Практикум 11

Никола Велов

Једанаеста недеља

1 Задаци

1.

a) Нека су $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ такве да је $AB = BA$. Доказати да за матрице A, B важи *биномна формула*

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$$

b) Дати контрапример за биномну формулу уколико матрице A и B не комутирају.

c) Нека је

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Доказати да је $P^3 = O_3$

d) Нека је $a \in \mathbb{R}$ реалан број. Користећи биномну формулу из а) одредити матрицу Q^n, где је матрица Q дата са

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & -a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$$

2. Посматрајмо матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Доказати директним рачуном да је

$$A^3 - A^2 - 8A - 18E_3 = O_3$$

b) Показати да је

$$A(A^2 - A - 8E_3) = 18E_3$$

и да је

$$(A^2 - A - 8E_3)A = 18E_3$$

c) Закључити из b) да је матрица A инвертибилна и одредити њен инверз.

3. Нека су $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ матрице такве да је $A + B = E_n$ и $A^2 + B^2 = O_n$.

a) Доказати да је

$$2A^2 - 2A + E_n = O_n$$

b) Закључити да су матрице A и B инвертибилне.

c) Доказати да је

$$(A^{-1} + B^{-1})^n = 2^n E_n$$