доц. др Драган Ђокић

Линеарна алгебра

Универзитет у Београду
Математички факултет

Садржај

Глава 1

Групе и поља

1.1 Групе

Дефиниција 1.1. *Група је уређени пар* $(G, *)$, *где је* G *скуп а* $* : G \times G \longrightarrow G$ *бинарна операција на скупу* G *таква да важи*

(1) Асоцијативност: $(\forall x, y, z \in G)\ (x * y) * z = x * (y * z)$,

(2) Постојање неутрала: $(\exists e \in G)(\forall x \in G)\ x * e = x = e * x$,

(3) Постојање инверза: $(\forall x \in G)\,(\exists x^- \in G)\ \ x * x^- = x^- * x = e$.

Због асоцијативности обично изостављамо заграде и пишемо само $x*y*z$ мислећи на $(x * y) * z = x * (y * z)$. Испостави се да су у групи и неутрал и инверз јединствени.

Уколико операција $*$ задовољава само особину (1) из претходне дефиниције кажемо да је $(G, *)$ *полугрупа*, а уколико задовољава (1) и (2) кажемо да је *моноид*.

Дефиниција 1.2. *Кажемо да је група* $(G, *)$ *Абелова*[1] *(комутативна) ако задовољава и додатни услов*

(4) Комутативност: $(\forall x, y \in G)\ x * y = y * x$.

Приметимо да ако важи особина (4) довољно је да у (2) и (3) важи само једна једнакост (онда друга следи из (4)).

Најпознатији пример Абелове групе је $(\mathbb{R}, +)$. Лако се проверавају сва четири захтева:

[1] *Niels Henrik Abel* (1802. - 1829.), норвешки математичар

(1) Асоцијативност: $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\ (x+y)+z = x+(y+z)$,

(2) Постоји $0 \in \mathbb{R}$ за коју важи $(\forall x \in \mathbb{R})\ x+0 = x$,

(3) $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists -x \in \mathbb{R})\ x+(-x) = 0$,

(4) $(\forall x, y \in \mathbb{R})\ x+y = y+x$.

Наглашавамо да овде $-$ није одузимање нити било која друга бинарна операција. Минус означава инверз елемента групе, дакле то је унарна операција (има само 1 аргумент). Додуше, често пишемо $x-y$, али то је само скраћеница за $x+(-y)$.

Други стандардни примери Абелових група су $(\mathbb{C},+)$, $(\mathbb{Q},+)$, $(\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{R}\setminus\{0\},\cdot)$, $(\mathbb{C}\setminus\{0\},\cdot)$, $(\mathbb{Q}\setminus\{0\},\cdot)$, ... Зато ћемо операцију групе најчешће означавати са $+$ или $\cdot$ (који понекад и не пишемо) или неким симболом који подсећа на $+$ или $\cdot$. Скуп $2\mathbb{Z}$ свих парних бројева (или општије, скуп $n\mathbb{Z}$ свих целих бројева дељивих са n) је такође Абелова група у односу на сабирање. Са друге стране,

- $(\mathbb{N},+)$ није група (већ само полугрупа) јер сабирање нема неутрал у $\mathbb{N}$. А чак и ако укључимо нулу $(\mathbb{N}\cup\{0\},+)$ и даље није група (већ само моноид) јер нпр. $1 \in \mathbb{N}$ нема инверз за операцију $+$,

- $(\mathbb{R},\cdot)$ није група (јесте моноид) јер елемент $0 \in \mathbb{R}$ нема инверз,

- $(\mathbb{Z}\setminus\{0\},\cdot)$ није група (јесте моноид) јер елемент $2 \in \mathbb{Z}$ нема инверз,

- $(\mathbb{I},+)$ није група, где је $\mathbb{I} = \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ скуп ирационалних бројева, јер операција сабирања на $\mathbb{I}$ није добро дефинисана, нпр $\sqrt{2}, 1-\sqrt{2} \in \mathbb{I}$, а $\sqrt{2}+(1-\sqrt{2}) = 1 \notin \mathbb{I}$.

- $(2\mathbb{Z}+1,+)$ није група јер скуп $2\mathbb{Z}+1$ свих непарних бројева не садржи неутрал за сабирање.

Задатак 1.3. *Показати да је* $\left(\mathbb{R}^2,+\right)$ *Абелова група, где је операција задата са* $(x_1,x_2)+(y_1,y_2) := (x_1+y_1, x_2+y_2)$.

Решење. Пратимо дефиницију сабирања на $\mathbb{R}^2$ и проверавамо сва четири услова:

(1) $\left(\forall\,(x_1,x_2),(y_1,y_2),(z_1,z_2) \in \mathbb{R}^2\right)$

$$\begin{aligned}((x_1,x_2)+(y_1,y_2))+(z_1,z_2) &= (x_1+y_1, x_2+y_2)+(z_1,z_2)\\ &= (x_1+y_1+z_1, x_2+y_2+z_2)\\ &= (x_1,x_2)+(y_1+z_1, y_2+z_2)\\ &= (x_1,x_2)+((y_1,y_2)+(z_1,z_2)),\end{aligned}$$

(2) $\left(\exists\mathbb{O} := (0,0) \in \mathbb{R}^2\right)\left(\forall\,(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2\right)$

$$(x_1,x_2) + \mathbb{O} = (x_1+0, x_2+0) = (x_1,x_2)\,,$$

(3) $\left(\forall x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2\right)\left(\exists - x := (-x_1,-x_2) \in \mathbb{R}^2\right)$

$$x + (-x) = (x_1,x_2) + (-x_1,-x_2) = (x_1 - x_1, x_2 - x_2) = \mathbb{O},$$

(4) $\left(\forall\,(x_1,x_2)\,,(y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2\right)$

$$\begin{aligned}(x_1,x_2) + (y_1,y_2) &= (x_1+y_1, x_2+y_2)\\ &= (y_1+x_1, y_2+x_2) = (y_1,y_2) + (x_1,x_2)\,.\end{aligned}$$

□

На исти начин се показује и да су $(\mathbb{R}^n,+)$, $(\mathbb{C}^n,+)$, $(\mathbb{Q}^n,+)$ и $(\mathbb{Z}^n,+)$ Абелове групе, при чему је сабирање дефинисано по координатама.

Са $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ћемо означавати скуп свих реалних низова (и општије са B^A ћемо означавати скуп свих пресликавања из скупа A у скуп B). Ако су $a = (a_n)_{n=1}^{\infty}$ и $b = (b_n)_{n=1}^{\infty}$ низови из $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ њихов збир је низ $a+b$ чији је n-ти члан дат са $(a+b)_n := a_n + b_n$.

Задатак 1.4. *Показати да је* $\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}},+\right)$ *Абелова група.*

Решење. Да бисмо проверили асоцијативност, узмимимо три произвољна низа $a,b,c \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Требамо да покажемо да су низови $(a+b)+c$ и $a+(b+c)$ једнаки. Најлакши начин да то видимо јесте да им упоредимо сваку координату. Нека је $n \in \mathbb{N}$ произвољно, тада је

$$((a+b)+c)_n = (a+b)_n + c_n = a_n + b_n + c_n = a_n + (b+c)_n = (a+(b+c))_n,$$

што повлачи $(a+b)+c = a+(b+c)$ (једнакост низова).

Затим, неутрал ће бити нула-низ $\mathbb{O}_n = 0$. За произвољан низ $a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ и прозвољно $n \in \mathbb{N}$ важи $(a+\mathbb{O})_n = a_n + \mathbb{O}_n = a_n + 0 = a_n$, тј. важи $a + \mathbb{O} = a$ у смислу низова.

Инверз низа $a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ће бити низ $-a$ дефинисан са $(-a)_n := -a_n$ јер важи $(a+(-a))_n = a_n + (-a)_n = a_n - a_n = 0$, за све $n \in \mathbb{N}$.

И комутативност тривијално важи: $(a+b)_n = a_n + b_n = b_n + a_n = (b+a)_n$, за све низове $a,b \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. □

Слично се показује и да је $(\mathbb{R}[x],+)$ је Абелова група, где је сабирање дефинисано на следећи начин. Ако су $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m$ и $q(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n$ два произвољна полинома из $\mathbb{R}[x]$, онда је $(p+q)(x) := (a_0+b_0) + (a_1+b_1)\,x + \cdots + (a_l+b_l)\,x^l$, где је $l = \max\{m,n\}$, и $a_k = 0$, за $k > m$, и $b_k = 0$, за $k > n$. Приметимо да за овако дефинисано сабирање полинома важи $(p+q)(a) = p(a) + q(a)$, за све $a \in \mathbb{R}$.

Означимо са $\rho(k,n)$, за $k \in \mathbb{Z}$ и $n \in \mathbb{N}$, остатак при дељену k са n, и нека је $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$ скуп остатака при дељењу са n. На $\mathbb{Z}_n$ имамо дефинисане две операције $k +_n l := \rho(k+l, n)$ и $k \cdot_n l := \rho(kl, n)$ (сабирање и множење по модулу n).

Задатак 1.5. *а) Показати да је* $(\mathbb{Z}_n, +_n)$ *Абелова група.*

б) Показати да је $(\mathbb{Z}_n, \cdot_n)$ *(Абелова) група ако и само ако је* n *прост број.*

Решење. а) Следи из

(1) $(\forall k, l, m \in \mathbb{Z}_n)$

$$\begin{aligned}(k +_n l) +_n m &= \rho(k+l, n) +_n m = \rho(\rho(k+l, n) + m, n)\\ &= \rho(k+l+m, n) = \rho(k + \rho(l+m, n), n)\\ &= k +_n \rho(l+m, n) = k +_n (l +_n m)\,,\end{aligned}$$

(2) имамо неутрал $0 \in \mathbb{Z}_n$ јер $(\forall k \in \mathbb{Z}_n)\ k +_n 0 = \rho(k+0, n) = \rho(k, n) = k$,

(3) за сваки $k \in \mathbb{Z}_n$ имамо инверз $-_n k := \begin{cases} 0, & \text{за } k = 0,\\ n-k, & \text{иначе,}\end{cases}$

(4) $(\forall k, l \in \mathbb{Z}_n)\ k +_n l = \rho(k+l, n) = \rho(l+k, n) = l +_n k$.

б) Асоцијативност, комутативност и да је 1 неутрал се проверава на исти начин као за $+_n$. Само је питање да ли за произвољан елемент $k \in \mathbb{Z}_n \setminus \{0\}$ постоји елемент $k^- \in \mathbb{Z}_n \setminus \{0\}$ такав да важи $1 = k \cdot_n k^- = \rho(kk^-, n)$, тј. да постоји $a \in \mathbb{Z}$ такво да је $1 = kk^- + an$. Према Еуклидовом[2] алгоритму ово последње је еквивалентно са тим да су k и n узајамно прости. Сетимо се да је k био произвољан елемент $\mathbb{Z}_n$. То значи да је $(\mathbb{Z}_n, \cdot_n)$ (Абелова) група ако и само ако је n узајамно прост са свим $1, 2, 3, \dots, n-1$, тј. n је прост. □

Следе мало нестандарднији примери.

Задатак 1.6. *Показати да је* $(\mathbb{R} \setminus \{-1\}, ✠)$ *Абелова група, ако је операција* ✠ *задата са* $x✠y := xy + x + y$.

Решење. Имамо да важи

(1) $(\forall x, y, z \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$

$$\begin{aligned}(x✠y)✠z &= (xy+x+y)✠z = (xy+x+y)z + (xy+x+y) + z\\ &= xyz + xy + xz + yz + x + y + z\\ &= x(yz+y+z) + x + (yz+y+z)\\ &= x✠(yz+y+z) = x✠(y✠z),\end{aligned}$$

[2] $E\upsilon\kappa\lambda\epsilon\iota\delta\eta\varsigma$ (3. и 4. век п.н.е.), антички математичар

(2) $(\exists \mathbb{O} := 0 \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$

$$x \maltese \mathbb{O} = x \cdot 0 + x + 0 = x,$$

(3) $(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}) \left(\exists \backsim x := -\frac{x}{x+1} \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}\right)$

$$x \maltese (\backsim x) = x(\backsim x) + x + (\backsim x) = x\left(-\frac{x}{x+1}\right) + x - \frac{x}{x+1} = 0 = \mathbb{O},$$

(4) $(\forall x, y \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$

$$x \maltese y = xy + x + y = y \maltese x,$$

што значи да је $(\mathbb{R} \setminus \{-1\}, \maltese)$ Абелова група.

Сад се поставља питање како смо погодили шта је $\mathbb{O}$, а шта $\backsim x$? Неутрал $\mathbb{O}$ тражимо из услова да је $x \maltese \mathbb{O} = x \cdot \mathbb{O} + x + \mathbb{O} = x$, тј. $(x+1)\mathbb{O} = 0$, за све $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Слично, $\backsim x$ можемо наћи из $x \maltese (\backsim x) = x(\backsim x) + x + (\backsim x) = (x+1)(\backsim x) + x = 0$. □

Задатак 1.7. *Испитати да ли је $(\mathbb{Z}, \bigstar)$ група, ако је операција $\bigstar$ задата са $m \bigstar n := m + 2n$.*

Решење. Овде $(\mathbb{Z}, \bigstar)$ неће бити група јер операција $\bigstar$ није асоцијативна. Нпр. приметимо да је

$$(1 \bigstar 2) \bigstar 3 = 5 \bigstar 3 = 11 \qquad \text{и} \qquad 1 \bigstar (2 \bigstar 3) = 1 \bigstar 8 = 17.$$

□

Задатак 1.8. *Нека је $G = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R},\ x_1, x_2 \neq 0\}$ и*

$$\boxplus : G \times G \longrightarrow G, \qquad (x_1, x_2, x_3) \boxplus (y_1, y_2, y_3) = (x_1 y_1, x_2 y_2, x_1 y_3 + x_3 y_2).$$

Показати да је $(G, \boxplus)$ група. Да ли је ова група Абелова?

Решење. Прво покажимо да је $(G, \boxplus)$ група. Имамо

(1) $(\forall (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) (z_1, z_2, z_3) \in G)$

$$\begin{aligned}
&((x_1, x_2, x_3) \boxplus (y_1, y_2, y_3)) \boxplus (z_1, z_2, z_3) \\
&= (x_1 y_1, x_2 y_2, x_1 y_3 + x_3 y_2) \boxplus (z_1, z_2, z_3) \\
&= (x_1 y_1 z_1, x_2 y_2 z_2, x_1 y_1 z_3 + (x_1 y_3 + x_3 y_2) z_2) \\
&= (x_1 y_1 z_1, x_2 y_2 z_2, x_1 (y_1 z_3 + y_3 z_2) + x_3 y_2 z_2) \\
&= (x_1, x_2, x_3) \boxplus (y_1 z_1, y_2 z_2, y_1 z_3 + y_3 z_2) \\
&= (x_1, x_2, x_3) \boxplus ((y_1, y_2, y_3) \boxplus (z_1, z_2, z_3)),
\end{aligned}$$

(2) $(\exists \mathbb{O} := (1,1,0) \in G)\,(\forall\,(x_1,x_2,x_3) \in G)$

$$\begin{aligned}(x_1,x_2,x_3) \boxplus \mathbb{O} &= (x_1 \cdot 1, x_2 \cdot 1, x_1 \cdot 0 + x_3 \cdot 1) = (x_1,x_2,x_3)\,,\\ \mathbb{O} \boxplus (x_1,x_2,x_3) &= (1 \cdot x_1, 1 \cdot x_2, 1 \cdot x_3 + 0 \cdot x_2) = (x_1,x_2,x_3)\,,\end{aligned} \tag{1.9}$$

(3) $(\forall x = (x_1,x_2,x_3) \in G)\left(\exists \boxminus x := \left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, -\frac{x_3}{x_1x_2}\right) \in G\right)$

$$\begin{aligned} x \boxplus (\boxminus x) &= \left(x_1\frac{1}{x_1}, x_2\frac{1}{x_2}, x_1\left(-\frac{x_3}{x_1x_2}\right) + x_3\frac{1}{x_2}\right) = \mathbb{O},\\ (\boxminus x) \boxplus x &= \left(\frac{1}{x_1}x_1, \frac{1}{x_2}x_2, \frac{1}{x_1}x_3 + \left(-\frac{x_3}{x_1x_2}\right)x_2\right) = \mathbb{O}.\end{aligned} \tag{1.10}$$

Дакле, $(G, \boxplus)$ јесте група. Операција $\boxplus$ очигледно није комутативна јер је

$$(1,1,1) \boxplus (1,2,1) = (1,2,3) \qquad \text{и} \qquad (1,2,1) \boxplus (1,1,1) = (1,2,2).$$

$\square$

Претходни пример показује да *нису* све групе Абелове како то можда изгледа из оних уводних примера. Приметимо да смо због некомутативности у (1.9) и (1.10) имали по две провере.

Нека је $N = \{1,2,3,\ldots,n\}$ (или општије, N је скуп од n елемената). Означимо са $\mathbb{S}_n$ скуп свих пермутација (бијекција) скупа N. Пошто су елементи скупа $\mathbb{S}_n$ пермутације тј. пресликавања, операција на $\mathbb{S}_n$ ће бити композиција пресликавања.

Задатак 1.11. *Показати да је $(\mathbb{S}_n, \circ)$ група. Показати да је ова група Абелова ако и само ако је $n = 1$ или 2.*

Решење. Нека су ρ, σ, τ три произвољне пермутације из $\mathbb{S}_n$, треба показати да је $(\rho \circ \sigma) \circ \tau = \rho \circ (\sigma \circ \tau)$ као пресликавање скупа $\{1,2,\ldots,n\}$ на себе. Нека је $k \in \{1,2,\ldots,n\}$ произвољан, тада је

$$((\rho \circ \sigma) \circ \tau)(k) = (\rho \circ \sigma)(\tau(k)) = \rho(\sigma(\tau(k))) = \rho((\sigma \circ \tau)(k)) = (\rho \circ (\sigma \circ \tau))(k).$$

Како је k било произвољно имамо једнакост пресликавања $(\rho \circ \sigma) \circ \tau = \rho \circ (\sigma \circ \tau)$.

Неутрал за $\circ$ ће бити идентичко пресликавање $\mathbb{1}(k) = k$, за $1 \leqslant k \leqslant n$. Лако се проверава да је

$$(\sigma \circ \mathbb{1})(k) = \sigma(\mathbb{1}(k)) = \sigma(k) \qquad \text{и} \qquad (\mathbb{1} \circ \sigma)(k) = \mathbb{1}(\sigma(k)) = \sigma(k),$$

за све $\sigma \in \mathbb{S}_n$. И слично, инверз за $\circ$ ће бити инверзна функција σ^{-1} (која постоји јер је σ бијекција).

