1

Силовљеве теореме

1.1 Теоријски увод

Лагранжова теорема нам каже да ако је H подгрупа неке коначне групе G, онда ред $|H|$ дели ред $|G|$. Одмах се поставља питање да ли важи и обрнуто тврђење: ако $h||G|$, за неки природан број h, да ли у G мора постојати и подгрупа H реда $|H| = h$?

Одговор је негативан. На пример, алтернирајућа група $\mathbb{A}_4$ је реда 12, али $\mathbb{A}_4$ *нема* ниједну подгрупу реда 6. Међутим, ово тврдјење у супротном смеру ипак важи ако се ограничимо на делиоце h који су *степени простих бројева.* Следеће теореме је открио и доказао норвешки математичар Peter Ludwig Sylow 1872. године.

Дефиниција Нека је G група реда $|G| = p^k m$, где је $k \geq 1$, p прост број и $p \nmid m$. Подгрупа $H \leq G$ реда $|H| = p^k$ се назива *Силовљева p–подгрупа* или *S_p–подгрупа.* Са s_p^G (или само s_p, ако је јасно о којој групи је реч) означавамо број S_p–подгрупа у групи G.

Теорема (Прва Силовљева теорема) Нека је G група и p прост број такав да $p \mid |G|$. Тада постоји S_p–подгрупа групе G, тј. $s_p^G \geq 1$.

Теорема (Друга Силовљева теорема) Нека је G група и p прост број такав да $p \mid |G|$.

1. Свака p–подгрупа групе G је садржана у некој S_p–подгрупи групе G.

2. Све S_p–подгрупе групе G су међусобно коњуговане. Специјално, све су међусобно изоморфне.

Теорема (Трећа Силовљева теорема) Нека је G група реда $|G| = p^k m$, где је $k \geq 1$, p прост број и $p \nmid m$. Нека је H произвољна S_p–подгрупа групе G. Тада:

1. $s_p^G =_p 1$;

2. $s_p^G \mid m$;

3. $|G : N_G(H)| = s_p^G$.

Последица S_p–подгрупа групе G је нормална ако и само ако је $s_p^G = 1$.

Дефиниција За групу G кажемо да је *проста* ако нема праву, нетривијалну и нормалну подгрупу.

Силовљеве теореме су основни алат у покушају да разумемо структуру неке групе и од велике су помоћи при класификацији свих коначних група неког реда n. Трећа Силовљева теорема нам даје *аритметичке услове* који одређују и ограничавају структуру групе реда n (дакле структура делиоца реда групе n утиче на алгебарску структуру!). Ови услови не одређују структуру групе у потпуности и увек, али често су довољни да се добије нека кључна информација (нпр. о постојању неке *нормалне* подгрупе) од које се полази у даљој структурној анализи. Примери оваквог закључивања су илустровани у задацима који следе.

1.2 Решени задаци

1. Израчунати бројеве s_p у $\mathbb{D}_n$, где је $n \geq 3$ и $p \mid n$ прост број.

Решење. Нека је $\mathbb{D}_n = \langle \sigma\rho \mid \rho^n = \sigma^2 = \varepsilon, \rho\sigma = \sigma\rho^{-1} \rangle$. Знамо $|\mathbb{D}_n| = 2n$.

Ако је $n = 2^k$, тада је 2 једини прост број који дели n, па је $\mathbb{D}_n$ S_2–подгрупа од $\mathbb{D}_n$ и $s_2 = 1$.

Претпоставимо да је $n = 2^k l$, где је $k \geq 0$ и $l \geq 3$ непаран број. Нека је p непаран прост број који дели n, и претпоставимо да $p^u \parallel n$. Нека је H произвољна S_p–подгрупа, тј. $|H| = p^u$. (Приметите да H постоји по првој Силовљевој теореми.) Приметимо да H не садржи ниједну симетрију, јер би у супротном по Лагранжовој теореми $|H|$ био дељив са 2. Према томе $H \leq \langle \rho \rangle$. Дакле, произвољна S_p–подгрупа је подгрупа од $\langle \rho \rangle$ и реда је p^u. Међутим, како је $\langle \rho \rangle$ циклична, она садржи тачно једну подгрупу реда p^u, па је S_p–подгрупа у $\mathbb{D}_n$ јединствена, тј. $s_p = 1$ и уочена подгрупа H је нормална у $\mathbb{D}_n$.

Остаје нам да израчунамо s_2 у случају када је $n = 2^k l$, $k \geq 0$, $l \geq 3$ непаран број. Нека је K произвољна S_2–подгрупа у $\mathbb{D}_n$. Приметимо да је $|K| = 2^{k+1}$. Тада по Лагранжовој теореми $K \nleq \langle\rho\rangle$, па K садржи симетрију. Како је $\langle\rho\rangle \lhd \mathbb{D}_n$, то је $K\langle\rho\rangle = \mathbb{D}_n$, па по другој теореми о изоморфизму имамо $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \mathbb{D}_n/\langle\rho\rangle = K\langle\rho\rangle/\langle\rho\rangle \cong K/K\cap\langle\rho\rangle$, одакле закључујемо да $|K\cap\langle\rho\rangle| = 2^k$. Како је $\langle\rho\rangle$ циклична, она има јединствену подгрупу реда 2^k, зовимо је L, па смо доказали да за произвољу S_2–подгрупу K важи $K \cap \langle\rho\rangle = L$.

Такође, ако је $\sigma\rho^v \in K$ произвољна симетрија, како је $L \lneq \langle L, \sigma\rho^v\rangle \leq K$, $|L| = 2^k$ и $|K| = 2^{k+1}$, то је $K = \langle L, \sigma\rho^v\rangle$. Још приметите да K има 2^k ротација (то су ротације из L), па су преосталих 2^k елемената у K симетрије. Дакле свака S_2–подгрупа је одређена са једном произвољном својом симетријом и садржи 2^k симетрија. Како имамо $n = 2^k l$ симетрија у $\mathbb{D}_n$, то имамо $2^k l$ начина да направимо s_2–подгрупу, и у групама од по 2^k те попдгрупе су међусобно једнаке. Према томе имамо l различитих S_2–подгрупа, тј. $s_2 = l$.

2. Описати S_2–подгрупе од $\mathbb{S}_4$ и израчунати s_2.

Решење. Како је $|\mathbb{S}_4| = 24 = 2^3{\cdot}3$, то су s_2–подгрупе реда 8. Такође, према трећој Силовљевој теореми $s_2 \in \{1, 3\}$. Поделићемо опис у неколико корака.

1. Како 4–цикл генерише подгрупу реда 4, а транспозиција генерише подгрупу реда 2, то према другој Силовљевој теореми те подгрупе су садржане у некој (можда не истој) S_2–подгрупи. Али како су све S_2–подгрупе коњуговане, то свака S_2–подгрупа садржи и 4–цикл и транспозицију. (Сетите се да коњуговање чува циклове.) До краја описа ћемо доказати да је S_2– подгрупа генерисана једним 4–циклом и једном транспозицијом. Пре него што наставимо приметите да $\mathbb{S}_4$ има 6 4–циклова, и то су: $\lfloor 1,2,3,4\rceil$, $\lfloor 1,4,3,2\rceil$, $\lfloor 1,2,4,3\rceil$, $\lfloor 1,3,4,2\rceil$, $\lfloor 1,3,2,4\rceil$ и $\lfloor 1,4,2,3\rceil$. Такође $\mathbb{S}_4$ садржи 6 транспозиција, и то су: $\lfloor 1,2\rceil$, $\lfloor 1,3\rceil$, $\lfloor 1,4\rceil$, $\lfloor 2,3\rceil$, $\lfloor 2,4\rceil$ и $\lfloor 3,4\rceil$.

2. Нека је H S_2–подгрупа која садржи 4–цикл $\rho = \lfloor 1,2,3,4\rceil$. Прметите да тада H садржи и $\rho^{-1} = \lfloor 1,4,3,2\rceil$. Докажимо сада да поред ова два 4–цикла, H не садржи ниједан други 4–цикл. Ако H садржи $\lfloor 1,2,4,3\rceil$, тада H садржи и $\rho^2\lfloor 1,2,4,3\rceil = \lfloor 1,3\rceil\lfloor 2,4\rceil\lfloor 1,2,4,3\rceil = \lfloor 1,4\rceil$. Но, тада H садржи $\lfloor 1,4,3,2\rceil$ и $\lfloor 1,4\rceil$, а сетите се да ове две генеришу $\mathbb{S}_4$, што је контрадикција. Ако H садржи $\lfloor 1,3,4,2\rceil$, тада H садржи и $\lfloor 1,3,4,2\rceil^{-1} = \lfloor 1,2,4,3\rceil$, па се овај случај своди на претходни. Ако H садржи $\lfloor 1,3,2,4\rceil$, тада H садржи и $\rho^2\lfloor 1,3,2,4\rceil = \lfloor 1,3\rceil\lfloor 2,4\rceil\lfloor 1,3,2,4\rceil = \lfloor 3,4\rceil$. Али тада H садржи $\lfloor 1,2,3,4\rceil$ и $\lfloor 3,4\rceil$, а ове две генеришу $\mathbb{S}_4$, што је контрадикција. Коначно ако H садржи $\lfloor 1,4,2,3\rceil$, тада H садржи и $\lfloor 1,4,2,3\rceil^{-1} = \lfloor 1,3,2,4\rceil$, па се овај случај

своди на претходни. Дакле, H садржи само два 4–цикла: ρ и ρ^{-1}. Приметите да већ сада можемо закључити да постоји више од једне S_2–подгрупе у $\mathbb{S}_4$.

