||_2^2.$$

На простору $L^2(E_k)$ (за $k>0$) оператори A_j су линеарно зависни, па се један од њих може изразити као линеарна комбинација осталих, рецимо A_n. Тада је $P_kA_n = \sum_{i=1}^{n-1}b_iP_kA_i$, па је

$$P_k\Lambda(X)P_l = P_k\sum_{j=1}^n A_jXA_jP_l = \sum_{j=1}^{n-1}P_kA_jXA_jP_l + P_k\sum_{j=1}^{n-1}b_jA_jXA_nP_l = P_k\left[\sum_{j=1}^{n-1}A_jX(A_j+b_jA_n)\right]P_l,$$

и слично

$$P_k\Lambda^*(X)P_l = P_k\left[\sum_{j=1}^{n-1}A_j^*X(A_j^*+\bar{b}_jA_n^*)\right]P_l,$$

па за $k\neq 0$ једнакост $||P_k\Lambda(X)P_l||_2^2 = ||P_k\Lambda^*(X)P_l||_2^2$ важи према индукцијској претпоставци. Сличну процедуру можемо да поновимо и за $l>0$. Тако, да бисмо завршили доказ треба још показати да је $||P_0\Lambda(X)P_0||_2^2 = ||P_0\Lambda^*(X)P_0||_2^2$. Међутим ово последње је тачно јер је то управо претходни специјални случај. $\square$

Вајс је у истом раду, уз доста сложену технику доказао да ако оператор Λ има особину $\ker\Lambda \subseteq \ker\Lambda^*$, тада $\Lambda(X) \in \mathfrak{S}_2$ повлачи $\Lambda^{*2}(X) \in \mathfrak{S}_2$ и $\left\|\Lambda^2(X)\right\|_2 = \left\|\Lambda^{*2}(X)\right\|_2$. Међутим овиме није доказано да из $\Lambda(X) \in \mathfrak{S}_2$ излази $\Lambda^*(X) \in \mathfrak{S}_2$. Наиме у том би случају $\Lambda(X) = 0$ повлачило $\Lambda^*(X) = 0$. Како је већ напоменуто, тако нешто није могуће добити. Наиме, постоји пример нормално репрезентованог оператора Λ, где је $\Lambda(X) = 0$, и $\Lambda^*(X) \neq 0$, и самим тим $\Lambda^*(X) \notin \mathfrak{S}_2$ ([38], Шуљман). Сада ћемо упознати тај пример.

Пример 4.1. Нека је $FL^1(\mathbf{R}^n)$ Фуријеова алгебра, то јест слика алгебре L^1 Фуријеовом трансформацијом са наслеђеном нормом и са обичним множењем уместо конволуције. Таква алгебра у себи садржи све пробне функције $FL^1 \supseteq \mathcal{D}$, и при томе се $\mathcal{D}$ непрекидно улаже у FL^1, па је дуални простор простора FL^1 подскуп простора дистрибуција $\mathcal{D}'$. Тај простор означићемо са $PM(\mathbf{R}^n)$ и зваћемо простор псеудомера. Ако узмемо сада инверзну Фуријеову трансформацију, онда мора бити $F^{-1}(PM) = L^\infty$. Тако да су псеудомере у ствари оне дистрибуције чија је Фуријеова трансформација ограничена. (Инверзна и директна Фуријеова трансформација разликују се до на композицију са рефлексијом.)

Прелазимо сада на конструкцију. Посматрајмо простор $\mathbf{R}^6$ и у њему полином $p(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 + i(x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 - 1)$. Очигледно је да постоје полиноми s_j и r_j и природан број m, такви да за све x, $y \in \mathbf{R}^6$ важи $p(x-y) = \sum\limits_{j=1}^{m} s_j(x) r_j(y)$. Нека су u, $v \in \mathcal{D}$, и нека је $a_j = us_j$ и $b_j = vr_j$.

Посматрајмо Хилбертов простор $L^2(\mathbf{R}^6)$ и на њему операторе A_j, B_j задате помоћу једнакости $A_j f = a_j f$, односно $B_j f = b_j f$ (оператори множења ограниченом функцијом).