Ако је $n = 1$ група $\mathbb{S}_1$ има само један елемент $\mathbb{1}$, па је тривијално Абелова. Ако је $n = 2$ група $\mathbb{S}_2$ има два елемента $\mathbb{1}$ и ε (које слика 1 у

2 и обрнуто). Онда се лако проверава да је $\mathbb{1} \circ \mathbb{1} = \mathbb{1} \circ \mathbb{1}$, $\varepsilon \circ \varepsilon = \varepsilon \circ \varepsilon$ и $\mathbb{1} \circ \varepsilon = \varepsilon = \varepsilon \circ \mathbb{1}$. Нека је сада $n \geqslant 3$. Изабраћемо σ и τ из $\mathbb{S}_n$ на следећи начин:

$$\sigma(k) = \begin{cases} 2, & \text{ако је } k = 1, \\ 1, & \text{ако је } k = 2, \\ k, & \text{иначе,} \end{cases} \qquad \text{и} \qquad \tau(k) = \begin{cases} 3, & \text{ако је } k = 1, \\ 1, & \text{ако је } k = 3, \\ k, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Тада је

$$(\sigma \circ \tau)(1) = \sigma(3) = 3 \qquad \text{и} \qquad (\tau \circ \sigma)(1) = \tau(2) = 2,$$

што значи да група $(\mathbb{S}_n, \circ)$ није Абелова за $n \geqslant 3$. □

Групу $(\mathbb{S}_n, \circ)$ зовемо *симетрична група* реда n. Ову групу ћемо користити за изучавање детерминанти.

1.2 Подгрупе

Дефиниција 1.12. *Нека је $(G, *)$ група и $H \subseteq G$ њен подскуп. Кажемо да је H подгрупа групе G ако је $(H, *)$ група и пишемо $H \leqslant G$ или $(H, *) \leqslant (G, *)$.*

Пошто је асоцијативност изражена преко квантификатора $\forall$ она се аутоматски преноси и на подскуп. Зато је потребан и довољан услов да подскуп $H \subseteq G$ буде подгрупа да важи

(1) $(\forall x, y \in H)\ x * y \in H$,

(2) $e \in H$,

(3) $(\forall x \in H)\ x^- \in H$,

при чему се овде мисли на неутрал и инверз из групе G. Претходна три услова (заједно) су еквивалентни услову $(\forall x, y \in H)\ x^- * y \in H$.

На пример имамо да је $(\mathbb{Z}, +) \leqslant (\mathbb{Q}, +) \leqslant (\mathbb{R}, +) \leqslant (\mathbb{C}, +)$ и $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot) \leqslant (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot) \leqslant (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$. Али $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot)$ није подгрупа $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ јер инверз елемента 2 (који постоји у $\mathbb{Q}$) не припада $\mathbb{Z}$.

Задатак 1.13. *Показати да је скуп $H = \{(a, b, a + 2b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ подгрупа групе $\left(\mathbb{R}^3, +\right)$.*

Решење. Следи из

(1) $(\forall (a, b, a + 2b), (c, d, c + 2d) \in H)$

$$\begin{aligned} (a, b, a + 2b) + (c, d, c + 2d) &= (a + c, b + d, (a + 2b) + (c + 2d)) \\ &= (a + c, b + d, a + c + 2(b + d)) \in H, \end{aligned}$$

(2) $\mathbb{O} = (0, 0, 0 + 2 \cdot 0) \in H$,

(3) $(\forall (a, b, a + 2b) \in H)\ -(a, b, a + 2b) = (-a, -b, -a + 2(-b)) \in H$.

□

Задатак 1.14. *Који од следећих подскупова су подгрупе* $(\mathbb{R}[x], +)$*:*

а) $A = \{p \in \mathbb{R}[x] \mid p(0) = 2p'(3)\}$,

б) $B = \{p \in \mathbb{R}[x] \mid p(0) = 3\}$,

в) $\mathbb{R}^n[x] := \{p \in \mathbb{R}[x] \mid \deg p < n\}$, *где је* $n \in \mathbb{N}$, *а* deg *означава степен полинома,*

г) $G = \{p \in \mathbb{R}[x] \mid \deg p = 10\} \cup \{\mathbb{O}\}$.

Решење. а) Из

(1) $(\forall p, q \in A)$

$$(p + q)(0) = p(0) + q(0) = 2p'(3) + 2q'(3) = 2(p' + q')(3) = 2(p + q)'(3) \implies p + q \in A,$$

(2) $\mathbb{O}(0) = 0 = 2\mathbb{O}'(3) \implies \mathbb{O} \in A$,

(3) $(\forall p \in A)\ (-p)(0) = -p(0) = -2p'(3) = 2(-p)'(3) \implies -p \in A$,

следи да је A подгрупа $\mathbb{R}[x]$.

б) Нула-полином $\mathbb{O}$ не припада B, па B не може бити подгрупа.

в) Из

(1) $(\forall p, q \in \mathbb{R}^n[x])$

$$\deg(p + q) \leqslant \max\{\deg p, \deg q\} < n \implies p + q \in \mathbb{R}^n[x],$$

(2) $\mathbb{O} \in \mathbb{R}^n[x]$ (степен нула-полинома се обично дефинише као -1),

(3) $(\forall p \in \mathbb{R}^n[x])\ \deg(-p) = \deg p < n \implies -p \in \mathbb{R}^n[x]$,

следи да је $\mathbb{R}^n[x]$ подгрупа $\mathbb{R}[x]$.

г) Скуп G није подгрупа јер G није затворена за сабирање. На пример, можемо узети $p(x) = x^{10}$ и $q(x) = -x^{10} + x$ из G чији збир $(p+q)(x) \notin G$. □

Особина комутативности се преноси са групе на подгрупу јер је дефинисана помоћу квантификатора $\forall$ (као и асоцијативност). Зато је подгрупа Абелове групе увек Абелова. Обрнуто не важи, наредни пример представља Абелову подгрупу неабелове групе.

Задатак 1.15. *а) Показати да је* $H = \{(x_1, x_2, 0) \mid x_1, x_2 \neq 0\}$ *подгрупа групе* $(G, \boxplus)$ *из Задатка 1.8.*

б) Да ли је група $(H, \boxplus)$ *Абелова?*

Решење. а) Следи из

(1) $(\forall (x_1, x_2, 0), (y_1, y_2, 0) \in H)\ (x_1, x_2, 0) \boxplus (y_1, y_2, 0) = (x_1y_1, x_2y_2, 0) \in H$,

(2) $\mathbb{O} = (1, 1, 0) \in H$,

(3) $(\forall (x_1, x_2, 0) \in H)\ \boxminus (x_1, x_2, 0) = \left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, 0\right) \in H$.

б) Као што смо већ видели рестрикција операције $\boxplus$ на H је дата са $(x_1, x_2, 0) \boxplus (y_1, y_2, 0) = (x_1y_1, x_2y_2, 0)$ и очигледно је комутативна. □

Задатак 1.16. *а) Нека је* $U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ *јединична кружница у комплексној равни. Показати да је* $(U, \cdot)$ *подгрупа групе* $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$.

б) Нека је n *природан број. Показати да је* $(Z_n, \cdot)$ *подгрупа групе* $(U, \cdot)$, *где је* $Z_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$ *скуп свих* n*-тих корена из јединице.*

Решење. а) Следи из

(1) $(\forall z, w \in U)\ |zw| = |z| \cdot |w| = 1 \Longrightarrow zw \in U$,

(2) $|1| = 1 \Longrightarrow 1 \in U$,

(3) $(\forall z \in U)\ \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} = 1 \Longrightarrow \frac{1}{z} \in U$.

б) Према Моавровој[3] формули елементи скупа Z_n су

$$\zeta_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}, \quad \text{за } 0 \leqslant k \leqslant n-1.$$

Када то знамо лако ћемо проверити да је

(1) $(\forall \zeta_k, \zeta_l \in Z_n)$

$$\begin{aligned}
\zeta_k\zeta_l &= \cos\frac{2k\pi}{n}\cos\frac{2l\pi}{n} - \sin\frac{2k\pi}{n}\sin\frac{2l\pi}{n} \\
&\quad + i\left(\cos\frac{2k\pi}{n}\sin\frac{2l\pi}{n} + \sin\frac{2k\pi}{n}\cos\frac{2l\pi}{n}\right) \\
&= \cos\frac{2(k+l)\pi}{n} + i\sin\frac{2(k+l)\pi}{n} \\
&= \left\{\begin{array}{ll} \zeta_{k+l}, & \text{за } k+l \leqslant n-1 \\ \zeta_{k+l-n}, & \text{за } k+l \geqslant n \end{array}\right\} \in Z_n,
\end{aligned}$$

[3] *Abraham de Moivre* (1667. - 1754.), француски математичар

(2) $1 = \zeta_0 \in Z_n$,

(3) $(\forall \zeta_k \in Z_n)\, \frac{1}{\zeta_k} = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & \text{за } k = 0 \\ \zeta_{n-k}, & \text{за } k \geqslant 1 \end{array} \right\} \in Z_n$, према делу (1),

што значи да је Z_n подгрупа од U (а самим тим и од $\mathbb{C} \setminus \{0\}$).

Други начин да се ово провери (без екплицитног одређивања елемената Z_n) је

(1) $(\forall z, w \in Z_n)\ (zw)^n = z^n w^n = 1 \cdot 1 = 1 \Longrightarrow zw \in Z_n$,

(2) $1^n = 1 \Longrightarrow 1 \in Z_n$,

(3) $(\forall z \in Z_n)\ \left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z^n} = 1 \Longrightarrow \frac{1}{z} \in Z_n$.

□

1.3 Поља

Дефиниција 1.17. *Поље је уређена тројка $(F, +, \cdot)$, где је F скуп са две бинарне операције $+, \cdot : F \times F \longrightarrow F$ такве да су $(F, +)$ и $(F \setminus \{0\}, \cdot)$ Абелове групе и важи дистрибутивност $\cdot$ према $+$:*

$$(\forall x, y, z \in F)\ (x + y) \cdot z = xz + yz.$$

У притходној дефиницији 0 означава адитивни неутрал, тј. неутрал за операцију $+$.

Стандардни примери поља су $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$. Поред њих занимљива су нам и коначна поља $(\mathbb{Z}_p, +_p, \cdot_p)$. Са друге стране, тројка $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ није поље јер $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot)$ није група.

Задатак 1.18. *Показати да је $(\mathbb{Z}_p, +_p, \cdot_p)$ поље, где је p прост број.*

Решење. У задатку 1.5 смо видели да су $(\mathbb{Z}_p, +_p)$ и $(\mathbb{Z}_p, \cdot_p)$ Абелове групе. Остаје још да проверимо дистрибутивност, тј. да за све $k, l, m \in \mathbb{Z}_p$ важи

$$\begin{aligned}(k +_p l) \cdot_p m &= \rho(k + l, p) \cdot_p m = \rho((k + l)m, p) \\ &= \rho(km + lm, p) = \rho(km, p) +_p \rho(lm, p) = (k \cdot_p m) +_p (l \cdot_p m)\,.\end{aligned}$$

□

Задатак 1.19. *Показати да је скуп $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right) = \left\{ a + b\sqrt{2} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{Q} \right\}$ поље у односу на стандардне операције $+$ и $\cdot$.*

Решење. За почетак треба показати да су $\left(\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right), +\right)$ и $\left(\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right) \setminus \{0\}, \cdot\right)$ Абелове групе. То можемо урадити тако што покажемо да је $\left(\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right), +\right) \leqslant (\mathbb{R}, +)$ и $\left(\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right) \setminus \{0\}, +\right) \leqslant (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$. Како се ове провере изводе на сличан начин показаћемо само да је $(\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right) \setminus \{0\}, +) \leqslant (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ (што је технички компликованије):

(1) $\left(\forall a + b\sqrt{2}, c + d\sqrt{2} \in \mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right) \setminus \{0\}\right)$

$$\left(a + b\sqrt{2}\right)\left(c + d\sqrt{2}\right) = (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2} \in \mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right) \setminus \{0\}$$

(овде користимо да је производ два броја различитих од нуле такође различит од нуле),

(2) $1 = 1 + 0 \cdot \sqrt{2} \in \mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right) \setminus \{0\}$,

(3) $\left(\forall a + b\sqrt{2} \in \mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right) \setminus \{0\}\right)$

$$\begin{aligned}\frac{1}{a + b\sqrt{2}} &= \frac{1}{a + b\sqrt{2}} \cdot \frac{a - b\sqrt{2}}{a - b\sqrt{2}} = \frac{a - b\sqrt{2}}{a^2 - 2b^2} \\ &= \frac{a}{a^2 - 2b^2} + \frac{-b}{a^2 - 2b^2}\sqrt{2} \in \mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right) \setminus \{0\}.\end{aligned}$$

Једини преостали захтев је дистрибутивност $+$ и $\cdot$. Можемо рећи да се она наслеђује из поља $\mathbb{R}$ (јер је изражена преко кватификатора $\forall$, па аутоматски важи и на мањем скупу), а можемо и директно проверити да важи

$$\begin{aligned}&\left(\left(a + b\sqrt{2}\right) + \left(c + d\sqrt{2}\right)\right)\left(e + f\sqrt{2}\right) \\ &= \left(a + b\sqrt{2}\right)\left(e + f\sqrt{2}\right) + \left(c + d\sqrt{2}\right)\left(e + f\sqrt{2}\right),\end{aligned}$$

за све $a + b\sqrt{2}, c + d\sqrt{2}, e + f\sqrt{2} \in \mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right) \setminus \{0\}$.

□

И општије, $\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right) = \left\{a + b\sqrt{d} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{Q}\right\}$ ће бити поље, где је d бесквадратан цео број (тј. производ различитих простих бројева).

Задатак 1.20. *Нека је $\mathbb{R}[x]/f$ скуп остатака при дељењу полинома из $\mathbb{R}[x]$ са $f(x) = x^2 - x + 1$. Показати да је $(\mathbb{R}[x]/f, +_f, \cdot_f)$ поље, где $+_f$ и $\cdot_f$ означавају сабирање и множење по модулу f. Одредити инверз елемента $x + 1$ у односу на $\cdot_f$.*

Решење. Овај задатак је аналоган Задатку 1.18 (само што имамо полиноме уместо бројева), па ће и решење бити врло слично. Како остатак има мањи степен од делиоца јасно је да ће скуп остатака $\mathbb{R}[x]/f$ бити

$\{a + bx \mid a, b \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2[x]$. Притом, сабирање по модулу $+_f$ функционише као обично сабирање на $\mathbb{R}^2[x]$, па ће $(\mathbb{R}[x]/f, +_f)$ бити Абелова група.

Што се тиче множења $\cdot_f$ ситуација је мало компликованија. Означимо са $\rho(a, f)$ остатак при дељењу полинома a полиномом f. Тада је $a \cdot_f b = \rho(ab, f)$. Лако се проверава да за $\cdot_f$ важи

$$(a \cdot_f b) \cdot_f c = \rho(ab, f) \cdot_f c = \rho(abc, f) = a \cdot_f \rho(bc, f) = a \cdot_f (b \cdot_f c)$$

и

$$a \cdot_f b = \rho(ab, f) = \rho(ba, f) = b \cdot_f a,$$

за све $a, b, c \in (\mathbb{R}[x]/f) \setminus \{0\}$, као и да је 1 неутрал за $\cdot_f$. Пронађимо сада инверз произвољног елемента $g \in (\mathbb{R}[x]/f) \setminus \{0\}$ (у односу на $\cdot_f$). Лако се проверава да је полином f нерастављив (јер нема реалне корене), што даље значи да су полиноми f и g узајамно прости. Али онда Еуклидов алгоритам гарантује постојање полинома a и b таквих да важи $1 = af + bg$. Узимајући остатак по модулу f од обе стране претходне једнакости добијамо $1 = b \cdot_f g$, што тачно значи да је b мултипликативни инверз елемента g.

Проверимо дистрибутивност, за све $a, b, c \in (\mathbb{R}[x]/f) \setminus \{0\}$ важи

$$\begin{aligned}(a +_f b) \cdot_f c &= (a + b) \cdot_f c = \rho((a + b)c, f) = \rho(ac + bc, f)\\ &= \rho(ac, f) + \rho(bc, f) = a \cdot_f c +_f b \cdot_f c.\end{aligned}$$

Дакле, $(\mathbb{R}[x]/f, +_f, \cdot_f)$ јесте поље.

Мултипликативни инверз елемента $x + 1$ ћемо одредити Еуклидовим алгоритмом на већ описан начин. Дељењем полинома $f(x) = x^2 - x + 1$ са $x + 1$ добијамо количник $x - 2$ и остатак 3. То значи да је $f(x) = (x - 2)(x + 1) + 3$, односно $1 = \frac{1}{3}f(x) + \left(-\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}\right)(x + 1)$. Узимањем остатка при дељењу са f добијамо $1 = \left(-\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}\right) \cdot_f (x + 1)$, што значи да је $-\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ тражени инверз. □

Приметимо да исти закључак важи и уколико у претходном задатку полином f заменимо произвољним нерастављивим полиномом из $\mathbb{R}[x]$.

Задатак 1.21. *Показати да је* $(\mathbb{R}, \oplus, \odot)$ *поље ако су операције задате са*

$$x \oplus y = x + y + 1 \qquad \textit{и} \qquad x \odot y = xy + x + y.$$

Решење. Покажимо да је $(\mathbb{R}, \oplus)$ Абелова група:

(1) $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})$

$$\begin{aligned}(x \oplus y) \oplus z &= (x + y + 1) \oplus z = x + y + z + 2\\ &= x \oplus (x + z + 1) = x \oplus (y \oplus z),\end{aligned}$$

(2) $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})$ $x \oplus y = x + y + 1 = y \oplus x$,

(3) постоји неутрал $\mathbb{O} := -1$,

(4) $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists \ominus x := -x-2)\ x \oplus (\ominus x) = x + (-x-2) + 1 = \mathbb{O}$.

Затим треба показати да је $(\mathbb{R} \setminus \{-1\}, \odot)$ Абелова група, што смо већ урадили у Задатку 1.6. (Из $\mathbb{R}$ је искључен адитивни неутрал $\mathbb{O} = -1$.)

