Практикум 2

Никола Велов

Друга недеља

1 Задаци

1. Нека су $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 2 + 3i$ и $z_3 = 1 + \sqrt{3}i$ комплексни бројеви.

   a) Одредити: $z_1 + z_2$, $z_1 \cdot z_2$, $\overline{z_2}$, $\frac{z_1}{z_2}$ и $|z_3|$.

   b) Доказати да за сваки комплексан број $z \in \mathbb{C}$ постоје бројеви $r > 0$ и $\phi \in \mathbb{R}$такви да је $z = r \cdot (\cos\phi + \sin\phi \cdot i)$. Ово се зове **тригонометријски облик комплексног броја**.

   c) Проверити како се множе два комплексна броја у тригонометријском облику и доказати **Моаврову формулу**: $(\cos\phi + i \cdot \sin\phi)^n = (\cos n\phi + i \cdot \sin n\phi)$

   d) Одредити тригонометријски облик за z_1, z_2 и z_3 и израчунати z_1^{2020}.

2. **Основна теорема алгебре** нам каже да сваки неконстантан полином са комплексним коефицијентима $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ има бар једну *комплексну* нулу.

   a) Доказати да полином $x^2 + 1$ нема реалних нула, али да има комплексну нулу i.

   b) Нека је $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ полином са реалним коефицијентима и $z \in \mathbb{C}$ комплексан број такав да је $P(z) = 0$. Доказати да је тада $P(\overline{z}) = 0$. Објаснити зашто су комплексна решења квадратне једначине са реалним коефицијентима конјугована.

c) Нека је $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ полином са комплексним коефицијентима и $a \in \mathbb{C}$ комплексан број. Доказати да је остатак при дељењу $P(x)$ са $x - a$ једнак $P(a)$.

d) Раставити $x^2 + 1$, $x^4 + 4$ и $x^3 + 2x - 3$ на производ линеарних полинома у $\mathbb{C}[x]$.

e) Доказати да се сваки полином из $\mathbb{C}[x]$ може раставити на производ линеарних фактора у $\mathbb{C}[x]$, док се сваки полином из $\mathbb{R}[x]$ може раставити на производ квадратних и линеарних фактора у $\mathbb{R}[x]$.

3. Нека је $P_n(x) = x^n + 1$.

a) Поделити полином $P_4(x)$ полиномом $P_2(x)$ и одредити количник и остатак.

b) Одредити остатак који полином $P_8(x)$ даје при дељењу са $x-1$, $x + 1$, $x - 2$, $x + 2$.

c) Одредити сва комплексна решења једначине $P_{2020}(x) = 2$.