



## Odabrana Poglavlja Astronomije

### Lekcija 5: Gravitaciona interakcija i Keplerovi zakoni

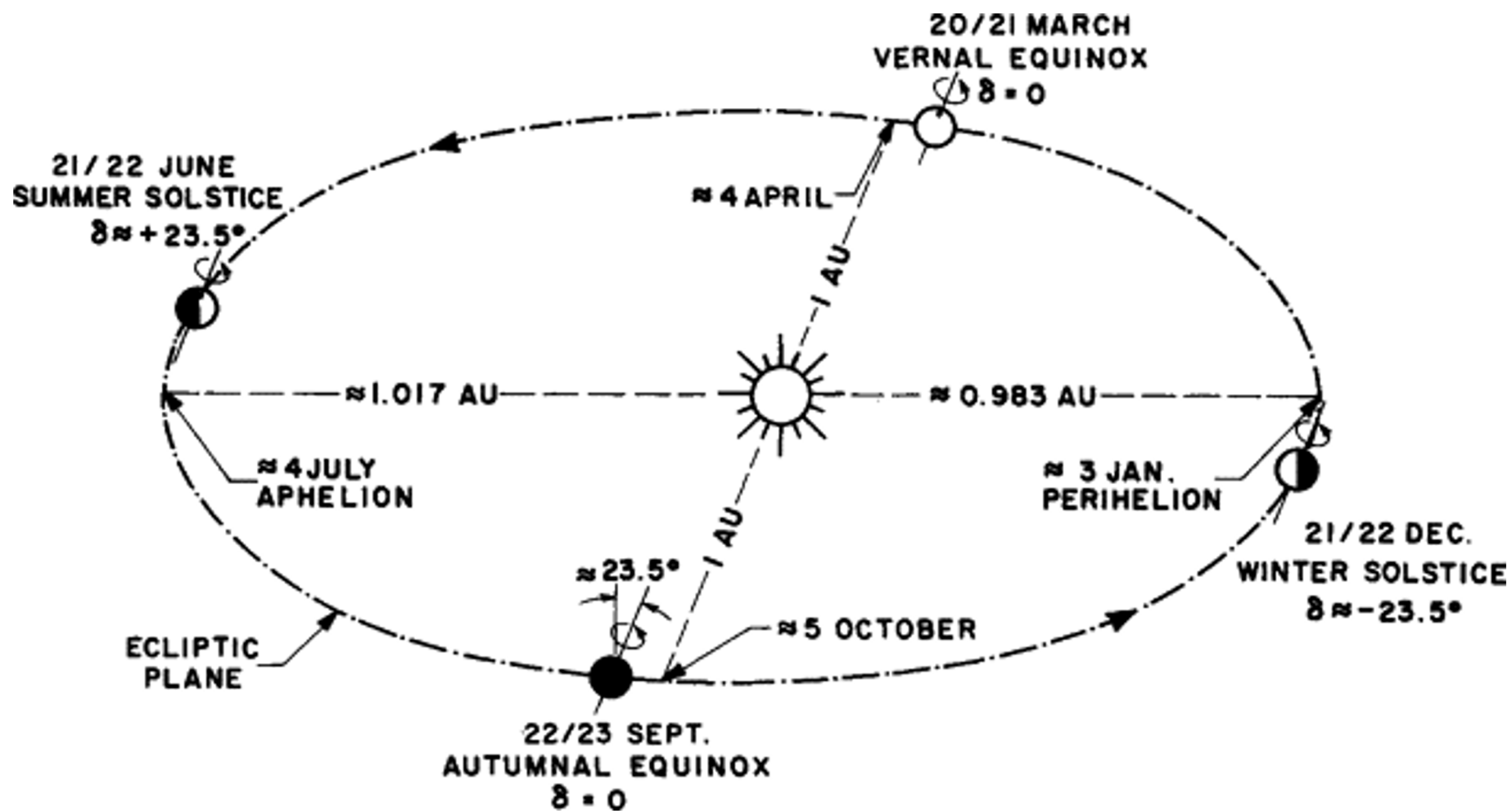
Dragana Ilić (MATF)

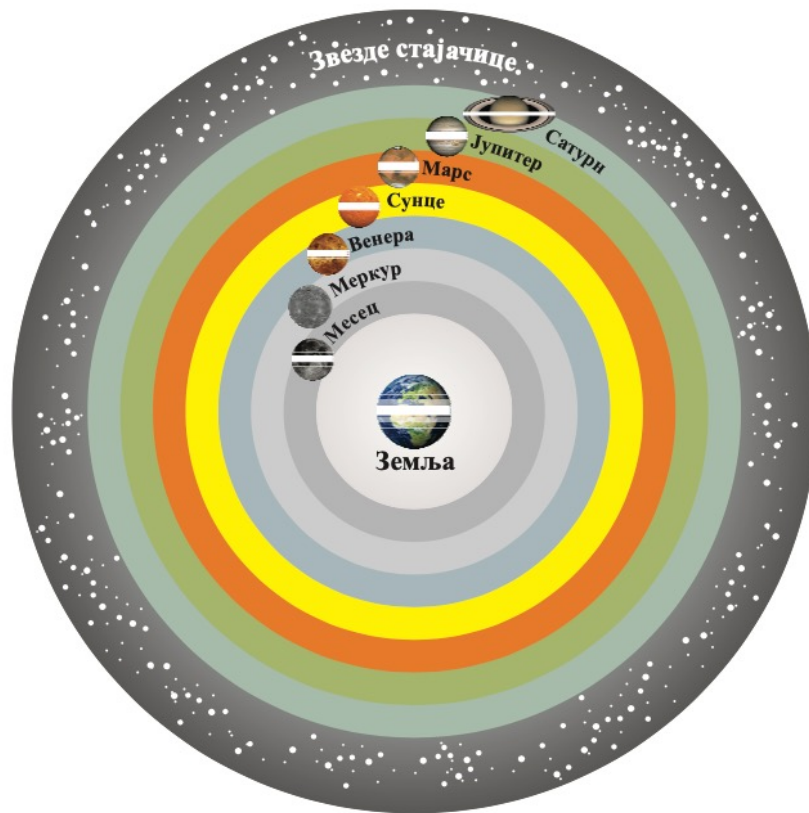
8/ 12/ 2025

150 година  
MATF  
Универзитет у Београду  
Математички Факултет

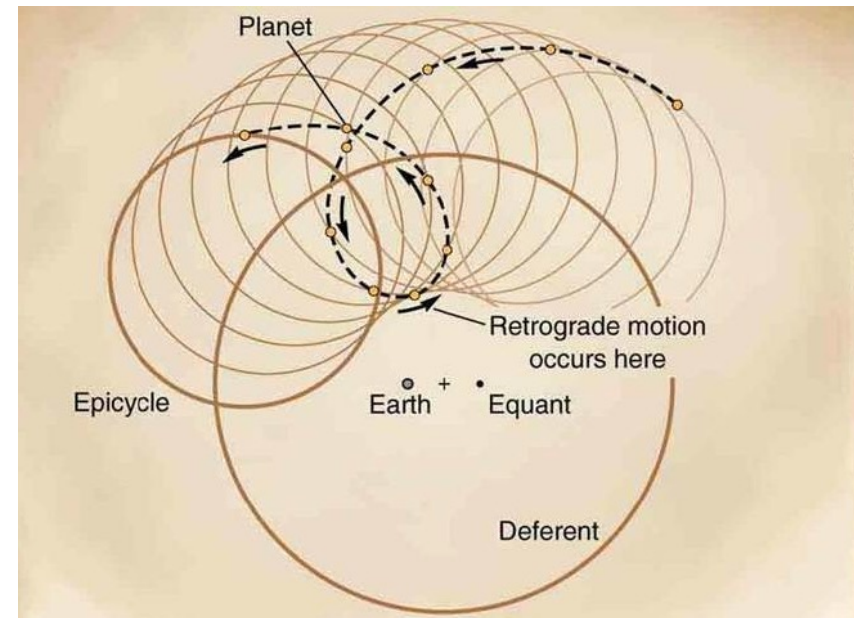
**MATF**  
University of Belgrade  
Faculty of Mathematics

- Zemljina putanja je elipsa

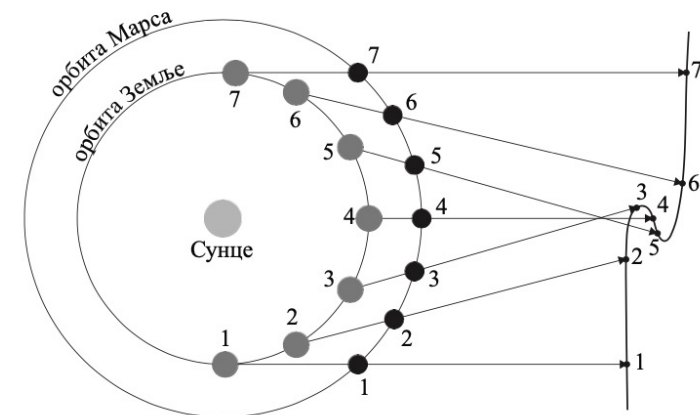




*Слика 1.1:* Аристотелове сфере. Сфере описују кретање Сунца, Месеца, тада познатих пет планета и звезда некретница.



Нипарх (II век p.n.e): uvodi epicikle, po kojima se крећу планете



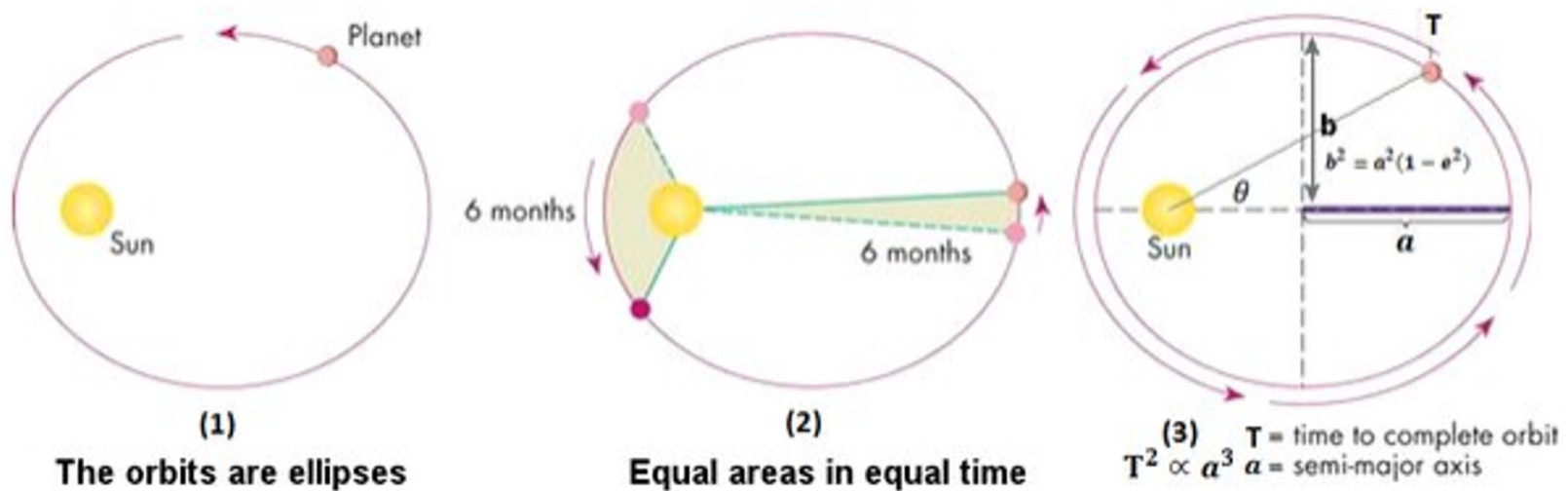
*Слика 4.1:* Ретроградно кретање планете Марс објашњено у оквиру Коперниковог модела (види слику 1.2).

## Promene orbite

- Razlika između najbliže i najdalje tačke na orbiti je  $1.017 / 0.983 \sim 1.03$ , znači oko **3%**
- Energija koju dobijamo od Sunca je obrnuto srazmerna kvadratu rastojanja, znači ta energija varira oko **9%**
- Promena u osvetljenosti između Sunca u zenitu (90 stepeni) i kada je na visini od 45 stepeni je oko **30%!**
- Dodatno, dužina dana se **bitno menja**

# Keplerovi Zakoni – kretanje planeta

•Ovi zakoni su, u suštini jako prosti!



•Kao i uvek glavna stvar je da shvatimo **zašto** se ovo dešava!

# Keplerovi Zakoni

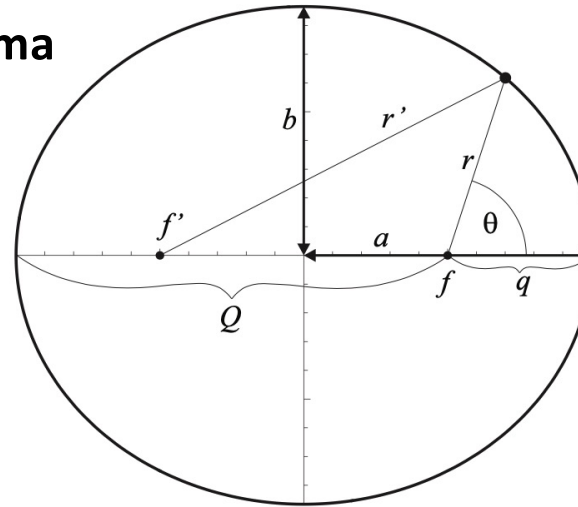


1571-1630

## 1. Sve planete se kreću po eliptičnim putanjama

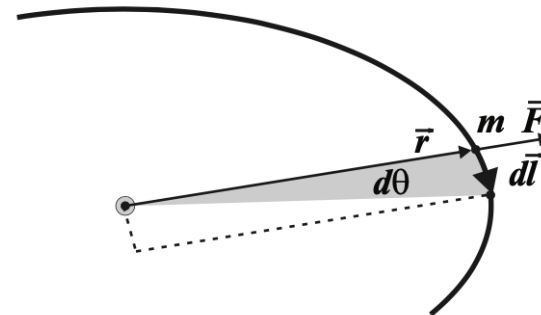
$$e = \frac{f}{a} \quad r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(\theta)}$$

$$b^2 = a^2(1 - e^2) \quad (0 \leq e < 1)$$



## 2. Sektorska brzina planeta je konstantna

- Radijus vektor ili vektor položaja planete u odnosu na Sunce, opisuje jednake površine za jednake vremenske intervale



3. Za proizvoljne dve planete ili satelita, odnos kvadrata njihovih sideričkih perioda (T) jednak je odnosu kubova njihovih velikih poluosa (a)

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$$

# Dinamika – kratak podsetnik

*Njutnovi zakoni – postulati klasične mehanike.*

- Ukoliko nema sile, tela se kreću ravnomerno pravolinijski
- Sila koja deluje na telo jednaka je proizvodu mase i ubrzanja tela:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$$

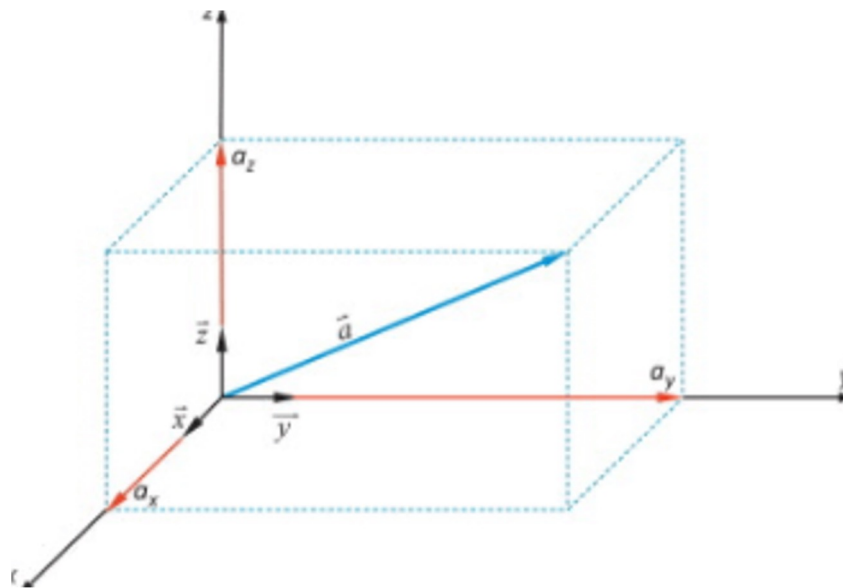
- Ukoliko jedno telo deluje na drugo nekom silom, onda i drugo telo deluje na prvom istom tom silom, samo u suprotnom smeru.
- Šta možemo da zaključimo o našim planetama na osnovu ovoga?