3. Закључили смо да H мора да садржи транспозицију. Како H садржи $\lfloor 1,2,3,4\rceil$, то H не може да садржи $\lfloor 1,2\rceil$, $\lfloor 2,3\rceil$, $\lfloor 3,4\rceil$ и $\lfloor 4,1\rceil = \lfloor 1,4\rceil$, јер би у комбинацији са било којом од ових $\lfloor 1,2,3,4\rceil$ генерисао целу $\mathbb{S}_4$. Докажимо да H садржи $\lfloor 1,3\rceil$ и $\lfloor 2,4\rceil$. Знамо да саржи бар једну од њих, а како садржи и $\rho^2 = \lfloor 1,3\rceil\lfloor 2,4\rceil$, то чим садржи једну од њих, одмах садржи и другу. Дакле, $\lfloor 1,3\rceil, \lfloor 2,4\rceil \in H$. Означимо $\sigma = \lfloor 1,3\rceil$.

4. Уочимо да је $\sigma\rho\sigma\rho = \lfloor 1,3\rceil\lfloor 1,2,3,4\rceil\lfloor 1,3\rceil\lfloor 1,2,3,4\rceil = \lfloor\rceil$, одакле је $\sigma\rho = \rho^{-1}\sigma$. Дакле, $\rho^4 = \sigma^2 = \lfloor\rceil$ и $\sigma\rho = \rho^{-1}\sigma$, одакле је $\langle\sigma,\rho\rangle \cong \mathbb{D}_4$. Како $\langle\sigma,\rho\rangle \leq H$ и обе групе имају по 8 елемената, то $H = \langle\sigma,\rho\rangle = \langle\lfloor 1,3\rceil\lfloor 1,2,3,4\rceil\rangle$. Дакле, описали смо групу H и закључили смо да је она изоморфна $\mathbb{D}_4$.

5. Већ смо закључили да је $s_2 = 3$, и лако из претходног видимо да су S_2–подгрупе: $\langle\lfloor 1,3\rceil\lfloor 1,2,3,4\rceil\rangle$, $\langle\lfloor 1,4\rceil\lfloor 1,2,4,3\rceil\rangle$ и $\langle\lfloor 1,2\rceil\lfloor 1,3,2,4\rceil\rangle$.

НАПОМЕНА. У задатку смо користили познату чињеницу да је $\mathbb{S}_n$ генерисана n–циклом $\lfloor a_1,a_2,\ldots,a_n\rceil$ и транспозицијом $\lfloor a_i,a_{i+1}\rceil$.

3. Нека је p прост број. Одредити број s_p p-Силовљевих подгрупа за групу инвертибилних матрица $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ над пољем $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Одредити укупан број елемената реда p у тој групи.

Решење. Да бисмо одредили ред $|\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})|$, приметимо (радосно се присећајући нашег разумевања Линеарне алгебре) да је број свих инвертибилних 2×2 матрица над пољем $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ једнак броју свих различитих *база* $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$-векторског простора $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$. Како први вектор такве базе можемо изабрати на p^2-1 начина (било који вектор осим $(0,0)$), а други на p^2-p начина (кад смо изабрали први вектор базе v_1, други је било који вектор који се не налази у потпростору $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})v_1$), добијамо да је $|\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})| = (p^2-1)(p^2-p) = p(p-1)(p^2-1)$.

Како је $(p-1)(p^2-1)$ узајамно просто са p, p-Силовљеве подгрупе су реда p. Како је матрица $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ реда p, имамо дакле да је $P = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \,:\, x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \right\}$ једна p-Силовљева подгрупа.

Да бисмо одредили s_p користићемо трећу Силовљеву теорему, односно да је $s_p = [\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) : N(P)]$. Ако је матрица $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in$

$N(P)$ и ако означимо $\delta := ad - bc \neq 0$, добијамо да је

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{ac}{\delta} & \frac{a^2}{\delta} \\ -\frac{c^2}{\delta} & 1 + \frac{ac}{\delta} \end{bmatrix} \in P,$$

одакле закључујемо да мора бити $c = 0$. И обрнуто, лако се проверава да је свака матрица из $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ облика $\begin{bmatrix} * & * \\ 0 & * \end{bmatrix}$, у нормализатору подгрупе P. Оваквих матрица има $(p-1)^2 p$ (дијагоналне елементе можемо изабрати на по $p-1$ начина, а вандијагонални елемент је произвољан), па је дакле $N(P) = (p-1)^2 p$. Дакле добијамо да је $s_p = \frac{p(p-1)(p^2-1)}{(p-1)^2 p} = p + 1$.

На крају приметимо да се различите p-Силовљеве подгрупе пресецају тривијално, па је укупан број елемената реда p у групи $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ једнак $(p-1)s_p = p^2 - 1$ (јер се сваки елемент реда p мора налазити у некој p-Силовљевој подгрупи).

4. Нека је p прост број и нека је U_3 подгрупа горње-троугаоних матрица у групи $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$. Одредити ред групе U_3 и све њене p-Силовљеве подгрупе.

Решење. Ако је

$$\begin{bmatrix} d_1 & x & z \\ 0 & d_2 & y \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix} \in U_3,$$

произвољни елемент, његове дијагоналне елементе можемо изабрати на по $p-1$ начина, а вандијагоналне елементе на по p начина, па је укупно $|U_3| = (p-1)^3 p^3$. Дакле, p-Силовљеве подгрупе групе U_3 су реда p^3. Приметимо да је

$$P = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ : \ x, y, z \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \right\} \leq U_3$$

и да је $|P| = p^3$, па је P једна таква подгрупа.

Даље, према трећој Силовљевој теореми имамо да је $s_p =_p 1$ и да $s_p | (p-1)^3$. Међутим ови услови нам нису довољни да бисмо одредили s_p. Нпр. и број 1 и број $(p-1)^2$ их задовољавају.

Уочимо зато пресликавање $\phi : U_3 \longrightarrow (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times \times (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times \times (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ задато са

$$\begin{bmatrix} d_1 & x & z \\ 0 & d_2 & y \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix} \mapsto (d_1, d_2, d_3).$$

Лако се проверава да је ово један хомоморфизам група и да је $\ker(\phi) = P$. Дакле, P је као језгро хомоморфизма једна нормална подгрупа групе U_3, па је према последици друге Силовљеве теореме $s_p = 1$, односно P је и *једина* p-Силовљева подгрупа у U_3.

5. Група простог реда је проста.

Решење. Група простог реда p је циклична изоморфна са $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, која нема праве, нетривијалне подгрупе, па нема ни праве, нетривијалне нормалне подгрупе.

6. Група G реда p^n, $n \geq 2$, није проста. Доказати.

Решење. Ако G није Абелова, тада $Z(G)$, како није тривијалан, је једна нетривијална, права, нормална подгрупа, па G није проста.

Ако је G Абелова, тада су све њене подгрупе нормалне, а по Кошијевој леми постоји подгрупа реда p.

7. Група G реда pq, $p < q$ прости бројеви, није проста.

Решење. Нека је $a \in G$ елемент реда q, који постоји по Кошијевој леми. Нека је $H = \langle a \rangle$, $|G : H| = p$. $|G : \mathrm{Core}(H)| \mid p!$, па како је $p < q$, то $q \nmid p!$, па $q \nmid |G : \mathrm{Core}(H)|$, одакле следи да $q \mid |\mathrm{Core}(H)|$. Како је још $\mathrm{Core}(H) \leq H$, одатле следи да $\mathrm{Core}(H) = H$, па је $H \triangleleft G$.

8. Група G реда pq^n, где су $p < q$ прости бројеви, није проста.

Решење. Користимо Силовљеве теореме. Имамо да $s_q \mid p$ и $s_q =_q 1$. Тада, како је $p < q$, следи да $s_q = 1$, па је S_q–подгрупа права, нетривијална, нормална подгрупа у G.

9. Група G реда p^2q, где су $p \neq q$ прости бројеви, није проста.

Решење. Ако је $p > q$, тврђење следи према претходном задатку.

Нека је $p < q$. Користимо Силовљеве теореме. Имамо да $s_q \mid p^2$, па $s_q \in \{1, p, p^2\}$. Како је $s_q =_q 1$ и $p < q$, то $s_q \neq p$. Ако је $s_q = 1$, тада је S_q–подгрупа права, нетривијална, нормална подгрупа од G.

Претпоставимо да је $s_q = p^2$. Тада је $p^2 =_q 1$, па $q \mid p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$. Како је $p < q$, то $q \mid p+1$. Но тада $q \mid p+1 \leq q$, што је једино могуће ако је $p+1 = q$. Дакле, p и q су узастопни прости бројеви, тј. $p = 2$, $q = 3$, и ми говоримо о групи G реда 12.

Нека је H S_2–подгрупа групе G. Тада је $|G : H| = 3$, па према $n!$–теореми $|G : \mathrm{Core}(H)| \mid 3! = 6$. То значи да $|G : \mathrm{Core}(H)| \neq 12$, тј.

Core(H) је нетривијална. Како је Core$(H) \leq H \lneq G$, она је и права подгрупа, а увек је нормална. Дакле, група G реда 12 није проста.