Остаје још да покажемо дистрибутивност, за све $x, y, z \in \mathbb{R}$ имамо да је

$$(x \oplus y) \odot z = (x + y + 1) \odot z = (x + y + 1)z + (x + y + 1) + z$$

једнако

$$x \odot z \oplus y \odot z = (xz + x + z) \oplus (yz + y + z) = (xz + x + z) + (yz + y + z) + 1.$$

$\square$

Глава 2

Системи линеарних једначина

Нека је

$$
\begin{array}{lccccccccccc}
J_1: & a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
J_2: & a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
J_3: & a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & + & \dots & + & a_{3n}x_n & = & b_3 \\
 & \multicolumn{11}{c}{\dotfill} \\
J_m: & a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & a_{m3}x_3 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array}
\tag{2.1}
$$

систем од m једначина са n непознатих над пољем F, где су x_j, $1 \leqslant j \leqslant n$, непознате, а a_{ij} и b_i, $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$, скалари из поља F. Уколико су сви скалари b_i на десној страни једнаки нули кажемо да је систем хомоген. Овакав систем увек има бар једно (тривијално решење).

Имамо три *елементарне трансформације* које чувају скуп решења система. То су

(1) Замена места i-тој и j-тој једначини: $J_i \leftrightarrow J_j$,

(2) Множење i-те једначине ненула скаларом α: $J_i \to \alpha J_i$, за $\alpha \in F \setminus \{0\}$,

(3) Додавање j-те једначине помножене скаларом α i-тој једначини: $J_i \to J_i + \alpha J_j$, за $\alpha \in F$.

За два система кажемо да су *еквивалентни* ако имају исти скуп решења. Можемо рећи да елементарне трансформације трансформишу систем у њему еквивалентан.

Гаусов[1] *метод* (метод елиминације, свођење на троугаони облик)

[1] Johann Carl Friedrich Gauß (1777. - 1855.), немачки математичар и физичар

подразумева да коришћењем последње елементарне трансформације елиминишемо промењиву x_1 из свих једначина сем прве:

$$
\begin{array}{ccccccccccccl}
a_{11}\boxed{x_1} & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 & & \Big/\left(-\frac{a_{21}}{a_{11}}\right) \quad \Big/\left(-\frac{a_{31}}{a_{11}}\right) \quad \dots \quad \Big/\left(-\frac{a_{n1}}{a_{11}}\right) \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 & & \\
a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & + & \dots & + & a_{3n}x_n & = & b_3 & & \\
\multicolumn{11}{c}{\dotfill} & & \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & a_{m3}x_3 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m & & \\
\hline
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 & & \\
 & & a'_{22}x_2 & + & a'_{23}x_3 & + & \dots & + & a'_{2n}x_n & = & b'_2 & & \\
 & & a'_{32}x_2 & + & a'_{33}x_3 & + & \dots & + & a'_{3n}x_n & = & b'_3 & & \\
 & & \multicolumn{9}{c}{\dotfill} & & \\
 & & a'_{m2}x_2 & + & a'_{m3}x_3 & + & \dots & + & a'_{mn}x_n & = & b'_m & & \\
\hline
\end{array}
$$

где су $a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{i1}a_{1j}}{a_{11}}$ и $b'_i = b_i - \frac{a_{i1}b_1}{a_{11}}$ неки нови коефицијенти. (Овде „дељење" означава множење мултипликативним инверзом из поља F.) Овим смо проблем свели на систем од $m-1$ једначине са $n-1$ непознатом. Наравно, и њега ћемо решавати на исти начин.

Приметимо да смо овде користили да је $a_{11} \neq 0$. Ако се деси да је $a_{11} = 0$ само заменимо прву једначину i-том једначином у којој је $a_{i1} \neq 0$ и применимо исти поступак. Уколико се баш погоди да су сви $a_{i1} = 0$, $1 \leqslant i \leqslant m$, то значи да промењива x_1 може да буде било шта из поља F, а нама остаје да решимо систем од $n-1$ промењиве $x_2, \dots, x_n$.

Понављањем поступка у сваком кораку смањујемо број промењивих бар за 1 и на крају добијамо троугани облик:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
c_{11}x_1 & + & c_{12}x_2 & + & c_{13}x_3 & + & \dots & + & c_{1n}x_n & = & d_1 \\
 & & c_{2\underline{2}}x_{\underline{2}} & + & \multicolumn{3}{c}{\dotfill} & + & c_{2n}x_n & = & d_2 \\
 & & & & c_{3\underline{3}}x_{\underline{3}} & + & \dots & + & c_{3n}x_n & = & d_3 \\
 & & & & & \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\
 & & & & & \multicolumn{3}{r}{c_{m\underline{m}}x_{\underline{m}} + \quad \dots \quad + c_{mn}x_n} & & = & d_m
\end{array}
$$

где је $\underline{k} \geqslant k$ (јер смо у неком кораку можда изгубили више од једне промењиве). Гледамо последњу једначину из система, имамо три могућности:

- Може да се деси да је сума на левој страни једначине празна (тј. да је $\underline{m} > n$).
  - Уколико је $d_m \neq 0$ систем нема решење и ту се цео поступак завршава.
  - Уколико је $d_m = 0$ не радимо ништа.
- Уколико лева страна има тачно један ненула сабирак тј. $\underline{m} = n$ и $c_{\underline{m}n} \neq 0$ тада је $x_n = \frac{d_m}{c_{\underline{m}n}}$.
- Уколико лева страна има више сабирака тј. $\underline{m} < n$ и притом је $c_{m\underline{m}} \neq 0$ промењиве $x_{\underline{m}+1}, \dots, x_n$ могу бити произвољне, а промењиву $x_{\underline{m}}$ добијамо као $x_m = \frac{d_m}{c_{m\underline{m}}} - \frac{c_{m,\underline{m}+1}}{c_{m\underline{m}}}x_{\underline{m}+1} - \dots - \frac{c_{mn}}{c_{m\underline{m}}}x_n$.

Затим бришемо последњу једначину, заменимо све израчунате променљиве у свим претходним једначинама и поновимо поступак са новом последњом једначином. Када побришемо (тј. искористимо) све једначине, добили смо решење система.

Овде смо редослед елиминације променљивих изабрали тако да све визуелно подсећа на троугао. Могли смо их елиминисати и било којим другим редом.

2.1 Системи без параметара

Уколико не нагласимо другачије убудуће ћемо увек подразумевати да је поље скалара $\mathbb{R}$.

Задатак 2.2. *Решити систем*

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & - & 4z & = & -4 \\ 5x & + & 11y & - & 21z & = & -22 \\ 3x & - & 2y & + & 3z & = & 11 \end{array}$$

Решење. Гаусов поступак даје

$$\begin{array}{rcrcrcll} \boxed{x} & + & 2y & - & 4z & = & -4 & /(-5)\ /(-3) \\ 5x & + & 11y & - & 21z & = & -22 & \\ 3x & - & 2y & + & 3z & = & 11 & \\ \hline x & + & 2y & - & 4z & = & -4 & \\ & & \boxed{y} & - & z & = & -2 & / \cdot 8 \\ & - & 8y & + & 15z & = & 23 & \\ \hline x & + & 2y & - & 4z & = & -4 & \\ & & y & - & z & = & -2 & \\ & & & & 7z & = & 7 & \\ \hline \end{array}$$

Дакле, $z = 1$. Из друге једначине добијамо $y = z - 2 = -1$, и на крају $x = -2y + 4z - 4 = 2$. Наш систем има јединствено решење $(x, y, z) = (2, -1, 1)$. □

Задатак 2.3. *Решити систем*

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 5y & - & 13z & = & 3 \\ 3x & - & y & + & 5z & = & 2 \\ 2x & + & 2y & - & 4z & = & 1 \end{array}$$

Решење. Гаусов поступак даје

$$
\begin{array}{rcrcrcrl}
\boxed{x} & + & 5y & - & 13z & = & 3 & /(-3)\ /(-2) \\
3x & - & y & + & 5z & = & 2 & \\
2x & + & 2y & - & 4z & = & 1 & \\
\hline
x & + & 5y & - & 13z & = & 3 & \\
 & - & 16\boxed{y} & + & 44z & = & -7 & /\left(-\frac{1}{2}\right) \\
 & - & 8y & + & 22z & = & -5 & \\
\hline
x & + & 5y & - & 13z & = & 3 & \\
 & - & 16y & + & 44z & = & -7 & \\
 & & & & 0 & = & -\frac{3}{2} & \\
\hline
\end{array}
$$

Последња једначина нема решење, што значи да и читав систем нема решење. □

Задатак 2.4. *Решити систем*

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
2x & + & 5y & - & 8z & = & 4 \\
3x & + & 8y & - & 13z & = & 7 \\
x & + & 2y & - & 3z & = & 1
\end{array}
$$

Решење. Да бисмо избегли рад са разломцима прво ћемо заменити редослед једначина:

$$
\begin{array}{rcrcrcrl}
2x & + & 5y & - & 8z & = & 4 & \\
3x & + & 8y & - & 13z & = & 7 & \\
x & + & 2y & - & 3z & = & 1 & \\
\hline
\boxed{x} & + & 2y & - & 3z & = & 1 & /(-3)\ /(-2) \\
3x & + & 8y & - & 13z & = & 7 & \\
2x & + & 5y & - & 8z & = & 4 & \\
\hline
x & + & 2y & - & 3z & = & 1 & \\
 & & 2y & - & 4z & = & 4 & \\
 & & \boxed{y} & - & 2z & = & 2 & /(-2) \\
\hline
x & + & 2y & - & 3z & = & 1 & \\
 & & y & - & 2z & = & 2 & \\
 & & & & \cancel{0} & \cancel{=} & \cancel{0} & \\
\hline
\end{array}
$$

Последњу једначину занемарујемо. Али онда имамо једну непознату више него што има једначина. То значи да једна променљива може бити било шта. Нека је нпр. $z = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Тада је $y = 2\alpha + 2$ и $x = -\alpha - 3$ тј. систем има бесконачно много решења $(x, y, z) \in \{(-\alpha - 3, 2\alpha + 2, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$. □

У претходна три задатка смо видели да систем (над $\mathbb{R}$) може имати нула, једно или бесконачно много решења. Испоставиће се да су то све могућности и да систем не може имати нпр. 2 решења. (Доказ овога ћемо видети касније кад почнемо причу о векторским просторима, мада би и из Гаусовог поступка требало да буде јасно.)

Системи са две или три променљиве су нам занимљиви и са геометријске стране. Скуп решења линеарне једначине са три непознате представља раван у простору $\mathbb{R}^3$. Онда је решење система пресек тих равни, што може бити раван, права, тачка или празан скуп. Аналогно, једначина са две променљиве је права у равни $\mathbb{R}^2$, па је решење система једначина са две променљиве пресек правих тј. права, тачка или празан скуп.

Задатак 2.5. *Решити систем*

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
2x & - & 5y & + & 3z & - & 4t & + & 2u & = & 4\\
3x & - & 7y & + & 2z & - & 5t & + & 4u & = & 9\\
5x & - & 10y & - & 5z & - & 4t & + & 7u & = & 22
\end{array}$$

Решење. Сада први пут имамо случај да је број једначина и променљивих различит. То не мења ништа, радимо на исти начин:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrl}
2\boxed{x} & - & 5y & + & 3z & - & 4t & + & 2u & = & 4 & /(-\frac{3}{2})\ /(-\frac{5}{2})\\
3x & - & 7y & + & 2z & - & 5t & + & 4u & = & 9 & \\
5x & - & 10y & - & 5z & - & 4t & + & 7u & = & 22 & \\
\hline
2x & - & 5y & + & 3z & - & 4t & + & 2u & = & 4 & \\
 & & \frac{1}{2}\boxed{y} & - & \frac{5}{2}z & + & t & + & u & = & 3 & /(-5)\\
 & & \frac{5}{2}y & - & \frac{25}{2}z & + & 6t & + & 2u & = & 12 & \\
\hline
2x & - & 5y & + & 3z & - & 4t & + & 2u & = & 4 & \\
 & & \frac{1}{2}y & - & \frac{5}{2}z & + & t & + & u & = & 3 & \\
 & & & & & & t & - & 3u & = & -3 & \\
\hline
\end{array}$$

Узећемо да је $u = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ произвољно. Тада је $t = 3\alpha - 3$. Онда се друга једначина своди на $\frac{1}{2}y - \frac{5}{2}z = -4\alpha + 6$. Опет можемо узети да је једна променљива произвољна, нпр. $z = \beta$, $\beta \in \mathbb{R}$. Тада је $y = -8\alpha + 5\beta + 12$ и из прве једначине $x = -15\alpha + 11\beta + 26$. Дакле, овог пута је скуп решења $\{(-15\alpha+11\beta+26, -8\alpha+5\beta+12, \beta, 3\alpha-3, \alpha) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ бесконачан и описан је са два параметра. $\square$

2.2 Системи са параметрима

Задатак 2.6. *У зависности од реалног параметра α решити систем*

$$\begin{array}{rcrcrcr}
\alpha x & - & \alpha y & + & z & = & -\alpha\\
x & + & \alpha y & - & z & = & \alpha\\
(\alpha+1)x & + & y & - & \alpha z & = & 2
\end{array}$$

Решење. Радимо опет Гаусовим поступком. Параметар суштински не мења ништа, једино што је рачун компликованији и што постоји могућност да имамо више случајева у зависности од параметра. Зато треба бити пажљив и паметно повлачити кораке како бисмо олакшали посао. Нпр. овде је најједноставније почети Гаусов поступак од променљиве z:

$$
\begin{array}{rcrcrcl}
\alpha x & - & \alpha y & + & \boxed{z} & = & -\alpha \\
x & + & \alpha y & - & z & = & \alpha \\
(\alpha+1)x & + & y & - & \alpha z & = & 2 \\
\hline
\alpha x & - & \alpha y & + & z & = & -\alpha \\
(\alpha+1)x & & & & & = & 0 \\
\left(\alpha^2+\alpha+1\right)x & + & \left(-\alpha^2+1\right)y & & & = & -\alpha^2+2 \\
\hline
\end{array}
\qquad / \cdot \alpha
$$

Сада је питање да ли је лева страна друге једначине нула или не. Зато одвајамо два случаја.

(1) Ако је $\alpha = -1$, другу једначину можемо занемарити. Трећа једначина постаје $x = 1$. Када заменимо у прву добијамо $y + z = 2$. Зато је скуп решења нашег система $\{(1, \beta, 2-\beta) \mid \beta \in \mathbb{R}\}$.

(2) Ако је $\alpha \neq -1$, друга једначина даје $x = 0$, а трећа постаје $\left(-\alpha^2+1\right)y = -\alpha^2+2$, тј. $(\alpha-1)y = \frac{\alpha^2-2}{\alpha+1}$.

(2.1) Ако је $\alpha = 1$, од треће једначине остаје $0 = -\frac{1}{2}$ што значи да систем нема решење.

(2.2) Ако је $\alpha \neq \pm 1$, онда је $y = \frac{\alpha^2-2}{\alpha^2-1}$ и из прве једначине добијамо

$$z = -\alpha x + \alpha y - \alpha = \alpha\frac{\alpha^2-2}{\alpha^2-1} - \alpha = -\frac{\alpha}{\alpha^2-1}.$$

□

Приметимо да се x, α и β у претходном задатку јављају у различитим улогама. Ту су x (и y и z) променљиве, α је неки унапред задати параметар у односу на који дискутујемо о решењу (x, y, z) (дакле, не решавамо систем по α!), а β је помоћни параметра који смо увели ми да бисмо лепше описали скуп решења. Често се користе исте или сличне ознаке за претходне три ствари, али их никако не треба мешати.

С тим у вези, у претходном задатку за $\alpha = 1$ систем нема решења, за $\alpha = -1$ имамо бесконачно много рашења, а за свако $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ по једно решење.

Задатак 2.7. *У зависности од реалног параметра α решити систем*

$$
\begin{array}{rcrcrcl}
x & + & y & + & z & = & \alpha \\
x & + & \alpha y & + & \alpha^2 z & = & \alpha^2 \\
x & + & \alpha^2 y & + & \alpha^4 z & = & \alpha^4
\end{array}
$$

Решење. Гаусов поступак даје

$$
\begin{array}{rcrcrcll}
\boxed{x} & + & y & + & z & = & \alpha & /(-1) \\
x & + & \alpha y & + & \alpha^2 z & = & \alpha^2 & \\
x & + & \alpha^2 y & + & \alpha^4 z & = & \alpha^4 & \\
\hline
x & + & y & + & z & = & \alpha & \\
 & & (\alpha-1)y & + & \left(\alpha^2-1\right)z & = & \alpha^2-\alpha & \\
 & & \left(\alpha^2-1\right)y & + & \left(\alpha^4-1\right)z & = & \alpha^4-\alpha & \\
\hline
x & + & y & + & z & = & \alpha & \\
 & & (\alpha-1)\boxed{y} & + & (\alpha-1)(\alpha+1)z & = & \alpha(\alpha-1) & /(-(\alpha+1)) \\
 & & (\alpha-1)(\alpha+1)y & + & (\alpha-1)(\alpha+1)\left(\alpha^2+1\right)z & = & \alpha(\alpha-1)\left(\alpha^2+\alpha+1\right) & \\
\hline
x & + & y & + & z & = & \alpha & \\
 & & (\alpha-1)\boxed{y} & + & (\alpha-1)(\alpha+1)z & = & \alpha(\alpha-1) & \\
 & & & & \alpha(\alpha-1)^2(\alpha+1)z & = & \alpha^3(\alpha-1) & \\
\hline
\end{array}
$$

(1) За $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, \pm 1\}$ имамо јединствено решење

$$
\begin{aligned}
z &= \frac{\alpha^2}{(\alpha-1)(\alpha+1)}, \\
y &= \alpha - (\alpha+1)z = -\frac{\alpha}{\alpha-1}, \\
x &= \alpha - y - z = \frac{\alpha^3}{(\alpha-1)(\alpha+1)}.
\end{aligned}
$$

(2) За $\alpha = 0$ систем се своди на

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
x & + & y & + & z & = & 0 \\
 & - & y & - & z & = & 0 \\
 & & & & \cancel{0} & \cancel{=} & \cancel{0}
\end{array}
$$

Овај систем има бесконачно много решења $(x, y, z) \in \{(0, \beta, -\beta) \mid \beta \in \mathbb{R}\}$.

(3) За $\alpha = -1$ систем се своди на

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
x & + & y & + & z & = & -1 \\
 & - & 2y & & & = & 2 \\
 & & & & 0 & = & 2
\end{array}
$$

који нема решење.

(4) За $\alpha = 1$ цео систем се своди на прву једначину $x + y + z = 1$ чије је решење $(x, y, z) \in \{(\beta, \gamma, 1 - \beta - \gamma) \mid \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$.