Сада ћемо конструисати оператор X. Најпре тражимо псеудомеру Φ такву да је $p\Phi = 0$ и $\overline{p}\Phi \neq 0$, где је p наш полином. Нека је μ_0 површинска мера на сфери $S^2 \subseteq \mathbf{R}^3$, и нека је $\mu = \mu_0 \otimes \mu_0$. Није тешко показати да за Фуријеову трансформацију мере μ важи

$$F\mu(\lambda) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbf{R}^6} e^{-i\lambda\cdot x} \mathrm{d}\mu(x) = \frac{2}{\pi K_1 K_2} \int_0^{K_1} \cos s \mathrm{d}s \int_0^{K_2} \cos s \mathrm{d}s, \tag{8}$$

где је $K_1 = \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}$ и $K_2 = \sqrt{\lambda_4^2 + \lambda_5^2 + \lambda_6^2}$. Наиме, наш интеграл једнак је производу бројева $\int_{S^2} e^{-i(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3)} \mathrm{d}S$ и $\int_{S^2} e^{-i(\lambda_4 x_1 + \lambda_5 x_2 + \lambda_6 x_3)} \mathrm{d}S$. Први од њих једнак је $\int_{S^2} e^{iK_1 x_1} \mathrm{d}S$, због инваријантности сферне мере у односу на ротације. Када се у последњи интеграл убаце сферне смене видеће се да је он једнак $4\pi \int_0^1 \cos(K_1 t) \mathrm{d}t = (4\pi/K_1) \int_0^{K_1} \cos s \mathrm{d}s$. Сличну једнакост добијамо и за други интеграл, одакле следи (8).

Нека је $\Phi = L\mu$, где је L диференцијални оператор дат са $L = (1+i)x_4 \frac{\partial}{\partial x_1} - (1-i)x_1 \frac{\partial}{\partial x_4}$, где је диференцирање узето у смислу дистрибуција. Лако се израчунава да за Фуријеову трансформацију дистрибуције $L\mu$ важи $F(L\mu) = (1-i)\lambda_4 \frac{\partial}{\partial \lambda_1} F\mu - (1+i)\lambda_1 \frac{\partial}{\partial \lambda_4} F\mu$, па узимајући у обзир (8), закључујемо да је $F(L\mu)$ ограничена функција. Тиме је $\Phi = L\mu \in PM(\mathbf{R}^6)$.

Директно се израчунава да је $Lp = 0$, док је $L\overline{p} = 4x_1 x_4(1+i)$. Сада за произвољну тест функцију φ имамо $p\Phi(\varphi) = L\mu(p\varphi) = \mu(L(p\varphi)) = \mu(\varphi Lp) + \mu(pL\varphi) = 0$. (Први сабирак се анулира јер је $Lp = 0$ док се други анулира јер је $p = 0$ на носачу дистрибуције μ.) На сличан начин је $\overline{p}\Phi(\varphi) = \mu(L(\overline{p}\varphi)) = \mu(\varphi L\overline{p}) + \mu(\overline{p}L\varphi) = 4(1+i)x_1 x_4 \mu(\varphi)$. Тако је $p\Phi = 0$, док је $\overline{p}\Phi = 4(1+i)x_1 x_4 \mu \neq 0$

Тек сада смо у позицији да конструишемо оператор X помоћу већ конструисане псеудомере Φ. Ставимо да је $Xf = F^{-1}((F\Phi)\cdot Ff)$ (конволуција дистрибуције Φ и функције f). За овако добијене операторе A_j, B_j и X важи $\sum\limits_{j=1}^{m} A_j X B_j = 0$ док је $\sum\limits_{j=1}^{m} A_j^* X B_j^* \neq 0$.

Заиста, ако су φ и ψ тест функције (које су наравно густе у L^2 тада можемо директно израчунати да важи:

$$\left\langle \sum_{j=1}^{m} A_j X B_j \varphi, \psi \right\rangle = p\Phi(v\varphi * \overline{\tilde{u}\psi}) = 0, \tag{9}$$

за све φ и ψ, док је

$$\left\langle \sum_{j=1}^{m} A_j^* X B_j^* \varphi, \psi \right\rangle = \overline{p}\Phi(v\varphi * \overline{\tilde{u}\psi}) \neq 0, \tag{10}$$

за неке φ и ψ и за погодно одабране u и v.

Тиме је тврђење доказано.

Напомена 4.1. У формулама (9) и (10), звездица $*$ означава конволуцију, а $\tilde{u}$ функцију дефинисану са $\tilde{u}(x) = u(-x)$. Детаљи о рачуну са тест функцијама и дистрибуцијама, могу се пронаћи у седмој глави књиге [34].

