Практикум 9

Никола Велов

Девета недеља

1 Задаци

1. Нека је $\mathbb{F}_2$ коначно поље са 2 елемента.

a) Нека је $\mathbb{F}_2[x]$ векторски простор полинома са коефицијентима из $\mathbb{F}_2[x]$ и $\mathbb{F}_2^{\mathbb{N}}$ векторски простор низова елемената поља $\mathbb{F}_2$. Да ли постоји линеарни изоморфизам међу ова два векторска простора?

b) Нека је S потпростор простора $\mathbb{F}_2^{\mathbb{N}}$ који се састоји од свих низова са само коначно много јединица. Доказати да су S и $\mathbb{F}_2[x]$ линеарно изоморфни над $\mathbb{F}_2$.

c) Да ли постоји природан број k такав да су $\mathbb{F}_2[x]$ и $\mathbb{F}_2^k$ линеарно изоморфни?

2. Нека је p прост број и $\mathbb{F}_p$ коначно поље са p елемената.

a) Нека је $\mathbb{F}_p[x]$ простор полинома са коефицијентима из $\mathbb{F}_p$. Доказати да је пресликавање $T : \mathbb{F}_p[x] \longrightarrow \mathbb{F}_p[x]$ дато са $T(P) = P'$, где је P' (алгебарски) извод полинома P, једно линеарно пресликавање и одредити $\operatorname{Ker} T$ у зависности од простог броја p.

b) Одредити $\operatorname{Im} T$ када је $p = 3$. Доказати да скуп свих полинома чији су коефицијенти уз x^{3k+2} једнаки 0 у $\mathbb{F}_3$ чине векторски потпростор простора $\mathbb{F}_3[x]$.

3. Нека је V векторски простор над пољем F.

$a)$ Нека су $T_1, T_2 : V \longrightarrow V$ линеарна пресликавања таква да је $T_1 \circ T_2 = T_1$ и $T_2 \circ T_1 = T_2$. Доказати да је $\mathrm{Ker}\ T_1 = \mathrm{Ker}\ T_2$.

$b)$ Нека су $L_1, L_2, ..., L_k : V \longrightarrow V$ линеарна пресликавања. Доказати да важи $\bigcap_{i=1}^{k} \mathrm{Ker}\ L_i \subset \mathrm{Ker}\Big(\sum_{i=1}^{k} L_i\Big)$.