$\square$

Задатак 2.8. *У зависности од реалних параметра α и β решити систем*

$$
\begin{array}{rcrcrcl}
\alpha x & + & y & + & \beta z & = & 1 \\
x & + & \alpha y & + & \beta z & = & 1 \\
x & + & y & + & \alpha\beta z & = & \beta
\end{array}
$$

Решење. Гаусов поступак даје

$$
\begin{array}{rcrcrcll}
\alpha x & + & y & + & \beta z & = & 1 & \\
\boxed{x} & + & \alpha y & + & \beta z & = & 1 & /(-\alpha)\ /(-1) \\
x & + & y & + & \alpha\beta z & = & \beta & \\
\hline
x & + & \alpha y & + & \beta z & = & 1 & \\
 & & \left(-\alpha^2+1\right) y & + & \beta(-\alpha+1)z & = & -\alpha+1 & \\
 & & (-\alpha+1)y & + & \beta(\alpha-1)\boxed{z} & = & \beta-1 & \\
\hline
x & + & \alpha y & + & \beta z & = & 1 & \\
 & & (-\alpha+1)y & + & \beta(\alpha-1)z & = & \beta-1 & \\
 & & \underbrace{\left(-\alpha^2-\alpha+2\right)}_{-(\alpha-1)(\alpha+2)} y & & & = & -\alpha+\beta & \\
\hline
\end{array}
$$

(1) За $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1, -2\}$ из треће једначине имамо да је $y = \frac{\alpha-\beta}{(\alpha-1)(\alpha+2)}$. Када то вратимо у другу једначину имамо

$$\beta(\alpha-1)z = \beta - 1 + \frac{\alpha-\beta}{\alpha+2} = \frac{\alpha\beta+\beta-2}{\alpha+2},$$

$$\beta z = \frac{\alpha\beta+\beta-2}{(\alpha-1)(\alpha+2)}. \tag{2.9}$$

(1.1) Ако је додатно и $\beta \neq 0$ једначина (2.9) даје $z = \frac{\alpha\beta+\beta-2}{\beta(\alpha-1)(\alpha+2)}$, што повлачи

$$x = 1 - \alpha\frac{\alpha-\beta}{(\alpha-1)(\alpha+2)} - \beta\frac{\alpha\beta+\beta-2}{\beta(\alpha-1)(\alpha+2)} = \frac{\alpha-\beta}{(\alpha-1)(\alpha+2)}.$$

(1.2) Ако је $\beta = 0$ једначина (2.9) даје

$$0 = -\frac{2}{(\alpha-1)(\alpha+2)} \neq 0,$$

што значи да систем нема решење.

(2) Ако је $\alpha = 1$ наш систем постаје

$$
\begin{array}{rcrcrcl}
x & + & y & + & \beta z & = & 1 \\
 & & & & 0 & = & \beta-1 \\
 & & & & \cancel{0} & \cancel{=} & \cancel{\beta-1}
\end{array}
$$

(2.1) За $\beta \neq 1$ систем нема решење.

(2.2) За $\beta = 1$ систем има бесконачно много решења $(x, y, z) \in \{(\lambda, \mu, 1-\lambda-\mu) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.

(3) Остао је још случај $\alpha = -2$. Тада наш систем изгледа овако:

$$
\begin{array}{rcrcrcl}
x & - & 2y & + & \beta z & = & 1 \\
 & & 3y & - & 3\beta z & = & -3 \\
 & & & & 0 & = & \beta+2
\end{array}
$$

(3.1) За $\beta \neq -2$ систем нема решење.

(3.2) За $\beta = -2$ можемо узети да је $z = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$ произвољно. Тада је $y = -2\lambda - 1$ и на крају $x = -2\lambda - 1$.

$\square$

2.3 Системи над разним пољима

Задатак 2.10. *Решити систем над пољем комплексних бројева*

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & (1+i)y & - & 2iz & - & (1+i)t & = & 2+i \\ (1-i)x & + & 2y & - & (2+i)z & + & (-3+i)t & = & 1-2i \\ ix & + & (-1+i)y & + & iz & - & (2+2i)t & = & -1-3i \end{array}$$

Решење. Гаусов поступак даје

$$\begin{array}{rcrcrcrcll} \boxed{x} & + & (1+i)y & - & 2iz & - & (1+i)t & = & 2+i & /(-1+i) \quad /(-i) \\ (1-i)x & + & 2y & - & (2+i)z & + & (-3+i)t & = & 1-2i & \\ ix & + & (-1+i)y & + & iz & - & (2+2i)t & = & -1-3i & \\ \hline x & + & (1+i)y & - & 2iz & - & (1+i)t & = & 2+i & \\ & & \left(2+i^2-(-1)^2\right)y & - & (2+i-2i-2)z & + & \left(-3+i+(-1)^2-i^2\right)t & = & 1-2i-2-i+2i-1 & \\ & & (-1+i-i+1)y & + & (i-2)z & - & (2+2i-i+1)t & = & -1-3i-2i+1 & \\ \hline x & + & (1+i)y & - & 2iz & - & (1+i)t & = & 2+i & \\ & & & & i\boxed{z} & + & (-1+i)t & = & -2-i & /(-1-2i) \\ & & & & (-2+i)z & - & (3+i)t & = & -5i & \\ \hline x & + & (1+i)y & - & 2iz & - & (1+i)t & = & 2+i & \\ & & & & iz & + & (-1+i)t & = & -2-i & \\ & & & & & & \cancel{0} & \cancel{=} & \cancel{0} & \\ \hline \end{array}$$

Узећемо да је $t = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{C}$ произвољно. Тада је $z = -(1+i)\alpha - 1 + 2i$. Након што заменимо z и t у прву једначину и даље имамо две непознате па можемо рећи да је $y = \beta$, $\beta \in \mathbb{C}$ произвољно. Коначно, $x = (3-i)\alpha - (1+i)\beta - (2+i)$. $\square$

Задатак 2.11. *Решити систем*

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & \alpha \\ x & + & 2y & - & \alpha^2 z & = & 3\alpha \\ \alpha x & + & 3\alpha y & - & \alpha^3 z & = & 2\alpha \end{array}$$

а) над пољем реалних бројева у зависности од реалног параметра α,

б) над пољем комплесних бројева у зависности од комплесног параметра α.

Решење. а) Гаусов поступак даје

$$\begin{array}{rcrcrcll} \boxed{x} & + & y & + & z & = & \alpha & /(-1) \ /(-\alpha) \\ x & + & 2y & - & \alpha^2 z & = & 3\alpha & \\ \alpha x & + & 3\alpha y & - & \alpha^3 z & = & 2\alpha & \\ \hline x & + & y & + & z & = & \alpha & \\ & & \boxed{y} & - & \left(\alpha^2+1\right)z & = & 2\alpha & /(-2\alpha) \\ & & 2\alpha y & - & \alpha\left(\alpha^2+1\right)z & = & -\alpha(\alpha-2) & \\ \hline \end{array}$$

$$
\begin{array}{ccccrcll}
x & + & y & + & z & = & \alpha & \\
 & & y & - & \left(\alpha^2+1\right) z & = & 2\alpha & \\
 & & & & \alpha\left(\alpha^2+1\right) z & = & -\alpha(5\alpha-2) & \Big/ \cdot \frac{1}{\alpha^2+1} \\
\hline
x & + & y & + & z & = & \alpha & \\
 & & y & - & \left(\alpha^2+1\right) z & = & 2\alpha & \\
 & & & & \alpha z & = & -\frac{\alpha(5\alpha-2)}{\alpha^2+1} & \\
\hline
\end{array}
$$

при чему смо у последњем кораку смели да поделимо са α^2+1 јер је различито од нуле (следи из $\alpha^2+1 \geqslant 1$, за $\alpha \in \mathbb{R}$).

(1) Ако је $\alpha \neq 0$ имамо јединствено решење

$$
\begin{aligned}
& z=-\frac{5\alpha-2}{\alpha^2+1}, \\
& y=2\alpha+\left(\alpha^2+1\right) z=-3\alpha+2, \\
& x=\alpha-y-z=\frac{4\alpha^3-2\alpha^2+9\alpha-4}{\alpha^2+1} .
\end{aligned} \tag{2.12}
$$

(2) Ако је $\alpha=0$ систем се своди на

$$
\begin{array}{ccccccc}
x & + & y & + & z & = & 0 \\
 & & y & - & z & = & 0 \\
 & & & & \cancel{0} & \cancel{=} & \cancel{0}
\end{array}
$$

Његово решење је

$$
\{(-2\lambda, \lambda, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}. \tag{2.13}
$$

б) Уколико радимо над пољем комплексних бројева на исти начин систем можемо свести на облик

$$
\begin{array}{ccccrcl}
x & + & y & + & z & = & \alpha \\
 & & y & - & \left(\alpha^2+1\right) z & = & 2\alpha \\
 & & & & \alpha \underbrace{\left(\alpha^2+1\right)}_{(\alpha-i)(\alpha+i)} z & = & -\alpha(5\alpha-2)
\end{array}
$$

(1) Ако је $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0, \pm i\}$ систем има јединствено решење (2.12).

(2) Ако је $\alpha=0$ систем има бесконачно много решења која су дата у (2.13), с том разликом да сада параметар λ пролази скупом комплексних бројева.

(3) Ако је $\alpha= \pm i$ систем нема решења јер последња једначина система $0=5 \pm 2i$ нема решења.

$\square$

Сличну ситуацију бисмо имали уколико би посматрали систем над пољем $\mathbb{Q}$ и над пољем $\mathbb{R}$ и када би се у дискусији појавио израз $\alpha^2 - 2$. Тада би $\alpha^2 - 2$ био различит од нуле за све $\alpha \in \mathbb{Q}$, али би над имао две нуле $\alpha = \pm\sqrt{2}$.

Следи пар система над коначним пољима $(\mathbb{Z}_p, +_p, \cdot_p)$, где је p прост број. Због једноставности ћемо надаље операције у $\mathbb{Z}_p$ означавати само са $+$ и $\cdot$ (без индекса).

Задатак 2.14. *Решити систем*

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & 4y & + & z & = & 4 \\ x & + & 2y & + & 2z & = & 1 \\ 2x & + & y & + & 3z & = & 2 \end{array}$$

над пољем а) $\mathbb{Z}_5$, *б)* $\mathbb{Z}_{13}$.

Решење. а) Опет пратимо Гаусов поступак и рачунамо по модулу 5:

$$\begin{array}{rcrcrcrl} 3x & + & 4y & + & z & = & 4 & \\ \boxed{x} & + & 2y & + & 2z & = & 1 & / \cdot 2 \ / \cdot 3 \\ 2x & + & y & + & 3z & = & 2 & \\ \hline x & + & 2y & + & 2z & = & 1 & \\ & & 3y & & & = & 1 & \\ & & 2y & + & 4z & = & 0 & \\ \hline \end{array}$$

Множењем друге једначине са 2 добијамо $y = 2$. Затим из треће једначине имамо да је $z = 2y = 4$, и на крају $x = 3y + 3z + 1 = 4$. Дакле, имамо јединствено решење.

б) Слично,

$$\begin{array}{rcrcrcrl} 3x & + & 4y & + & z & = & 4 & \\ \boxed{x} & + & 2y & + & 2z & = & 1 & / \cdot 10 \ / \cdot 11 \\ 2x & + & y & + & 3z & = & 2 & \\ \hline x & + & 2y & + & 2z & = & 1 & \\ & & 11\boxed{y} & + & 8z & = & 1 & / \cdot 5 \\ & & 10y & + & 12z & = & 0 & \\ \hline x & + & 2y & + & 2z & = & 1 & \\ & & 11y & + & 8z & = & 1 & \\ & & & & 0 & = & 5 & \\ \hline \end{array}$$

што значи да наш систем нема решење. □

У претходном задатку смо видели да је могуће да неки систем има решење над једним пољем, а нема над неким другим.

Задатак 2.15. *Решити систем над пољем* $\mathbb{Z}_7$

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & 4 \\ 3x & + & 6y & + & z & = & 3 \\ 2x & + & 4y & & & = & 6 \\ 4x & + & y & + & 2z & = & 0 \end{array}$$

Решење. Гаусов поступак даје

$$
\begin{array}{rcrcrcl}
x & + & 2y & + & \boxed{z} & = & 4 \quad /\cdot 6 \ \ /\cdot 5 \\
3x & + & 6y & + & z & = & 3 \\
2x & + & 4y & & & = & 6 \\
4x & + & y & + & 2z & = & 0 \\
\hline
x & + & 2y & + & z & = & 4 \\
2x & + & 4y & & & = & 6 \quad /\cdot 2 \\
\cancel{2x} & \cancel{+} & \cancel{4y} & & & \cancel{=} & \cancel{6} \\
\cancel{2x} & \cancel{+} & \cancel{4y} & & & \cancel{=} & \cancel{6} \\
\hline
x & + & 2y & + & z & = & 4 \\
4x & + & y & & & = & 5 \\
\hline
\end{array}
$$

Узећемо да је $x = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{Z}_7$ произвољно. Тада је $y = 3\alpha + 5$ и $z = 6x + 5y + 4 = 1$, па је скуп решења система

$$
\begin{aligned}
&\{(\alpha, 3\alpha + 5, 1) \mid \alpha \in \mathbb{Z}_7\} \\
&= \{(0,5,1),(1,1,1),(2,4,1),(3,0,1),(4,3,1),(5,6,1),(6,2,1)\}.
\end{aligned}
$$

□

У претходном задатку смо видели систем који има тачно 7 решења (што над пољем реалних бројева није било могуће). Генерално, број решења је или нула или степен кардиналности поља. Зато је над $\mathbb{R}$ једнак 0, 1 или ∞, а над $\mathbb{Z}_7$ може бити 0, 1, 7, 49, итд. Штавише, овде смо и пре решавања система знали да он може имати само коначан број решења, јер решења тражимо у скупу $\mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_7$ који има само 7^3 елемената.

Задатак 2.16. *Решити систем над пољем $\mathbb{Z}_7$ у зависности од параметра $\alpha \in \mathbb{Z}_7$:*

$$
\begin{array}{rcrcrcl}
x & + & 4y & + & z & = & 2 \\
3x & + & 3y & + & z & = & \alpha \\
2x & + & (\alpha+6)y & & & = & \alpha^2 + 2\alpha + 5
\end{array}
$$

Решење. Гаусов поступак даје

$$
\begin{array}{rcrcrcl}
x & + & 4y & + & \boxed{z} & = & 2 \quad /\cdot 6 \\
3x & + & 3y & + & z & = & \alpha \\
2x & + & (\alpha+6)y & & & = & \alpha^2 + 2\alpha + 5 \\
\hline
x & + & 4y & + & z & = & 2 \\
2\boxed{x} & + & 6y & & & = & \alpha + 5 \quad /\cdot 6 \\
2x & + & (\alpha+6)y & & & = & \alpha^2 + 2\alpha + 5 \\
\hline
x & + & 4y & + & z & = & 2 \\
2x & + & 6y & & & = & \alpha + 5 \\
 & & \alpha y & & & = & \alpha^2 + \alpha \\
\hline
\end{array}
$$

(1) За $\alpha \in \mathbb{Z}_7 \setminus \{0\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ систем има јединствено решење

$$\begin{aligned}
&y = \alpha + 1, \\
&x = 4(y + \alpha + 5) = 4(2\alpha + 6) = \alpha + 3, \\
&z = 6x + 3y + 2 = 2\alpha + 2.
\end{aligned}$$

(2) За $\alpha = 0$ имамо систем

$$\begin{array}{rcrcrcl}
x & + & 4y & + & z & = & 2 \\
2x & + & 6y & & & = & 5
\end{array}$$

чије је решење $x = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{Z}_7$, $y = 2x + 2 = 2\lambda + 2$ и $z = 6x + 3y + 2 = 5\lambda + 1$. У овом случају је систем има седам решења:

$$(0, 2, 1), (1, 4, 6), (2, 6, 4), (3, 1, 2), (4, 3, 0), (5, 5, 5), (6, 0, 3).$$

$\square$

Глава 3

Векторски простори

Дефиниција 3.1. *Кажемо да је* $(V, \boxplus, \boxdot)$ *векторски простор над пољем* $(F, +, \cdot)$ *(или* F*-векторски простор) ако је* V *скуп са операцијама* $\boxplus : V \times V \longrightarrow V$ *и* $\boxdot : F \times V \longrightarrow V$ *такве да је важи:*

(1) $(V, \boxplus)$ *је Абелова група,*

(2) „Асоцијативност“ (различитих) множења: $(\forall \alpha, \beta \in F)(\forall v \in V)$ $\alpha \boxdot (\beta \boxdot v) = (\alpha \cdot \beta) \boxdot v$*,*

(3) Дистрибутивност множења према сабирању вектора: $(\forall \alpha \in F)(\forall u, v \in V)$ $\alpha \boxdot (u \boxplus v) = \alpha \boxdot u \boxplus \alpha \boxdot v$*,*

(4) „Дистрибутивност множења према сабирању из поља“: $(\forall \alpha, \beta \in F)(\forall v \in V)$ $(\alpha + \beta) \boxdot v = \alpha \boxdot v \boxplus \beta \boxdot v$*,*

(5) $(\forall v \in V)$ $1 \boxdot v = v$*.*

Елементе векторског простора V обично зовемо *вектори*, а елементе поља F *скалари*. Уколико не нагласимо другачије у задацима ћемо подразумевати да је $F = \mathbb{R}$. Такође, често ћемо рећи само векторски простор V мислећи ту на тројку $(V, \boxplus, \boxdot)$. У претходној дефиницији смо са $\boxplus$ и $\boxdot$ означили сабирање и множење на векторском простору да их не бисмо мешали са сабирањем $+$ и множењем $\cdot$ у пољу F. Наравно, природније је и операције на векторском простору означавати са $+$ и $\cdot$, поготово када се ради о стандардним векторским просторима, какве ћемо видети у наредних неколико примера.

Примери векторских простора су $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ над пољем $\mathbb{R}$, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ над $\mathbb{C}$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ над $\mathbb{Q}$, али и $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ над $\mathbb{R}$, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ над $\mathbb{Q}$, итд. Са друге стране, $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ није векторски простор над $\mathbb{Z}$ (јер $\mathbb{Z}$ није поље), $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$

није векторски простор над $\mathbb{R}$ (јер множење $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ није добро дефинисано).

Познат је и пример векторских простора $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$ где се геометријски дефинише сабирање два вектора и множење вектора скаларом. Заправо је тај пример и послужио као мотивација за увођење апстрактне Дефиниције 3.1. У наредном задатку показујемо алгебарским путем да је $\left(\mathbb{R}^2, +, \cdot\right)$ векторски простор над пољем реалних бројева (у смислу Дефиниције 3.1). Користићемо исте ознаке за операције $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ и $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ у пољу и $+ : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ и $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ на векторском простору, а из контекста ће бити јасно о чему се ради.