Можемо поступити и другачије. Приметите да у групи реда 12, ако би била проста, важи $s_2 = 3$ и $s_3 = 4$. Нека су H_1, H_2, H_3, H_4 различите S_3–подгрупе, све су цикличне реда 3, па се према томе у паровима тривијално секу (у супротном се секу по генератору, па су једнаке). Дакле, у $H_1 \cup H_2 \cup H_3 \cup H_4$ имамо $4 \cdot 2 + 1 = 9$ елемената. Нека су K_1, K_2 различите S_2–подгрупе, оне су реда 4, па како је пресек њихова права подгрупа, то је према Лагранжовој теореми $|K_1 \cap K_2| \leq 2$. Тада $K_1 \cup K_2$ има бар $4+4-2 = 6$ елмената. Приметите још да се H_i и K_j тривијално секу (у H_i редови елемената деле 3, а у K_j деле 4). Одатле се и $H_1 \cup H_2 \cup H_3 \cup H_4$ и $K_1 \cup K_2$ тривијално секу, па њихова унија има бар $9 + 6 - 1 = 14$ елемената, што је контрадикција, јер G има само 12 елемената. Ово нам показује да група реда 12 није проста, али и да има нормалну Силовљеву подгрупу.

10. Доказати да група G реда pqr, где су $p < q < r$ прости бројеви, није проста.

Решење. Претпоставимо супротно да је G проста. Специјално тада $s_p, s_q, s_r \neq 1$. Користимо Силовљеве теореме. Како $s_p \mid qr$, то значи да је $s_p \geq q$. Како $s_q \mid pr$, $s_q =_q 1$ и $p < q$, то значи да је $s_q \geq r$. Како $s_r \mid pq$, $s_r =_r 1$ и $p, q < r$, то значи да је $s_r = pq$.

Нека су H_i, $1 \leq i \leq q$, различите S_p–подгрупе; како су оне реда p, изоморфне су са $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Нека су K_i, $1 \leq i \leq r$, различите S_q–подгрупе; како су оне реда q, изоморфне су са $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$. Нека су L_i, $1 \leq i \leq pq$, различите S_r–подгрупе; како су оне реда r, изоморфне су са $\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$.

Докажимо најпре $H_i \cap H_j = \langle e \rangle$, за $i \neq j$. $H_i \cap H_j \leq H_i \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, па је $H_i \cap H_j = \langle e \rangle$ или $H_i \cap H_j = H_i$, одакле $H_i \leq H_j$, па $H_i = H_j$ јер имају једнак број елемената, што је контрадикција. Слично се доказује да је $K_i \cap K_j = \langle e \rangle$ и $L_i \cap L_j = \langle e \rangle$, за $i \neq j$.

Докажимо даље да је $H_i \cap K_j = \langle e \rangle$. $H_i \cap K_j \leq H_i, K_j$, па према Лагранжовој теореми $|H_i \cap K_j|$ дели и p и q, одакле је $|H_i \cap K_j| = 1$, тј. $H_i \cap K_j = \langle e \rangle$. Слично се доказује да је $K_i \cap L_j = \langle e \rangle$ и $L_i \cap H_j = \langle e \rangle$.

Нека су $H = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{q} H_i$, $K = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{r} K_i$ и $L = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{pq} L_i$. Према претходно доказаном $|H| = q(p-1) + 1$, $|K| = r(q-1) + 1$ и $|L| = pq(r-1) + 1$. Према претходном је такође $|H \cap K| = |H \cap L| = |K \cap L| = 1$, па је $|H \cup K \cup L| = q(p-1) + r(q-1) + pq(r-1) + 1 = pqr + (q-1)(r-1) > pqr$. Како је $H \cup K \cup L \subseteq G$, то је контрадикција.

11. Доказати да је група G реда $3^2 \cdot 11$ Абелова.

Решење. Нека је $|G| = 3^2 \cdot 11$. Како $s_3 =_3 1$ и $s_3 \mid 11$, то је $s_3 = 1$, одакле је S_3–подгрупа, H, нормална у G. $|H| = 9$, па је H Абелова (јер је реда p^2). Слично, $s_{11} =_{11} 1$ и $s_{11} \mid 9$, одакле је $s_{11} = 1$, па је S_{11}–подгрупа K, нормална у G. Како је $|K| = 11$, то је $K \cong \mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$.

Имамо $H \cap K \leq H, K$, одакле, по Лагранжовој теореми, $|H \cap K| \mid 9, 11$, па је $|H \cap K| = 1$, тј. $H \cap K = \langle e \rangle$.

Како су $H, K \triangleleft G$, то је и $HK \triangleleft G$, и $|HK| = \dfrac{|H||K|}{|H \cap K|} = \dfrac{9 \cdot 11}{1} = 99$, одакле је $G = HK$.

Дакле, $G = HK$, $H, K \triangleleft G$ и $H \cap K = \langle e \rangle$, па по теореми о разлагању групе следи да је $G \cong H \times K$. Како је G директан производ две Абелове групе, и G је Абелова.

12. Нека је $|G| = p \cdot m$, $m > 1$, и p је најмањи прост број који дели ред групе G. Нека је $H \leq G$ таква да је $|G : H| = p$. Доказати да је $H \triangleleft G$.

Решење. Доказаћемо $H = \mathrm{Core}(H)$, што ће значити да је $H \triangleleft G$.

Према $n!$–теореми имамо да $|G : \mathrm{Core}(H)| \mid p!$, одакле $p \cdot m = |G| \mid p! \cdot |\mathrm{Core}(H)|$, па $m \mid (p-1)! \cdot |\mathrm{Core}(H)|$. Како је p најмањи прост број који дели $|G|$ и $m > 1$, то је $(m, (p-1)!) = 1$, па важи да $m \mid |\mathrm{Core}(H)|$. Како је још $\mathrm{Core}(H) \leq H$ и $|H| = m$, то је $H = \mathrm{Core}(H)$.

13. Доказати да је група G реда $5 \cdot 7 \cdot 17$ циклична.

Решење. Израчунајмо најпре s_5, s_7 и s_{17}. Имамо $s_5 =_5 1$ и $s_5 \mid 7 \cdot 17$, одакле се лако види да је $s_5 = 1$. Нека је H S_5–подгрупа. За њу тада важи $H \triangleleft G$, $|H| = 5$ и $H \cong \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

Такође, $s_7 =_7 1$ и $s_7 \mid 5 \cdot 17$, одакле закључујемо $s_7 \in \{1, 85\}$. $s_{17} =_{17} 1$ и $s_{17} \mid 5 \cdot 7$, одакле закључујемо $s_{17} \in \{1, 35\}$.

Докажимо најпре да је $s_7 = 1$ или $s_{17} = 1$. Претпоставимо супротно, тада је $s_7 = 85$ и $s_{17} = 35$. Нека су K_i, $1 \leq i \leq 85$, различите S_7–подгрупе групе G. $|K_i| = 7$, па је $K_i \cong \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$. Нека су L_i, $1 \leq i \leq 35$, различите S_{17}–подгрупе групе G. $|L_i| = 17$, па је $L_i \cong \mathbb{Z}/17\mathbb{Z}$. Како су сви елементи, сем неутрала, у K_i њени генератори, то је $K_i \cap K_j = \langle e \rangle$, када је $i \neq j$. Одатле је $\left| \bigcup_{i=1}^{85} K_i \right| = 85 \cdot 6 + 1 = 511$. Слично, $L_i \cap L_j = \langle e \rangle$, за $i \neq j$, па је $\left| \bigcup_{i=1}^{35} L_i \right| = 35 \cdot 16 + 1 = 561$. Како ред елемента у $K_i \cap L_j$ мора да дели и ред групе $|K_i| = 7$ и ред групе $|L_j| = 17$, то је $K_i \cap L_j = \langle e \rangle$, па је и $\bigcup_{i=1}^{85} K_i \cap \bigcup_{i=1}^{35} L_i = \langle e \rangle$, одакле је $\left|\bigcup_{i=1}^{85} K_i \cup \bigcup_{i=1}^{35} L_i\right| = 511 + 561 - 1 > 595 = |G|$, што је контрадикција.

Дакле, $s_7 = 1$ или $s_{17} = 1$. Нека је K нека S_7–подгрупа и L нека S_{17}–подгрупа. Тада је $K \triangleleft G$ или $L \triangleleft G$. У сваком случају $M = KL \leq G$. Како је $K \cap L = \langle e \rangle$, то је $|KL| = |K||L| = 7 \cdot 17$. Рачунајмо по Силовљевим теоремама у групи M.

Даље, $s_7^M =_7 1$ и $s_7^M \mid 17$, одакле $s_7 = 1$, и $s_{17}^M =_{17} 1$ и $s_{17}^M \mid 7$, одакле $s_{17} = 1$. Како је K S_7–подгрупа у M и L S_{17}–подгрупа у M, то су $K, L \triangleleft M$. Како је $M = KL$ и $K \cap L = \langle e \rangle$, то је по теореми о разлагању група $M \cong K \times L \cong \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/17\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/119\mathbb{Z}$.

Приметите да је $|G : M| = 5$ и да је 5 најмањи прост број који дели ред групе G. Одатле је $M \triangleleft G$. Тада је $HM \triangleleft G$. Како је $H \cap M = \langle e \rangle$ (Зашто?), то је $|HM| = |H||M| = 5 \cdot 7 \cdot 17 = |G|$, одакле је $G = HM$. Дакле, $H, M \triangleleft G$, $G = HM$ и $H \cap M = \langle e \rangle$, па по теореми о разлагању групе је $G \cong H \times M \cong \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/119\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/595\mathbb{Z}$.

14. Доказати да група G реда $2^2 \cdot 19 \cdot 37$ има нормалну цикличну подгрупу реда $19 \cdot 37$ и нормалну подгрупу индекса 2.

