Практикум 6

Никола Велов

Шеста недеља

1 Задаци

1. Нека је X коначан скуп и S скуп свих пресликавања $f : X \to \mathbb{F}$, где је $\mathbb{F}$ неко коначно поље.

a) Доказати да постоје функције $f_1, ..., f_k \in S$ такве да је свака функција $f \in S$ облика $c_1 f_1 + ... + c_k f_k$ за неке $c_1, ..., c_k \in \mathbb{F}$. На пример, могу се узети *све* функције из S, јер их има коначно много.

b) Доказати да је довољно изабрати тачно $|X|$ функција као у делу под а), где $|X|$ означава број елемената скупа X. Да ли ово важи и ако поље $\mathbb{F}$ није коначно?

c) Нека је $X = \{1, 2, ..., 2020\}$ и $\mathbb{F} = \mathbb{F}_p$ за неки прост број $p > 2020^{2020}$. Конструисати 2020 функција са својством из а). Представити функције $g, h \in S$ дефинисане са $g(x) = x$, $h(x) = x^2$ преко ових 2020 функција као у а).

2. Нека је $\mathbb{C}[X]$ скуп свих полинома са комплексним коефицијентима. Нека је P скуп свих полинома из $\mathbb{C}[X]$ степена највише 2020.

a) Доказати да су полиноми $1 + x$, $x + x^2$, ... , $x^{2019} + x^{2020}$ линеарно независни.

b) Доказати да постоји полином из P који *није* линеарна комбинација полинома из претходног дела.

$c)$ Показати да се може додати тачно један полином из P полиномима из $a)$ тако да они заједно (означимо их са β) генеришу све полиноме из P.

$d)$ Написати дате полиноме као линеарну комбинацију (користећи комплексне скаларе) полинома из β: $p(x) = \sum_{k=0}^{2020} i \cdot x^k$, $q(x) = \sum_{k=0}^{1010} x^{2k}$.

3. Нека је V скуп свих полинома са реалним коефицијентима степена највише 3 таквих да је $f(1) = f(-1) = 0$.

$a)$ Доказати да је V векторски простор над $\mathbb{R}$.

$b)$ Доказати да постоје два полинома $P_1, P_2 \in V$ тако да су сви остали полиноми из V њихова линеарна комбинација.

$c)$ Нека је $Q \in V$ неки полином. Доказати да није могуће да Q генерише цело V.