Задатак 3.2. *Показати да је $\mathbb{R}^2$ векторски простор ако су операције задате са $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) := (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$ и $\alpha\,(x_1, x_2) := (\alpha x_1, \alpha x_2)$.*

Решење. У Задатку 1.3 смо већ видели да је $\left(\mathbb{R}^2, +\right)$ Абелова група. Проверимо остале аксиоме вектроског простора:

(1) $(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}) \left(\forall\,(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\right)$

$$\alpha\,(\beta\,(x_1, x_2)) = \alpha\,(\beta x_1, \beta x_2) = (\alpha\beta x_1, \alpha\beta x_2) = (\alpha\beta)\,(x_1, x_2)\,,$$

(2) $(\forall \alpha \in \mathbb{R}) \left(\forall\,(x_1, x_2)\,, (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2\right)$

$$\begin{aligned}\alpha\,((x_1, x_2) + (y_1, y_2)) &= \alpha\,(x_1 + y_1, x_2 + y_2) = (\alpha\,(x_1 + y_1)\,, \alpha\,(x_2 + y_2))\\ &= (\alpha x_1 + \alpha y_1, \alpha x_2 + \alpha y_2)\\ &= (\alpha x_1, \alpha x_2) + (\alpha y_1, \alpha y_2) = \alpha\,(x_1, x_2) + \alpha\,(y_1, y_2)\,,\end{aligned}$$

(3) $(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}) \left(\forall\,(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\right)$

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta)\,(x_1, x_2) &= ((\alpha + \beta)x_1, (\alpha + \beta)x_2) = (\alpha x_1 + \beta x_1, \alpha x_2 + \beta x_2)\\ &= (\alpha x_1, \alpha x_2) + (\beta x_1, \beta x_2) = \alpha\,(x_1, x_2) + \beta\,(x_1, x_2)\,,\end{aligned}$$

(4) $\left(\forall\,(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\right)$

$$1 \cdot (x_1, x_2) = (1 \cdot x_1, 1 \cdot x_2) = (x_1, x_2)\,.$$

□

Наравно, на исти начин се показује и да је $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ векторски простор над $\mathbb{R}$, $(\mathbb{C}^n, +, \cdot)$ векторски простор над $\mathbb{C}$, $(\mathbb{C}^n, +, \cdot)$ векторски простор над $\mathbb{R}$, $\left(\mathbb{Z}_p^n, +_p, \cdot_p\right)$ векторски простор над $\mathbb{Z}_p$, итд., где су свуда операције сабирања и множења скаларом дефинисане по координатама као у случају $\mathbb{R}^2$.

Задатак 3.3. *Показати да је $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ векторски простор ако су операције дефинисане са $(x + y)_n := x_n + y_n$ и $(\alpha x)_n := \alpha x_n$, за све $n \in \mathbb{N}$.*

Решење. У Задатку 1.3 смо већ видели да је $\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}},+\right)$ Абелова група. Проверимо остале аксиоме вектроског простора:

(1) $(\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R})\left(\forall x\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right)$

$$(\forall n\in\mathbb{N})\ (\alpha(\beta x))_n=\alpha(\beta x)_n=\alpha\beta x_n=((\alpha\beta)x)_n$$
$$\Longrightarrow\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x,$$

(2) $(\forall\alpha\in\mathbb{R})\left(\forall x,y\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right)$

$$\begin{aligned}(\forall n\in\mathbb{N})\ (\alpha(x+y))_n&=\alpha(x+y)_n=\alpha\left(x_n+y_n\right)=\alpha x_n+\alpha y_n\\&=(\alpha x)_n+(\alpha y)_n=(\alpha x+\alpha y)_n\end{aligned}$$
$$\Longrightarrow\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y,$$

(3) $(\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R})\left(\forall x\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right)$

$$\begin{aligned}(\forall n\in\mathbb{N})\ ((\alpha+\beta)x)_n&=(\alpha+\beta)x_n=\alpha x_n+\beta x_n\\&=(\alpha x)_n+(\beta x)_n=(\alpha x+\beta x)_n\end{aligned}$$
$$\Longrightarrow(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x,$$

(4) $\left(\forall x\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right)$

$$(\forall n\in\mathbb{N})\ (1\cdot x)_n=1\cdot x_n=x_n\quad\Longrightarrow\quad 1\cdot x=x.$$

□

На исти начин се показује и да је $\left(\mathbb{R}^{\mathbb{R}},+,\cdot\right)$ векторски простор над пољем $\mathbb{R}$, где је сабирање функција (тј. сабирање на $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$) дато са $(f+g)(x):=f(x)+g(x)$, а множење функције скаларом са $(\alpha f)(x):=\alpha f(x)$, за све $\alpha\in\mathbb{R}$ и $f,g\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Доказ је потпуно исти као у случају низова, само што уместо n-тог члана низа имамо вредност функције у тачки. Нпр. дистрибутивност множења према сабирању у векторском простору би сада гласила: за све $\alpha\in\mathbb{R}$ и све $f,g\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ имамо

$$\begin{aligned}(\forall x\in\mathbb{R})\ (\alpha(f+g))(x)&=\alpha((f+g)(x))=\alpha(f(x)+g(x))=\alpha f(x)+\alpha g(x)\\&=(\alpha f)(x)+(\alpha g)(x)=(\alpha f+\alpha g)(x),\end{aligned}$$

што даје једнакост функција $\alpha(f+g)=\alpha f+\alpha g$. Општије, ако је $(V,+,\cdot)$ векторски простор над пољем F и S произвољан скуп, онда ће и $\left(V^S,+,\cdot\right)$ бити векторски простор над пољем F.

Слично се показује и да је $(\mathbb{R}[x],+,\cdot)$ векторски простор над $\mathbb{R}$ (или општије, $(\mathbb{F}[x],+,\cdot)$ је векторски простор над пољем $\mathbb{F}$). Множење је дефинисано тако да је производ скалара $\alpha\in\mathbb{R}$ и вектора $p(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ једнак $(\alpha p)(x):=(\alpha a_0)+(\alpha a_1)\,x+\cdots+(\alpha a_n)\,x^n$.

Следе мало нестандарднији примери векторских простора.

Задатак 3.4. *Испитати да ли је* $(\mathbb{R}_+, \boxplus, \boxdot)$ *векторски простор, где је* $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > 0\}$*, а операције су задате са* $x \boxplus y = xy$ *и* $\alpha \boxdot x = x^\alpha$.

Решење. Проверавамо све аксиоме:

(1) $(\forall x, y, z \in \mathbb{R}_+)\ (x \boxplus y) \boxplus z = (xy) \boxplus z = xyz = x \boxplus (yz) = x \boxplus (y \boxplus z)$,

(2) $(\forall x, y \in \mathbb{R}_+)\ x \boxplus y = xy = yx = y \boxplus x$,

(3) $(\exists \mathbb{O} := 1 \in \mathbb{R}_+)\,(\forall x \in \mathbb{R}_+)\ x \boxplus \mathbb{O} = x \cdot 1 = x$,

(4) $(\forall x \in \mathbb{R}_+)\left(\exists \boxminus x := \frac{1}{x} \in \mathbb{R}_+\right)\ x \boxplus (\boxminus x) = x \cdot \frac{1}{x} = 1 = \mathbb{O}$,

(5) $(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R})\,(\forall x \in \mathbb{R}_+)\ \alpha \boxdot (\beta \boxdot x) = \alpha \boxdot \left(x^\beta\right) = \left(x^\beta\right)^\alpha = x^{\alpha\beta} = (\alpha\beta) \boxdot x$,

(6) $(\forall \alpha \in \mathbb{R})\,(\forall x, y \in \mathbb{R}_+)$

$$\alpha \boxdot (x \boxplus y) = \alpha \boxdot (xy) = (xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha = (x^\alpha) \boxplus (y^\alpha) = \alpha \boxdot x \boxplus \alpha \boxdot y,$$

(7) $(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R})\,(\forall x \in \mathbb{R}_+)$

$$(\alpha + \beta) \boxdot x = x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta = x^\alpha \boxplus x^\beta = \alpha \boxdot x \boxplus \beta \boxdot x,$$

(8) $(\forall x \in \mathbb{R}_+)\ 1 \boxdot x = x^1 = x$.

Дакле, $(\mathbb{R}_+, \boxplus, \boxdot)$ јесте векторски простор над пољем реалних бројева. □

Задатак 3.5. *Испитати да ли је* $(\mathbb{R}^2, +, \boxdot)$ *векторски простор, где је* $+$ *стандардно сабирање у* $\mathbb{R}^2$*, а множење задато са* $\alpha \boxdot (x_1, x_2) = \left(\alpha x_1, \alpha^2 x_2\right)$.

Решење. Ово није векторски простор јер

$$(\alpha + \beta) \boxdot (x_1, x_2) = \left((\alpha + \beta)x_1, (\alpha + \beta)^2 x_2\right)$$

није исто што и

$$\begin{aligned} \alpha \boxdot (x_1, x_2) + \beta \boxdot (x_1, x_2) &= \left(\alpha x_1, \alpha^2 x_2\right) + \left(\beta x_1, \beta^2 x_2\right) \\ &= \left((\alpha + \beta)x_1, \left(\alpha^2 + \beta^2\right) x_2\right) \end{aligned}$$

(што можемо видети нпр. за $\alpha = \beta = 1$ и $(x_1, x_2) = (0, 1)$).

Занимљиво је да је ово једина аксиома векторских простора која није задовољена. □

Задатак 3.6. *Испитати да ли је* $\left(\mathbb{R}^2, \maltese, \bullet\right)$ *векторски простор, ако је*

$$(x_1, x_2) \maltese (y_1, y_2) = \left(\sqrt[7]{x_1^7 + y_1^7}, x_2 + y_2 + 7\right),$$

$$\alpha \bullet (x_1, x_2) = \left(\sqrt[7]{\alpha} x_1, \alpha x_2 + 7(\alpha - 1)\right).$$

Решење. Тројка $\left(\mathbb{R}^2, \maltese, \bullet\right)$ јесте векторски простор над пољем реалних бројева јер

(1) $\left(\forall\left(x_1, x_2\right),\left(y_1, y_2\right),\left(z_1, z_2\right) \in \mathbb{R}^2\right)$

$$
\begin{aligned}
&\left(\left(x_1, x_2\right) \maltese\left(y_1, y_2\right)\right) \maltese\left(z_1, z_2\right) \\
&=\left(\sqrt[7]{x_1^7+y_1^7}, x_2+y_2+7\right) \maltese\left(z_1, z_2\right) \\
&=\left(\sqrt[7]{\left(\sqrt[7]{x_1^7+y_1^7}\right)^7+z_1^7},\left(x_2+y_2+7\right)+z_2+7\right) \\
&=\left(\sqrt[7]{x_1^7+\left(\sqrt[7]{y_1^7+z_1^7}\right)^7}, x_2+\left(y_2+z_2+7\right)+7\right) \\
&=\left(x_1, x_2\right) \maltese\left(\sqrt[7]{y_1^7+z_1^7}, y_2+z_2+7\right) \\
&=\left(x_1, x_2\right) \maltese\left(\left(y_1, y_2\right) \maltese\left(z_1, z_2\right)\right),
\end{aligned}
$$

(2) $\left(\exists \mathbb{O}:=(0,-7) \in \mathbb{R}^2\right)\left(\forall\left(x_1, x_2\right) \in \mathbb{R}^2\right)$

$$
\left(x_1, x_2\right) \maltese(0,-7)=\left(\sqrt[7]{x_1^7+0^7}, x_2-7+7\right)=\left(x_1, x_2\right),
$$

(3) $\left(\forall\left(x_1, x_2\right) \in \mathbb{R}^2\right)\left(\exists \smile\left(x_1, x_2\right):=\left(-x_1,-x_2-14\right) \in \mathbb{R}^2\right)$

$$
\left(x_1, x_2\right) \maltese\left(\smile\left(-x_1,-x_2-14\right)\right)=\left(\sqrt[7]{x_1^7-x_1^7}, x_2-x_2-14+7\right)=\mathbb{O},
$$

(4) $\left(\forall\left(x_1, x_2\right),\left(y_1, y_2\right) \in \mathbb{R}^2\right)$

$$
\begin{aligned}
\left(x_1, x_2\right) \maltese\left(y_1, y_2\right) &=\left(\sqrt[7]{x_1^7+y_1^7}, x_2+y_2+7\right) \\
&=\left(\sqrt[7]{y_1^7+x_1^7}, y_2+x_2+7\right)=\left(y_1, y_2\right) \maltese\left(x_1, x_2\right),
\end{aligned}
$$

(5) $(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R})\left(\forall\left(x_1, x_2\right) \in \mathbb{R}^2\right)$

$$
\begin{aligned}
\alpha \bullet\left(\beta \bullet\left(x_1, x_2\right)\right) &=\alpha \bullet\left(\sqrt[7]{\beta} x_1, \beta x_2+7(\beta-1)\right) \\
&=\left(\sqrt[7]{\alpha} \sqrt[7]{\beta} x_1, \alpha\left(\beta x_2+7(\beta-1)\right)+7(\alpha-1)\right) \\
&=\left(\sqrt[7]{\alpha \beta} x_1, \alpha \beta x_2+7(\alpha \beta-1)\right) \\
&=(\alpha \beta) \bullet\left(x_1, x_2\right),
\end{aligned}
$$

(6) $(\forall\alpha\in\mathbb{R})\left(\forall\,(x_1,x_2),(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2\right)$

$$\begin{aligned}
&\alpha\bullet((x_1,x_2)\maltese(y_1,y_2))\\
&=\alpha\bullet\left(\sqrt[7]{x_1^7+y_1^7},x_2+y_2+7\right)\\
&=\left(\sqrt[7]{\alpha}\sqrt[7]{x_1^7+y_1^7},\alpha\,(x_2+y_2+7)+7(\alpha-1)\right)\\
&=\left(\sqrt[7]{\left(\sqrt[7]{\alpha}x_1\right)^7+\left(\sqrt[7]{\alpha}y_1\right)^7},\alpha x_2+7(\alpha-1)+\alpha y_2+7(\alpha-1)+7\right)\\
&=\left(\sqrt[7]{\alpha}x_1,\alpha x_2+7(\alpha-1)\right)\maltese\left(\sqrt[7]{\alpha}y_1,\alpha y_2+7(\alpha-1)\right)\\
&=\alpha\bullet(x_1,x_2)\maltese\alpha\bullet(y_1,y_2)\,,
\end{aligned}$$

(7) $(\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R})\left(\forall\,(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2\right)$

$$\begin{aligned}
&(\alpha+\beta)\bullet(x_1,x_2)\\
&=\left(\sqrt[7]{\alpha+\beta}x_1,(\alpha+\beta)x_2+7(\alpha+\beta-1)\right)\\
&=\left(\sqrt[7]{\left(\sqrt[7]{\alpha}x_1\right)^7+\left(\sqrt[7]{\beta}x_1\right)^7},\alpha x_2+7(\alpha-1)+\beta x_2+7(\beta-1)+7\right)\\
&=\left(\sqrt[7]{\alpha}x_1,\alpha x_2+7(\alpha-1)\right)\maltese\left(\sqrt[7]{\beta}x_1,\beta x_2+7(\beta-1)\right)\\
&=\alpha\bullet(x_1,x_2)\maltese\beta\bullet(x_1,x_2)\,,
\end{aligned}$$

(8) $\left(\forall\,(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2\right)$

$$1\bullet(x_1,x_2)=\left(\sqrt[7]{1}x_1,1\cdot x_2+7(1-1)\right)=(x_1,x_2)\,.$$

$\square$

Задатак 3.7. *Ако су* $\maltese$ *и* $\bullet$ *операције из претходног задатка испитати да ли је:*

а) $\left(\mathbb{Q}^2,\maltese,\bullet\right)$ *векторски простор над пољем* $\mathbb{Q}$*,*

б) $\left(\mathbb{R}^2,\maltese,\bullet\right)$ *векторски простор над пољем* $\mathbb{Q}$*,*

в) $(\mathbb{R}\times\mathbb{C},\maltese,\bullet)$ *векторски простор над пољем* $\mathbb{R}$*.*

Решење. а) Скаларно множење $\bullet:\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}^2\longrightarrow\mathbb{Q}^2$ није добро дефинисано јер нпр. за $2\in\mathbb{Q}$ и $(1,0)\in\mathbb{Q}^2$ производ $2\bullet(1,0)=\left(\sqrt[7]{2},7\right)\notin\mathbb{Q}^2$. То значи да $\left(\mathbb{Q}^2,\maltese,\bullet\right)$ није векторски простор над $\mathbb{Q}$.

б) Овде су операције добро дефинисане, а $\left(\mathbb{R}^2,\maltese,\bullet\right)$ ће бити векторски простор над $\mathbb{Q}$. Све особине које смо показали у претходном задатку важе за све скаларе из $\mathbb{R}$, па специјално и за све скаларе из $\mathbb{Q}$.

в) Слично, $(\mathbb{R}\times\mathbb{C}, \maltese, \bullet)$ ће бити векторски простор над $\mathbb{R}$, а провера иде исто као у претходном задатку само што сада векторе уместо из $\mathbb{R}^2$ узимамо из $\mathbb{R}\times\mathbb{C}$. $\square$

Задатак 3.8. *Нека је $(V, +, \cdot)$ векторски простор над пољем F. Показати да важи:*

а) нула $\mathbb{O}\in V$ је јединствена,

б) за сваки $v\in V$ инверз $-v$ је јединствен,

в) $(\forall v\in V)\ 0\cdot v=\mathbb{O}$,

г) $(\forall\alpha\in F)\ \alpha\mathbb{O}=\mathbb{O}$,

д) из $\alpha v=\mathbb{O}$ следи $\alpha=0$ или $v=\mathbb{O}$,

ђ) $(\forall v\in V)\ (-1)v=-v$,

е) $-\mathbb{O}=\mathbb{O}$,

ж) $(\forall v\in V)\ -(-v)=v$.

Решење. а) Претпоставимо супротно, да постоје бар две различите нуле (тј. бар два адитивна неутрала) $\mathbb{O}$ и $\square$ у V. Тада је $\mathbb{O}=\mathbb{O}+\square=\square$, што је у контрадикцији са нашом претпоставком.

б) Слично, ако би за v постојала два адитивна инверза $-v$ и $\smile v$ из аксиома векторских простора би следило да је

$$\smile v = \smile v+\mathbb{O} = \smile v+(v+(-v)) = (\smile v+v)+(-v) = \mathbb{O}+(-v) = -v.$$

Приметимо да особине а) и б) важе и у произвољној групи (јер нигде нисмо користили множење скаларом).

в) Пошто у пољу F важи $0=0+0$ имамо да је $0v=(0+0)v=0v+0v$. Додавањем $-0v$ на обе стране добијамо да је $\mathbb{O}=0v$.