Решење. Како $s_{19} =_{19} 1$ и $s_{19} \mid 2^2 \cdot 37$, то је $s_{19} = 1$, па је S_{19}–подгрупа, H, нормална у G. Нека је K нека S_{37}–подгрупа од G. Како је $H \triangleleft G$, тада је $L = HK \leq G$. $H \cap K = \langle e \rangle$, па је $|L| = |HK| = |H||K| = 19 \cdot 37$.

Рачунајмо по Силовљевим теоремама у L. Имамо $s_{19}^L =_{19} 1$ и $s_{19}^L \mid 37$, одакле је $s_{19}^L = 1$, и $s_{37}^L =_{37} 1$ и $s_{37}^L \mid 19$, одакле је $s_{37}^L = 1$. Како су H S_{19}–подгрупа и K S_{37}–подгрупа од L, то су $H, K \triangleleft L$. Како је још $L = HK$ и $H \cap K = \langle e \rangle$, то је по теореми о разлагању групе $L \cong H \times K \cong \mathbb{Z}/19\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/37\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/(19 \times 37)\mathbb{Z}$.

Докажимо да је $L = \mathrm{Core}(L)$, што ће значити да је $L \triangleleft G$. Према $n!$–теореми је $|G : \mathrm{Core}(L)| \mid |G : L|! = 4! = 24$, одакле $4 \cdot 19 \cdot 37 = |G| \mid 24 \cdot |\mathrm{Core}(L)|$, тј. $19 \cdot 37 \mid 6 \cdot |\mathrm{Core}(L)|$, па $19 \cdot 37 \mid |\mathrm{Core}(L)|$. Како је још $\mathrm{Core}(L) \leq L$ и $|L| = 19 \cdot 37$, то је $L = \mathrm{Core}(L)$.

Коначно, према Кошијевој леми, постоји елемент $a \in G$ реда 2. Подгрупа $\langle a \rangle$ је реда 2. Како је $L \triangleleft G$, то је $\langle a \rangle L \leq G$, и из $a \notin L$ (Зашто?) следи $\langle a \rangle \cap L = \langle e \rangle$, па $|\langle a \rangle L| = |\langle a \rangle| \cdot |L| = 2 \cdot 19 \cdot 37$ и $\langle a \rangle L$ је подгрупа индекса 2, која је зато и нормална.

15. Претпоставимо да је G проста група, $H \leq G$ таква да је $|G : H| = k > 1$. Тада је $G \leq \mathbb{S}_k$. (Заправо $\mathbb{S}_k$ садржи изоморфну копију групе G, па можемо да сматрамо $G \leq \mathbb{S}_k$.)

Решење. Посматрајмо пресликавање $\phi : G \longrightarrow \mathrm{Sym}(G/H)$, где је G/H скуп левих косета подгрупе H, дато са $\phi(g) : aH \mapsto gaH$. Пресликавање ϕ је хомоморфизам група и $\ker(\phi) = \mathrm{Core}(H) \triangleleft H$. Како је $\mathrm{Core}(H) \leq H \lneq G$, то је $\mathrm{Core}(H)$ права подгрупа, па како је G проста то $\mathrm{Core}(H) = \langle e \rangle$. Из $\ker(\phi) = \langle e \rangle$ следи да је ϕ 1-1, одакле следи тврђење задатка.

16. Нека је $H \leq G \leq G_1$. Тада је $N_G(H) \leq N_{G_1}(H)$, па према Лагранжовој теореми $|N_G(H)| \mid |N_{G_1}(H)|$. Такође, ако је $H \triangleleft K \leq G$, тада је $K \leq N_G(H)$.

Решење. Ово је очигледно.

17. Доказати следећа тврђења:

1. Ако $G \leq \mathbb{S}_k$ и G нема подгрупу индекса 2, тада $G \leq \mathbb{A}_k$.
2. Нека је p непаран прост број, такав да $p \mid k!$. Тада је $s_p^{\mathbb{A}_k} = s_p^{\mathbb{S}_k}$. Ако је H нека $S_p^{\mathbb{S}_k}$–подгрупа, тада је $|N_{\mathbb{A}_k}(H)| = \dfrac{1}{2}|N_{\mathbb{S}_k}(H)|$.

Решење.

1. Претпоставимо супротно да $G \nleq \mathbb{A}_k$. Како је $\mathbb{A}_k \triangleleft \mathbb{S}_k$ то је $\mathbb{A}_k G \leq \mathbb{S}_k$, и како је $\mathbb{A}_k \lneq \mathbb{A}_k G$, то је $\mathbb{A}_k G = \mathbb{S}_k$. Према другој теореми о изоморфизму је $\mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{S}_k/\mathbb{A}_k \cong \mathbb{A}_k G/\mathbb{A}_k \cong G/(G \cap \mathbb{A}_k)$, одакле следи да је $G \cap \mathbb{A}_k$ подгрупа индекса 2 у групи G. Контрадикција.

2. Како је p непаран прост број, $|\mathbb{S}_k| = k!$ и $|\mathbb{A}_k| = \dfrac{k!}{2}$, то $p^l \parallel |\mathbb{S}_k|$ ако и само ако $p^l \parallel |\mathbb{A}_k|$. Одатле су $S_p^{\mathbb{A}_k}$–подгрупе и $S_p^{\mathbb{S}_k}$–подгрупе истог реда. Како $S_p^{\mathbb{S}_k}$–подгрупа нема подгрупу индекса 2, јер је непарног реда, то су према претходном делу све $S_p^{\mathbb{S}_k}$–подгрупе уједно и $S_p^{\mathbb{A}_k}$–подгрупе. Дакле, $s_p^{\mathbb{A}_k} = s_p^{\mathbb{S}_k}$.

   Нека је H нека $S_p^{\mathbb{S}_k}$–подгрупа. Она је и $S_p^{\mathbb{A}_k}$–подгрупа. Према трећој Силовљевој теореми имамо:

   $$\frac{k!}{|N_{\mathbb{S}_k}(H)|} = |\mathbb{S}_k : N_{\mathbb{S}_k}(H)| = s_p^{\mathbb{S}_k} = s_p^{\mathbb{A}_k} = |\mathbb{A}_k : N_{\mathbb{A}_k}(H)| = \frac{k!}{2|N_{\mathbb{A}_k}(H)|},$$

   одакле је $|N_{\mathbb{A}_k}(H)| = \dfrac{1}{2}|N_{\mathbb{S}_k}(H)|$.

18. Нека је p прост број такав да $p \parallel k!$. Нека је H било која S_p–подгрупа од $\mathbb{S}_k$; приметите да је $|H| = p$, тј. $H \cong \mathbb{Z}_p$. Тада је $|N_{\mathbb{S}_k}(H)| = p(p-1)(k-p)!$. Специјално, ако је $k \in \{p, p+1\}$, тада је $|N_{\mathbb{S}_k}(H)| = p(p-1)$.

Решење. Под датим претпоставкама елемент реда p у $\mathbb{S}_k$ је p–цикл. Уређених p–торки, чије су координате различите, елемената из $\{1, 2, \dots, k\}$ има $k!/(k-p)!$. Такве две p–торке представљају исти p–цикл ако и само ако се цикличним померањем једне добија друга, што ће рећи да p различитих p–торки представља исти p–цикл, па је број p–циклова у $\mathbb{S}_k$ једнак $k!/p(k-p)!$.

Циклична група реда p у овом случају, поред неутралне пермутације, садржи $p-1$ p–циклова, и сваки од њих је генератор за ту групу. Дакле, у групама од $p-1$ p–циклови генеришу исту подгрупу. Одатле је број S_p–подгрупа једнак $s_p = \dfrac{k!}{p(p-1)(k-p)!}$.

Како је $\dfrac{k!}{p(p-1)(k-p)!} = s_p = |\mathbb{S}_k : N_{\mathbb{S}_k}(H)| = \dfrac{k!}{|N_{\mathbb{S}_k}(H)|}$, где је H произвољна S_p–подгрупа, то је $|N_{\mathbb{S}_k}(H)| = p(p-1)(k-p)!$.

19. Доказати да група G реда $2^2 \cdot 3^2 \cdot 11$ није проста.

Решење. Претпоставимо супротно да је G проста. Имамо да $s_{11} =_{11} 1$ и $s_{11} \mid 2^2 \cdot 3^2$, па $s_{11} \in \{1, 12\}$. Како је G проста, то је $s_{11} = 12$. Уочимо H, произвољну S_{11}–подгрупу и $N_G(H)$. Тада $|G : N_G(H)| = 12$ према трећој Силовљевој теореми, па како је G проста, према задатку 15. можемо претпоставити да је $G \leq \mathbb{S}_{12}$. Такође је $|N_G(H)| = \dfrac{2^2 \cdot 3^2 \cdot 11}{12} = 33$.

Како $H \leq G \leq \mathbb{S}_{12}$ и $11 \parallel 12!$, то је H и $S_{11}^{\mathbb{S}_{12}}$–подгрупа, и према задатку 18. $|N_{\mathbb{S}_{12}}(H)| = 11(11-1) = 110$. Такође, како је $H \leq G \leq \mathbb{S}_{12}$, то је према задатку 16. $|N_G(H)| \mid |N_{\mathbb{S}_{12}}(H)|$, тј. $33 \mid 110$. Контрадикција.

20. Доказати да група G реда $2^3 \cdot 3 \cdot 11$ није проста.