# Šta možemo da zaključimo?

- Planete se ne kreću ravnomerno pravolinijski
- Znači da na planete deluje neka sila!
- Kako objašnjavate to da neko telo ostaje u “stabilnoj” orbiti iako na njega konstantno deluje neka sila?
- Zašto planete ne padnu na Sunce?

# Podsetnik iz srednje škole:

- U kom god koordinatnom sistemu radimo, ovo su bazične definicije i relacije koje će nam biti korisne da razumemo šta se dešava:



Vektor položaja  $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

Brzina  $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

Ubrzanje  $\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$

Impuls  $\vec{p} = m\vec{v}$

Sila  $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$

# Rad i Energija

- Konceptualno osećamo da tela koja se kreću imaju neku **energiju**. Ta energija ne zavisi od pravca i smera kretanja tela. Ta, tzv. **kinetička energija** jednaka je:

$$T = \frac{mv^2}{2}$$
$$v = |\vec{v}|$$

- *Thomas Young* je prvi uveo pojam energije kakvim ga mi danas znamo.
  - *Coriolis, Rankine, Joule...* doprineli definiciji raznih oblika energije.
  - Ovo sve dešavalo tek pre oko 200 god!



(Young 1773 – 1829)

# Rad i Energija

- Energija je sposobnost tela da izvrši neki rad!  
Rad se uvek vrši pod uticajem ili nasuprot nekoj sili.
- Formalno, rad je integral sile po putanji:

$$T = \frac{mv^2}{2}$$
$$v = |\vec{v}|$$

$$A = \int_C \vec{F} \cdot \vec{s}$$

- Ako je rad negativan, **telo vrši rad**. Ako je rad pozitivan, nad **telom se vrši rad**.
- Npr: Tela koja padaju, se kreću u pravcu gravitacione sile, pa se nad njima vrši rad.

# Zakoni održanja

- Sila kojom ćemo se mi baviti, **gravitaciona sila**, je primer **potencijalne sile**. To znači da se može izraziti kao gradijent neke funkcije  $U$ , koju zovemo **potencijalna energija**:

$$\vec{F} = -\nabla U$$

- Npr. u slučaju gravitacione interakcije, potencijalna energija je jednaka:

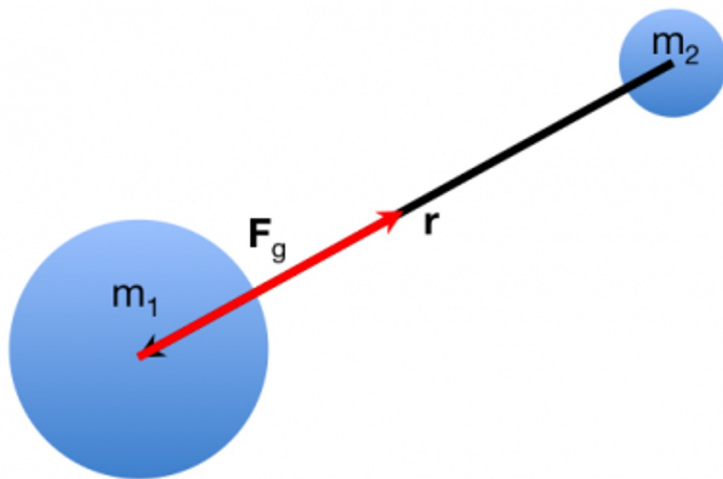
$$U = -G \frac{m_1 m_2}{r}$$
$$\vec{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{r}$$

- Ispostavlja se (vežbe), da je **ukupna mehanička energija održana**

$$E = U + T = \text{const}$$

# Gravitaciona sila

- Deluje izmedju tela koja imaju neku **masu**. Masa je mera inercije nekog tela.
- Ekstremno slaba sila, ali jedina koja deluje bukvalno svuda, tako da je presudna za kretanje nebeskih tela kao i za celokupnu strukturu materije.
- Nemamo fundamentalno razumevanje gravitacije (nije otkrivena čestica koja je kvant gravitacione interakcije).



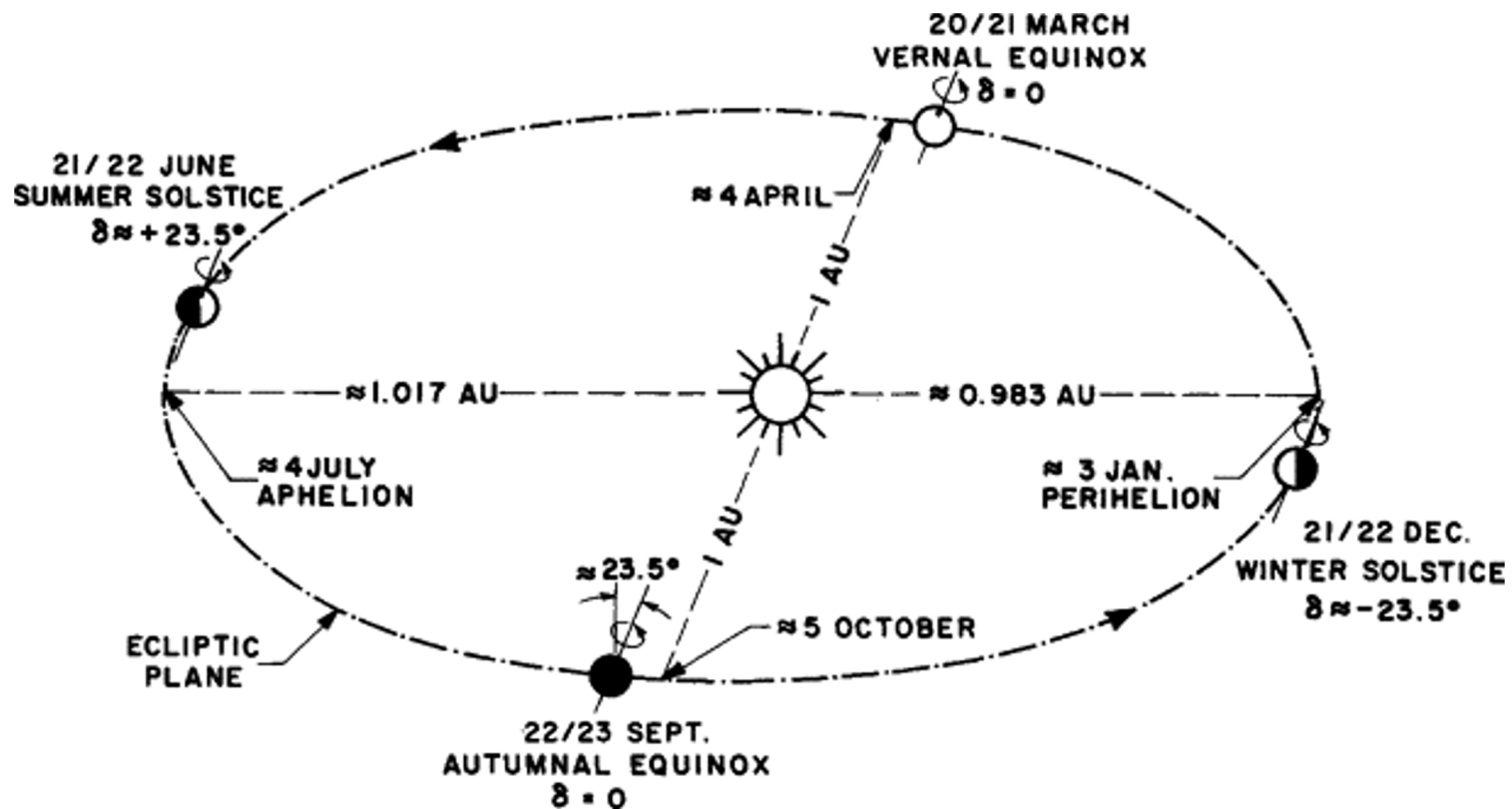
$$U = -G \frac{m_1 m_2}{r}$$
$$\vec{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{r}$$

# Zakoni održanja

•Fiksirajmo položaj Sunca i napišimo:

$$E = U + T = -G \frac{m_{\odot} m_{\oplus}}{r} + \frac{m_{\oplus} v_{\oplus}^2}{2} = \text{const}$$

•Kad se onda Zemlja kreće najbrže? A najsporije?



# Zakon održanja impulsa

Razmatramo system od N čestica, na koji deluju unutrašnje i spoljašnje sile

$$\vec{p} = \sum_i m_i \vec{v}_i$$

Promena impulsa u vremenu je posledica sile

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_i m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \sum_i \vec{F}_i$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_i \left( \sum_j \vec{F}_{ij} + \vec{F}_i^{\text{spolj}} \right)$$

Sile izmedju čestica + spoljašnje sile

Treći Njutnov Zakon

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i^{\text{spolj}}$$

**Promena impulsa celog sistema je posledica samo delovanja spoljašnjih sila!**

Ako nema delovanja spoljašnjih sila, impuls je konstantan, jer je  $dp/dt=0$

# Šta to znači za nas?

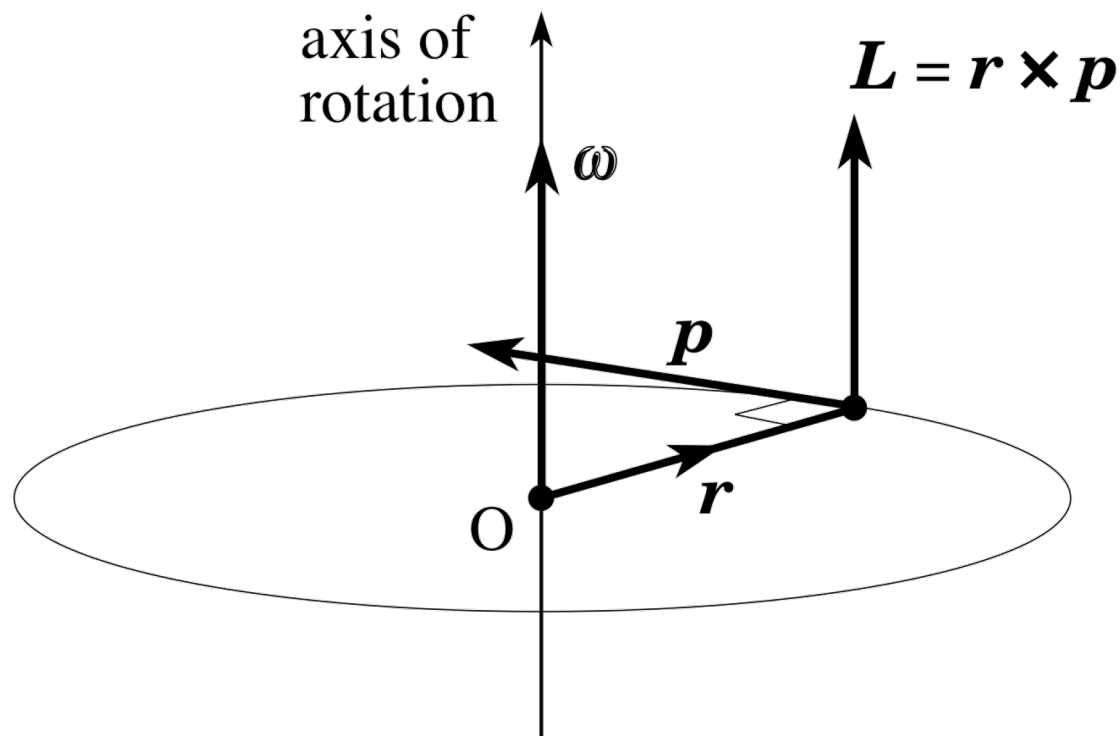
- Težište Sunčevog sistema (praktično Sunce) miruje!
- Rešavaćemo problem kretanja planeta u polju centralne sile gravitacije Sunca.
- Pogledajte par videa o Sunčevom sistemu:

[https://www.youtube.com/watch?v=gvSUPFZp7Yo&ab\\_channel=Michal4767](https://www.youtube.com/watch?v=gvSUPFZp7Yo&ab_channel=Michal4767)

[https://www.youtube.com/watch?v=UzbnPX8Stnc&ab\\_channel=AfterEffectsTips%26Treats-byJulienSchickel](https://www.youtube.com/watch?v=UzbnPX8Stnc&ab_channel=AfterEffectsTips%26Treats-byJulienSchickel)

# Zakon održanja momenta impulsa

- Šta je **moment** impulsa?
- Veličina zgodna za opis sistema koji imaju neku ugaonu brzinu (npr. naš Sunčev Sistem).
- Definiše se u odnosu na neku dogovorenu tačku, koja se zove **pol**



Moment impulsa

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Moment sile

# Zakon održanja momenta impulsa

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{p} = \sum_i m_i \vec{v}_i$$

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} \times \vec{p}_i + \sum_i \vec{r}_i \times \frac{d\vec{p}_i}{dt}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}}{dt} &= \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i \\ &= \sum_i \vec{r}_i \times \sum_j \vec{F}_{ij} \end{aligned}$$

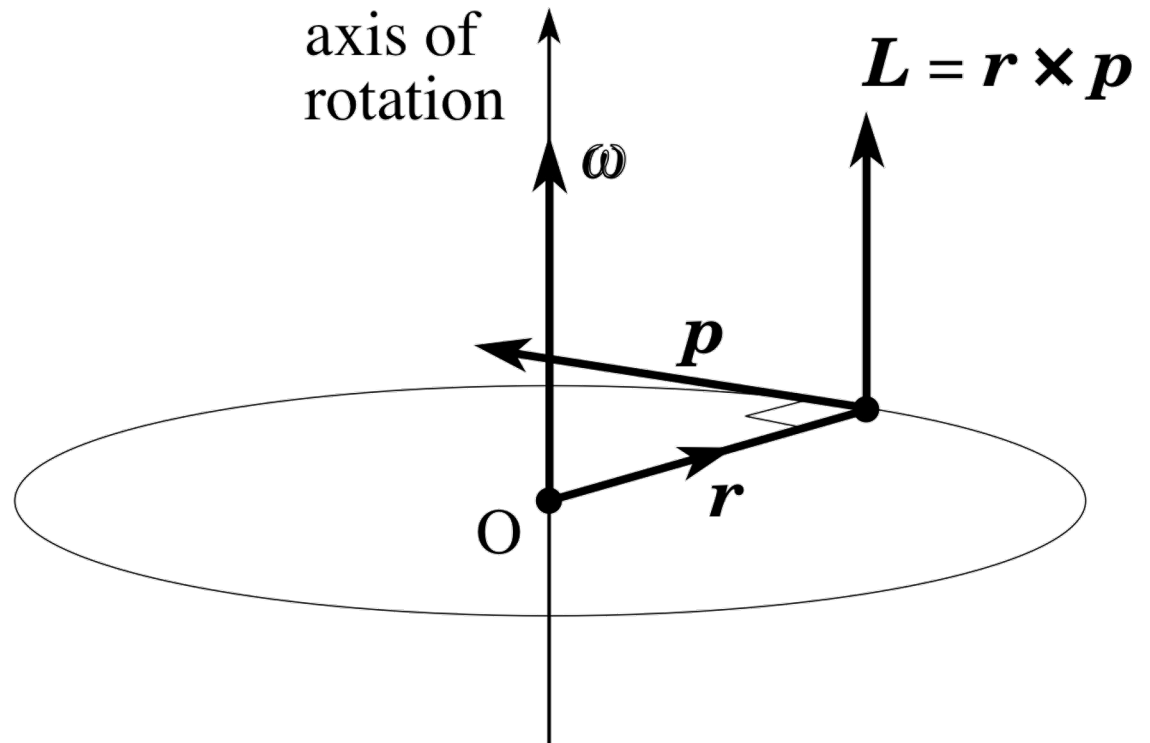
$$= \frac{1}{2} \sum_i \vec{r}_i \times \sum_j \vec{F}_{ij} + \frac{1}{2} \sum_j \vec{r}_j \times \sum_i \vec{F}_{ji}$$