г) Слично, следи из $\alpha\mathbb{O}=\alpha(\mathbb{O}+\mathbb{O})=\alpha\mathbb{O}+\alpha\mathbb{O}$ додавањем $-\alpha\mathbb{O}$ на обе стране.

д) Пошто је $(F\setminus\{0\},\cdot)$ група или је $\alpha=0$ или α има инверз $\frac{1}{\alpha}\in F$. Ово друго повлачи

$$v=1\cdot v=\left(\frac{1}{\alpha}\cdot\alpha\right)v=\frac{1}{\alpha}(\alpha v)=\frac{1}{\alpha}\mathbb{O}=\mathbb{O}$$

по делу г).

ђ) Следи из дела б) и $v+(-1)v=1\cdot v+(-1)v=(1+(-1))v=0\cdot v=\mathbb{O}$.

е) Део ђ) за $v=\mathbb{O}$ даје $-\mathbb{O}=(-1)\mathbb{O}$ и онда закључак следи из г).

ж) Из $-v+v=\mathbb{O}$ следи да је v инвез вектора $-v$, а како је тај инверз јединствен, v мора бити једнак $-(-v)$. $\square$

3.1 Векторски потпростори

Као што само имали подгрупу групе, природно је посматрати и потпросторе векторских простора.

Дефиниција 3.9. *Нека је $(V,+,\cdot)$ векторски простор над пољем F и нека је $U \subseteq V$ неки његов подскуп. Кажемо да је U векторски потпростор векторског простора V (и пишемо $U \leqslant V$ или $(U,+,\cdot) \leqslant (V,+,\cdot)$) ако је $(U,+,\cdot)$ векторски простор над истим пољем F.*

Као и код подгрупа, све аксиоме које су изражене преко квантификатора сваки се аутоматски преносе и на подскуп U. Неопходно је да је U затворен за обе операције. Додатно, ако је U непразан подскуп он мора садржати нулу $\mathbb{O}$ векторског простора V јер је $\mathbb{O} = 0 \cdot u$, за $u \in U$, према Задатку 3.8. И слично, за сваки $u \in U$ његов адитивни инверз $-u = (-1)u$ припада U. То значи да је поменута затвореност и довољан услов. Другим речима, $U \leqslant V$ ако и само ако

(1) $(\forall u, v \in U)\ u + v \in U$,

(2) $(\forall \alpha \in F)(\forall u \in U)\ \alpha u \in U$.

Услов (1) обично зовемо услов *адитивности*, а услов (2) услов *хомогености.*

Услове (1) и (2) (заједно) можемо заменити једним еквивалентним условом

$$(\forall \alpha, \beta \in F)(\forall u, v \in U)\ \alpha u + \beta v \in U.$$

Јасно је да је $\mathbb{Q}$ потпростор од $\mathbb{R}$ (као векторски простори над $\mathbb{Q}$), као и $\mathbb{R}$ потпростор од $\mathbb{C}$ (над пољем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{Q}$). Затим, $\mathbb{R}^n[x]$ је векторски потпростор простора $\mathbb{R}[x]$. У Задатку 1.14.в) смо видели да је $\mathbb{R}^n[x]$ затворено са сабирање. Са друге стране, за све $\alpha \in \mathbb{R}$ и $p \in \mathbb{R}^n[x]$, производ αp је или нула-полином (ако је $\alpha = 0$) или је истог степена као p, тј. $\alpha p \in \mathbb{R}^n[x]$.

Задатак 3.10. *Показати да је $U = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x + 2y - 5z = 0 \right\}$ векторски потпростор простора $\mathbb{R}^3$.*

Решење. Лако се проверава да

(1) $(\forall\ (x_1,y_1,z_1),\ (x_2,y_2,z_2) \in U)\quad (x_1,y_1,z_1) + (x_2,y_2,z_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2) \in U$ јер је

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2\,(y_1+y_2) - 5\,(z_1+z_2) &= (x_1 + 2y_1 - 5z_1) + (x_2 + 2y_2 - 5z_2) \\ &= 0 + 0 = 0, \end{aligned}$$

(2) $(\forall \alpha \in \mathbb{R})\,(\forall (x, y, z) \in U)\ \ \alpha(x, y, z) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z) \in U$ јер је

$$\alpha x + 2\alpha y - 5\alpha z = \alpha(x + 2y - 5) = \alpha \cdot 0 = 0.$$

$\square$

Слично се показује и да је скуп решења хомогене једначине $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$, где су $a_1, \ldots, a_n$ фиксирани скалари из поља $\mathbb{R}$, један векторски потпростор $\mathbb{R}^n$. Ово важи само за хомогену једначину јер нпр. $U_1 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x + 2y - 5z = 1 \right\}$ није затворен за сабирање (а ни за множење скаларом различитим од 1).

Затим, скуп решења хомогеног система је векторски потпростор $\mathbb{R}^n[x]$. Доказ би ишао исто као у претходном задатку само што уместо једног услова проверавамо више њих.

Задатак 3.11. *Показати да су следећи подскупови*

$$\begin{aligned}
&U_1 = \{p \in \mathbb{R}[x] \,|\, p(2) = 0\},\\
&U_2 = \{p \in \mathbb{R}[x] \,|\, p''(1) = p(2)\},\\
&U_3 = \left\{ p \in \mathbb{R}[x] \,\middle|\, \int_0^1 p(t)\, dt = 0 \right\},\\
&U_4 = \{p \in \mathbb{R}^4[x] \,|\, p'(1) = p(2) = p(3) - 2p''(-2)\}
\end{aligned}$$

векторски потпростори $\mathbb{R}[x]$.

Решење. Пошто се сви делови раде аналогно, показаћемо само да су U_1 и U_4 потпростори. За U_1 имамо

(1) $(\forall p, q \in U_1)\ \ (p + q)(2) = p(2) + q(2) = 0 + 0 = 0 \ \Rightarrow\ p + q \in U_1,$

(2) $(\forall \alpha \in \mathbb{R})\,(\forall p \in U_1)\ \ (\alpha p)(2) = \alpha p(2) = \alpha 0 = 0 \ \Rightarrow\ \alpha p \in U_1.$

И слично,

(1) $(\forall p, q \in U_4)\ \ p + q \in U_4$, јер $p + q$ задовољава сва три услова:

$$\deg(p + q) \leqslant \max\{\deg p, \deg q\} \leqslant 4,$$

$$(p + q)'(1) = (p' + q')(1) = p'(1) + q'(1) = p(2) + q(2) = (p + q)(2),$$

$$\begin{aligned}
(p + q)(3) - 2(p + q)''(-2) &= p(3) + q(3) - 2(p'' + q'')(-2)\\
&= p(3) + q(3) - 2(p''(-2) + q''(-2))\\
&= p(3) - 2p''(-2) + q(3) - 2q''(-2)\\
&= p(2) + q(2) = (p + q)(2),
\end{aligned}$$

(2) $(\forall \alpha \in \mathbb{R})\,(\forall p \in U_4)$

$$\deg(\alpha p) \in \{\deg p, -1\} \leqslant 4,$$

$$(\alpha p)'(1) = (\alpha p')(1) = \alpha p'(1) = \alpha p(2) = (\alpha p)(2),$$

$$\begin{aligned}(\alpha p)(3) - 2(\alpha p)''(-2) &= \alpha p(3) - 2(\alpha p'')(-2) = \alpha p(3) - 2\alpha p''(-2)\\ &= \alpha(p(3) - 2p''(-2)) = \alpha p(2) = (\alpha p)(2),\end{aligned}$$

што значи да $\alpha p \in U_4$. □

Задатак 3.12. *Који од следећих подскупова*

$$U_1 = \left\{\, a + bx + cx^2 \in \mathbb{C}^3[x] \;\middle|\; \Re a = \Im b \,\right\},$$
$$U_2 = \left\{\, a + bx + cx^2 \in \mathbb{C}^3[x] \;\middle|\; a = |c| \,\right\}$$

су потпростори $\mathbb{C}^3[x]$, ако $\mathbb{C}^3[x]$ гледамо као векторски простор над пољем а) реалних, б) комплексних бројева. ($\Re$ и $\Im$ оначавају реални и комплексни део броја, редом.)

Решење. Прво, U_1 је потпростор $\mathbb{R}$-векторског простора $\mathbb{C}^3[x]$ јер

(1) $\big(\forall p(x) = a + bx + cx^2, q(x) = d + ex + fx^2 \in U_1\big)$

$$\begin{aligned}&\Re(a+d) = \Re a + \Re d = \Im b + \Im e = \Im(b+e)\\ \implies\; &(p+q)(x) = (a+d) + (b+e)x + (c+f)x^2 \in U_1,\end{aligned}$$

(2) $(\forall \lambda \in \mathbb{R})\,\big(\forall p(x) = a + bx + cx^2 \in U_1\big)$

$$\Re(\lambda a) = \lambda \Re a = \lambda \Im b = \Im(\lambda b) \tag{3.13}$$

$$\implies\; (\lambda p)(x) = (\lambda a) + (\lambda b)x + (\lambda c)x^2 \in U_1,$$

Са друге стране, ако $\mathbb{C}^3[x]$ посматрамо као векторски простор над $\mathbb{C}$, видимо да једнакост (3.13) не важи за $\lambda \in \mathbb{C}$. Нпр. можемо узети $\lambda = i$ и $p(x) = (1+i) + ix \in U_1$, за које је $(\lambda p)(x) = (-1+i) - x \notin U_1$.

Подскуп U_2 неће бити векторски потпростор ни над $\mathbb{R}$ ни над $\mathbb{C}$ јер за $p(x) = 1 + x^2$ и $q(x) = 1 + ix^2$ из скупа U_2 збир $(p+q)(x) = 2 + (1+i)x^2$ не припада U_2. □

Задатак 3.14. *Испитати да ли су*

$$\begin{aligned}U_1 &= \text{скуп свих аритметичких низова из } \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\\ U_2 &= \text{скуп свих геометријских низова из } \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\\ U_3 &= \left\{\, a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n \,\right\},\\ U_4 &= \left\{ a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < +\infty \right\}\end{aligned}$$

векторски потпростори простора $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Решење. За два аритметичка низа $a_n = a_1 + (n-1)d$ и $b_n = b_1 + (n-1)e$, и њихов збир $a+b$ ће бити ариметички јер је

$$(a+b)_n = a_n + b_n = a_1 + (n-1)d + b_1 + (n-1)e = (a+b)_1 + (n-1)(d+e).$$

Слично, ако аритметички низ $a_n = a_1 + (n-1)d$ помножимо скаларом $\alpha \in \mathbb{R}$ добијамо низ αa који је аритметички јер је

$$(\alpha a)_n = \alpha a_n = \alpha\,(a_1 + (n-1)d) = (\alpha a)_1 + (n-1)(\alpha d),$$

што тачно значи да је U_1 потпростор $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Са друге стране, U_2 није потпростор $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ јер нпр. збир геометријских низова 2^n и 3^n није геометријски.

Затим, U_3 јесте потпростор јер

(1) $(\forall a, b \in U_3)$

$$(a+b)_{n+2} = a_{n+2} + b_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 2b_{n+1} - b_n = 2(a+b)_{n+1} - (a+b)_n$$

$$\Longrightarrow a+b \in U_3,$$

(2) $(\forall \alpha \in \mathbb{R})\,(\forall a \in U_3)$

$$(\alpha a)_{n+2} = \alpha a_{n+2} = \alpha\,(2a_{n+1} - a_n) = 2(\alpha a)_{n+1} - (\alpha a)_n \implies \alpha a \in U_3.$$

И на крају, U_4 јесте потпростор јер

(1) $(\forall a, b \in U_3)$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} (a+b)_n^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2 + 2a_n b_n\right) \\ &\leqslant 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right) = 2\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 < +\infty\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow a+b \in U_4,$$

где смо користили очигледну неједнакост $2cd \leqslant c^2 + d^2$ (која следи из $(c-d)^2 \geqslant 0$),

(2) $(\forall \alpha \in \mathbb{R})\,(\forall a \in U_4)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a)_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n)^2 = \alpha^2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < +\infty \implies \alpha a \in U_4.$$

$\square$

Задатак 3.15. *Нека је* $V = \mathcal{C}^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ *векторски простор над* $\mathbb{C}$ *свих диференцијабилних функција из* $\mathbb{R}$ *у* $\mathbb{C}$. *Испитати који од следећих подскупова*

$$\begin{aligned}
&U_1 = \textit{скуп свих непарних функција из } V,\\
&U_2 = \{f \in V \mid f'(x) = e^x f(x),\ \textit{за све } x \in \mathbb{R}\},\\
&U_3 = \{f \in V \mid (1+x)(f(x)+f'(x)) = 2f(1-2x),\ \textit{за све } x \in \mathbb{R}\},\\
&U_4 = \{f \in V \mid |f'(x)| < 1,\ \textit{за све } x \in [0,1]\}
\end{aligned}$$

је потпростор V.

Решење. Јасно је да U_4 није векторски потпростор. Довољно је да узмемо функцију $f(x) = \frac{x}{2} \in U_4$ и помножимо је скаларом $\alpha = 3 \in \mathbb{C}$, производ $(\alpha f)(x) = \frac{3}{2}x$ неће бити из U_4.

Са друге стране U_1, U_2 и U_3 јесу векторски потпростори. Пошто је све поприлично слично, проверићемо само да је U_2 векторски потпростор:

(1) $(\forall f, g \in U_2)$

$$(f+g)'(x) = (f'+g')(x) = f'(x)+g'(x) = e^x f(x)+e^x g(x) = e^x(f+g)(x),$$

$$\text{за све } x \in \mathbb{R} \implies f+g \in U_2,$$

(2) $(\forall \alpha \in \mathbb{C})\,(\forall f \in U_2)$

$$(\alpha f)'(x) = \alpha f'(x) = \alpha e^x f(x) = e^x(\alpha f)(x) \implies \alpha f \in U_2.$$

□

Потпростори U_2 и U_3 из Задатка 3.15 илуструју да је скуп решења произвољне *хомогене линеарне диференцијалне једначине* један векторски потпростор простора функција, што је главни алат у решавању поменутих једначина. Слично, потпростор U_3 из Задатка показује да је скуп решења *хомогене линеарне диференцне (рекурентне) једначине* векторски потпростор простора низова. Овакве једначине ћемо ускоро моћи да решимо методама Линеарне алгебре.

Задатак 3.16. *Нека је* $(\mathbb{R}^2, \maltese, \bullet)$ *векторски простор из Задатка 3.6. Испитати који су од следећих подскупова* $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}
&U_1 = \mathbb{R} \times \{-7\},\\
&U_2 = \{(x,x) \mid x \in \mathbb{R}\},\\
&U_3 = \{(x, x^7 - 7) \in V \mid x \in \mathbb{R}\}
\end{aligned}$$

потпростори $(\mathbb{R}^2, \maltese, \bullet)$.

Решење. Прво, U_1 јесте потпростор $\left(\mathbb{R}^2, \maltese, \bullet\right)$ јер

(1) $(\forall (x,-7),(y,-7) \in U_1)$

$$(x,-7) \maltese (y,-7) = \left(\sqrt[7]{x^7+y^7}, -7-7+7\right) \in U_1,$$

(2) $(\forall \alpha \in \mathbb{R})\,(\forall (x,-7) \in U_1)$

$$\alpha \bullet (x,-7) = \left(\sqrt[7]{\alpha} x, \alpha \cdot 7 + 7(\alpha-1)\right) = \left(\sqrt[7]{\alpha} x, -7\right) \in U_1.$$

Затим, U_2 није векторски потпростор $\mathbb{R}^2$ јер $(0,0),(1,1) \in U_2$, а

$$(0,0) \maltese (1,1) = \left(\sqrt[7]{0^7+1^7}, 0+1+7\right) = (1,8) \notin U_2.$$

И на крају, U_3 јесте потпростор $\mathbb{R}^2$ јер

(1) $\left(\forall \left(x, x^7-7\right), \left(y, y^7-7\right) \in U_3\right)$

$$\begin{aligned}\left(x, x^7-7\right) \maltese \left(y, y^7-7\right) &= \left(\sqrt[7]{x^7+y^7}, x^7-7+y^7-7+7\right)\\ &= \left(\sqrt[7]{x^7+y^7}, \left(\sqrt[7]{x^7+y^7}\right)^7 - 7\right) \in U_3,\end{aligned}$$

(2) $(\forall \alpha \in \mathbb{R})\left(\forall \left(x, x^7-7\right) \in U_3\right)$

$$\begin{aligned}\alpha \bullet \left(x, x^7-7\right) &= \left(\sqrt[7]{\alpha} x, \alpha\left(x^7-7\right) + 7(\alpha-1)\right)\\ &= \left(\sqrt[7]{\alpha} x, \left(\sqrt[7]{\alpha} x\right)^7 - 7\right) \in U_3.\end{aligned}$$

$\square$

Глава 4

База и димензија векторског простора

4.1 Линеарне комбинације и линеарни омотач

Дефиниција 4.1. *Нека је V векторски простор над пољем F. За произвољне векторе $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ и произвољне скаларе $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in F$ кажемо да је вектор $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$ линеарна комбинација (или прецизније линеарна комбинација над пољем F, F-линеарна комбинација) вектора $v_1, \dots, v_n$.*

Дефиниција 4.2. *Нека је V векторски простор над пољем F и нека је $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subseteq V$ коначан подскуп. Линеарна оматач (линеал) скупа S (у ознаци $\mathscr{L}(S)$) је скуп свих линеарних комбинација вектора из S, тј.*

$$\mathscr{L}(S) := \{\, \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n \mid \alpha_1, \dots, \alpha_n \in F \,\}.$$

Поред $\mathscr{L}(S)$ користи се и ознаке $\Omega(S)$ и $\mathscr{L}in(S)$, као и $\mathscr{L}_F(S)$ уколико желимо да нагласимо о ком пољу скалара је реч. Уколико је $S \subseteq V$ бесконачан скуп претходна дефиниција се проширује тако да узимимо само *коначне* линеарне комбинације тј.

$$\mathscr{L}(S) := \{\, \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n \mid \alpha_1, \dots, \alpha_n \in F,\, v_1, \dots, v_n \in S \,\}.$$

Из дефиниције линеарног омотача следи:

Теорема 4.3. *Нека су S и T произвољни подскупови векторског простора V.*

(1) Линеарни омотач $\mathscr{L}(S)$ је векторски потпростор простора V, и то је најмањи потпростор од V који садржи S.

(2) Важи $S \subseteq \mathscr{L}(S)$, при чему се једнакост $S = \mathscr{L}(S)$ достиже ако и само ако је S векторски потпростор од V.

