1. ЛЕБЕГОВЕ ТАЧКЕ

1.1. Теорема. Нека је $f \in L^1(a,b)$, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Тада је скуп Лебегових тачака функције f пуне Лебегове мере. Односно

$$m\left\{x \mid \neg \lim_{\delta\to 0+} \frac{1}{2\delta}\int_{x-\delta}^{x+\delta} |f(t)-f(x)|\,\mathrm{d}m(t) = 0\right\} = 0.$$

Доказ. Уведимо функцију ω_f са

$$\omega_f(x) = \overline{\lim_{\delta\to 0+}} \frac{1}{2\delta}\int_{x-\delta}^{x+\delta} |f(t)-f(x)|\,\mathrm{d}m(t).$$

Треба доказати $m\{x \mid \omega_f(x) > 0\} = 0$. (Показаћемо да је скуп $\{x \mid \omega_f(x) > \eta\}$ мере нула за свако $\eta > 0$, што је стандардни поступак.) Пре тога изведимо елементарна својства функције ω_f.

Једноставна својства функције ω_f су:

$$f \text{ непрекидна } \Rightarrow \omega_f(x) = 0, \tag{1}$$

$$\omega_{f+g}(x) \leq \omega_f(x) + \omega_g(x), \tag{2}$$

и

$$\omega_f(x) \leq \overline{\lim_{\delta\to 0+}} \frac{1}{2\delta}\int_{x-\delta}^{x+\delta} |f(t)|\,\mathrm{d}m(t) + |f(x)| \leq M_f(x) + |f(x)|, \tag{3}$$

где је $M_f(x) = \sup\limits_{\delta>0} \frac{1}{2\delta}\int_{x-\delta}^{x+\delta}|f(t)|\,\mathrm{d}m(t)$ максимална функција.

Како су непрекидне функције свуда густе у L^1, то за свако $\varepsilon > 0$ постоји непрекидна функција g таква да је $||f-g||_1 < \varepsilon$. Означимо $h = f - g$. Тако на основу (2) и (1) имамо

$$\omega_f(x) \leq \omega_g(x) + \omega_h(x) = \omega_h(x). \tag{4}$$

Из (3) налазимо да $M_h(x) \leq \eta/2$ и $|h(x)| \leq \eta/2$ повлачи $\omega_h(x) \leq \eta$, а због (4), то даље повлачи и $\omega_f(x) \leq \eta$, тј.

$$\omega_f(x) > \eta \Rightarrow M_h(x) > \eta/2 \vee |h(x)| > \eta/2,$$

односно

$$A_\eta = \{x \mid \omega_f(x) > \eta\} \subseteq \{x \mid M_h(x) > \eta/2\} \cup \{x \mid |h(x)| > \eta/2\}. \tag{5}$$

Међутим, из основне неједнакости за максималну функцију имамо $m\{x \mid M_h(x) > \eta/2\} \leq \dfrac{4}{\eta}||h||_1$, док из Чебишевљеве неједнакости имамо $m\{x \mid |h(x)| > \eta/2\} \leq \dfrac{2}{\eta}||h||_1$, па на основу (5) добијамо

$$m(A_\eta) \leq \frac{6}{\eta}||h||_1 < \frac{6\varepsilon}{\eta},$$

јер је h бирано тако да буде $||h||_1 < \varepsilon$. Како је $\varepsilon > 0$ било произвољно то је $m(A_\eta) = 0$ за свако $\eta > 0$. Најзад, како је

$$\{x \mid \omega_f(x) > 0\} = \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_{1/k},$$

то је и $m\{x \mid \omega_f(x) > 0\} = 0$ јер је реч о пребројивој унији скупова мере нула. $\square$