Практикум 7

Никола Велов

Седма недеља

1 Задаци

1. Нека је $\mathbb{F}_2$ коначно поље са 2 елемента.

a) Нека је V простор свих полинома у $\mathbb{F}_2[X]$ степена највише 2. Доказати да су полиноми $1 + x$,$x^2 + 1$,$x^2 + x + 1$ и $x^2 + x$ линеарно зависни.

b) Одредити једну базу за векторски простор V. Нека су P_1, P_2, P_3 и P_4 полиноми из V. Доказати да су они линеарно зависни над $\mathbb{F}_2$, користећи метод из а). Закључити да не може бити више од три линеарно независна полинома у V.

c) Нека су Q_1 и Q_2 полиноми из V. Доказати да постоји полином из V који није њихова линеарна комбинација. Закључити да је потребно бар три полинома да би се генерисало V.

d) Користећи b) и c) закључити да свака база за V има тачно три елемента.

2. Посматрамо простор $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ свих реалних функција $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

a) Нека је V потпростор простора $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ генерисан (у смислу линеарних комбинација) функцијама $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = \sin 2x$ и $f_3(x) = \cos 2x$. Доказати да функције f_1,f_2 и f_3 чине базу векторског простора V.

b) Нека је U потпростор простора $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ генерисан функцијама $g_1(x) = e^x$ и $g_2(x) = \sin^2 x$. Доказати да g_1 и g_2 чине базу векторског простора U.

c) Доказати да функције f_1, f_2, f_3, g_1 и g_2 генеришу векторски простор $U+V$, али не чине његову базу. Одредити димензију простора $U+V$.

d) Одредити димензију векторског простора $U \cap V$ и једну његову базу.