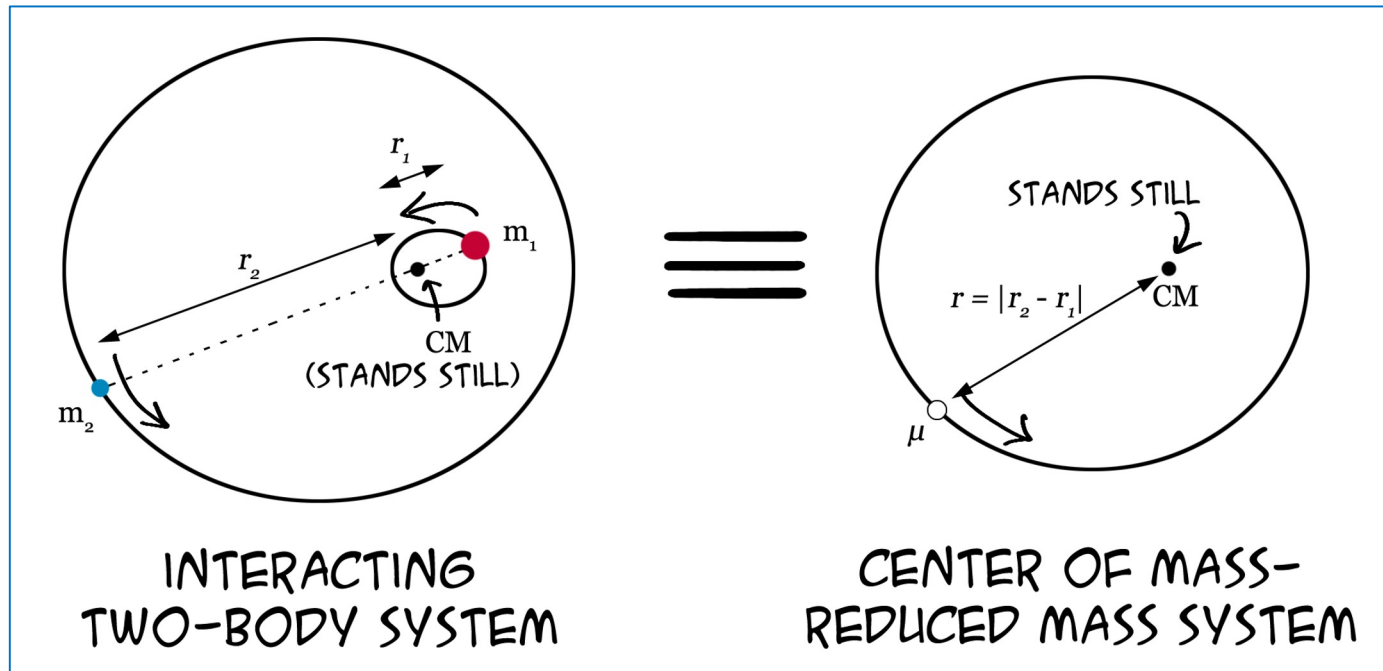
$$= \frac{1}{2} \sum_i \vec{r}_i \times \sum_j \vec{F}_{ij} - \frac{1}{2} \sum_j \vec{r}_j \times \sum_i \vec{F}_{ij} \quad \leftarrow \text{Treći Njutnov zakon}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_i \sum_j (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \vec{F}_{ij} = 0$$

# Zakon održanja momenta impulsa

- U odsustvu spoljašnjih sila, u sistemu koji interaguje gravitaciono, ukupan impuls (koji je inače, vektor), je održan.
- Znači da Zemlja rotira u jednoj ravni oko Sunca
- Svaka planeta ima svoju ravan ("ekliptiku") i one se skoro podudaraju
- **Pogledajmo video još jednom**



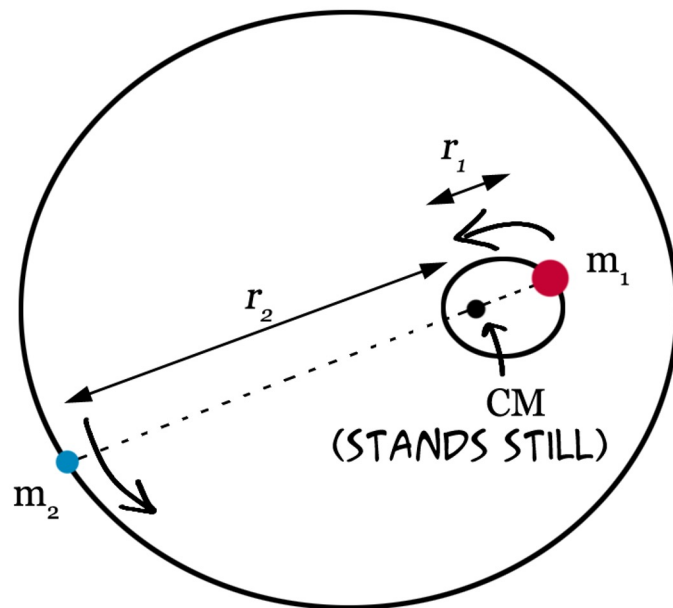


# OAP 2024 Lekcija 6: Problem dva tela i drugi primeri gravitacione interakcije

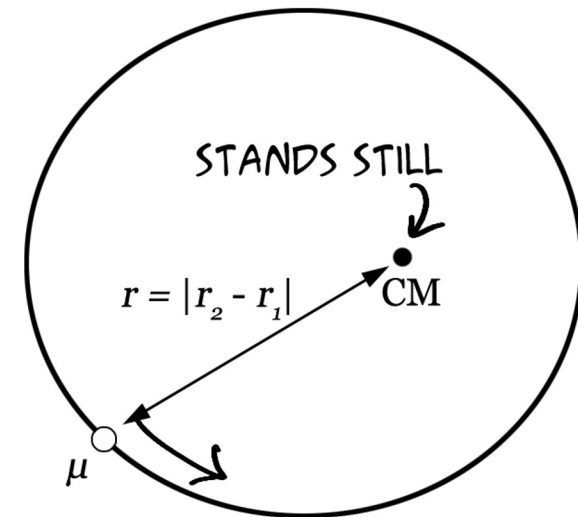
Dragana Ilić (MATF)

8/ 12/ 2025

## Rešavanje problema dva tela:



INTERACTING  
TWO-BODY SYSTEM



CENTER OF MASS-  
REDUCED MASS SYSTEM

## Podsetnik:

- Gravitaciona sila između dva tela ima oblik:

$$\vec{F}_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{r}$$
$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1; \hat{r} = \frac{\vec{r}}{r}$$

- Ovo je sila kojom telo 1 deluje na telo 2.

- Gravitaciona sila je:

- Potencijalna** (može se napisati kao gradijent potencijalne gravitacione energije)

- Konzervativna** (rad ne zavisi od putanje, samo od početne i krajnje tačke)

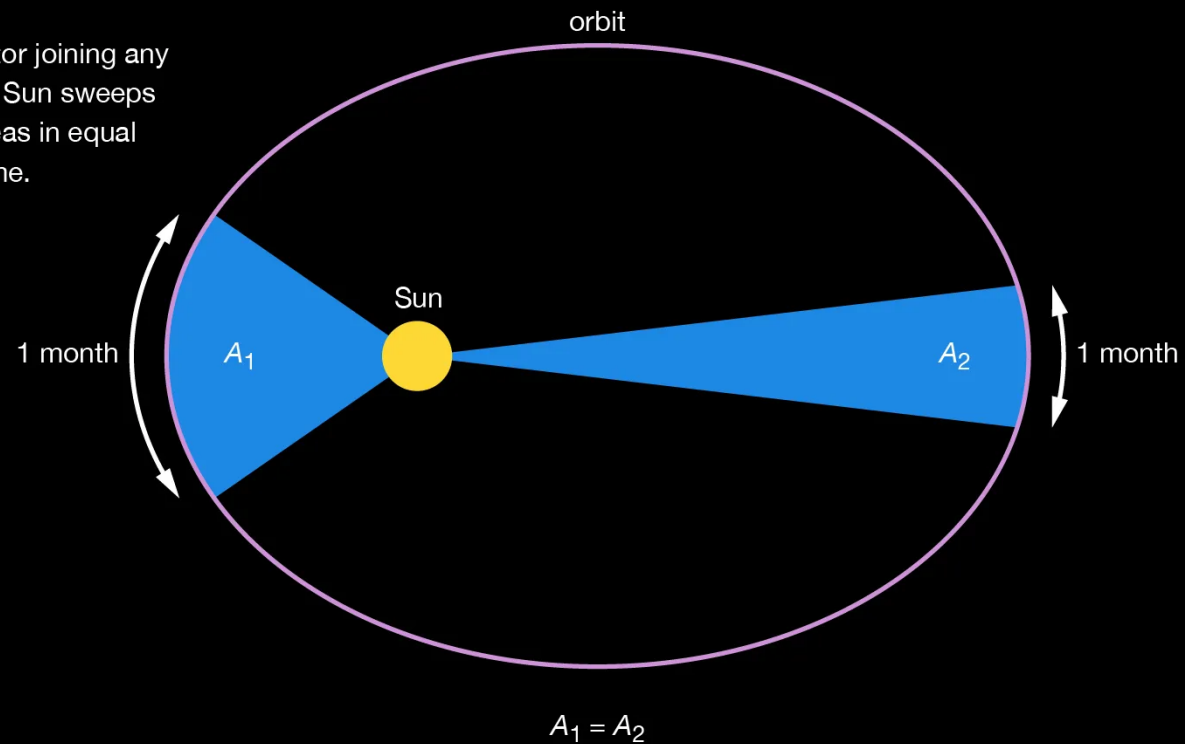
- Gravitacije je “najslabija” sila, ali je, zbog dometa i činjenice da sva tela imaju masu, najvažnija za kretanje nebeskih tela.

# Kretanje planeta u sunčevom sistemu:

## Kepler's laws of planetary motion

### Second law

A radius vector joining any planet to the Sun sweeps out equal areas in equal lengths of time.



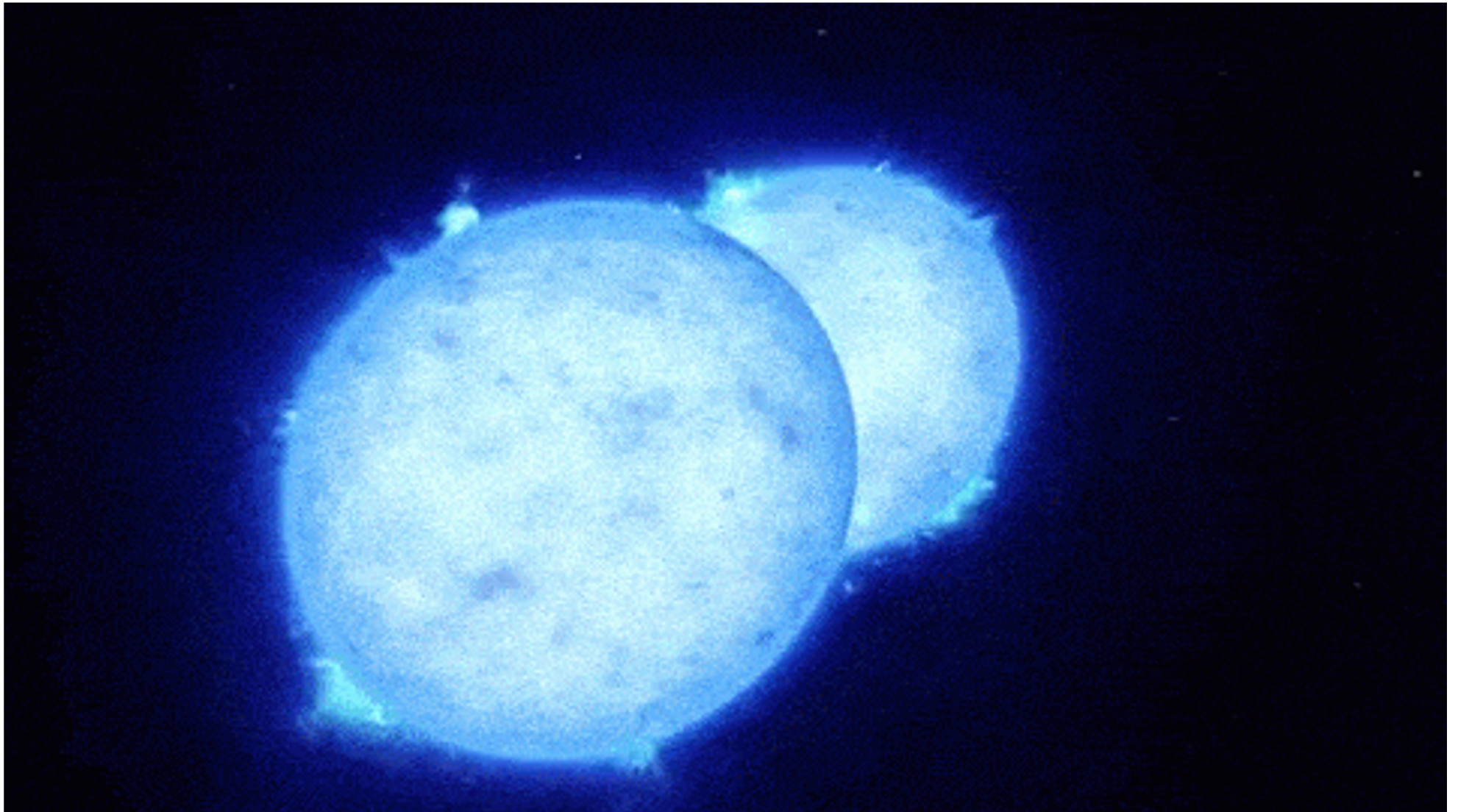
# Sunčev Sistem

- Težište Sunčevog sistema (praktično Sunce) miruje!
- **Problem kretanja planeta u polju centralne sile gravitacije Sunca.**
- **video o Sunčevom sistemu:**

[https://www.youtube.com/watch?v=gvSUPFZp7Yo&ab\\_channel=Michal4767](https://www.youtube.com/watch?v=gvSUPFZp7Yo&ab_channel=Michal4767)

