Практикум 4

Никола Велов

Четврта недеља

1 Задаци

1. Нека је p прост број и нека је $\mathbb{F}_p$ коначно поље са p елемената.

a) Нека је $\mathbb{F}_p[X]$ скуп свих полинома над пољем $\mathbb{F}_p$. Доказати да је $\mathbb{F}_p[X]$ векторски простор над $\mathbb{F}_p$.

b) Нека је $\mathbb{P}_{2020}$ скуп свих полинома из $\mathbb{F}_p[X]$ степена највише 2020. Доказати да је $\mathbb{P}_{2020}$ исто векторски простор над $\mathbb{F}_p$. Одредити број елемената скупа $\mathbb{P}_{2020}$.

c) Нека је $A = \{0, 1, 2, ..., 2020\}$. Нека је $P(A)$ партитивни скуп скупа A. Дефинишимо операцију сабирања на $P(A)$ на следећи начин: $X +_A Y := X\Delta Y$. Показати да је $(A, +_A)$ Абелова група и дефинисати множење елемената $P(A)$ скаларом из $\mathbb{F}_2$. Одатле закључити да се $P(A)$ може схватити као векторски простор над $\mathbb{F}_2$.

d) Идентификовати векторски простор из c) са полиномима над $\mathbb{F}_2$ степена највише 2020 и користећи b) одредити број подскупова скупа A.

e) Доказати да је скуп свих низова $a : \mathbb{N} \to \mathbb{F}_p$ векторски простор над $\mathbb{F}_p$. Дефинишимо $r : \mathbb{N} \to \mathbb{F}_p$ са $r_n = n^{p-1}$ и $s : \mathbb{N} \to \mathbb{F}_p$ са $s_n = n - 1$, где су све операције у $\mathbb{F}_p$. Одредити низ $r + s$.

2. Нека је $M_n(\mathbb{F}_p)$ скуп свих $n \times n$ матрица над пољем $\mathbb{F}_p$.

$a)$ Доказати да је $M_n(\mathbb{F}_p)$ векторски простор над $\mathbb{F}_p$ и одредити број елемената овог векторског простора.

$b)$ Показати контрапримером да скуп свих инвертибилних матрица из $M_2(\mathbb{F}_p)$ заједно са нула матрицом није векторски простор над $\mathbb{F}_p$.

$c)$ Одредити број инвертибилних матрица из $M_2(\mathbb{F}_p)$. Закључити на основу броја елемената да инвертибилне матрице у $M_2(\mathbb{F}_p)$ заједно са нула матрицом нису векторски простор.

3. Нека је p прост број. Нека је S скуп свих пресликавања $f : \mathbb{F}_p \to \mathbb{F}_p$

$a)$ Дефинисати сабирање на S и множење скаларом из $\mathbb{F}_p$ тако да S добије структуру векторског простора над $\mathbb{F}_p$.

$b)$ Да ли је скуп свих бијекција из S заједно са нула функцијом векторски простор са истим операцијама за свако p?

$c)$ Одредити број елемената скупа S и број бијекција у S. Да ли постоји прост број p такав да је скуп свих бијекција из S заједно са нула функцијом векторски простор над $\mathbb{F}_p$?