(3) Ако је $S \subseteq T$, онда је $\mathscr{L}(S) \subseteq \mathscr{L}(T)$.

(4) Важи $\mathscr{L}(\mathscr{L}(S)) = \mathscr{L}(S)$.

На пример, вектор $v = (1, 4, -7) \in \mathbb{R}^3$ је линеарна комбинација вектора $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ и $e_3 = (0, 0, 1)$ јер је $v = e_1 + 4e_2 - 7e_3$. Овде је то очигледно, али ако уместо вектора e_i узмемо неке ружније векторе, ситуација постаје технички компликованија као што ћемо видети у наредним примерима.

Задатак 4.4. *Показати да је вектор $v = (1, 4, -3) \in \mathbb{R}^3$ линеарна комбинација вектора $f_1 = (1, -2, 5)$, $f_2 = (2, -3, 0)$ и $f_3 = (0, 1, 3)$.*

Решење. Другим речима, треба показати да постоје скалари $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ такви да је $v = \alpha f_1 + \beta f_2 + \gamma f_3$, тј.

$$(1, 4, -3) = \alpha(1, -2, 5) + \beta(2, -3, 0) + \gamma(0, 1, 3) = (\alpha + 2\beta, -2\alpha - 3\beta + \gamma, 5\alpha + 3\gamma).$$

Еквивалентно, питамо се да ли следећи систем (по промењљивим α, β, γ) има решење:

$$\begin{array}{rcrcrcrl}
\alpha & + & 2\beta & & & = & 1 & \\
-2\alpha & - & 3\beta & + & \boxed{\gamma} & = & 4 & \quad /(-3) \\
5\alpha & & & + & 3\gamma & = & -3 & \quad \longleftarrow \\
\hline
-2\alpha & - & 3\beta & + & \gamma & = & 4 & \\
\boxed{\alpha} & + & 2\beta & & & = & 1 & \quad /(-11) \\
11\alpha & + & 9\beta & & & = & -15 & \quad \longleftarrow \\
\hline
-2\alpha & - & 3\beta & + & \gamma & = & 4 & \\
\alpha & + & 2\beta & & & = & 1 & \\
 & - & 13\beta & & & = & -26 & \\
\hline
\end{array}$$

чије је решење $\beta = 2$, $\alpha = -3$ и $\gamma = 4$. Дакле, $v = -3f_1 + 2f_2 + 4f_3$ је линеарна комбинација f_1, f_2 и f_3. $\square$

Задатак 4.5. *Показати да је полином $p(x) = 5 + 2x + 5x^2 \in \mathbb{R}^3[x]$ линеарна комбинација вектора $f_1(x) = 1 + x + 2x^2$, $f_2(x) = 3 + x^2$, $f_3(x) = 1 + 4x + 7x^2$ и $f_4(x) = 2 + 2x + 4x^2$.*

Решење. Другим речима, треба показати да постоје скалари $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ такви да је $p = \alpha f_1 + \beta f_2 + \gamma f_3 + \delta f_4$, тј.

$$\begin{aligned}
&5 + 2x + 5x^2 \\
&= \alpha\left(1 + x + 2x^2\right) + \beta\left(3 + x^2\right) + \gamma\left(1 + 4x + 7x^2\right) + \delta\left(2 + 2x + 4x^2\right) \\
&= (\alpha + 3\beta + \gamma + 2\delta) + (\alpha + 4\gamma + 2\delta)x + (2\alpha + \beta + 7\gamma + 4\delta)x^2.
\end{aligned}$$

Еквивалентно, питамо се да ли следећи систем (по променљивим α, β, γ, δ) има решење:

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrl}
\alpha & + & 3\beta & + & \gamma & + & 2\delta & = & 5 & \\
\alpha & & & + & 4\gamma & + & 2\delta & = & 2 & \\
2\alpha & + & \boxed{\beta} & + & 7\gamma & + & 4\delta & = & 5 & /(-3) \\
\hline
\alpha & + & 3\beta & + & \gamma & + & 2\delta & = & 5 & \\
\cancel{-5\alpha} & & & \cancel{-} & \cancel{20\gamma} & \cancel{-} & \cancel{10\delta} & \cancel{=} & \cancel{-10} & \\
\alpha & & & + & 4\gamma & + & 2\delta & = & 2 & \\
\hline
\end{array}
$$

Једно решење овог система би било $\gamma = \delta = 0$, $\alpha = 2$ и $\beta = 1$. Зато је $p = 2f_1 + f_2 + 0 \cdot f_3 + 0 \cdot f_4$ линеарна комбинација вектора f_1, f_2, f_3 и f_4.

Наравно, ово смо могли да аргументујемо и помоћу $p = f_2 + f_4$, $p = \frac{3}{2}f_2 + \frac{1}{2}f_3$, итд. Претходно такође говори и да је p линеарна комбинација f_1 и f_2 (или f_2 и f_3). $\square$

Задатак 4.6. *Испитати да ли је низ* $x_n = 2^n + 3^{\frac{n+1}{2}} + i^{n+2} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ *линеарна комбинација низова* $a_n = 2^n$, $b_n = 3^{\frac{n}{2}}$ *и* $c_n = i^n$ *над пољем а)* $\mathbb{Q}$, *б)* $\mathbb{R}$, *в)* $\mathbb{C}$.

Решење. Прво, из $x = a + \sqrt{3}b - c$ следи да је низ x линеарна комбинација низова a, b и c над $\mathbb{R}$ и над $\mathbb{C}$.

Покажимо сада да x није $\mathbb{Q}$-линеарна комбинација низова a, b и c. Претпоставимо супротно, да постије скалари $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$ такви да је $x = \alpha a + \beta b + \gamma c$. Специјално, ако изједанчимо први члан ових низова имамо

$$5 - i = x_1 = (\alpha a + \beta b + \gamma c)_1 = \alpha a_1 + \beta b_1 + \gamma c_1 = 2\alpha + \sqrt{3}\beta + i\gamma,$$

односно $2\alpha + \sqrt{3}\beta - 5 = i(-\gamma - 1)$. Како су и $2\alpha + \sqrt{3}\beta - 5$ и $-\gamma - 1$ реални, изједначавањем реалних и имагинарних делова закључујемо да је је $2\alpha + \sqrt{3}\beta - 5 = -\gamma - 1 = 0$. Дакле, $\gamma = -1$ и $\sqrt{3}\beta = 5 - 2\alpha$. Из друге једнакости следи да је $\beta = 0$ јер би у супротно било $\sqrt{3} = \frac{5-2\alpha}{\beta} \in \mathbb{Q}$.

Једина преостала могућност је $x = \frac{5}{2}a - c$. Јасно је да ово није тачно јер је нпр.

$$x_2 = 5 + 3\sqrt{3}, \qquad \text{а} \qquad \left(\frac{5}{2}a - c\right)_2 = 11.$$

Дакле, x није $\mathbb{Q}$-линеарна комбинација a, b и c. $\square$

4.2 Генераторни скуп

Дефиниција 4.7. *Нека је V векторски простор над пољем F. Кажемо да је $S \subseteq V$ генераторни скуп (генератриса) векторског простора V ако је $V = \mathscr{L}(S)$, тј. ако је сваки вектор из V линеарна комбинација вектора из S.*

Овде често кажемо и да скуп S генерише V или да елементи S генеришу V.

Задатак 4.8. *Показати да је* $\{(1,1,1),(2,1,1),(-1,0,1)\}$ *генераторни скуп од* $\mathbb{R}^3$.

Решење. Овде треба показати да се произвољан вектор $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ може записати као линеарна комбинација

$$(a,b,c) = \alpha f_1 + \beta f_2 + \gamma f_3,$$

где је $f_1 = (1,1,1)$, $f_2 = (2,1,1)$ и $f_3 = (-1,0,1)$. Другим речима, питамо се да ли следећи систем (по променљивим α, β, γ са параметрима a,b,c) има решења:

$$\begin{array}{rcrcrcll}
\alpha & + & 2\beta & - & \gamma & = & a & \\
\alpha & + & \beta & & & = & b & \\
\alpha & + & \beta & + & \boxed{\gamma} & = & c & \\
\hline
\alpha & + & \beta & + & \gamma & = & c & \\
2\alpha & + & 3\beta & & & = & a+c & \\
\boxed{\alpha} & + & \beta & & & = & b & /(-2) \\
\hline
\alpha & + & \beta & + & \gamma & = & c & \\
\alpha & + & \beta & & & = & b & \\
 & & \beta & & & = & a-2b+c & \\
\hline
\end{array}$$

Његово решење је $\beta = a-2b+c$, $\alpha = -a+3b-c$, $\gamma = -b+c$, па је

$$(a,b,c) = (-a+3b-c)f_1 + (a-2b+c)f_2 + (-b+c)f_3.$$

Други начин да ово урадимо је да (a,b,c) запишемо као $ae_1 + be_2 + ce_3$, где је $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ и $e_3 = (0,0,1)$. Затим приметимо (или опет одредимо помоћу система као у Задатку 4.4) да је

$$\begin{aligned}
e_1 &= f_2 - f_1, \\
e_3 &= e_1 + f_3 = -f_1 + f_2 + f_3, \\
e_2 &= f_1 - e_1 - e_3 = 3f_1 - 2f_2 - f_3.
\end{aligned}$$

Онда је

$$\begin{aligned}
(a,b,c) &= a(-f_1 + f_2) + b(3f_1 - 2f_2 - f_3) + c(-f_1 + f_2 + f_3) \\
&= (-a+3b-c)f_1 + (a-2b+c)f_2 + (-b+c)f_3.
\end{aligned}$$

□

Задатак 4.9. *Показати да је* $\mathscr{L}_{\mathbb{R}}(e_1,e_2) = \mathscr{L}_{\mathbb{R}}(f_1,f_2)$, *где је* $e_1 = (1+7i, 4+2i)$, $e_2 = (6-2i, 3i)$, $f_1 = (9+19i, 12+9i)$ *и* $f_2 = (5-9i, -4+i)$.

Решење. Покажимо прво да је $\mathscr{L}_{\mathbb{R}}(e_1,e_2) \subseteq \mathscr{L}_{\mathbb{R}}(f_1,f_2)$. Како је сваки вектор $v \in \mathscr{L}_{\mathbb{R}}(e_1,e_2)$ линеарна комбинација (над $\mathbb{R}$) вектора e_1 и e_2

довољно је показати да $e_1, e_2 \in \mathscr{L}_{\mathbb{R}}(f_1, f_2)$. Проверимо да ли постоје скалари $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ такви да је $e_1 = \alpha f_1 + \beta f_2$, тј.

$$(1+7i, 4+2i) = (9\alpha + 5\beta + (19\alpha - 9\beta)i, 12\alpha - 4\beta + (9\alpha + \beta)i)$$

Решавањем система

$$\begin{array}{rcrl} 9\alpha & + & 5\beta & = 1 \\ 19\alpha & - & 9\beta & = 7 \\ 12\alpha & - & 4\beta & = 4 \\ 9\alpha & + & \beta & = 2 \end{array}$$

или просто погађањем добијамо да је $e_1 = \frac{1}{4}f_1 - \frac{1}{4}f_2$. Истим поступком добијамо и $e_2 = \frac{1}{4}f_1 + \frac{3}{4}f_2$.

За обрнуту инклузију је довољно показати да $f_1, f_2 \in \mathscr{L}_{\mathbb{R}}(e_1, e_2)$. То наравно можемо урадити понављањем претходног поступка. А можемо и само приметити да је $e_2 - e_1 = \left(\frac{1}{4}f_1 + \frac{3}{4}f_2\right) - \left(\frac{1}{4}f_1 - \frac{1}{4}f_2\right) = f_2$. И слично, $3e_1 + e_2 = f_1$. □

Задатак 4.10. *Одредити један генераторни скуп векторског простора V свих аритметичких низова из $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Показати да се сваки аритметички низ може представити као линеарна комбинација низова $a_n = n+1$, $b_n = n^2 + n + 1$ и $c_n = n^2 - 3n - 1$.*

Решење. За произвољан низ $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ важи $x_n = x_1 + (n-1)d$, за неко $d \in \mathbb{R}$. Ово можемо интерпретирати и као једнакост низова $x = x_1 y + dz$, где су низови $y, z \in V$ дати са $y_n = 1$ и $z_n = n - 1$. Дакле, скуп $\{y, z\}$ је једна генератриса векторског простора V.

Приметимо да је $(b-c)_n = b_n - c_n = 4n+2$ што повлачи да је $z = b - c - 3a$ и $y = 2a - \frac{1}{2}(b-c)$. Коначно, произвољан низ $x \in V$ се може записати као

$$\begin{aligned} x = x_1 y + dz &= x_1\left(2a - \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c\right) + d(-3a + b - c) \\ &= (2x_1 - 3d)\,a + \left(-\frac{x_1}{2} + d\right)b + \left(\frac{x_1}{2} - d\right)c \in \mathscr{L}(a, b, c). \end{aligned}$$

Задатак 4.11. *Показати да је*

$$V = \left\{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \,\middle|\, (\exists c, \theta \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R})\, f(x) = c\sin(x + \theta) \right\}$$

векторски потпростор простора функција $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ и одредити једну његову генератрису.

Решење. Приметимо да се сваки $f \in V$ може записати као

$$f(x) = c\sin(x+\theta) = c\cos\theta\sin x + c\sin\theta\cos x.$$

Како су c и θ били произвољни реални бројеви, и $a = c\cos\theta$ и $b = c\sin\theta$ ће бити произвољни реални скалари. Зато почетни векторски простор можемо записати и у облику $V = \mathscr{L}(\sin x, \cos x)$.

Теорема 4.3(1) каже да је V векторски потпростор простора $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, а скуп $\{\sin x, \cos x\}$ ће бити генератриса V. □

4.3 Линеарна (не)зависност

Дефиниција 4.12. *Нека је V векторски простор над пољем F. Кажемо да су вектори $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$*

(1) линеарно зависни ако је нула-вектор њихова нетривијална линеарна комбинација тј.

$$\mathbb{O} = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n,$$

где су $\alpha_i \in F$, за све $1 \leqslant i \leqslant n$, и $\alpha_i \neq 0$, за бар једно $1 \leqslant i \leqslant n$.

(2) линеарно независни ако нису линеано зависни тј. ако

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = \mathbb{O} \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0.$$

Уколико су вектори $v_1, \ldots, v_n$ линеарно зависни и скалар $\alpha_i \neq 0$, онда је вектор

$$v_i = -\frac{\alpha_1}{\alpha_i} v_1 - \cdots - \frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i} v_{i-1} - \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i} v_{i+1} - \cdots - \frac{\alpha_n}{\alpha_i} v_n$$

линеарна комбинација вектора $v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n$. А важи и обрнуто, ако је један од вектора $v_1, \ldots, v_n$ линеарна комбинација осталих, онда су поменути вектори линеарно зависни.

Специјално, два вектора су линеарно зависни ако и само су пропорционални, тј. један од њих се може изразити као скаларни умножак другог вектора.

Кажемо да је скуп вектора $S \subseteq V$ *линеарно независан* ако су произвољни вектори $v_1, \ldots, v_n \in V$ линеарно независни.

Задатак 4.13. *Испитати да ли су вектори $p(x) = 2 + x + 5x^2$, $q(x) = 1 + 2x + x^2$ и $r(x) = 1 + 3x$ линеарно зависни и уколико јесу изразити један од њих преко преосталих.*

Решење. Питамо се да ли је нула-полином нетривијална линеарна комбинација вектора p, q и r, односно да ли постоје скалари $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ који нису сви нуле такви да је $\alpha p + \beta q + \gamma r = \mathbb{O}$, тј.

$$\alpha\left(2 + x + 5x^2\right) + \beta\left(1 + 2x + x^2\right) + \gamma\left(1 + 3x\right) = 0.$$

Ово је исто као да смо питали да ли систем

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2\alpha & + & \beta & + & \gamma & = & 0 \\ \alpha & + & 2\beta & + & 3\gamma & = & 0 \\ 5\alpha & + & \beta & & & = & 0 \end{array}$$

има нетривијално решење тј. решење различито од $(0, 0, 0)$ (што је решење сваког хомогеног система).

Опште решење овог система је $\{(\alpha, -5\alpha, 3\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$. Дакле, имамо нетривијално решење $\alpha = 1$, $\beta = -5$, $\gamma = 3$, које даје линеарну зависност $p - 5q + 3r = \mathbb{O}$.

Сада полином p можемо изразити као $p = 5q - 3r$. Или слично, $q = \frac{1}{5}p + \frac{3}{5}r$ или $r = -\frac{1}{3}p + \frac{5}{3}r$. □

Задатак 4.14. *Показати да су вектори* $u = \left(1, a, a^2\right)$, $v = \left(1, b, b^2\right)$ *и* $w = \left(1, c, c^2\right)$ *линеарно независни ако и само ако међу бројевима* a, b *и* c *нема једнаких.*

Решење. Директан смер је очигледан. Нека су вектори u, v и w линеарно независни. Претпоставимо супротно, без умањења општости нека је $a = b$. Тада су вектори u, v и w линеарно зависни јер је $u - v = (0, 0, 0) = \mathbb{O}$, што није могуће.

Обрнуто, претпоставимо сада да је $a \neq b$, $a \neq c$ и $b \neq c$ и покажимо да су u, v и w линеарно независни. Значи претпостављамо да је

$$\alpha\left(1, a, a^2\right) + \beta\left(1, b, b^2\right) + \gamma\left(1, c, c^2\right) = \mathbb{O}$$

и хоћемо да покажемо да је тада $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Претходна једнакост даје систем (са промењљивим α, β, γ и параметрима a, b, c)

$$
\begin{array}{rcrcrcll}
\boxed{\alpha} & + & \beta & + & \gamma & = & 0 & /(-a) \quad /\left(-a^2\right) \\
a\alpha & + & b\beta & + & c\gamma & = & 0 & \\
a^2\alpha & + & b^2\beta & + & c^2\gamma & = & 0 & \\
\hline
\alpha & + & \beta & + & \gamma & = & 0 & \\
 & & (b-a)\boxed{\beta} & + & (c-a)\gamma & = & 0 & /(-(b+a)) \\
 & & \left(b^2-a^2\right)\beta & + & \left(c^2-a^2\right)\gamma & = & 0 & \\
\hline
\alpha & + & \beta & + & \gamma & = & 0 & \\
 & & (b-a)\beta & + & (c-a)\gamma & = & 0 & \\
 & & & & (c-a)(c-b)\gamma & = & 0 & \Big/ \cdot \frac{1}{(c-a)(c-b)} \\
\hline
\end{array}
$$

Из последње једначине закључујемо да је $\gamma = 0$, а затим ходом уназад добијамо и $\beta = \alpha = 0$. То значи да су вектори u, v и w линеарно независни. □

4.4 База и димезија

Дефиниција 4.15. *Нека је* V *векторски простор и* $\mathcal{B} \subseteq V$ *његов подскуп. Кажемо да је* $\mathcal{B}$ *база векторског простора* V *ако је скуп* $\mathcal{B}$ *линеарно независан и генераторни за* V.

