Практикум 3

Никола Велов

Трећа недеља

1 Задаци

1. Нека је $(F, +, \cdot)$ поље и нека $F[X]$ представља све полинома са коефицијентима у пољу F. Тада важи **теорема о дељењу полинома са остатком**: За свака два полинома $A(X), B(X) \in F[X]$, при чему $B(X) \neq 0$, постоје полиноми $Q(X), R(X) \in F[X]$ такви да је степен полинома $R(X)$ строго мањи од степена полинома $B(X)$ и важи $A(X) = B(X)Q(X) + R(X)$. Ово је уопштење исте теореме за полиноме са реалним и комплексним коефицијентима за произвољно поље.

a) Поделити полином x^3+2x^2+3x+4 са x^2+x+1 и одредити количник и остатак. Објаснити зашто и количник и остатак имају рационалне коефицијенте.

b) Одредити остатак који полином $z^2+2iz+\sqrt{2}$ даје при дељењу са $z+i$, као и количник и остатак при дељењу полинома z^3+i полиномом z^2+1.

c) Доказати да полином x^2+2x+5 није растављив у $\mathbb{R}[X]$, али јесте у $\mathbb{C}[X]$ и раставити га.

d) Раставити полином x^4+x^2+1 у $\mathbb{R}[X]$ директно и користећи еуклидско дељење полинома. Раставити исти полином у $\mathbb{C}[X]$.

2. Нека је $P(X) \in \mathbb{C}[X]$ неконстантан полином са комплексним коефицијентима.

a) Подсетити се са претходног часа зашто постоје $c, \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{C}$ и природни $m_1, \dots, m_k$ такви да је

$$P(X) = c(X - \alpha_1)^{m_1} \cdot \dots \cdot (X - \alpha_k)^{m_k}$$

b) Ако су $z_1, \dots, z_n$ све нуле полинома $P(X) = a_n X^n + \dots + a_1 X + a_0$ (неке могу бити поновљене) доказати да важе **Вијетове формуле**:

$$z_1 + z_2 + \dots + z_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$(z_1 z_2 + z_1 z_3 + \dots + z_1 z_n) + (z_2 z_3 + \dots + z_2 z_n) + \dots + z_{n-1} z_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

$$\vdots$$

$$z_1 z_2 \dots z_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

c) За полином кажемо да је **моничан** ако је коефицијент уз моном највећег степена 1. Одредити комплексан моничан полином трећег степена чије су све нуле i,$-i$ и $\sqrt{2}$.

d) Одредити сва комплексна решења једначине $(z+1)^{1000} - 2020 = 0$. Урадити исто за једначину $z^{2021} = 2$ и доказати да је збир свих решења ове једначине једнак 0.

e) Нека су $w_1, w_2, \dots, w_n$ сви n-ти комплексни корени из јединице. Израчунати $\sum_{k=1}^{n} w_k$ и $\prod_{k=1}^{n} w_k$ у зависности од $n \in \mathbb{N}$.