Напомена 4.2. Овај контрапример може послужити и за тврђење да није увек $\operatorname{asc}\Lambda \leq 1$, и да није увек $\operatorname{ran}\Lambda$ ортогоналан на $\ker\Lambda$. Наиме према Последици 3.1, из $\operatorname{ran}\Lambda \perp \ker\Lambda$ следи $\operatorname{asc}\Lambda \leq 1$, а из $\operatorname{asc}\Lambda \leq 1$ према Напомени 4.1, произилази $\Lambda(X) = 0 \Longrightarrow \Lambda^*(X) = 0$.

Напомена 4.3. Ако је $\operatorname{asc}\Lambda > 1$, онда слика и језгро имају нетривијалан пресек, и према томе не могу бити ортогонални. Тако Пример 4.1 јасно говори да се Теорема 2.5 не може даље уопштавати на елементарне операторе веће дужине. Ипак, може се догодити да за елементаран оператор $\Lambda(X) = \sum_{j=1}^{n} A_j X B_j$ важи да је $\operatorname{ran}\Lambda^{n-1}$ ортогоналан на $\ker\Lambda$, што је још увек отворен проблем.

Завршимо ову главу, варијантом Теореме Фаглида-Патнема за елементе Банахових алгебри ([32]), и асимптотском варијантом исте теореме.

Теорема 4.5. *Нека су A и B оператори на неком Банаховом простору X, такви да важи $AB = BA$ и*

$$\inf_{r>0} \frac{\omega(r)}{r} = 0, \tag{11}$$

где је $\omega(r) = \max\limits_{|\lambda|=r} ||e^{-(\bar{\lambda}A - \lambda B)}||$. Тада је $\ker A = \ker B$.

Доказ. Нека је $Ax = 0$. Тада је $e^{\bar{\lambda}A}x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{\bar{\lambda}^n A^n x}{n!} = x$, па је $e^{\lambda B}x = e^{-(\bar{\lambda}A - \lambda B)}e^{\bar{\lambda}A}x = e^{-(\bar{\lambda}A-\lambda B)}x$, односно $||e^{\lambda B}x|| \leq \omega(|\lambda|)||x||$. С друге стране $||Bx|| = ||\, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} e^{\lambda B}x\big|_{\lambda=0} || \leq \inf\limits_{r>0} \frac{1}{2\pi} \int_{|\lambda|=r} \frac{||e^{\lambda B}x||}{|\lambda|^2} |\mathrm{d}\lambda| \leq ||x|| \inf\limits_{r>0} \frac{\omega(r)}{r} = 0$. Тако смо доказали да је $\ker A \subseteq \ker B$. Аналогно је и $\ker B \subseteq \ker A$. $\square$

Последица 4.2. *Нека је $\mathfrak{A}$ Банахова алгебра са јединцом, и нека су $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathfrak{A}$, такви да важи $a_j b_j = b_j a_j$ и $||e^{\bar{\lambda}a_j - \lambda b_j}|| = o(|\lambda|^{1/2})$, за $j = 1, 2$. Тада је $a_1 x = x a_2$ еквивалентно са $b_1 x = x b_2$.*

Доказ. Уочимо пресликавања $A, B : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$, дата са $Ax = a_1 x - x a_2$, односно $Bx = b_1 x - x b_2$. Очигледно пресликавања A и B комутирају, па важи

$$e^{-(\bar{\lambda}A - \lambda B)}x = e^{-(\bar{\lambda}a_1 - \lambda b_1)} x e^{\bar{\lambda}a_2 - \lambda b_2}.$$

Одатле једноставно изводимо услов (11), и примењујемо претходну Теорему. $\square$

Напомена 4.4. Класичну Теорему Фаглида-Патнема добијамо ако ставимо $\mathfrak{A} = B(\mathfrak{H})$, и $b_j = a_j^*$. У том случају је $\omega(r) \cong 1$, па је јасно да је Теорема 4.5, нетривијално уопштење Фаглид-Патнемове Теореме.

Пређимо на асимптотску варијанту Теореме Фаглида-Патнема. Она је први пут доказана у раду [20]. Доказ који овде преносимо је далеко лакши (и лепши) и преузет је из рада [32]. За такав доказ, биће нам потребна следећа конструкција.