Решење. Претпоставимо супротно да је G проста. Имамо да $s_{11} =_{11} 1$ и $s_{11} \mid 2^3 \cdot 3$, па $s_{11} \in \{1, 12\}$. Како је G проста, то је $s_{11} = 12$. Уочимо H, произвољну S_{11}–подгрупу и $N_G(H)$. Тада $|G : N_G(H)| = 12$, па како је G проста, можемо претпоставити да је $G \leq \mathbb{S}_{12}$. Такође је $|N_G(H)| = \dfrac{2^3 \cdot 3 \cdot 11}{12} = 22$.

Како $H \leq G \leq \mathbb{S}_{12}$ и $11 \parallel 12!$, то је H и $S_{11}^{\mathbb{S}_{12}}$–подгрупа, а како G нема подгрупу индекса 2 (јер је G проста), то је $H \leq G \leq \mathbb{A}_{12}$, па је H и $S_{11}^{\mathbb{A}_{12}}$–подгрупа. $|N_{\mathbb{S}_{12}}(H)| = 11(11-1) = 110$ и $|N_{\mathbb{A}_{12}}(H)| = 110/2 = 55$. Коначно, како је $H \leq G \leq \mathbb{A}_{12}$, следи $|N_G(H)| \mid |N_{\mathbb{A}_{12}}(H)|$, тј. $33 \mid 55$. Контрадикција.

21. Доказати да група G реда $3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 17$ није проста.

Решење. Претпоставимо супротно да је G проста. Имамо да $s_{17} =_{17} 1$ и $s_{17} \mid 3 \cdot 5 \cdot 7$, па $s_{17} \in \{1, 35\}$. Како је G проста, то је $s_{17} = 35$. Нека је H произвољна S_{17}–подгрупа. Тада $|G : N_G(H)| = 35$ и $|N_G(H)| = \dfrac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 17}{35} = 3 \cdot 17$.

Даље, имамо $s_3^{N_G(H)} =_3 1$ и $s_3^{N_G(H)} \mid 17$, одакле је $s_3^{N_G(H)} = 1$. Нека је K једина $S_3^{N_G(H)}$–подгрупа. Тада је $K \lhd N_G(H)$, па је $N_G(H) \leq N_G(K)$, одакле по Лагранжовој теореми следи $|N_G(H)| \mid |N_G(K)|$, тј. $3 \cdot 17 \mid |N_G(K)|$.

Приметимо да је K такође и S_3–подгрупа, па је $s_3 = |G : N_G(K)| = \dfrac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 17}{|N_G(K)|}$. Како $3 \cdot 17 \mid |N_G(K)|$, то $s_3 \mid 5 \cdot 7$. Како је још $s_3 =_3 1$ и G проста, то је $s_3 = 7$.

Дакле, $|G : N_G(K)| = 7$, па према $n!$–теореми $|G : \mathrm{Core}(N_G(K))| \mid 7!$. $\mathrm{Core}(N_G(K))$ је нетривијална, јер $17 \nmid 7!$, па $17 \nmid |G : \mathrm{Core}(N_G(K))|$ и $17 \mid |\mathrm{Core}(N_G(K))|$, а такође је права и нормална подгрупа од G. То је контрадикција са претпоставком да је G проста.

22. Нека је G група и $H \leq G$ њена подгрупа. Кажемо да је H карактеристична подгрупа групе G, у ознаци $H \lll G$, ако за сваки аутоморфизам $f \in \mathrm{Aut}(G)$ важи $f(H) = H$ (дакле, ако је H инваријантна у односу на све аутоморфизме групе G).

1. Доказати да је $H \lll G$ ако и само ако за све аутоморфизме групе G важи $f(H) \subseteq H$. Такође, $H \lll G$ ако и само ако за све аутоморфизме групе G важи $f(H) \supseteq H$.

2. Ако је $H \lll G$, доказати да је $H \lhd G$. Примером показати да не важи обратна импликација

3. Ако је H јединствена подгрупа неког коначног реда или индекса у групи G (која је можда и бесконачна), доказати да је $H \lll G$.

4. Ако је $H \lll K \lhd G$, доказати да је $H \lhd G$.

5. Ако је $H \lll K \lll G$, доказати да је $H \lll G$.

6. Дати пример такав да важи $H \lhd K \lll G$, али $H \ntriangleleft G$.

Решење.

1. Докажимо прво тврђење, друго се доказује потпуно аналогно. Смер ($\Rightarrow$) је тривијалан. Претпоставимо да важи $f(H) \subseteq H$, за све аутоморфизме f групе G. Нека је f произвољан аутоморфизам. Тада је $f(H) \subseteq H$, али и $f^{-1}(H) \subseteq H$ (јер та неједнакост важи за све аутоморфизме групе G). Када на другу неједнакост применимо f, добијамо $f(f^{-1}(H)) \subseteq f(H)$, тј. $H \subseteq f(H)$. Дакле, $f(H) = H$. Како је f био произвољан аутоморфизам, то је $H \lll G$.

   Напоменимо овде да за фиксирани аутоморфизам f групе G из $f(H) \subseteq H$ не следи обавезно $f(H) = H$. Иако то јесте тачно у случају када је H коначног реда или индекса, у случају када је G бесконачна група и H подгрупа бесконачног реда и индекса, то не мора бити тачно. Примера ради, нека је G адитивни део бесконачно димензионог векторског простора над неким пољем F, са пребројивом базом $\{e_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Адитивни део потпростора генерисаним са $\{e_{2i} \mid i \in \mathbb{N}\}$ је подгрупа H групе G. Свака пермутација базе векторског простора се диже до аутоморфизма векторског простора, па и до аутоморфизма његовог адидтивног дела, тј. групе G. Ако уочимо пермутацију f дату са $f(e_{2i}) = e_{2i+2}$, $f(e_1) = e_0$ и $f(e_{2i+3}) = e_{2i+1}$, за $i \in \mathbb{N}$, тада је $f(H) \subsetneq H$ (јер $e_0 \in H$, али $e_0 \notin f(H)$), иако f јесте аутоморфизам групе G.

2. Ако је $H \lll G$, дакле ако је H инваријантна у односу на све аутоморфизме групе G, тада је специјално H инваријантна и у односу на све унутрашње аутоморфизме групе G, што значи да је $H \triangleleft G$.

   Да бисмо видели да обратно не важи, посматрајмо неку нетривијалну Абелову групу A и групу $G = A \times A$. Тада су $H = A \times \{0\}$ и $K = \{0\} \times A$ подгрупе групе G; како је и G Абелова, то су $H, K \triangleleft G$. Међутим, ако посматрамо аутоморфизам $f : G \longrightarrow G$ дат са $f(x, y) = (y, x)$, добијамо да је $f(H) = K$, што доказује да H није инваријантна у односу на f, па H није карактеристична подгрупа групе G.

   Други природан пример су диедарске групе правилног $2n$–тоугла, $\mathbb{D}_{2n}$. Како је $\mathbb{D}_{2n} = \langle \sigma, \rho \mid \sigma^2 = \varepsilon,\ \rho^{2n} = \varepsilon,\ \rho\sigma = \sigma\rho^{-1} \rangle$, ако узмемо $H = \langle \sigma, \rho^2 \rangle$ и $K = \langle \sigma\rho, \rho^2 \rangle$, тада су H и K различите подгрупе индекса 2 у $\mathbb{D}_{2n}$, па су због тога нормалне. Медјутим, ако посматрамо аутоморфизам $f : \mathbb{D}_{2n} \longrightarrow \mathbb{D}_{2n}$ дат са $f(\rho) = \rho$, $f(\sigma) = \sigma\rho$, добијамо да је $f(H) = K$, што доказује да H није карактеристична подгрупа групе $\mathbb{D}_{2n}$. Приметите да нам ово даје и пример да подгрупа индекса 2 не мора бити карактеристична (иако је увек нормална).

Остављамо читаоцу да докаже и да су подгрупе $\langle i\rangle$, $\langle j\rangle$, $\langle k\rangle$ групе кватерниона нормалне, али нису карактеристичне.

3. Ако је f произвољан аутоморфизам групе G и H једина подгрупа од G неког коначног реда, тада је и $f(H)$ подгрупа истог реда, јер је f бијекција. Како је H једина таква, то је $f(H) = H$. Дакле, $H \lll G$. Слично, ако је H једина подгрупа индекса n у G, тада је $G = \bigsqcup_{i=1}^{n} a_i H$ за неки избор $a_1, \ldots, a_n \in G$, па како је f бијекција, то је $G = f(G) = \bigsqcup_{i=1}^{n} f(a_i)f(H)$, што доказује да је и $f(H)$ подгрупа индекса n у G. Како је H једина таква, то је $f(H) = H$, тј. $H \lll G$.

4. Претпоставимо да је $H \lll K \lhd G$. Нека је $g \in G$ произвољан елемент. Потребно је доказати да је $\sigma_g(H) = H$ (σ_g је унутрашњи аутоморфизам). Како је $K \lhd G$, то је $\sigma_g(K) = K$, па је $\sigma_g \mid_K \colon K \longrightarrow K$ аутоморфизам групе K (приметите да он не мора бити унутраши аутоморфизам групе K, јер g не мора припадати K). Међутим, како је $\sigma_g \mid_K \in \mathrm{Aut}(K)$ и $H \lll K$, то је $\sigma_g \mid_K (H) = H$. Како је још $H \subseteq K$, то је $\sigma_G(H) = \sigma_G \mid_K (H) = H$, што завршава доказ.

