Практикум 10

Никола Велов

Десета недеља

1 Задаци

1. Означимо са $M_3(\mathbb{R})$ простор реалних 3×3 матрица.

a) Дефинишимо пресликавање $A : \mathbb{R} \longrightarrow M_3(\mathbb{R})$ на следећи начин:

$$A(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Да ли је A линеарно пресликавање векторских простора над $\mathbb{R}$?

b) Доказати да важи $A(x_1)A(x_2) = A(x_1 + x_2)$. Закључити да је множење матрица облика $A(x)$ комутативно.

c) Одредити све реалне бројеве x такве да за сваку матрицу $B \in M_3(\mathbb{R})$ важи $A(x)B = BA(x)$. Извести закључак да множење 3×3 матрица у општем случају није комутативно.

2. Нека је p прост број и $\mathbb{F}_p$ поље са p елемената. Означимо са $M_n(\mathbb{F}_p)$ простор $n \times n$ матрица над $\mathbb{F}_p$.

a) Нека су $A, B \in M_n(\mathbb{F}_p)$ такве да је

$$A^2 = B^2 = (AB)^2 = E_n$$

где је E_n јединична $n \times n$ матрица над $\mathbb{F}_p$. Доказати да матрице A и B комутирају.

b) За матрицу $M \in M_3(\mathbb{F}_p)$ кажемо да је **циркулантна** ако је за неке $a, b, c \in \mathbb{F}_p$ облика

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

Доказати да је збир и производ две циркулантне матрице опет циркулантна матрица.

c) Доказати да сваке две циркулантне матрице комутирају.

3. Матрица $A \in M_n(\mathbb{R})$ је **десно стохастичка** ако су све вредности у њој ненегативни реални бројеви и збир у сваком реду је једнак 1. Дефинишемо и **лево стохастичке** матрице аналогно, само што је збир у свакој колони једнак 1 уместо у сваком реду. Матрица је **двоструко стохастичка** ако је и лево и десно стохастичка.

a) Доказати да је производ две лево стохастичке матрице лево стохастичка матрица.

b) Доказати да је производ две десно стохастичке матрице десно стохастичка матрица.

c) Доказати да је производ две двоструко стохастичке матрице двоструко стохастичка матрица.