Став 4.1. *Нека је X произвољан Банахов простор, и нека су скупови $l^\infty(X)$ и $c_0(X)$ дефинисани са $l^\infty(X) = \{(x_n)_{n=1}^\infty \mid x_n \in X, \sup ||x_n|| < +\infty\}$, односно $c_0(X) = \{(x_n)_{n=1}^\infty \mid x_n \in X, \lim\limits_{n\to+\infty} ||x_n|| = 0\}$.*

а) Функција $||x|| = ||(x_n)|| = \sup_{n\in\mathbf{N}} ||x_n||$, је једна норма на скупу $l^\infty(X)$. Скуп $l^\infty(X)$ је Банахов простор у односу на тако задату норму, а $c_0(X)$ је његов затворен потпростор.

б) Нека је $T : X \to X$ произвољан ограничен линеаран оператор. Пресликавање $\tilde{T} : \tilde{X} \to \tilde{X}$ ($\tilde{X} = l^\infty(X)/c_0(X)$), дато са $T((x_n) + c_0(X)) = (Tx_n) + c_0(X)$ је коректно задато. $\tilde{T}$ је линеарно и ограничено и важи $||\tilde{T}|| = ||T||$. Такође пресликавање $\Phi : B(X) \to B(\tilde{X})$, дато са $\Phi(T) = \tilde{T}$ је хомоморфизам алгебри $B(X)$ и $B(\tilde{X})$ ограничених оператора на Банаховим просторима X и $\tilde{X}$.

Доказ. а) Једноставна провера.

б) За коректност дефиниције оператора $\tilde{T}$, довољно је доказати импликацију $(x_n) \in c_0(X) \Rightarrow (Tx_n) \in c_0(X)$, што следи из $||Tx_n|| \le ||T||\,||x_n||$. Очигледно је пресликавање Φ хомоморфизам. Треба још доказати да је изометрија. Међутим, имамо $||\tilde{T}((x_n)+c_0(X))|| = \inf\limits_{(y_n)\in c_0(X)} ||(Tx_n+y_n)|| \le \inf\limits_{(y_n)\in c_0(X)} ||(Tx_n)+(Ty_n)||$, јер је $T(c_0(X)) \subseteq c_0(X)$, па је $||\tilde{T}((x_n)+c_0(X))|| \le \inf\limits_{(y_n)\in c_0(X)} ||(T(x_n+y_n))|| \le ||T|| \inf\limits_{(y_n)\in c_0(X)} ||(x_n + y_n)|| = ||T||\,||(x_n) + c_0(X)||$. Тако је $||\tilde{T}|| \le ||T||$.

Да бисмо доказали супротну неједнакост уочимо низ јединичних вектора $x^{(k)} \in X$, таквих да $||Tx^{(k)}|| \to ||T||$, кад $k \to +\infty$. Уочимо, даље, низ константних низова $(x_n^{(k)})_{n=1}^{+\infty}$, $x_n^{(k)} = x^{(k)}$, па ћемо имати $\tilde{T}((x_n^{(k)}) + c_0(X)) = ||Tx^{(k)}||$ и $||(x_n^{(k)} + c_0(X))|| = 1$. Одатле је $||\tilde{T}|| \ge ||\tilde{T}((x_n^{(k)}) + c_0(X))|| = ||Tx^{(k)}|| \to ||T||$. Тиме је доказана и обратна неједнакост. $\square$

Теорема 4.6. *Нека је $\mathfrak{A}$ Банахова алгебра са јединцом, и нека су $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathfrak{A}$, такви да важи $a_j b_j = b_j a_j$ и $||e^{\bar{\lambda}a_j - \lambda b_j}|| = o(|\lambda|^{1/2})$, за $j = 1, 2$. Тада за свако $\varepsilon > 0$ и за свако $K > 0$ постоји $\delta > 0$ такво да из $||a_1x - xa_2|| < \delta$ и $||X|| \le K$ следи $||b_1x - xb_2|| < \varepsilon$.*

Доказ. На Банаховом простору $\mathfrak{A}$ уочимо пресликавања $A(x) = a_1x - xa_2$ и $B(x) = b_1x - xb_2$, и њихова индукована пресликавања $\tilde{A}, \tilde{B} : \tilde{\mathfrak{A}} \to \tilde{\mathfrak{A}}$. Како је придруживање $T \to \tilde{T}$ хомоморфизам и изометрија, то је $||e^{-(\bar{\lambda}\tilde{A} - \lambda\tilde{B})}|| = ||e^{-\widetilde{(\bar{\lambda}A - \lambda B)}}|| = ||e^{-(\bar{\lambda}A - \lambda B)}|| = o(|\lambda|)$. Тако је $\ker \tilde{A} = \ker \tilde{B}$, односно $(Ax_n) \in c_0(X) \Leftrightarrow (Bx_n) \in c_0(X)$. Другим речима, ако $||a_1x_n - x_na_2||$ тежи ка нули (кад $n \to +\infty$), тада и $||b_1x_n - x_nb_2||$ тежи ка нули.