5. Претпоставимо да је $H \lll K \lll G$. Нека је $f \in \mathrm{Aut}(G)$ произвољан аутоморфизам. Потребно је доказати да је $f(H) = H$. Како је $K \lll G$, то је $f(K) = K$, па је $f \mid_K \colon K \longrightarrow K$ аутоморфизам групе K. Међутим, како је $f \mid_K \in \mathrm{Aut}(K)$ и $H \lll K$, то је $f \mid_K (H) = H$. Како је још $H \subseteq K$, то је $f(H) = f \mid_K (H) = H$, што завршава доказ.

6. Посматрајмо групу $\mathbb{A}_4$. У $\mathbb{A}_4$ скуп $K = \{\lfloor\rceil, \lfloor 1,2\rceil\lfloor 3,4\rceil, \lfloor 1,3\rceil\lfloor 2,4\rceil, \lfloor 1,4\rceil\lfloor 2,3\rceil\}$ је једина подгрупа реда 4 (иначе изоморфна $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$), што није тешко проверити, па је $K \lll \mathbb{A}_4$. Подгрупа $H = \{\lfloor\rceil, \lfloor 1,2\rceil\lfloor 3,4\rceil\}$ је индекса 2 у K, па је $H \lhd K$. Коначно, како имамо да је $\sigma_{\lfloor 1,2,3\rceil}(\lfloor 1,2\rceil\lfloor 3,4\rceil) = \lfloor 1,2,3\rceil\lfloor 1,2\rceil\lfloor 3,4\rceil\lfloor 1,3,2\rceil = \lfloor 1,4\rceil\lfloor 2,3\rceil$, то $\sigma_{\lfloor 1,2,3\rceil}(H) \neq H$, па $H \ntriangleleft \mathbb{A}_4$.

23. Доказати да је Силовљева подгрупа у групи G нормална ако и само ако је карактеристична.

Решење. Нека је H нека S_p–подгрупа. Ако је H карактеристична, јасно је да је и нормална. Ако је H нормална, тада је она према Силовљевим теоремама једина подгрупа од G реда $|H|$. Како је $f(H)$ подгрупа реда $|H|$, за произвољан аутоморфизам f групе G, то је $f(H) = H$, што доказује да је H карактеристична.

24. Нека је $G = HK$, где $H, K \lll G$ и $H \cap K = \langle e \rangle$. Доказати да је $\mathrm{Aut}(G) \cong \mathrm{Aut}(H) \times \mathrm{Aut}(K)$. Ако је G коначна Абелова група, доказати да је $\mathrm{Aut}(G)$ директан производ група аутоморфизама њених Силовљевих подгрупа.

Решење. Посматрајмо пресликавање $\phi : \mathrm{Aut}(G) \longrightarrow \mathrm{Aut}(H) \times \mathrm{Aut}(K)$ дато са $\phi(f) = (f\mid_H, f\mid_K)$. Приметимо да ϕ јесте добро дефинисано пресликавање, јер из $H \lll G$ следи да је $f(H) = H$, тј. $f\mid_H \in \mathrm{Aut}(H)$, и слично $f\mid_K \in \mathrm{Aut}(K)$. Лако је проверити да ϕ јесте хомоморфизам група.

Докажимо сада да је ϕ 1-1. Нека је $\phi(f) = \phi(g)$, тј. $f\mid_H = g\mid_H$ и $f\mid_K = g\mid_K$. Нека је $x \in G$ произвољно. Како је $G = HK$, то је $x = yz$, где $y \in H$ и $z \in K$. Међутим, тада је $f(x) = f(yz) = f(y)f(z) = f\mid_H(y) f\mid_K(z) = g\mid_H(y) g\mid_K(z) = g(y)g(z) = g(yz) = g(x)$, па је $f = g$. (У претходном рачуну смо користили чињенице да су f и g хомоморфизми, и да $y \in H$ и $z \in K$.)

Преостаје нам да докажемо да је ϕ на. Нека је $h \in \mathrm{Aut}(H)$ и $k \in \mathrm{Aut}(K)$. Приметимо да из услова задатка $G = HK$ и $H \cap K = \langle e \rangle$ следи да се сваки елемент $x \in G$ на јединствена начин може записати као $x = yz$, где $y \in H$ и $z \in K$. Због тога је пресликавање $f : G \longrightarrow G$ дато са $f(x) = h(y)k(z)$, за $x = yz$, $y \in H$ и $z \in K$, добро дефинисано. Због поменуте јединствености записа, као и жињеница да су h и k аутоморфизми на H, односно K, лако се види да је f бијекција.

Како $H \lhd G$ и $K \lhd G$ и $H \cap K = \langle e \rangle$, то можемо закључити да елементи из H и елементи из K међусобно комутирају. Зато, ако је $x_1 = y_1 z_1$ и $x_2 = y_2 z_2$, тада је $f(x_1 x_2) = f(y_1 z_1 y_2 z_2) = f(y_1 y_2 z_1 z_2) = h(y_1 y_2) k(z_1 z_2) = h(y_1) h(y_2) k(z_1) k(z_2) = h(y_1) k(z_1) h(y_2) k(z_2) = f(y_1 z_1) f(y_2 z_2) = f(x_1) f(x_2)$, тј. f је хомоморфизам групе G.

Дакле, $f \in \mathrm{Aut}(G)$ и очигледно $f\mid_H = h$ и $f\mid_K = k$, па је $\phi(f) = (h, k)$, што завршава доказ да је ϕ на.

Приметите да се претходно може уопштити на очигледан начин: ако је $G = H_1 H_2 \ldots H_n$, где су $H_i \lll G$, за $1 \le i \le n$, и $H_i \cap H_j = \langle e \rangle$, за $i \ne j$, тада је $\mathrm{Aut}(G) \cong \mathrm{Aut}(H_1) \times \mathrm{Aut}(H_2) \times \ldots \times \mathrm{Aut}(H_n)$. У доказу оваквог уопштења се користи чињеница да је производ две карактеристичне подгрупе такође карактеристична подгрупа, што је врло лако видети.

Нека је G коначна Абелова група. Према теореми о коначно генерисаним Абеловим групама и теореми о елементарној форми Абелове групе, можемо претпоставити да је:

$$G = (\mathbb{Z}/p_1^{\alpha_{11}}\mathbb{Z}) \times \ldots \times (\mathbb{Z}/p_1^{\alpha_{1k_1}}\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/p_2^{\alpha_{21}}\mathbb{Z}) \times \ldots \times (\mathbb{Z}/p_2^{\alpha_{2k_2}}\mathbb{Z}) \times$$

$$\times \ldots \times (\mathbb{Z}/p_n^{\alpha_{n1}}\mathbb{Z}) \times \ldots \times (\mathbb{Z}/p_n^{\alpha_{nk_n}}\mathbb{Z}),$$

где су p_i, $1 \leq i \leq n$, различити прости бројеви. Означимо са:

$$H_i = \langle 0\rangle \times \ldots \times \langle 0\rangle \times (\mathbb{Z}/p_i^{\alpha_{i1}}\mathbb{Z}) \times \ldots \times (\mathbb{Z}/p_i^{\alpha_{ik_i}}\mathbb{Z}) \times \langle 0\rangle \times \ldots \times \langle 0\rangle.$$

Тада су H_i, $1 \leq i \leq n$, S_{p_i}–подгрупе групе G, које су нормалне (јер је G Аблеова), па су због тога и карактеристичне. Приметите и да су то све Силовљеве подгрупе од G. Такође, јасно је да $H_i \cap H_j = \langle 0\rangle$, за $i \neq j$, као и да је $G = H_1 + H_2 + \ldots + H_n$. Према првом делу задатка тада је $\mathrm{Aut}(G) \cong \mathrm{Aut}(H_1) \times \mathrm{Aut}(H_2) \times \ldots \times \mathrm{Aut}(H_n)$.

25. Нека је G група реда 60 у којој је $s_5 > 1$. Доказати да је G проста. Доказати да је $\mathbb{A}_5$ проста.

Решење. Пре решења овог задатка, сетимо се да ако је $H \lll K \lhd G$, тада је $H \lhd G$.

Претпоставимо да је $s_5 > 1$. Претпоставимо супротно да је $H \lhd G$, $H \neq \langle e\rangle, G$. Ако $5 \mid |H|$, тада према Лагранжовој теореми $|H| \in \{5, 10, 15, 20, 30\}$. У сваком случају овде можемо закључити да H садржи нормалну S_5–подгрупу K. (У случају $|H| = 30$, погледајте задатак 42.) Тада је $K \lll H$, а како је $H \lhd G$, то је $K \lhd G$. Како је K Силовљева и у G, то је контрадикција са $s_5 > 1$.

Дакле, $|H| \in \{2, 3, 4, 6, 12\}$. Према задатку 9. ако је $|H| = 12$, H има нормалну (дакле карактеристичну) Силовљеву подгрупу, па је она зато нормална у G. Слично ако је $|H| = 6$, лако се види да H има нормалну (дакле карактеристичну) S_3–подгрупу, па је она зато нормална у G. Дакле, ако је $|H| \in \{6, 12\}$, тада G има и нормалну подгрупу реда 3 или 4.

Нека је сада $|H| \in \{2, 3, 4\}$. (Претходни пасус нам каже да је то још остало да размотримо, јер смо случајеве 6 и 12 свели на 3 и 4.) Како је $H \lhd G$, посматрајмо G/H. Тада је $|G/H| \in \{30, 20, 15\}$. Сада можемо да закључимо да G/H има нормалну подгрупу H' реда 5. Нека је H_1 инверзна слика од H' у G. Тада је $H_1 \lhd G$ и $5 \mid H_1$, па по првом случају добијамо контрадикцију.