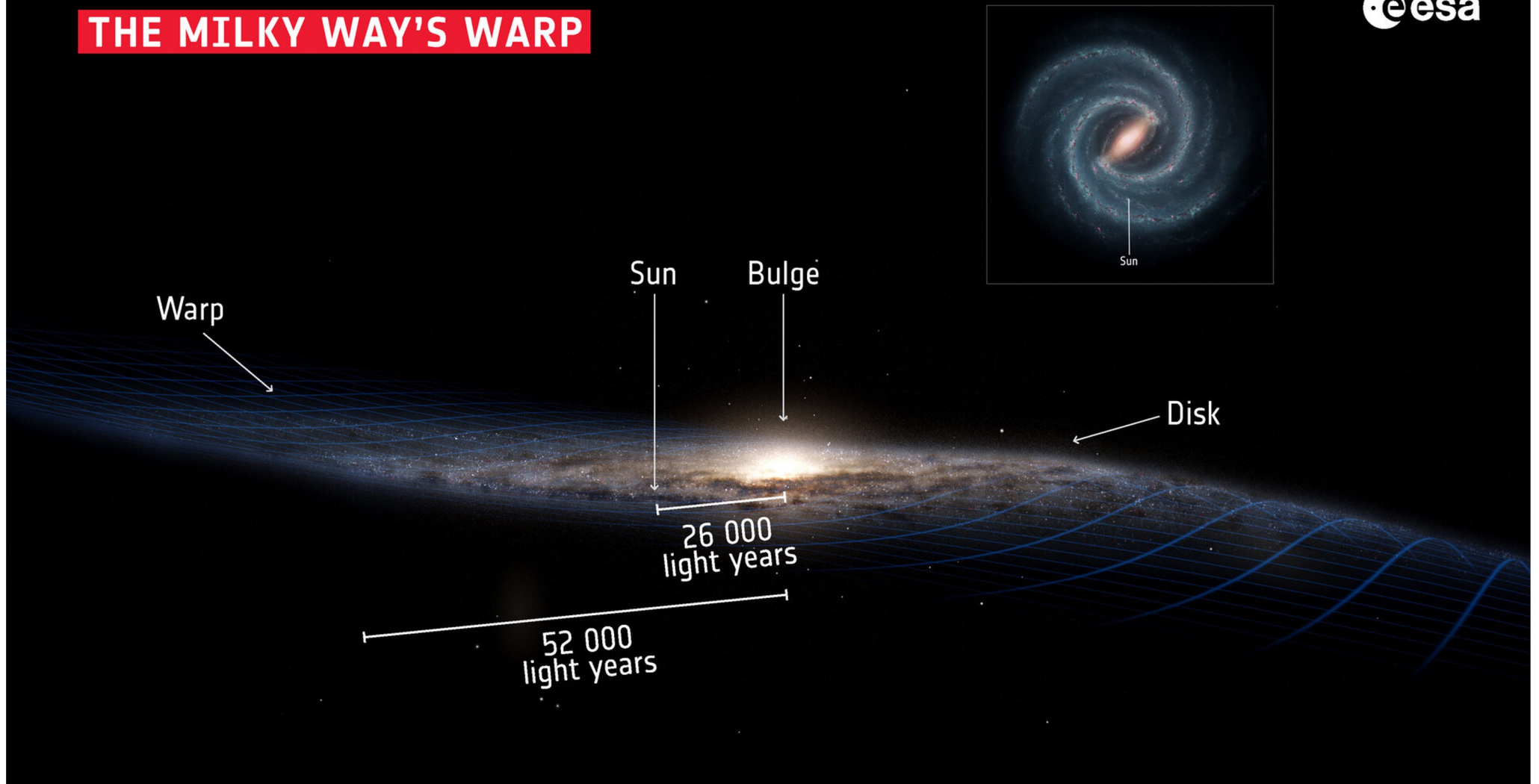
[https://www.youtube.com/watch?v=UzbnPX8Stnc&ab\\_channel=AfterEffectsTips%26Treats-byJulienSchickel](https://www.youtube.com/watch?v=UzbnPX8Stnc&ab_channel=AfterEffectsTips%26Treats-byJulienSchickel)

Ili dvojnih zvezda (umetnički prikaz)

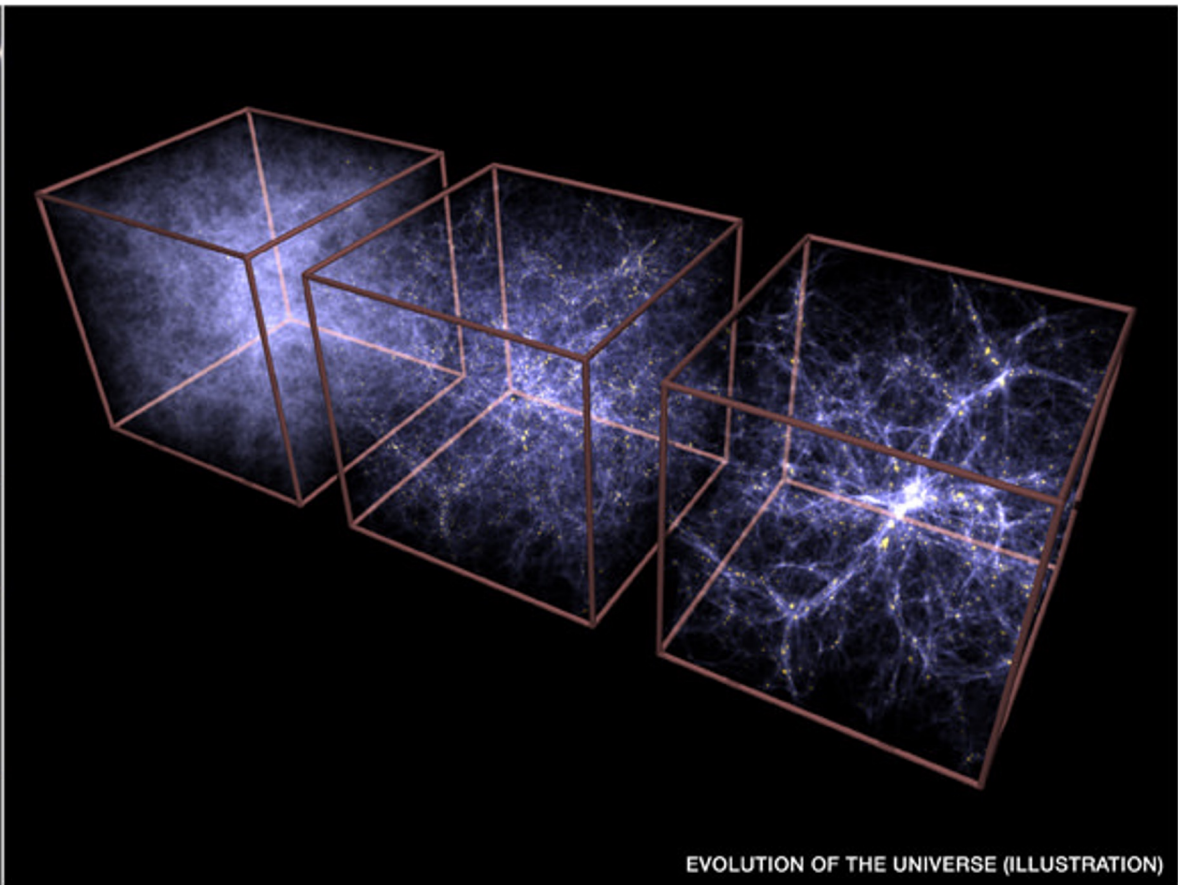


# Galaksije:

## THE MILKY WAY'S WARP



# I celokupnog svemira



# Simulacije N-tela celokupnog svemira



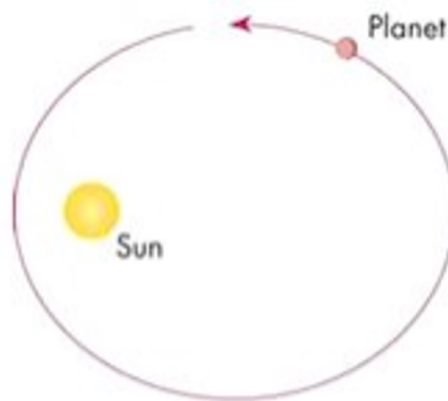
<https://www.youtube.com/watch?v=kndzioHG8Uc>

[https://www.youtube.com/watch?v=JAyrpJCC\\_dw](https://www.youtube.com/watch?v=JAyrpJCC_dw)

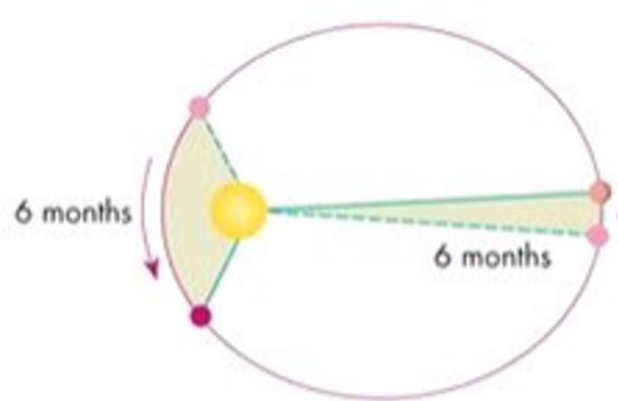
<https://www.youtube.com/watch?v=74lsySs3RGU>

# Keplerovi zakoni

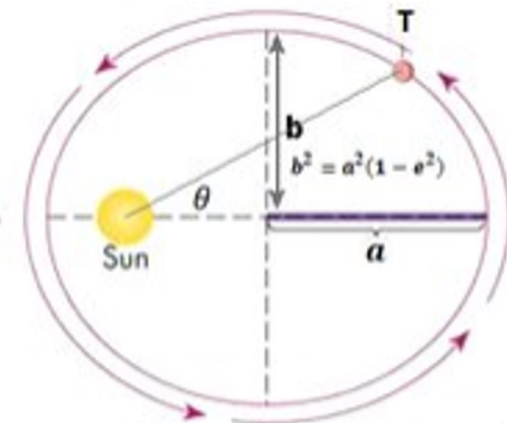
•Eksperimentalno (posmatrački) utvrđeni, mi pokušavamo da ih izvedemo iz prvih principa (Njutnovog zakona gravitacije).



(1)  
The orbits are ellipses



(2)  
Equal areas in equal time



(3)  $T^2 \propto a^3$   $T$  = time to complete orbit  
 $a$  = semi-major axis

## Za to ćemo se osloniti na nekoliko “zakona održanja”

•Veličine koje su održane u odsustvu tzv. spoljašnjih sila:

**(Mehanička)**  
**Energija**

$$E = \sum_i (T_i + U_i) = \sum_i \left( \frac{m_i v_i^2}{2} + U_i \right)$$

**Impuls**

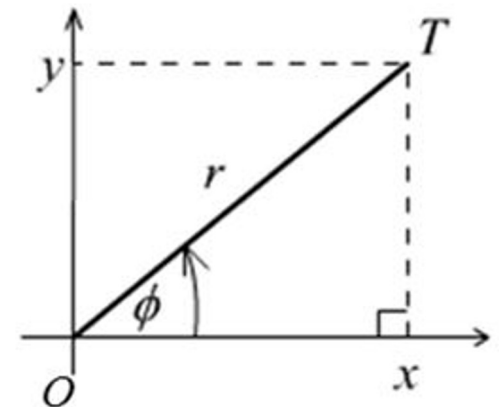
$$\vec{p} = \sum_i m_i \vec{v}_i$$

**Moment impulsa**  
(mora biti definisan  
u odnosu na neku  
tačku)

$$\vec{L} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i$$

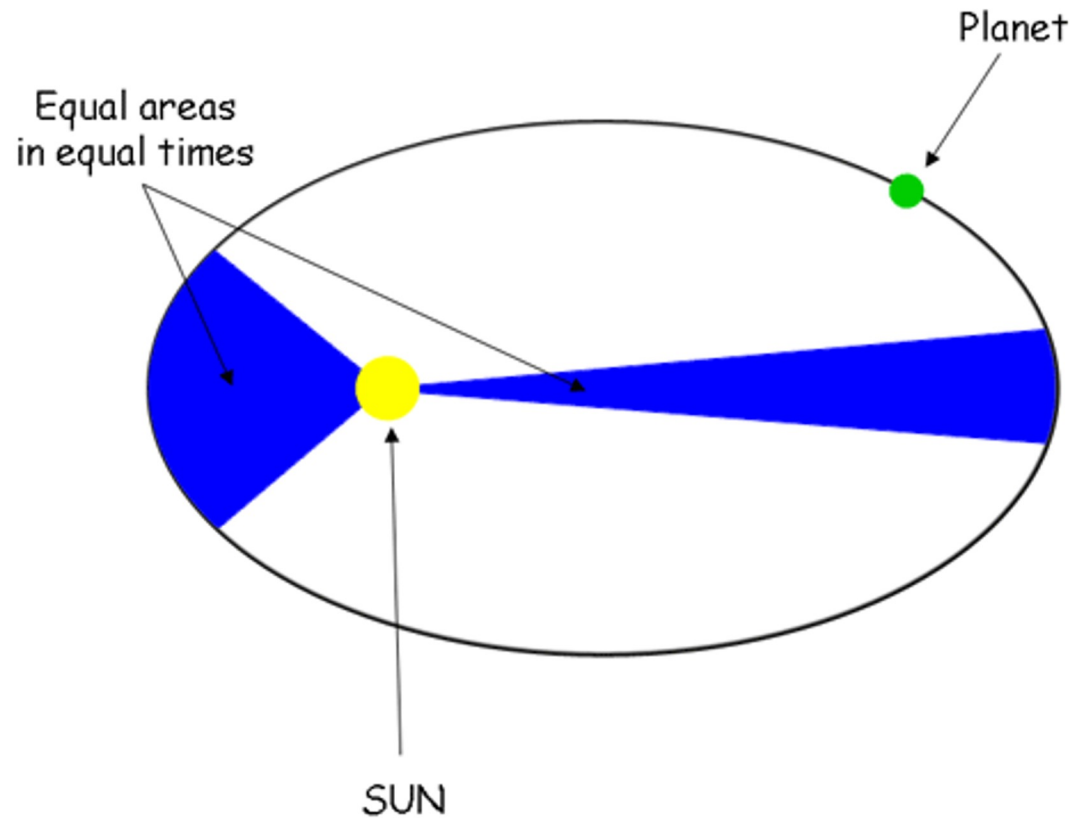
# Postavka:

- Dva tela koja gravitaciono interagiju: **Sunce i planeta**
- Pošto centar mase sistema miruje (zakon održanja impulsa), stavimo centar mase u koordinatni početak.
- Evolucija ovog sistema (kretanje planete) sledi iz:
  - **Rešavanja jednačina kretanja pod uticajem gravitacione sile za date granične uslove - (Početni položaj i brzina planete).**
- Trebalo bi da na kraju dobijemo Keplerove zakone!
- To kretanje je kretanje u jednoj ravni, tako da ima dva stepena slobode i najpogodnije koordinate za rešavanje ovog problema su **polarne koordinate**
- **trajektorija** čestice je zavisnost udaljenosti  $r$  od polarnog ugla  $\phi$



## Drugi keplerov zakon

•Direktno sledi iz zakona održanja momenta impulsa.



