Практикум 8

Никола Велов

Осма недеља

1 Задаци

1. Нека је $\mathbb{F}_p$ коначно поље са p елемената.

$a)$ Доказати да за сваке $x, y \in \mathbb{F}_p$ важи $(x+y)^p = x^p + y^p$.

$b)$ Нека је $T : \mathbb{F}_p \longrightarrow \mathbb{F}_p$ дефинисано са $T(x) = x^p$. Доказати да је T линеарно пресликавање над $\mathbb{F}_p$.

$c)$ Нека је p фиксан прост број. Да ли је $L : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, дефинисано са $L(x) = x^p$ једно линеарно пресликавање над $\mathbb{R}$?

2. Нека је V простор полинома степена највише три над $\mathbb{F}_p$, где је p фиксан непаран прост број.

$a)$ Нека је $T : V \longrightarrow \mathbb{F}_p^4$ дефинисано са

$$T(P(x)) = (P(0), P(1), P(-1), P(2))$$

Доказати да је T добро дефинисано линеарно пресликавање.

$b)$ Одредити све просте бројеве p такве да је пресликавање T инјективно.

$c)$ Нека је $L : V \longrightarrow V$ дефинисано са

$$L(P(x)) = P(x) + (1+x)P'(x)$$

где је P' (алгебарски) извод полинома. Да ли је L линеарно пресликавање за сваки непаран прост број p?

3. Посматрајмо пресликавање $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ такво да за све реалне бројеве $x, y \in \mathbb{R}$ важи $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

a) Доказати да је $\mathbb{R}$ векторски простор кад $\mathbb{Q}$.

b) Доказати да је $f(cx) = cf(x)$ за сваки рационалан број c и сваки реалан број x.

c) Закључити да је f линеарно пресликавање векторских простора над $\mathbb{Q}$.