Практикум 5

Никола Велов

Пета недеља

1 Задаци

1. Нека је p прост број и нека је $\mathbb{F}_p$ коначно поље са p елемената. Нека је $\mathbb{F}_p^{\mathbb{N}}$ скуп свих низова остатака по модулу p.

a) Нека је $a \in \mathbb{F}_p^{\mathbb{N}}$ дефинисан са $a_{n+1} = (p-1) \cdot a_n$ и $b \in \mathbb{F}_p^{\mathbb{N}}$ дефинисан са $b_n = n^2$, где су све операције дефинисане по модулу p. Одредити $a+b$, $b-a$, $(p-1) \cdot a$.

b) Написати низ a као збир два низа из $\mathbb{F}_p^{\mathbb{N}}$ различита од нула низа. Доказати да се сваки низ из $\mathbb{F}_p^{\mathbb{N}}$ може написати као збир два низа различита од нула низа, па специјално и b.

c) Посматрамо фиксне низове $s_1, s_2, ..., s_k \in \mathbb{F}_p^{\mathbb{N}}$. Одредити максималан број низова који се могу записати у облику $c_1 s_1 + \cdots + c_k s_k$ за неке $c_1, ..., c_k \in \mathbb{F}_p$. Доказати да увек постоји низ у $\mathbb{F}_p^{\mathbb{N}}$ који није овог облика, независно од $k \in \mathbb{N}$ и $s_1, s_2, ..., s_k \in \mathbb{F}_p^{\mathbb{N}}$.

2. Нека је p прост број. Нека је S скуп свих пресликавања $f : \mathbb{F}_p \to \mathbb{F}_p$

a) Нека је $f_1 \in S$ дефинисано са $f_1(x) = 1$ за свако $x \in F_p$. Одредити пресликавање $g_1 \in S$ у зависности од p такву да је $f_1 + g_1$ нула функција (дакле $g_1 = -f_1$). Одредити $2 \cdot f_1$ и $(p-1) \cdot f_1$.

b) Нека је $\sigma \in S$ пермутација. Да ли је тада и $-\sigma$ пермутација? Да ли је за свако $c \in \mathbb{F}_p$ пресликавање $c \cdot \sigma$ пермутација? Да ли је сваки елемент из S збир неке две пермутације за било који прост број p?

c) Дефинишимо за $0 \leq i \leq p-1$ пресликавање $e_i \in S$ са $e_i(x) = 1$ ако је $x = i$, а $e_i(x) = 0$ у супротном. Доказати да за свако пресликавање $f \in S$ постоје $c_0, ..., c_{p-1} \in \mathbb{F}_p$ такви да је $f = c_0 \cdot e_0 + \cdots + c_{p-1} \cdot e_{p-1}$.

3. Нека је p прост број и нека је $\mathbb{F}_p$ коначно поље са p елемената.

a) Посматрајмо $\mathbb{F}_p^4$, односно скуп свих четворки из $\mathbb{F}_p$. Дефинисати сабирање и множење скаларом из $\mathbb{F}_p$ на $\mathbb{F}_p^4$ и доказати да се овако добија структура векторског простора над F_p.

b) Нека је $p = 7$. Одредити следеће векторе: $(-1)\cdot(1, 1, 1, 1)$, $(1, 2, 3, 4)+(6, 5, 6, 5)$, $3 \cdot (1, 5, 2, 6) - 2 \cdot (5, 6, 1, 0)$. Представити сваки вектор из $\mathbb{F}_7$ преко $(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)$.

c) Посматрајмо све полиноме са коефицијентима из F_p степена највише 3, у ознаци $\mathbb{P}_3$. Дефинисати бијекцију $T : \mathbb{P}_3 \to \mathbb{F}_p^4$ такву да за свака два скалара $c_1, c_2 \in \mathbb{F}_p$ и свака два полинома $P, Q \in \mathbb{P}_3$ важи $T(c_1 P + c_2 Q) = c_1 T(P) + c_2 T(Q)$.