Претпоставимо сада супротно. Тада постоје $\varepsilon, K > 0$, такви да за све $n \in \mathbf{N}$ имамо $x_n \in \mathfrak{A}$, са особинама $||x_n|| < K$, $||a_1x_n - x_nb_2|| \to 0$, и $||b_1x_n - x_nb_2|| \ge \varepsilon$. Овде је контрадикција. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. Abatzoglu T.J. *Norm Derivatives on spaces of operators,* Math. Ann. **239**(1979) 135–140
2. Anderson J. *On normal derivations,* Proc. Amer. Math. Soc. **38-1**(1973) 135–140
3. Ando T. *Comparison of Norms* $|||f(A) - f(B)|||$ *and* $|||f(|A - B|)|||$, Math. Z. **197**(1988) 403–409
4. Bhatia R. *Matrix analysis* Springer New York 1997
5. Fuglede B. *A commutavity theorem for normal operators,* Proc. Nat. Acad. Sci. USA **36**(1950) 35–40
6. Gohberg I.C. Krein M.G. *Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators,* Transl. Math. Monographs, vol. **18**, Amer. Math. Soc. Providence R.I. 1969
7. Holub J.R. *On the metric geometry of ideals of operators,* Math. Ann. **201**(1973) 157–163
8. James R.C. *Orthogonality and linear functionals in normed linear spaces,* Trans. Amer. Math. Soc. **61**(1947) 265–292
9. Jocić D.R. *Integral representation formula for generalized normal derivations,* Proc. Amer. Math. Soc. **127-8**(1999) 2303–2314
10. Kečkić D. *Orthogonality of the range and the kernel of some elementary operators,* Proc. Amer. Math. Soc. **128-11**(2000) 3369–3377
11. Kečkić D.J. *Orthogonality in* $\mathfrak{S}_1$ *and* $\mathfrak{S}_\infty$ *spaces and normal derivations,* J Operator Theory, у штампи
12. Kečkić D.J. *Orthogonality and smoothness in* $B(H)$*,* на рецензији
13. Кечкић Д. *Елементарна пресликавања на идеалима компактних оператора на Хилбертовом простору - магистарска теза* Математички факултет, Београд 1998
14. Kittaneh F. *Normal derivations in norm ideals,* Proc. Amer. Math. Soc. **123-6**(1995) 1779–1785
15. Kittaneh F. *On the continuity of the absolute value map in the Schatten classes,* Linear Algebra Appl. **118**(1989) 61–68
16. Kittaneh F. *Operators that are orthogonal to the range of a derivation,* J Math. Anal. Appl. **203**(1996) 868–873
17. Kurepa S. *Konačno dimenzionalni vektorski prostori i primjene,* Tehnička knjiga, Zagreb (1967)
18. Lumer G. Rosenblum M. *Linear operator equations,* Proc. Amer. Math. Soc. **10**(1959) 32–41
19. Maher P.J. *Commutator Approximants,* Proc. Amer. Math. Soc. **115**(1992) 995–1000
20. Moore R. *An asymptotic Fuglede Theorem,* Proc. Amer. Math. Soc. **50**(1975) 138–142
21. Putnam C.R. *On normal operators in Hilbert space,* Amer. J Math. **73**(1951) 357–362
22. Riesz F. Nagy B.Sz. *Functional Analysis* Translated from the second French edition, "Frederic Ungar Publishing CO", New York 1955
23. Rosenblum M. *On a theorem of Fuglede and Putnam,* J Lond. Math. Soc. **33**(1958) 376–377
24. Royden H.L. *Real Analysis*, "Macmillan Company", New York 1963
25. Samoĭlenko Y.S. Turowska L.B. Shu'lman V.S. *Semilinear relations and their* **-representations,* Methods of Functional Analysis and Topology **2-1**(1996) 55–111