$$\vec{L} = \text{const}$$

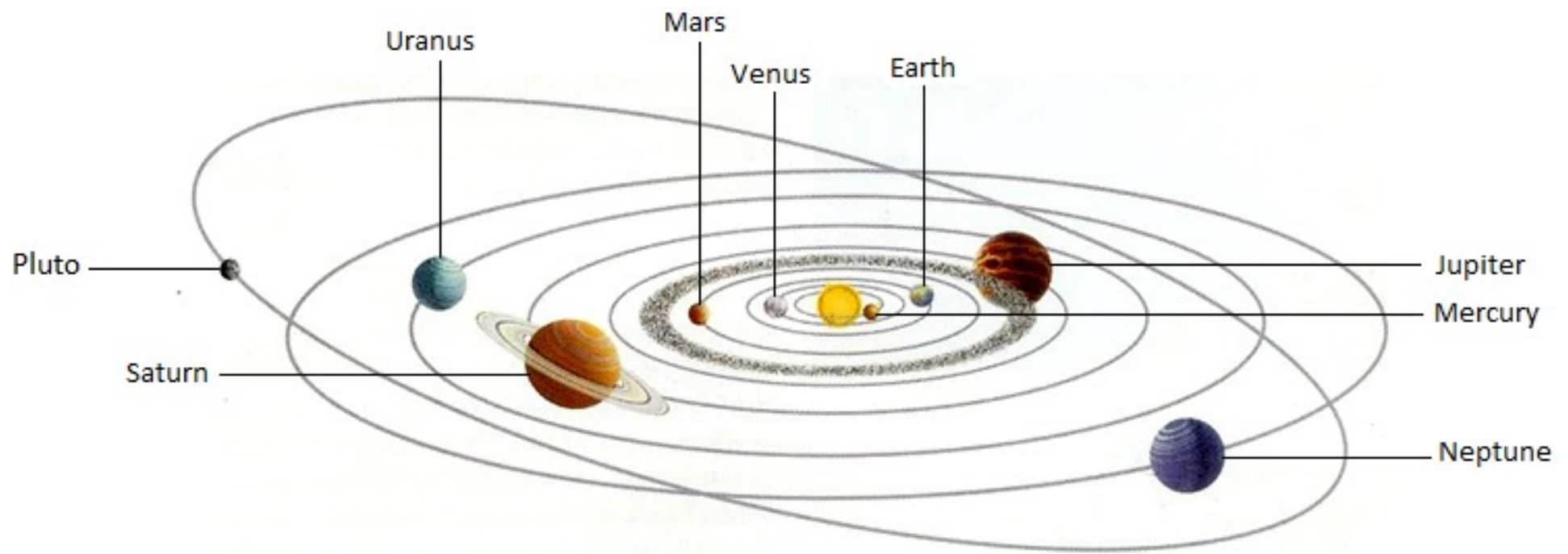
$$m\vec{r} \times \vec{v} = \text{const}$$

$$\frac{dr}{dt} r \vec{k} = \text{const}$$

$$\frac{\Delta r}{\Delta t} r = \frac{\Delta A}{\Delta t} = \text{const}$$

# Ravni rotacije manje-više svih planeta se poklapaju

Realistična ilustracija orbita planeta u Sunčevom sistemu.  
Tu je i Pluton (sada ne više velika planeta)



## Rešavanje problema 2 tela

• Pošto smo fiksirali Sunce, rešavamo problem kretanja jednog tela u polju tzv. centralne sile koja je u ovom slučaju isključivo privlačna

• **Drugi njutnov zakon, ubrzanje čestice je proporcionalno sili koja deluje na nju.**

Dakle:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = - \mu \frac{\vec{r}}{r^3}$$
$$\mu = G(m + M)$$

• Znamo da se planeta kreće u ravni, pa:  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$

• Treba nam  $x(t)$ ,  $y(t)$ !

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\mu \frac{x}{r^3}$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -\mu \frac{y}{r^3}$$

## Transformišemo u polarne koordinate:

$$\ddot{x} + \mu \frac{x}{r^3} = 0$$

$$\ddot{y} + \mu \frac{y}{r^3} = 0$$

$$x = r \cos \theta; y = r \sin \theta$$

$$\dot{x} = \dot{r} \cos \theta - r \sin \theta \dot{\theta}$$

$$\ddot{x} = \ddot{r} \cos \theta - 2\dot{r} \sin \theta \dot{\theta} - r \cos \theta \ddot{\theta}^2 - r \sin \theta \ddot{\theta}$$

$$\ddot{y} = \ddot{r} \sin \theta + 2\dot{r} \cos \theta \dot{\theta} - r \sin \theta \ddot{\theta}^2 + r \cos \theta \ddot{\theta}$$

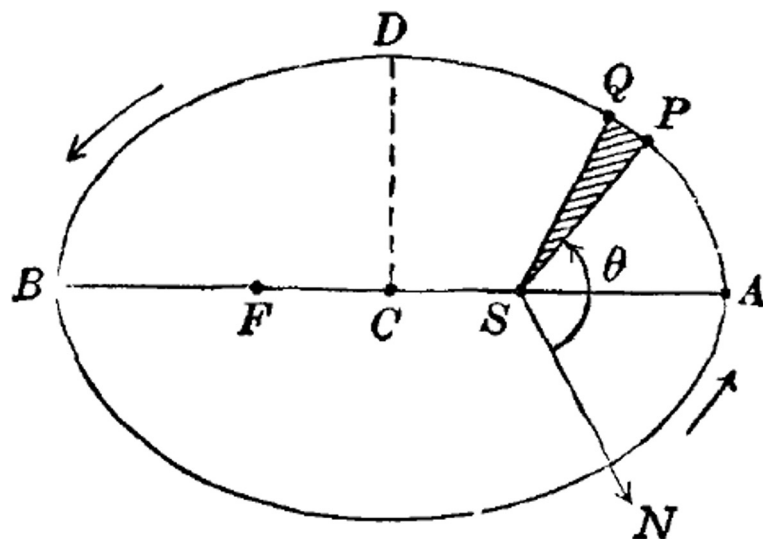


Fig. 45.

SP je udaljenost planete od Sunca (S)

SA je **perihel**

**Teta** je polarna koordinata, astronomi je zovu **prava anomalija planete**

**Putanja** je zavisnost radijusa r (theta)

# Definišemo dve komponente ubrzanja

•Komponente ubrzanja u pravcu SP i normalno na pravac SP:

•Zašto?

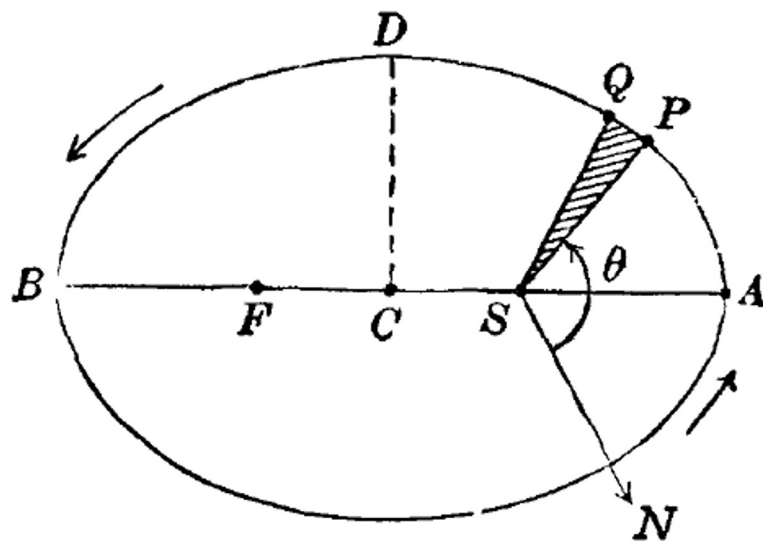


Fig. 45.

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -m\mu \frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$\mu = G(m + M)$$

## Definišemo dve komponente ubrzanja

- Komponente ubrzanja u pravcu SP i normalno na pravac SP:
- Zato što sila deluje samo duž pravca SP!

$$a_r = \ddot{x} \cos \theta + \ddot{y} \sin \theta$$

$$a_t = -\ddot{x} \sin \theta + \ddot{y} \cos \theta$$

- Možemo se uveriti u ovo ako projektujemo ubrzanje. Prva komponenta ubrzanja se mora slagati sa silom gravitacije:

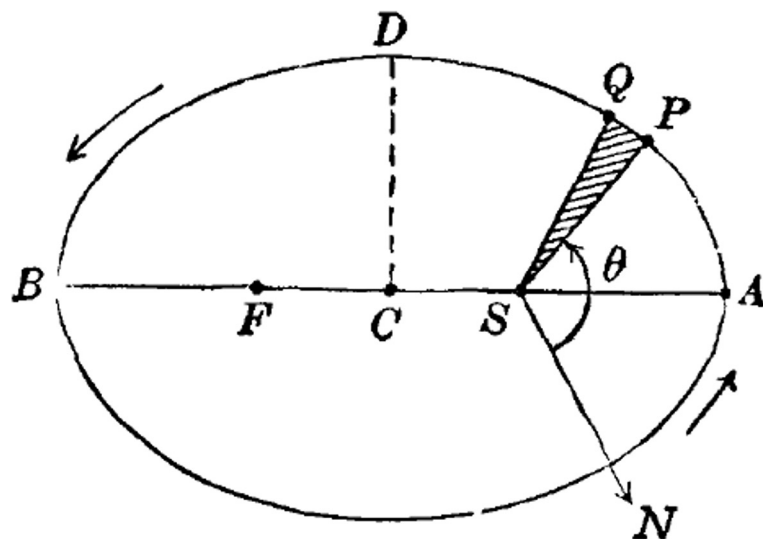


Fig. 45.

Ovo je gravitaciona sila (drugi Njutnov zakon)

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{\mu}{r^2}$$

Prvi član je ubrzanje duž r, drugi je nešto poput centripetalne sile

# Definišemo dve komponente ubrzanja

Prva komponenta ubrzanja se mora slagati sa silom gravitacije:

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{\mu}{r^2}$$

A druga mora biti nula, jer gravitaciona sila deluje radijalno!

$$a_t = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0$$

•U svakoj od ove dve relacije, prvi znak jednakosti dolazi iz “matematike”, tj iz transformacije koordinata a drugi iz “fizike”, tj. iz postavke našeg problema.

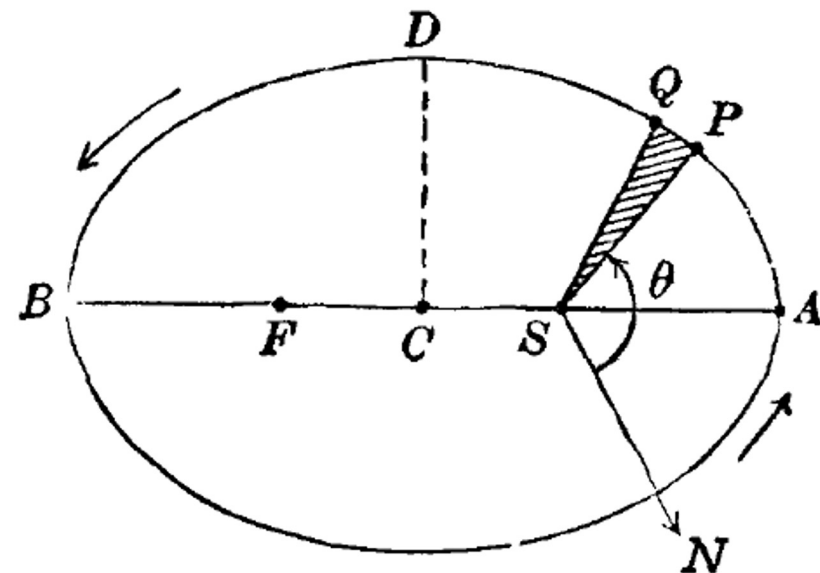


Fig. 45.

## Drugi Keplerov zakon ponovo isplivava

$$a_t = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0$$

$$r^2\dot{\theta} = \text{const}$$

$$rv_t = \text{const}$$

$$|\vec{L}| = |\vec{r} \times \vec{v}| = \text{const}$$

•Ovo smo dobili samo transformacijom koordinata i pretpostavkom da je gravitacija centralna sila.

•Zakon održanja impulsa mora da važi.

•Npr. pogledajte:

[https://www.youtube.com/watch?v=sbEAmTVgGMo&ab\\_channel=Physicsexperiments](https://www.youtube.com/watch?v=sbEAmTVgGMo&ab_channel=Physicsexperiments)

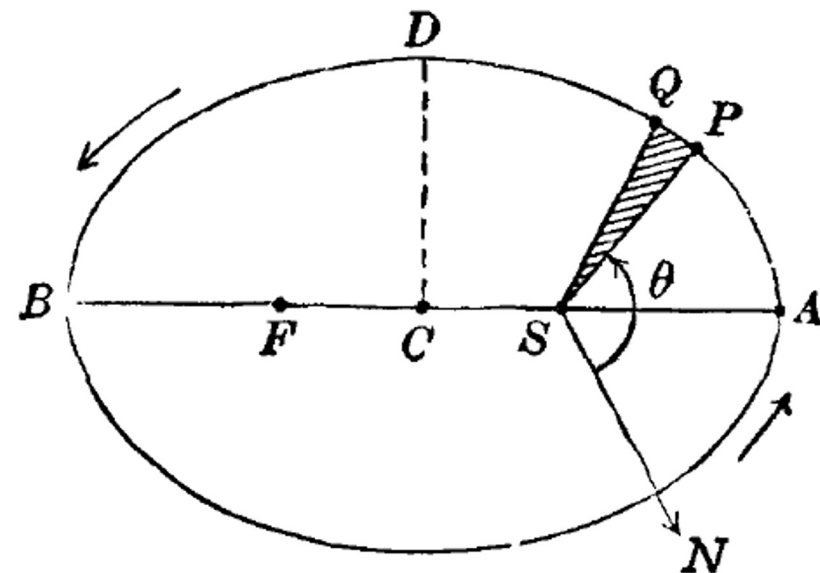


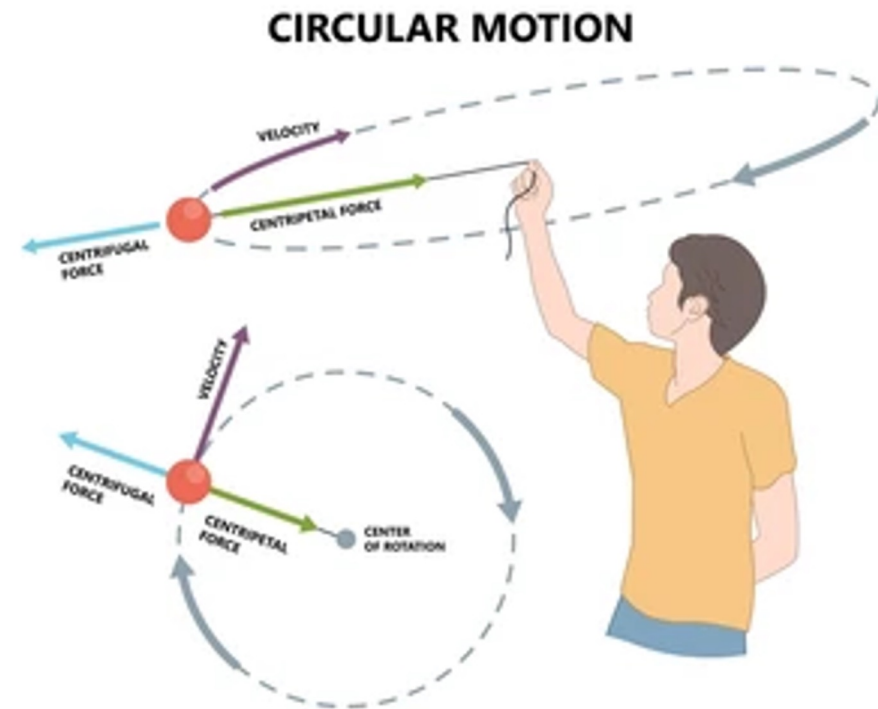
Fig. 45.

# Šta sa radijalnom komponentom?

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{\mu}{r^2}$$

•Kada bi drugi izvod po r bio nula, imali bismo kružno kretanje?

$$r\dot{\theta}^2 = \frac{1}{r}(r\dot{\theta})^2 = \frac{v_t^2}{r}$$



# Šta sa radijalnom komponentom?

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{\mu}{r^2}$$

•Ali hajde da vidimo šta se dešava u opštijem slučaju i zašto putanja nije kružna!

•Videli smo da je

$$r^2\dot{\theta} = L = \text{const}$$

$$u = \frac{1}{r} \quad (\text{uvedimo smenu})$$

$$\dot{\theta} = Lu^2$$

•Pa hajde da iskoristimo to da eliminišemo vreme iz jednačine za radijalno ubrzanje:

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{-1}{u^2} \frac{du}{dt} = \frac{-1}{u^2} \frac{du}{d\theta} \frac{d\theta}{dt}$$

$$\dot{r} = -L \frac{du}{d\theta}$$

•Eliminisali smo vreme iz prvog člana gravitacione interakcije!