Дакле, G је проста. Приметите да је $|\mathbb{A}_5| = 60$, као и да су $\langle \lfloor 1, 2, 3, 4, 5 \rceil\rangle$, $\langle \lfloor 1, 2, 3, 5, 4 \rceil\rangle$ две различите подгрупе реда 5. Према томе $\mathbb{A}_5$ је проста.

26. Нека је G коначна група и p неки прост делилац реда $|G|$. Ако је $P \leq G$ Силовљева p-подгрупа од G и $H = N_G(P)$ њен нормализатор, доказати да је онда $N_G(H) = H$.

Решење. Нека је g произвољан елемент у нормализатору $N_G(H)$. Како је $P \leq H$ (свака подгрупа је садржана у свом нормализатору), имамо специјално да је $gPg^{-1} \leq gHg^{-1} = H$. Како је P једна S_p-подгрупа од G, gPg^{-1} мора бити S_p-подгрупа од H. Али, како је H нормализатор од P имамо да је $P \triangleleft H$. Према Последици, P је *једина* S_p-подгрупа од H, па добијамо да је $gPg^{-1} = P$. Дакле, елемент g припада нормализатору од P и дакле $N_G(H) \subseteq H$.

Обрнута инклузија $H \subseteq N_G(H)$ је тривијална, па дакле $N_G(H) = H$.

27. Нека је $H \leq G$ произвољна подгрупа и P нека S_p-подгрупа групе G. Доказати да онда постоји нека конјугована група gPg^{-1} таква да је $gPg^{-1} \cap H$ једна S_p-подгрупа групе H.

Решење. Како је P Силовљева p-подгрупа у G, то је $P \cap H$ једна p-подгрупа групе H. На основу друге Силовљеве теореме, постоји нека Силовљева p-подгрупа $Q \leq H$ која садржи $P \cap H$. Међутим, сада је ова Q једна p-подгрупа групе G, па је садржана у некој Силовљевој p-подгрупи групе G. Како су све такве коњуговане са P, постоји неко $g \in G$ такво да је $Q \leq gPg^{-1}$.

Дакле, доказали смо да је $Q \leq gPg^{-1} \cap H$. Овде је $gPg^{-1} \cap H$ једна p-подгрупа од H, која садржи Силовљеву p-подгрупу Q, па мора бити $Q = gPg^{-1} \cap H$, што је и требало доказати.

28. Нека је $N \triangleleft G$. Доказати да је $s_p(N) \leq s_p(G)$.

Решење. Нека је P било која S_p-подгрупа групе G. Према претходном задатку, постоји неко $g \in G$ тако да је $gPg^{-1} \cap N$ једна S_p-подгрупа у N. Међутим, како је N нормална у G имамо да је

$$gPg^{-1} \cap N = gPg^{-1} \cap gNg^{-1} = g(P \cap N)g^{-1},$$

па дакле и $P \cap N$ мора бити једна S_p-подгрупа групе N.

Сада, нека је Q произвољна S_p-подгрупа од N. Онда према другој Силовљевој теореми постоји нека S_p-подгрупа P групе G која садржи Q: $Q \leq P \leq G$. Према претходном, онда је и $P \cap N$ једна S_p-подгрупа у N, која садржи Q, па мора бити $Q = P \cap N$. Одавде се види да је овакво придруживање (по једне S_p-подгрупе P свакој S_p-подгрупи Q) инјективно, па је $s_p(N) \leq s_p(G)$.

29. Нека је $N \triangleleft G$. Доказати да је за сваку S_p-подгрупу P групе G, PN/N једна S_p-подгрупа количничке групе G/N и да све S_p-подгрупе од G/N настају на овај начин. Доказати да је $s_p(G/N) \leq s_p(G)$.

Решење. Због $PN/N \cong P/(P \cap N)$, видимо да је PN/N заиста једна p-подгрупа групе G/N. Како је $N \leq PN \leq G$, на основу треће теореме о изоморфизму група имамо да је $[G/N : PN/N] = [G : PN]$. Са друге стране, из $P \leq PN \leq G$ видимо да p не дели $[G : PN]$, јер је P једна S_p-подгрупа. Дакле, $p \nmid [G/N : PN/N]$, одакле следи да је PN/N једна S_p-подгрупа у G/N.

Нека је сада Q произвољна S_p-подгрупа количничке групе G/N. Она се може написати као $Q = H/N$ за неку подгрупу $H \leq G$ која садржи N. Нека је P нека S_p-подгрупа у H. Како $p \nmid [G/N : Q] = [G/N : H/N] = [G : H]$, следи да је P и једна S_p-подгрупа групе G. Према претходно показаном, PN/N је једна S_p-подгрупа у G/N, а истовремено је и садржана у S_p-подгрупи Q, па мора бити $Q = PN/N$. Овакво придруживање S_p-подгрупа је инјективно, па следи да је $s_p(G/N) \leq s_p(G)$.

1.3 Задаци за самосталан рад

30. Описати S_2–подгрупе у $\mathbb{D}_3 \times \mathbb{D}_3$ и израчунати s_2.

31. Описати S_3–подгрупе у $\mathbb{D}_3 \times \mathbb{D}_3$ и израчунати s_3.

32. Описати S_3–подгрупе од $\mathbb{A}_4$ и $\mathbb{S}_4$ и израчунати s_3.

33. Описати S_2–подгрупе од $\mathbb{S}_5$ и израчунати s_2.

34. Доказати да је подгрупа групе $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ генерисана матрицама $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ јединствена Силовљева 2-подгрупа групе $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$.

35. Нека је G коначна некомутативна проста група. Ако прост број $p| \, |G|$, онда је $s_p > 1$.

36. Нека је G група реда pq, где су p и q различити прости бројеви такви да $p \neq_q 1$ и $q \neq_p 1$. Докажите да је G циклична група.

37. Доказати да група реда 200 садржи нормалну S_5 подгрупу.

38. Доказати да група реда $2^3 \cdot 3 \cdot 13$ садржи неку нормалну Силовљеву подгрупу.

39. Доказати да група G реда $3^k \cdot 7$, $k \geq 1$, није проста.

40. Доказати да група G реда $3 \cdot 5^3 \cdot 11$ није проста.

41. Доказати да група G реда 30 садржи нормалну, цикличну подгрупу реда 15.

42. Доказати да у групи G реда 30 важи $s_3 = s_5 = 1$.

43. Доказати да група G реда 56 има неку нормалну Силовљеву подгрупу.

44. Доказати да група G реда $3^3 \cdot 13$ има неку нормалну Силовљеву подгрупу.

45. Доказати да група G реда $2^2 \cdot 3 \cdot 7$ има неку нормалну Силовљеву подгрупу.

46. Доказати да група G реда $2^2 \cdot 3 \cdot 11$ има неку нормалну Силовљеву подгрупу.

47. Доказати да група G реда $3^2 \cdot 17 \cdot 19$ има неку нормалну Силовљеву подгрупу.

48. Доказати да група G реда $3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$ има неку нормалну Силовљеву подгрупу.

49. Доказати да група G реда $5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 17$ има неку нормалну Силовљеву подгрупу.

50. Нека је G група реда $231 = 3 \cdot 7 \cdot 11$. Нека је P нека њена S_3-подгрупа и нека је K нека њена S_7-подгрупа. Доказати да је онда PK једна подгрупа реда 21 у G, а затим и да је нормална у G.

51. Нека је G група реда 924. Доказати да G има елемент реда 77.

52. Доказати да група G реда 105 има јединствену S_5 и јединствену S_7–подгрупу.

53. Доказати да је група G реда 105 која има нормалну подгрупу реда 3 циклична.

54. Нека је G група реда $3 \cdot 7 \cdot 11$. Доказати да $Z(G)$ садржи S_{11}–подгрупу од G.

55. Нека је G група реда $5 \cdot 7 \cdot 11$. Доказати да $Z(G)$ садржи S_7–подгрупу од G.

56. Нека је G група реда $3^2 \cdot 5 \cdot 7$, таква да је $s_3 = 1$. Доказати да је G Абелова.

57. Нека је G група реда $3^2 \cdot 5^2 \cdot 7$, таква да је $s_3 = 1$. Доказати да је G Абелова.

58. Нека је G група таква да $1 < |G| < 60$ и $|G|$ није прост број. Доказати да G није проста.

59. Доказати да група G реда 250 000 није проста.

60. Доказати да група G реда $2 \cdot 3^3 \cdot 17$ није проста.

61. Доказати да група G реда $3^3 \cdot 5 \cdot 13$ није проста.

62. Доказати да група G реда $2^4 \cdot 3 \cdot 7$ није проста.

63. Доказати да група G реда $3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$ није проста.

64. Доказати да група G реда $3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$ није проста.

65. Доказати да група G реда $3 \cdot 5 \cdot 7^3$ није проста.

66. Доказати да група G реда $3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 13$ није проста.

67. Доказати да је у групи G реда pqr, $p < q < r$ прости бројеви, S_r–подгрупа нормална.

68. Доказати да је свака група реда 45 Абелова.

69. Доказати да је свака група реда 175 Абелова.

1.4 Упутства

30. Приметите да је S_2–подгрупа у $\mathbb{D}_3 \times \mathbb{D}_3$ реда 4. Докажите да су такве подгрупе изоморфне $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, и опишите како оне изгледају. Из описа закључите да их има 9.

31. Приметите да је S_3–подгрупа у $\mathbb{D}_3 \times \mathbb{D}_3$ реда 9. Опишите како те подгрупе изгледају и закључите да постоји једна таква подгрупа.