26. Simon B. *Trace ideals and their applications,* London Mathematical Society Lecture Notes Series **35**, Cambridge University Press 1979
27. Turnšek A. *On the range of elementary operators,* Publ. Math. у штампи
28. Turnšek A. *Orthogonality in $\mathcal{C}_p$ Classes,* Monatsh. Math. **132**(2001) 349–354
29. Weis G. *An extension of the Fuglede comutativity theorem modulo the Hilbert-Schmidt class to operators of the form* $\sum M_n X N_n$, Trans. Amer. Math. Soc. **278-1**(1983) 1–20
30. Ахиезер Н.И. Глазман И.М. *Теория линейных операторов в Гильбертовом пространстве, Том* I, "Вища школа", Харков 1977
31. Бирман М.Ш. Соломяк М.З. *Спектральная теория самосопраженных операторов в Гильбертовом пространстве* Изд-во ЛГУ Ленинград 1980
32. Горин Е.А. Караханян М.И. *Асимптотический вариант теоремы Фуглида-Путнама о коммутаторах для Банаховых алгебр,* Математические заметки **22-2**(1977) 179–188
33. Мёрфи Дж. *C^*-алгебры и теория операторов,* перевод с английского, "Факториал", Москва 1997
34. Рудин У. *Функциональный анализ,* перевод на русский язик, "Мир" 1975
35. Шульман В.С. *Операторы умножения в C^*-алгебрах и задача о рефлексивности алгебр, содержащих т.а.s.а.,* Функциональный анализ и его приложения **8-1**(1974) 92–93
36. Шульман В.С. *Об операторах умножения и следах комутаторов,* Зап. науч. сем. ЛОМИ **135**(1984) 182–194
37. Шульман В.С. *Сплетения и линейные операторные уравнения,* ДАН СССР **301-1**(1988) 57–61
38. Шульман В.С. *Операторы умножения и спектральный синтез,* ДАН СССР **313-5**(1990) 1047–1051
39. Шульман В.С. *лична комуникација*

СПИСАК ИСПРАВКИ

страница	**ред**	**стоји**	**треба**
1	5+	A_j и B_j	$\{A_j\}$ и $\{B_j\}$
1	1−	$\ldots \lvert \langle x, y\rangle \rvert \geq 0$	$\ldots \lvert \langle x, y\rangle \rvert^2 \geq 0$
9	19−	$T_1, T_2, \ldots, T_n$	$(T_1, T_2, \ldots, T_n)$
9	16−	есенцијално ограничене	есенцијално ограничене функције
10	13+, 18−, 20−	T_j	$\{T_j\}$
10	14+	$\mathcal{L}\{x, T_j x, T_j^2 x, \ldots\}$	$\mathcal{L}\{x, T_1 x, T_1^2 x, \ldots, T_n x, T_n^2 x, \ldots\}$
10	19−	$\overline{\mathcal{L}\{x, T_j x, T_j^2 x, \ldots\}}$	$\overline{\mathcal{L}\{x, T_1 x, T_1^2 x, \ldots, T_n x, T_n^2 x, \ldots\}}$
10	12−	$\cong L^2(X_1 \sqcup X_2, \mu_1 + \mu_2),$	$\cong L^2(X_1 \sqcup X_2, \mu_1 + \mu_2),$ кад су X_1 и X_2 дисјунктни, а μ_1 и μ_2 узајамано сингуларне (ортогоналне) мере сконцентрисане на X_1 и X_2,
10	4−	...и његових делова.	...и "копија" његових делова.
22	15+	$\inf\limits_{\varphi}$	$\inf\limits_{\varphi \in [0, 2\pi)}$
22	6−	$\leq g(t).$	$\leq g(t),$ па можемо применити Теорему о доминантној конвергенцији.
24	7+	$\cdots = \sup\limits_{\lVert\varphi\rVert = 1} \langle (X+Y)\varphi, \varphi\rangle .$	$= \sup\limits_{\lVert\varphi\rVert = 1} \langle (X+Y)\varphi, \varphi\rangle ,$ јер је $\langle (X+Y)\varphi, \varphi\rangle \geq -\lVert Y\rVert \geq -(1/4)\varepsilon > -\lVert X+Y\rVert,$ за $\lVert\varphi\rVert = 1.$
31	6+	Кларксон МекıКартијеве	Кларксон Мек-Картијеве
46	14+	$\cdots = L^\infty$. Тако да...	$\cdots = L^\infty$, тако да...
48	12−	$\tilde{T}((x_n^{(k)}) + c_0(X)) = \lVert T x^{(k)}\rVert$	$\lVert\tilde{T}((x_n^{(k)}) + c_0(X))\rVert = \lVert T x^{(k)}\rVert$
48	8−	$\lVert X\rVert \leq K$	$\lVert x\rVert \leq K$