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = -Lu^2 \frac{d}{d\theta} \left( L \frac{du}{d\theta} \right)$$

$$\ddot{r} = -L^2 u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2}$$

# Šta sa radijalnom komponentom?

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{\mu}{r^2} \quad r^2\dot{\theta} = L = \text{const}$$

• Iz zakona održanja impulsa imamo:

$$r\dot{\theta}^2 = \frac{L^2}{r^3} = L^2 u^3$$

• Pa smo time eliminisali vreme u potpunosti i možemo da rešimo diferencijalnu jednačinu i da dobijemo:

$$-L^2 u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2} - L^2 u^3 = -\mu u^2$$

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{\mu}{L^2}$$

$$f'' + f = C$$

$$u(\theta) = \frac{\mu}{L^2} [1 + \cos(\theta - \omega)]$$

• Ovo je naša putanja, u polarnim kopordinatama

$$r(\theta) = \frac{L^2 / \mu}{1 + e \cos(\theta - \omega)}$$

# Putanja čestica u polju centralne sile

•Tj. putanja planeta (i kometa, i asteroida) oko Sunca je:

$$r(\theta) = \frac{L^2 / \mu}{1 + e \cos(\theta - \omega)}$$

•Gde **e (ekscentricitet)** i **omega (longituda perihela, najčešće ćemo uzeti da je nula)** zavise od početnih uslova.

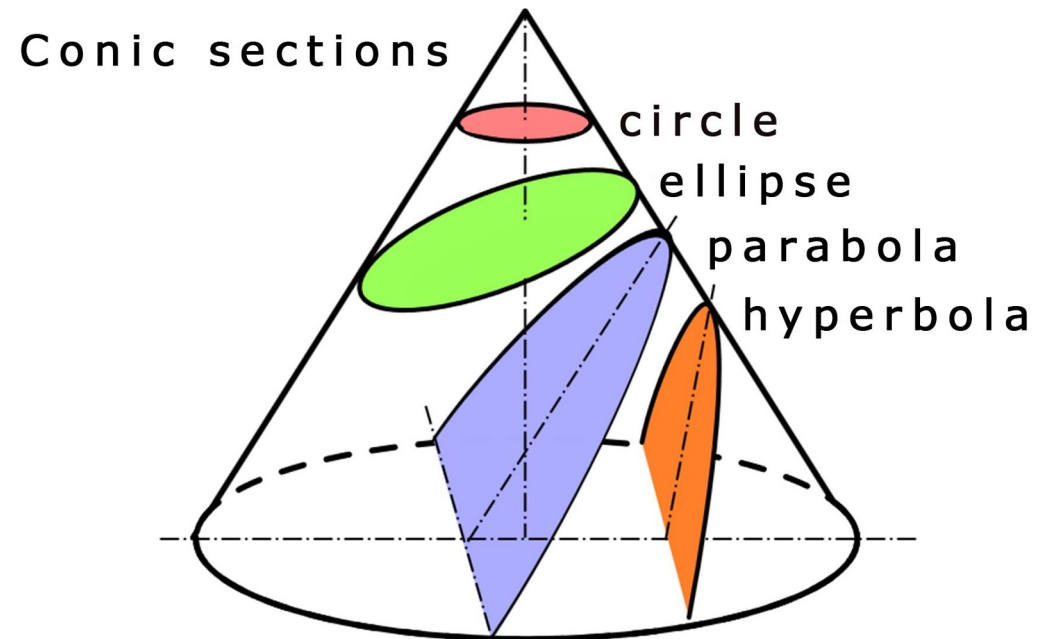
•Takodje u zavisnosti od početnih uslova, ekscentricitet može biti:

• $e = 0$  , Krug

• $e < 1$ , Elipsa

• $e = 1$  Parabola

• $e > 1$  Hiperbola



# Orbite tela oko Sunca

## Conic Sections

- ◆ Compare Eq. (2.29) with the equations for conic sections:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta} \quad (0 \leq e < 1)$$



Circle



Ellipse

Closed orbits

$$r = \frac{2p}{1 + \cos \theta} \quad (e = 1)$$

where  $p$  is the distance of closest approach to the parabola's one focus.



Parabola

Just open orbit

Parabola  
 $e = 1.0$   
 $a = 1.0$

Hyperbola  
 $e = 1.4$   
 $a = 2.5$

Ellipse  
 $e = 0.6$   
 $a = 2.5$

Circle  
 $e = 0.0$   
 $a = 1.0$

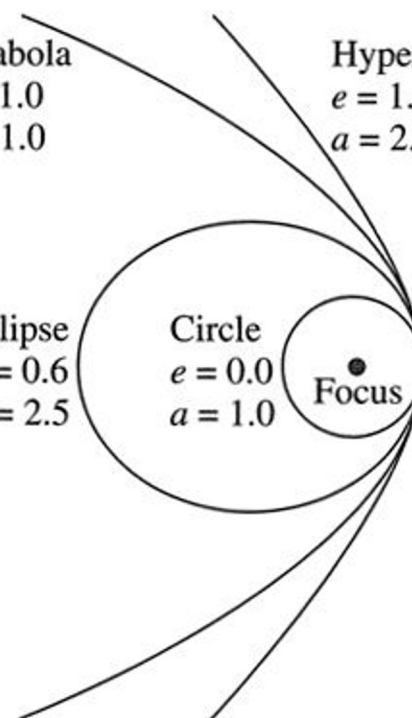
Focus

$$r = \frac{a(e^2 - 1)}{1 + e \cos \theta} \quad (e > 1)$$



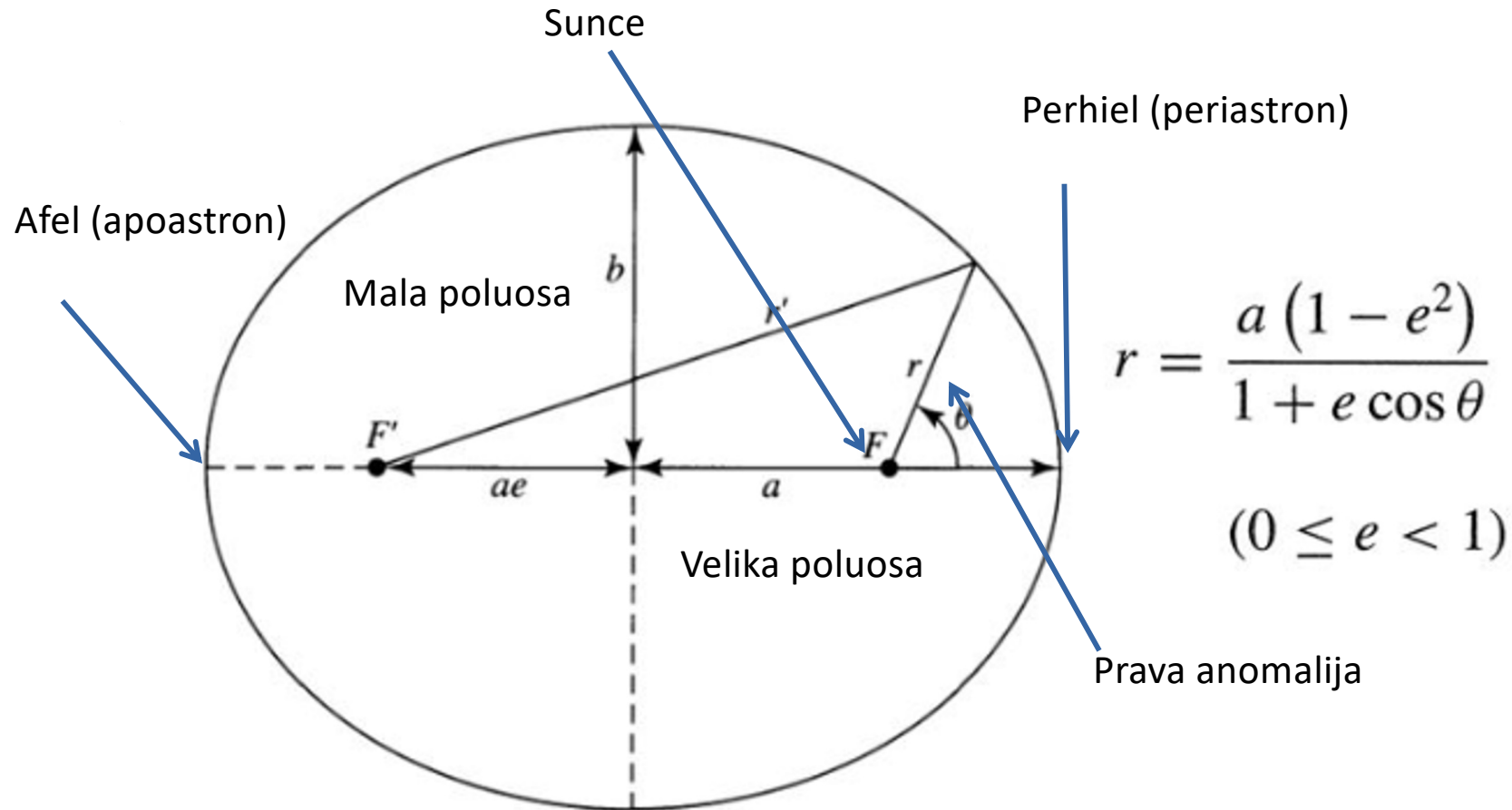
Hyperbola

Open orbit

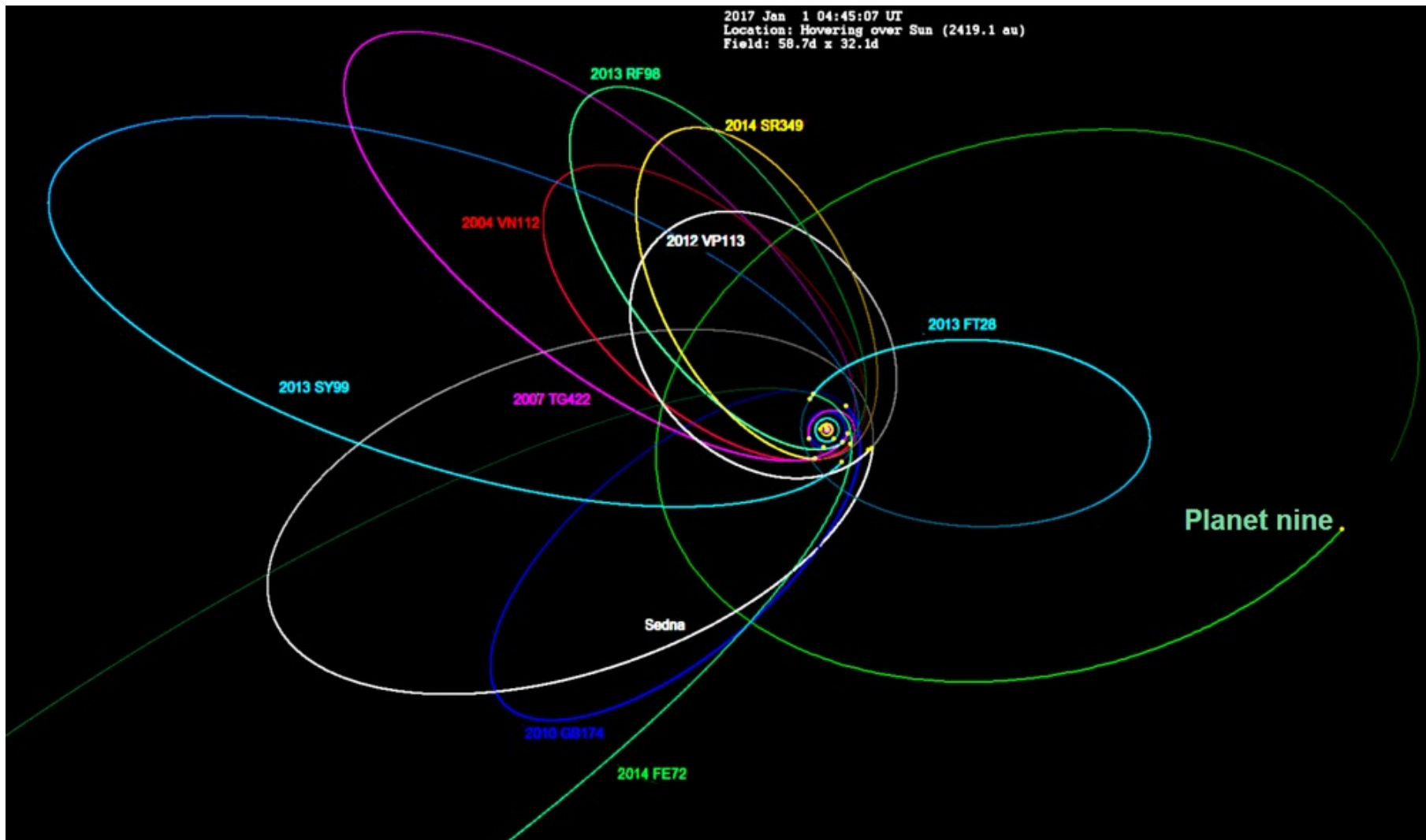


## Eliptične orbite:

$$r(\theta) = \frac{L^2/\mu}{1 + e \cos(\theta - \omega)}$$

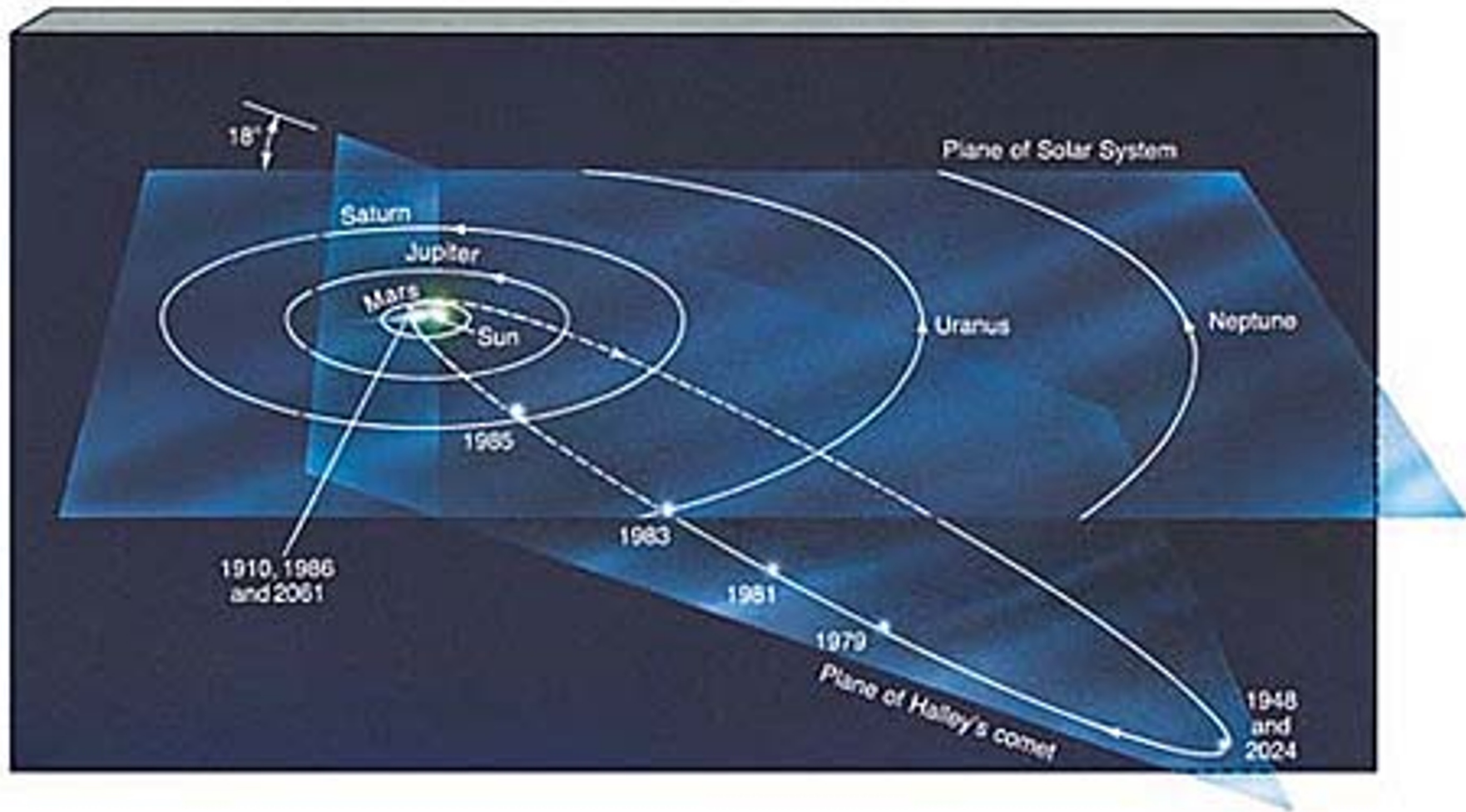


Videli smo kako se izvodi Prvi Keplerov Zakon!