32. Приметите да у оба случаја S_3–подгрупа има 3 елемента. Према томе она је циклична. Чиме је она генерисана? Закључите да је $s_3^{\mathbb{A}_4} = s_3^{\mathbb{S}_4} = 4$.

33. Најпре приметите да је $\mathbb{S}_4 \leq \mathbb{S}_5$ и да S_2–подгрупе од $\mathbb{S}_4$ су уједно и S_2–подгрупе од $\mathbb{S}_5$. Ово нам каже да су S_2–подгрупе од $\mathbb{S}_5$ изоморфне $\mathbb{D}_4$. (Погледајте задатак 2.) Сада урадите анализу сличну као у задатку 2.

34. За произвољно p користећи доказ задатка 3, покажите да је $|SL_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})| = |GL_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})|/(p-1) = p(p^2-1)$. Специјално, $|SL_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})| = 24$. Покажите директно да дате матрице генеришу подгрупу реда 8. Нађите експлицитно редове свих елемената и уверите се да су сви елементи чији су редови степени 2 у датој подгрупи.

35. Ако $|G|$ има бар два различита проста делиоца, примените Последицу. Ако би p био једини прост делиоц од $|G|$, докажите да би G морала бити комутативна (што је у супротности са претпоставком).

36. Примените трећу Силовљеву теорему, па затим и теорему о разлагању групе на унутрашни директни производ. Ако нпр. x генерише S_p-подгрупу, а y генерише S_q-подгрупу, докажите да елемент xy генерише G.

37. Директно по трећој Силовљевој теореми.

38. Директно по трећој Силовљевој теореми.

39. У случају $k \leq 3$ директно примените трећу Силовљеву теорему. У случају $k \geq 4$ примените $n!$ теорему на S_3–подгрупу.

40. Ако G јесте проста, примените $n!$ теорему на нормализатор S_5–подгрупе.

41. Докажите пребројавањем елемената да постоји јединствена S_3 или S_5–подгрупа. Направите подгрупу реда 15. Зашто је она нормална? Сада примените Силовљеве теореме на уочену подгрупу реда 15, како бисте доказали да је циклична.

42. Према претходном задатку је $s_3 = 1$ или $s_5 = 1$. Нека је H S_3–подгрупа, K S_5–подгрупа, и $L = HK$ нопрмална, циклична подгрупа реда 15 из претходног задатка. Докажите $L \leq N_G(H), N_G(K)$, па примените трећу Силовљеву теорему.

43. Примените технику пребројавања елемената.

44. Примените технику пребројавања елемената.

45. Примените технику пребројавања елемената.

46. Примените технику пребројавања елемената.

47. Примените технику пребројавања елемената.

48. Примените технику пребројавања елемената.

49. Примените технику пребројавања елемената.

50. Како $s_7 =_7 1$ и $s_7|33$ имамо да је $s_7 = 1$, тј. $K \triangleleft G$, одакле следи да је $N = PK$ заиста подгрупа. Слично, G има јединствену S_{11}-подгрупу, која је дакле нормална у G. Означимо је са H и нека је h један њен генератор. Ако је g било који елемент из G реда 3 (зашто такав постоји?) имамо да је $gHg^{-1} = H$, односно $ghg^{-1} = h^l$ за неко $0 \leq l < 11$. Одатле је $h = g^3hg^{-3} = g^2(ghg^{-1})g^{-2} = g^2h^lg^{-2} = \ldots = h^{l^3}$. Уверите се да $l^3 =_{11} 1$ има једино решење $l = 1$, што значи да g и h комутирају. Одавде докажите да $h \in Z(G)$. Специјално, h мора припадати нормализатору подгрупе N, а како је h реда 11, очигледно $h \notin N$. Дакле $N_G(N)$ садржи N и бар још h, па садржи бар 22 елемента. Али из $|N_G(N)| \geq 22$ и $|N_G(N)|\,|231$ следи да је $N_G(N) = G$.

51. Примените трећу Силовљеву теорему да бисте показали да је $s_7 \in \{1, 22\}$ и да је $s_{11} \in \{1, 12\}$. Нека је H једна S_7-подгрупа и K једна S_{11}-подгрупа. Ако је $s_7 = 1$ или $s_{11} = 1$, докажите да је HK циклична подгрупа реда 77. Ако је $s_7 = 22$ и $s_{11} = 12$, онда је нпр. $[G : N_G(K)] = s_{11} = 12$, па је $|N_G(K)| = 924/12 = 77$. Сада примените Силовљеве теореме на подгрупу $N_G(K)$ да бисте закључили да је циклична.

52. Најпре искористите пребројавање да докажете да је S_5 или S_7–подгрупа јединствена. Докажите да постоји нормална, циклична подгрупа реда 35, која је садржана у нормализаторима од S_5 и S_7–подгрупа, па искористите трећу Силовљеву теорему.

53. Искористите претходни задатак.

54. Ако је G Абелова, ствар је тривијална. Претпоставите да G није Абелова. Директно докажите да постоје јединствене S_7 и S_{11}–подгрупе, и да постоји 7 S_3–подгрупа. Нађите нормалну, цикличну подгрупу H реда 77. Докажите да је $G = \langle a, H\rangle$, где је a произвољан елемент реда 3. Посматрајте нормализатор од $\langle a\rangle$, докажите да је он цикличан и садржи S_{11}-подгрупу, па закључите да a комутира са елементима S_{11}–подгрупе. Закључите да је S_{11}–подгрупа садржана у центру $Z(G)$.

55. Поступите као у претходном задатку.

56. Нека је H нормална S_3–подгрупа, и нека су K и L редом S_5 и S_7–подгрупе. Докажите да су HK и HL Абелове. Закључите да $H \leq N_G(K), N_G(L)$, па докажите да је $s_5 = s_7 = 1$. Коначно докажите да је G Абелова.

57. Поступите као у претходном задатку.

58. Применити неки од већ доказаних критеријума. Случајеве када је $|G|$ једнако 24, 36, 40, 48, 56 посебно размотрити.

59. Ако претпоставимо супротно, тј. да је G проста, користећи једну S_5-подгрупу, утопити G у $\mathbb{S}_{16}$ као у задатку 15. Применити Лагранжову теорему на ово утапање.

60. Претпоставите супротно да је G проста. Користећи S_{17}–подгрупу, докажите да се G може утопити у $\mathbb{S}_{18}$. Даље посматрајте ред нормализатора S_{17}–подгрупе у G и у $\mathbb{S}_{18}$.

61. Претпоставите супротно да је G проста. Користећи S_3–подгрупу, докажите да се G може утопити у $\mathbb{S}_{13}$. Даље посматрајте ред нормализатора S_{13}–подгрупе у G и у $\mathbb{S}_{13}$.

62. Претпоставите супротно да је G проста. Користећи S_7-подгрупу, докажите да се G може утопити у $\mathbb{A}_8$. Даље посматрајте ред нормализатора S_7–подгрупе у G и у $\mathbb{A}_8$.

63. Претпоставите супротно да је G проста. Докажите да нормализатор S_7–подгрупе садржи у себи нормалну S_{11}–подгрупу. Закључите да нормализатор S_{11}–подгрупе садржи нормализатор S_7–подгрупе, и изведите контрадикцију.

64. Претпоставите супротно да је G проста. Докажите да је нормализатор S_7–подгрупе садржан у нормализатору неке S_{13}–подгрупе, и изведите контрадикцију.

65. Претпоставите супротно да је G проста. Закључите да је $s_5 = 21$ и $s_7 = 15$. Посматрајте нормализатор неке S_5–подгрупе, и докажите да он садржи нормалну подгрупу H реда 7^2. Закључите да $N_G(H)$

садржи нормализатор S_5–подгрупе. Посматрајте даље S_7–подгрупу која садржи H, и докажите да је H нормална у њој, тј. да је нека S_7–подгрупа садржана у $N_G(H)$. Шта су кандидати за индекс подгрупе $N_G(H)$? У једном случају користећи $n!$ теорему, а у другом случају директно, изведите контрадикцију.

66. Претпоставите супротно да је G проста. Закључите да је $s_7 = 15$ и $s_{13} = 105$. Посматрајте нормализатор неке S_{13}–подгрупе, и докажите да он садржи нормалну подгрупу H реда 7. Закључите да $N_G(H)$ садржи нормализатор S_{13}–подгрупе. Посматрајте даље S_7–подгрупу која садржи H, и докажите да је H нормална у њој, тј. да је нека S_7–подгрупа садржана у $N_G(H)$. Шта су кандидати за индекс подгрупе $N_G(H)$? Користећи $n!$ теорему израчунајте ред од $N_G(H)$. Закључите $N_G(H)$ садржи нормалну S_{13}–подгрупу, тј. $N_G(H)$ је садржан у нормализатору неке S_{13}–подгрупе, и изведите контрадикцију.

67. У задатку 10. смо доказали да је $s_p = 1$ или $s_q = 1$ или $s_r = 1$. Претпоставите супротно да $s_r \neq 1$, и израчунајте s_r. Посматрајте два случаја: $s_p = 1$ и $s_q = 1$. У првом случају докажите да је S_r–подгрупа у производу S_p и S_r–подгрупе нормална, тј. да нормализатор S_r подгрупе садржи подгрупу реда pr, и изведите контрадикцију. Други случај аналогно анализирајте.

68. Искористите трећу Силовљеву теорему да докажете да оваква група има нормалне подгрупе реда 9 и реда 5. Затим примените теорему о разлагању групе на унутрашњи директни производ.

69. Потпуно аналогно као претходни задатак.