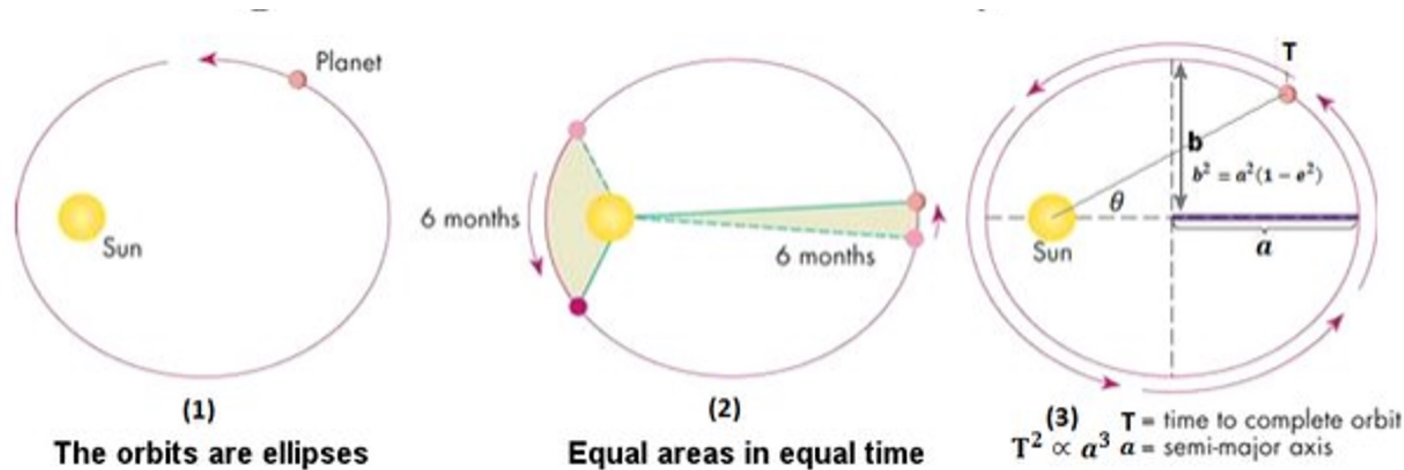
Elliptical orbits of some outer Trans Neptunian Objects, with the hypothetical planet nine

# Komete imaju jako ekscentrične putanje!



Orbita Halejeve komete. Ekscentričnost je 0.97 (planeta je ispod 0.1)

# Treći Keplerov zakon



- Za izvođenje trećeg Keplerovog zakon, potrebno je definisani srednju ugaonu brzinu planete. U prvoj aproksimaciji možemo pretpostaviti kružnu orbitu (drugi izvod po  $r$  je 0):

$$\left. \begin{aligned} a_r &= \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{\mu}{r^2} \\ \mu &= G(m + M) \\ r\dot{\theta}^2 &= G\frac{M + m}{r^2} \end{aligned} \right\}$$

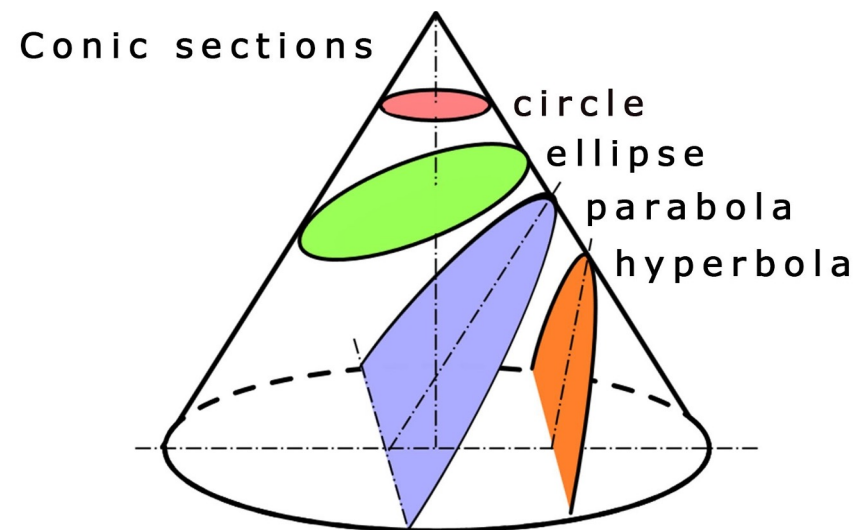
- Za period  $T$ , planeta obiđe krug  $2\pi r$

$$\frac{4\pi^2}{T^2} r^3 = G(M + m) = \text{const}$$

$$\rightarrow a^3/T^2 \text{ const}$$

# Rezime

- Analizirali smo kretanje tela u polu centralne sile
- Predstavili smo kretanje tog tela duž radijus vektora i normalno na radijus vektor (**matematika**)
- Ubrzanje duž ta dva pravca smo povezali sa gravitacionom interakcijom (**fizika**)
- Eliminirali smo zavisnost od vremena da dobijemo putanju kao zavisnost udaljenosti od prave anomalije.
- Dobili smo elipsu (i druge konusne preseke).
- Na vežbama  
ćemo povezati  
putanje sa energijama!



# **Na šta još utiče gravitacija u Sunčevom sistemu?**

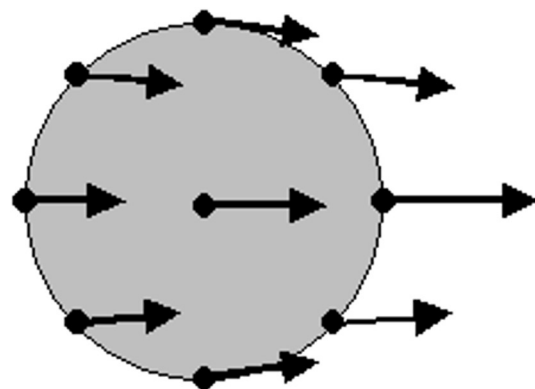
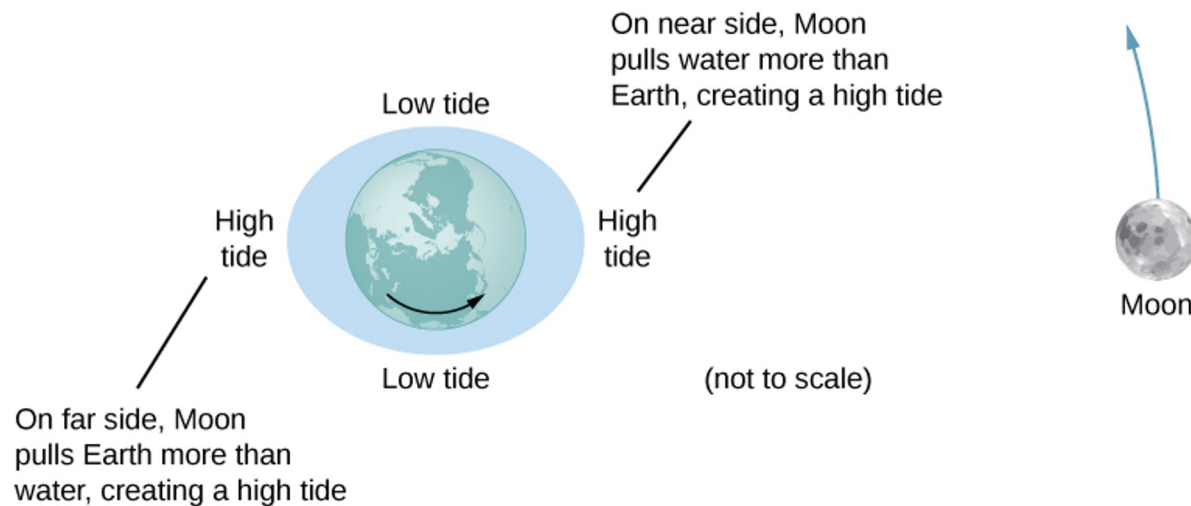
## **.Plimske sile**

- Da li bi plima i oseka bile više ili manje izražene da je Zemlja veća?

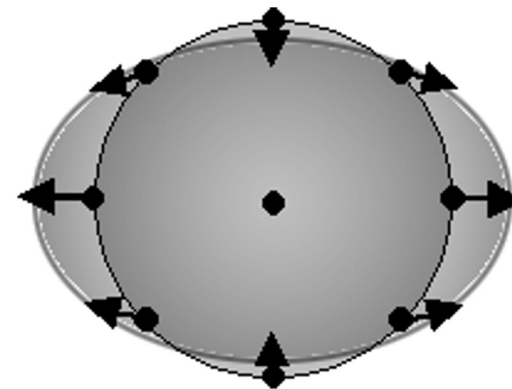
# Na šta još utiče gravitacija u Sunčevom sistemu?

## •Plimske sile

•Da li bi plima i oseka bile više ili manje izražene da je Zemlja veća? **Više!**



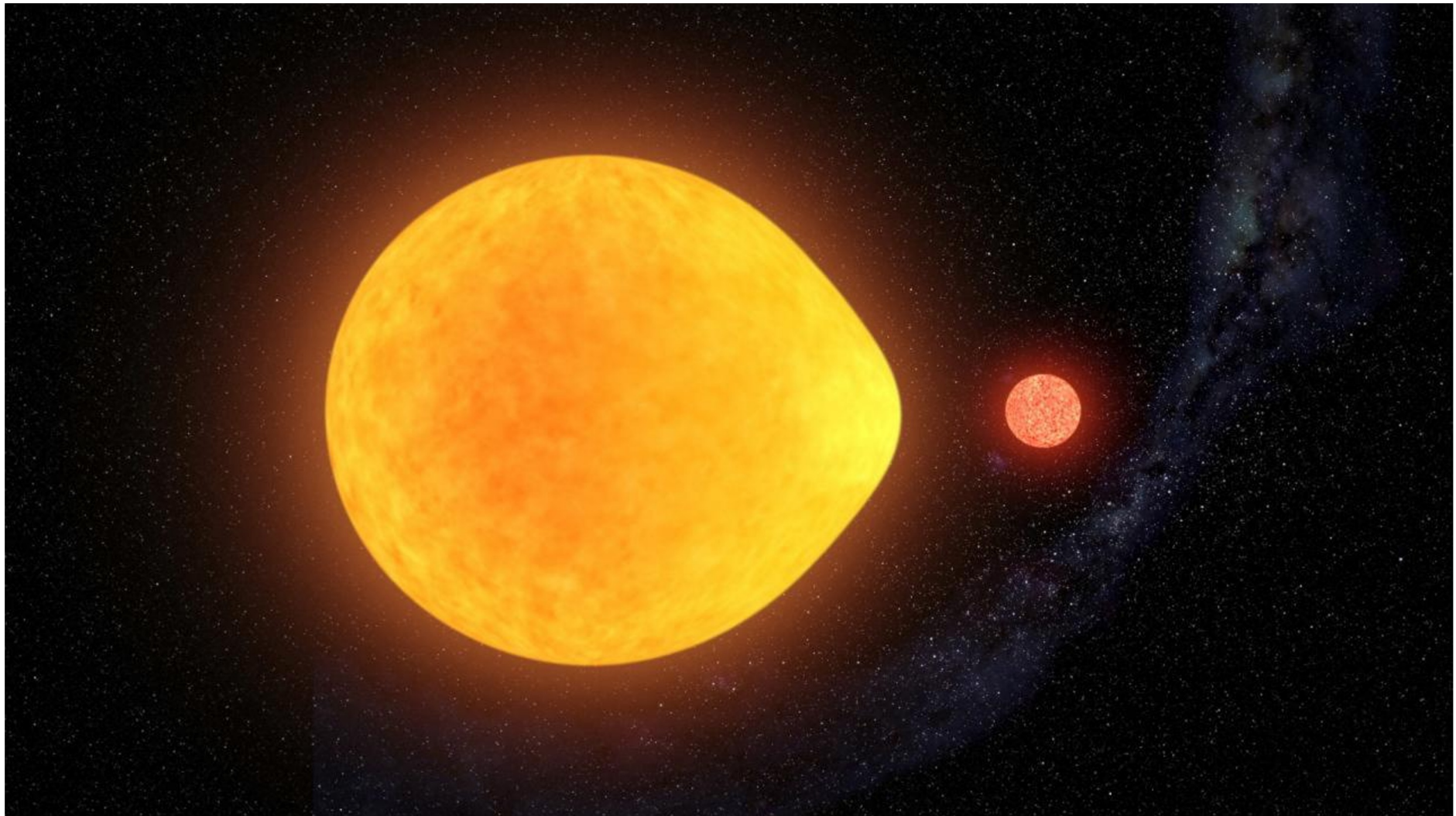
Forces relative to the Sun (or primary body)



Forces relative to the center of the Earth

I ne samo u Sunčevom sistemu!

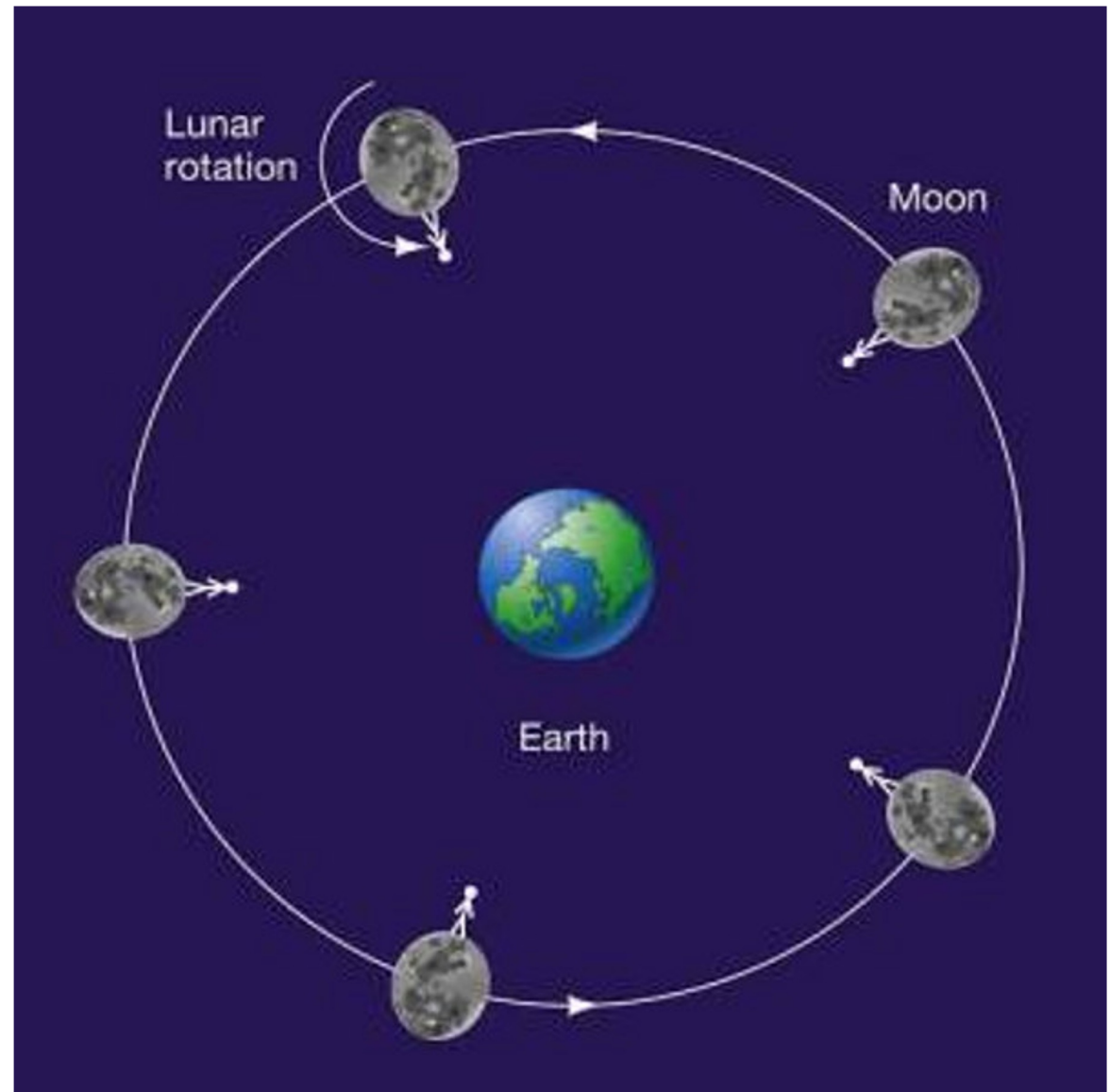
•Plimske sile mogu da budu ekstremno jake u takozvanim **tesnim dvojnim sistemima!**  
Toliko jake da zvezde postanu **plimski zaključane**.



# Plimske sile

•Mesec je npr. plimski zaključan. Njegov period **rotacije oko svoje ose** je jednak periodu **revolucije oko Zemlje**.

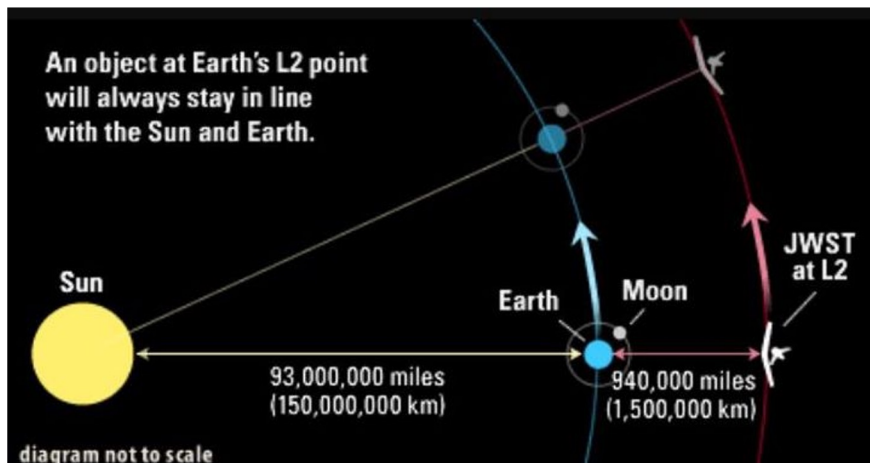
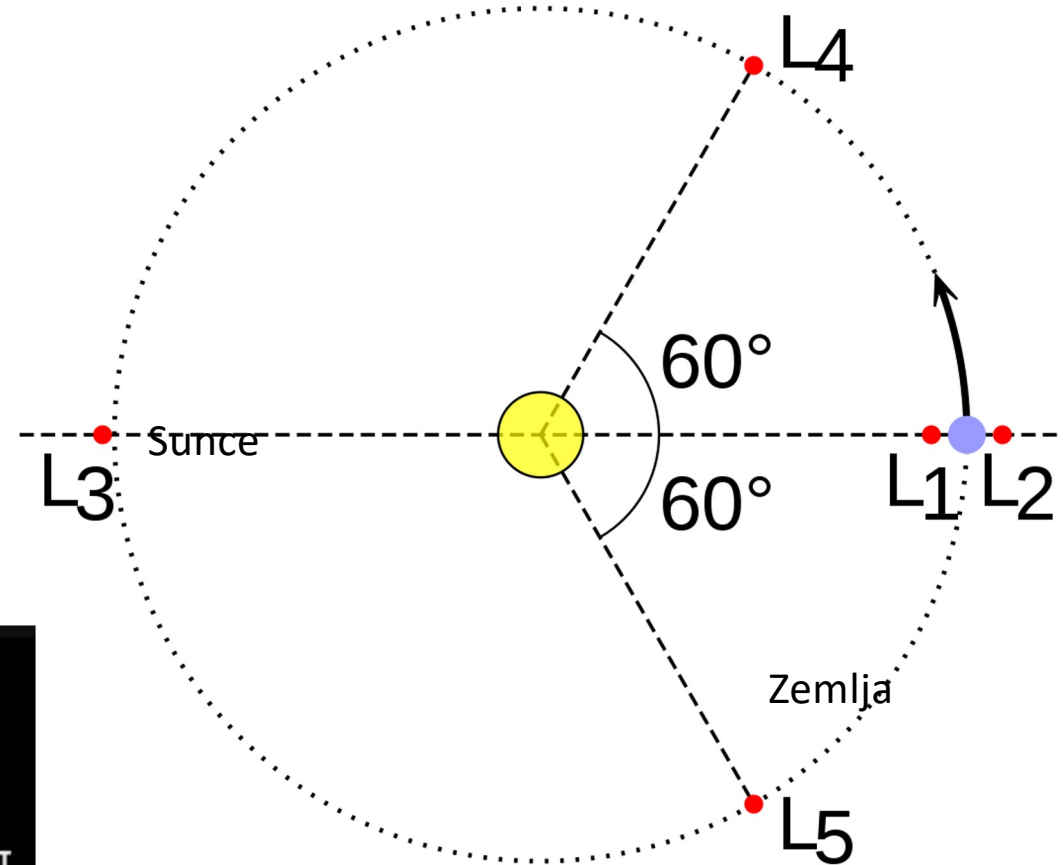
•Zbog toga mi uvek vidimo istu stranu Meseca!



# Lagranževe tačke

•Tačke u kojima se gravitaciona sila dva masivna tela na treće telo, zanemarljive mase, tako superponira, da omogućava stabilnu orbitu.

•Lagranževe tačke su zgodne za satelite (npr. teleskope) zato što zahtevaju malo orbitalnih popravki



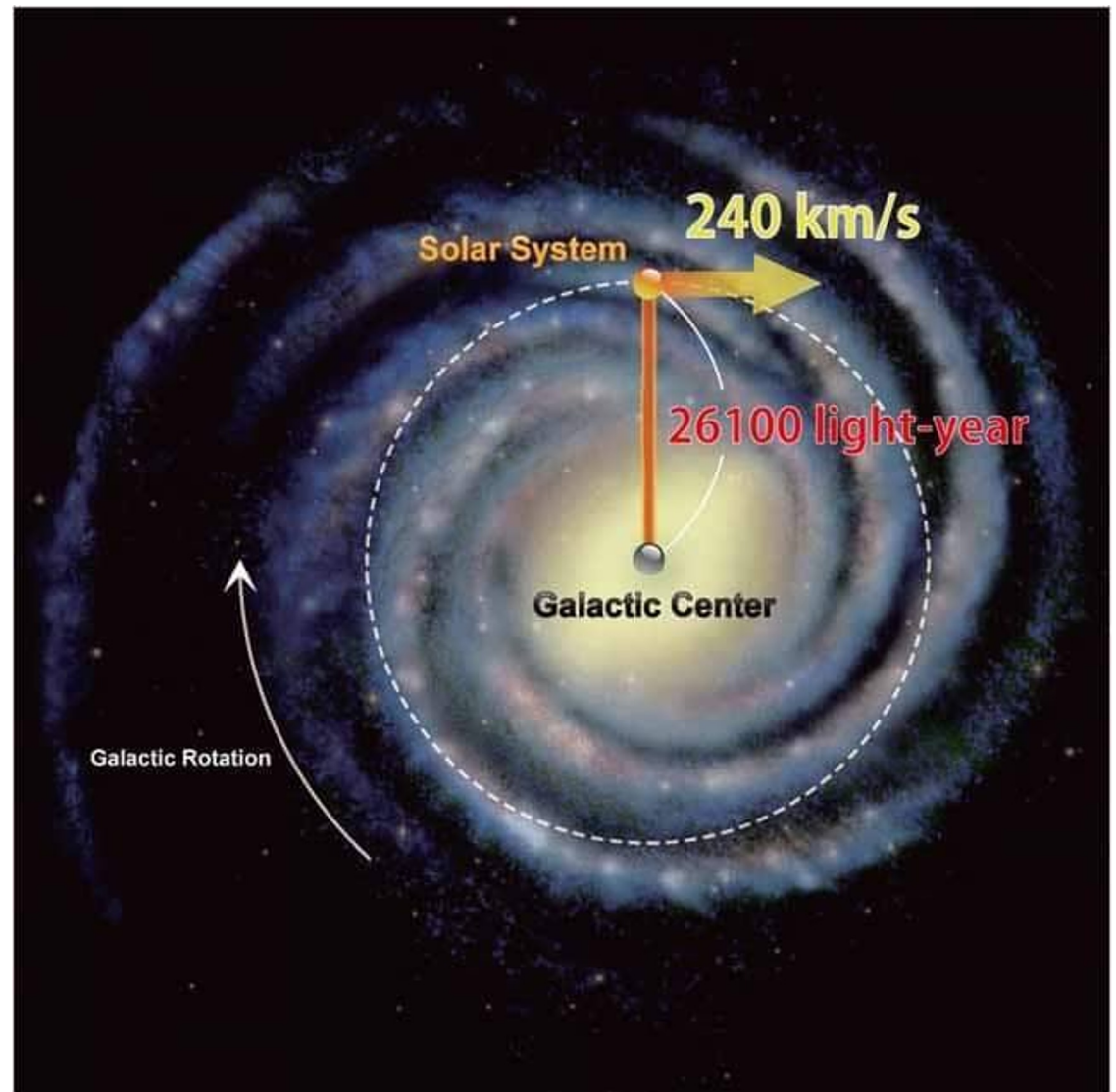
# Mnogo veće skale – Galaksija!

•Kao što se Zemlja kreće pod uticajem Sunčeve gravitacije, Sunce se kreće oko centra galaksije, **pod uticajem sve materije izmedju nas i centra galaksije!**

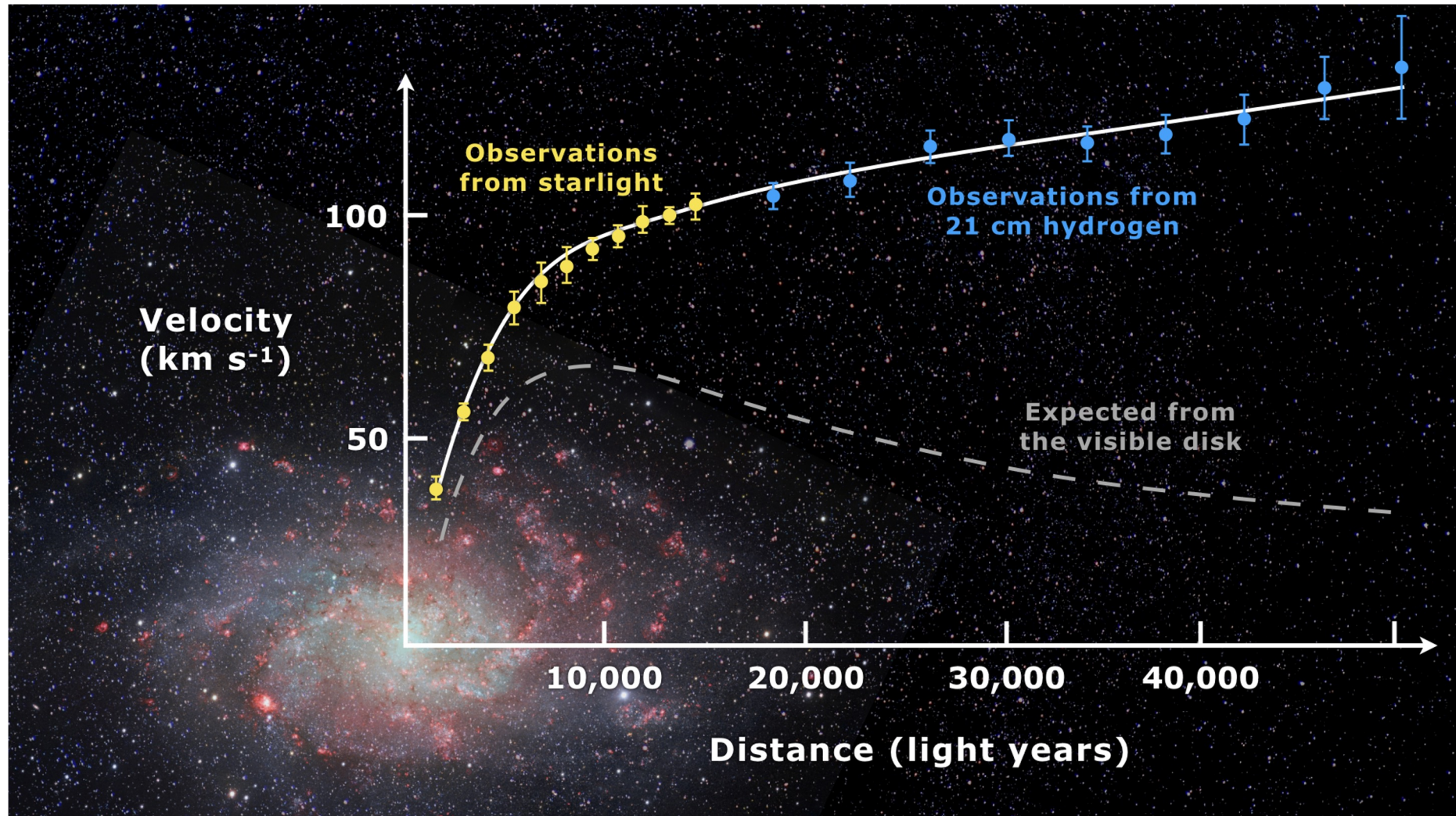
•Na ovu relaciju smo već naleteli tokom izvodjenja Keplerovih zakona

$$\frac{v^2}{r} = G \frac{M(r)}{r^2}$$

•Ako pogledamo zvezde na različitim udaljenostima od centra galaksije(a) i izmerimo njihove brzine, možemo mapirati  $M(r)$ !



# Rotacione krive galaksija



$$\frac{v^2}{r} = G \frac{M(r)}{r^2}$$

• Veća brzina implicira više materijala. Merenja pokazuju da u galaksijama treba da ima više materijala nego što mi vidimo. Ovo je dovelo do pretpostavke postojanja **tamne materije**!

# Tamna materija = Nevidljiva materija

• Po našim trenutnim idejama, tamna materija ne interaguje sa svetlošću, samim tim jedino možemo da je detektujemo **indirektno**, kroz njen gravitacioni uticaj na druge objekte, ili čak na svetlost...



# Ali o tome, na sledećem času!

- Ovime smo završili (za sada) sa pričama o gravitaciji!
- Sledeći čas prelazimo na elektromagnetno zračenje, tj. Svetlost!
- Videćemo da je EM zračenje u stvari talas, i opet ćemo rešiti neke diferencijalne jednačine da pokažemo da je to u skladu sa osnovnim zakonima fizike.
- Ispričaćemo šta su fotoni
- I nakon toga pričati o astronomskim i astrofizičkim instrumentima!