База векторског простора V можемо добити тако што

(1) из произвољног генераторног скупа за V уклонимо линерано зависне векторе,

(2) произвољан линеарно независан скуп допунимо одговарајућим векторима тако да остане линеарно независан и да постане генераторни.

Теорема 4.16. *Нека је V векторски простор и нека су $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$ две његове базе. Тада $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$ имају исти број вектора (при чему тај број може бити и бесконачно).*

Зато наредна дефиниција има смисла тј. не зависи од избора базе.

Дефиниција 4.17. *Нека је V векторски простор над пољем F и нека је $\mathcal{B}$ његова база. Број елемената (из $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$) базе $\mathcal{B}$ зовемо димензија векторског простора V и означавамо са $\dim V$ или $\dim_F V$.*

Теорема 4.18. *Нека V векторски простор коначне димезије n.*

(1) Сваки линеарно независан скуп у V са n елемената је база V.

(2) Сваки генераторни скуп од V са n елемената је база V.

Теорема 4.19. *Нека V векторски простор коначне димензије и нека је U његов потпростор. Тада је $\dim U \leqslant \dim V$, при чему се једнакост достиже ако и само ако је $U = V$.*

Други део претходне теореме се често користи у облику: из $U \leqslant V$ и $\dim U = \dim V < +\infty$ следи $U = V$.

Стандардни примери база (надаље ћемо их звати *канонске* базе) су:

- Канонска база $\mathbb{R}^n$ је $e = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, где је $e_i = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{i-1}, 1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-i})$.
  Јасно је да се сваки вектор $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ може записати као
  $$(x_1, \ldots, x_n) = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n,$$
  што значи да је скуп e генераторни за $\mathbb{R}^n$. Остаје још да покажемо да је e линеарно независан скуп. Из
  $$(0, \ldots, 0) = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$
  следи да је $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$. Дакле, e јесте база $\mathbb{R}^n$, па је $\dim \mathbb{R}^n = |e| = n$. Надаље ћемо ознаку e користити искључиво за канонску базу (ако не нагласимо другачије), а e_i за њене елементе.
- Скуп e ће бити и канонска база векторског простора $\mathbb{C}^n$ над $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}^n$ над $\mathbb{Q}$.

- База $\mathbb{R}$-векторског простора $\mathbb{C}^n$ је $\{e_1, ie_1, e_2, ie_2, \dots, e_n, ie_n\}$. Следи, $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^n = 2n$

- Канонска база $\mathbb{R}^n[x]$ је $\{1, x, x^2, \dots, x^{n-1}\}$, па је $\dim \mathbb{R}^n[x] = n$ (што објашњава ознака $\mathbb{R}^n[x]$, дакле то n је димензија).

- Канонска база $\mathbb{R}[x]$ је $\{1, x, x^2, \dots\}$, па је $\dim \mathbb{R}[x] = \infty$.

Следи пар примера са одређивањем базе, користимо технике које смо видели у претходном делу ове главе.

Задатак 4.20. *Одредити бар по једну базу и димензију следећих векторских простора:*

$$
\begin{aligned}
V_1 &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x + 2y - 5z = 0 \right\}, \\
V_2 &= \textit{скуп решења хомогеног линеарног система} \\
&\qquad \begin{array}{rcrcrcrcr}
2x & + & 3y & - & z & + & 5t & = & 0 \\
3x & + & y & + & 2z & - & 9t & = & 0 \\
x & + & 5y & - & 4z & + & 19t & = & 0
\end{array} \\
V_3 &= \mathscr{L}((1,7,4,2),(6,-2,0,3),(9,19,12,9),(5,-9,-4,1)), \\
V_4 &= \left\{ p \in \mathbb{R}^3[x] \;\middle|\; p(2) = 0 \right\}, \\
V_5 &= \left\{ p \in \mathbb{R}^3[x] \;\middle|\; p''(1) = p(-1) \right\}, \\
V_6 &= \mathscr{L}\left(1 - x^3, 2 + x + x^2, 1 + x + x^2 + x^3, 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3, \right. \\
&\qquad \left. x + 2x^2 + 3x^3\right), \\
V_7 &= \left\{ (a,b,c) \in \mathbb{C}^3 \;\middle|\; \Re a = \Im b = c \right\} \; \textit{као } \mathbb{R} - \textit{векторски простор}, \\
V_8 &= \mathscr{L}_{\mathbb{Q}}\left(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\right) \; \textit{као } \mathbb{Q} - \textit{векторски простор}, \\
V_9 &= \textit{скуп свих аритметичких низова из } \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \\
V_{10} &= \{(0,0,0),(1,1,1),(2,2,2),(0,1,2),(0,2,1),(1,0,2),(1,2,0),(2,0,1), \\
&\qquad (2,1,0)\} \; \textit{као } \mathbb{Z}_3 - \textit{векторски простор}.
\end{aligned}
$$

Решење. Произвољан вектор $(x,y,z) \in V_1$ се може записати као

$$(-2y + 5z, y, z) = y(-2,1,0) + z(5,0,1),$$

где су $y, z \in \mathbb{R}$. То значи да вектори $v_1 = (-2,1,0)$ и $v_2 = (5,0,1)$ генеришу V_1. Проверимо да ли су v_1 и v_2 линеарно зависни. Из $\alpha v_1 + \beta v_2 = (0,0,0)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, следи $-2\alpha + 5\beta = \alpha = \beta = 0$. Дакле, скуп $\{v_1, v_2\}$ је линеарно независан, па ће бити база V_1. Специјално, $\dim V_1 = 2$. Слично смо могли показати и да су скупови $\left\{\left(1, -\frac{1}{2}, 0\right)\right\}$, $\left\{\left(1, 0, \frac{1}{5}\right)\right\}$, $\{(-2,1,0),(3,1,1)\}$ и $\{(-2,1,0),(1,2,1)\}$ (неке друге) базе векторског простора V_1, и као што видимо све те базе су двочлане.

Скуп решења система (тј. векторски простор V_2) је једнак

$$\begin{aligned}
V_2 &= \{(\alpha, \beta, -33\alpha - 32\beta, -7\alpha - 7\beta) \,|\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \\
&= \{\alpha(1, 0, -33, -7) + \beta(0, 1, -32, -7) \,|\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \\
&= \mathscr{L}((1, 0, -33, -7), (0, 1, -32, -7)).
\end{aligned}$$

Дакле, вектори $(1, 0, -33, -7)$ и $(0, 1, -32, -7)$ чине генераторни скуп за V_2. Тај скуп ће бити и база V_2 јер из $\alpha(1, 0, -33, -7) + \beta(0, 1, -32, -7) = 0$, за $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, следи $\alpha = \beta = -33\alpha - 32\beta = -7\alpha - 7\beta = 0$. Специјално, $\dim V_2 = 2$.

За векторски простор V_3 имамо генераторни скуп: $f_1 = (1, 7, 4, 2)$, $f_2 = (6, -2, 0, 3)$, $f_3 = (9, 19, 12, 9)$ и $f_4 = (5, -9, -4, 1)$. Проверимо линеарну независност: нека је $\alpha f_1 + \beta f_2 + \gamma_3 + \delta f_4 = (0, 0, 0, 0)$, за $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Тада је

$$\begin{array}{rcrcrcrcrl}
\boxed{\alpha} & + & 6\beta & + & 9\gamma & + & 5\delta & = & 0 & /(-7)\ /(-4)\ /(-2) \\
7\alpha & - & 2\beta & + & 19\gamma & - & 9\delta & = & 0 & \\
4\alpha & & & + & 12\gamma & - & 4\delta & = & 0 & \\
2\alpha & + & 3\beta & + & 9\gamma & + & \delta & = & 0 & \\
\hline
\alpha & + & 6\beta & + & 9\gamma & + & 5\delta & = & 0 & \\
 & - & 44\beta & - & 44\gamma & - & 44\delta & = & 0 & \\
 & - & 24\beta & - & 24\gamma & - & 24\delta & = & 0 & \\
 & - & 9\beta & - & 9\gamma & - & 9\delta & = & 0 & \\
\hline
\alpha & + & 6\beta & + & 9\gamma & + & 5\delta & = & 0 & \\
 & & \beta & + & \gamma & + & \delta & = & 0 & \\
\hline
\end{array}$$

Једно нетривијално решење овог система је $\beta = 0$, $\gamma = 1$, $\delta = -1$ и $\alpha = -4$. Оно даје линеарну зависност $-4f_1 + f_3 - f_4 = \mathbb{O}$, која повлачи $f_4 = -4f_1 + f_3$. То даље значи да је $V_3 = \mathscr{L}(f_1, f_2, f_3, -4f_1 + f_3) = \mathscr{L}(f_1, f_2, f_3)$, тј. f_4 уклањамо из генераторног скупа зато што је линеарна комбинација f_1, f_2 и f_3. Проверимо сада да ли су f_1, f_2 и f_3 линеарно независни. Нека је сада $\alpha f_1 + \beta f_2 + \gamma f_3 = \mathbb{O}$, за неке $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ (неке нове α, β, γ, не оне од малопре). Тада је

$$\begin{array}{rcrcrcl}
\alpha & + & 6\beta & + & 9\gamma & = & 0 \\
7\alpha & - & 2\beta & + & 19\gamma & = & 0 \\
4\alpha & & & + & 12\gamma & = & 0 \\
2\alpha & + & 3\beta & + & 9\gamma & = & 0
\end{array}$$

Приметимо да овај систем личи на онај малопређашњи, само што недостаје δ. Зато га нећемо поново решавати већ искористити тај рачун и рећи да је (брисањем δ)

$$\begin{array}{rcrcrcl}
\alpha & + & 6\beta & + & 9\gamma & = & 0 \\
 & & \beta & + & \gamma & = & 0
\end{array}$$

Једно нетривијално решење овог система је $\beta = 1$, $\gamma = -1$ и $\alpha = 3$. Оно даје линеарну зависност $3f_1 + f_2 - f_3 = \mathbb{O}$, која повлачи $f_3 = 3f_1 + f_2$. То даље значи да је $V_3 = \mathscr{L}(f_1, f_2, 3f_1 + f_2) = \mathscr{L}(f_1, f_2)$. Поновимо поступак још једном и проверимо сада да ли су f_1 и f_2 линеарно независни. Нека је сада $\alpha f_1 + \beta f_2 = \mathbb{O}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, тада је

$$\begin{array}{rcrcl} \alpha & + & 6\beta & = & 0 \\ 7\alpha & - & 2\beta & = & 0 \\ 4\alpha & & & = & 0 \\ 2\alpha & + & 3\beta & = & 0 \end{array}$$

тј. $\alpha = \beta = 0$. Дакле, f_1 и f_2 су линеарно независни и чине базу V_3. Специјално, $\dim V_3 = 2$.

Приказаћемо још један (бржи) начин за одређивање базе векторског простора V_3. Напишемо генераторе $f_1 = (1, 7, 4, 2)$, $f_2 = (6, -2, 0, 3)$, $f_3 = (9, 19, 12, 9)$ и $f_4 = (5, -9, -4, 1)$ један испод другог и радимо елементарне трансформације (исте као код система) са циљем да добијемо троугаони облик:

$$\begin{array}{rcl rrrr l l}
f_1 & = & (& \boxed{1}, & 7, & 4, & 2 &) & (-6)\ /(-9)\ /(-5) \\
f_2 & = & (& 6, & -2, & 0, & 3 &) & \\
f_3 & = & (& 9, & 19, & 12, & 9 &) & \\
f_4 & = & (& 5, & -9, & -4, & 1 &) & \\
\hline
f_1 & = & (& 1, & 7, & 4, & 2 &) & \\
-6f_1 + f_2 & = & (& 0, & \boxed{-44}, & -24, & -9 &) & /(-1) \\
-9f_1 + f_3 & = & (& 0, & -44, & -24, & -9 &) & \\
-5f_1 + f_4 & = & (& 0, & -44, & -24, & -9 &) & \\
\hline
f_1 & = & (& 1, & 7, & 4, & 2 &) & \\
-6f_1 + f_2 & = & (& 0, & -44, & -24, & -9 &) & \\
-3f_1 - f_2 + f_3 & = & (& 0, & 0, & 0, & 0 &) & \\
f_1 - f_2 + f_4 & = & (& 0, & 0, & 0, & 0 &) & \\
\hline
\end{array}$$

Сада последња једнакост каже да је $f_4 = -f_1 + f_2$, што значи да је V_3 генерисан само са f_1, f_2 и f_3. Затим, претпоследња једнакост даје $f_3 = 3f_1 + f_2$, што значи да је V_3 генерисан само са f_1 и f_2. Из троугаоног облика се види да су вектори f_1 и $-6f_1 + f_2$ линеарно независни (јер прва координата $\alpha f_1 + \beta(-6f_1 + f_2) = \mathbb{O}$ даје $\alpha = 0$, а онда са друге координате следи да је и $\beta = 0$). Одатле следи да су из f_1 и f_2 линеарно независни: из $\mathbb{O} = \alpha f_1 + \beta f_2 = (\alpha + 6\beta) f_1 + \beta(-6f_1 + f_2)$ следи да је $\alpha + 6\beta = \beta = 0$ јер су f_1 и $-6f_1 + f_2$ линеарно независни, па је и $\alpha = 0$. И опет закључујемо да је $\{f_1, f_2\}$ једна база V_3. Наравно, $\{f_1, -6f_1 + f_2\}$ је друга база V_3 (са истим бројем вектора).

За произвољан вектор $p(x) = a + bx + cx^2 \in V_4$ важи $p(2) = a + 2b + 4c = 0$, тј. $a = -2b - 4c$. Зато је

$$\begin{aligned} V_4 &= \left\{ (-2b - 4c) + bx + cx^2 \;\middle|\; b, c \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ b(x-2) + c\left(x^2 - 4\right) \;\middle|\; b, c \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \mathscr{L}\left(x - 2, x^2 - 4\right). \end{aligned}$$

Дакле, $\left\{x - 2, x^2 - 4\right\}$ је генераторни скуп за V_4, а биће и база јер из $\alpha(x-2) + \beta\left(x^2 - 4\right) = 0$ следи $\beta = \alpha = -2\alpha - 4\beta = 0$.

На исти начин добијамо да је $\left\{1+x, 1-x^2\right\}$ база V_5.

Чак и пре било какве провере је јасно да међу генераторима векторског простора V_6 има сувишних. Једноставно, V_6 је потпростор четвородимензионалног простора $\mathbb{R}^4[x]$, па је димензије највише 4 те има бар један сувишан генератор. Генераторни скуп можемо смањити помоћу елементарних трансформација као у случају V_3:

$$
\begin{array}{rclcrcrcrl}
p_1(x) & = & 1 & & & & & - & \boxed{x^3} & \quad /\cdot 4 \quad /\cdot 3 \\
p_2(x) & = & 2 & + & x & + & x^2 & & & \\
p_3(x) & = & 1 & + & x & + & x^2 & + & x^3 & \\
p_4(x) & = & 1 & + & 2x & + & 3x^2 & + & 4x^3 & \\
p_5(x) & = & & & x & + & 2x^2 & + & 3x^3 & \\
\hline
p_1(x) & = & 1 & & & & & - & x^3 & \\
p_2(x) & = & 2 & + & \boxed{x} & + & x^2 & & & \quad /(-1) \; /(-2) \\
(p_1+p_3)(x) & = & 2 & + & x & + & x^2 & & & \\
(4p_1+p_4)(x) & = & 5 & + & 2x & + & 3x^2 & & & \\
(3p_1+p_5)(x) & = & 3 & + & x & + & 2x^2 & & & \\
\hline
p_1(x) & = & 1 & & & & & - & x^3 & \\
p_2(x) & = & 2 & + & x & + & x^2 & & & \\
(p_1-p_2+p_3)(x) & = & 0 & & & & & & & \\
(4p_1-2p_2+p_4)(x) & = & 1 & & & + & x^2 & & & \quad /(-1) \\
(3p_1-p_2+p_5)(x) & = & 1 & & & + & x^2 & & & \\
\hline
p_1(x) & = & 1 & & & & & - & x^3 & \\
p_2(x) & = & 2 & + & x & + & x^2 & & & \\
(p_1-p_2+p_3)(x) & = & 0 & & & & & & & \\
(4p_1-2p_2+p_4)(x) & = & 1 & & & + & x^2 & & & \\
(-p_1+p_2-p_4+p_5)(x) & = & 0 & & & & & & & \\
\hline
\end{array}
$$

То нам омогућава да из генераторног скупа за V_6 уклонимо $p_5 = p_1 - p_2 + p_4$ и $p_3 = -p_1 + p_2$. Уз исто образложење као у случају V_3 имамо да је $\{p_1, p_2, p_4\}$ једна база V_6, па је $\dim V_6 = 3$.

За произвољан вектор $(a_1 + ia_2, b_1 + ib_2, c_1 + ic_2)$, $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ треба да важи $a_1 = b_2 = c_1 + ic_2$. То значи да је $c_2 = 0$ и $a_1 = b_2 = c_1$. Односно,

$$
\begin{aligned}
V_7 &= \{\,(a_1 + ia_2, b_1 + ia_1, a_1) \mid a_1, a_2, b_1 \in \mathbb{R}\} \\
&= \mathscr{L}_{\mathbb{R}}((1, i, 1), (i, 0, 0), (0, 1, 0)).
\end{aligned}
$$

Вектори $(1, i, 1)$, $(i, 0, 0)$ и $(0, 1, 0)$ су линеарно независни над $\mathbb{R}$, па ће чинити базу V_7. Специјално, $\dim_{\mathbb{R}} V_7 = 3$.

Одредимо базу V_8 уз напомену да $\sqrt{2}, \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$. (Претпоставимо супротно, $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, тј. $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, за неке узајамно просте $a, b \in \mathbb{Z}$. Тада из $a = b\sqrt{2}$, односно $a^2 = 2b^2$ следи да је a^2, а самим тим и a паран број. Ако је $a = 2a_1$, $a_1 \in \mathbb{Z}$, онда је $b^2 = 2a_1^2$, па је из истог разлога и b паран. Али то је у контрадикцији са претпоставком да су a и b узајамно прости.) Пошто је дат генераторни скуп $\left\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\right\}$ од V_8 довољно је проверити да ли су поменути вектори линеарно независни. Претпоставимо да је $\alpha + \beta\sqrt{2} + \gamma\sqrt{3} = 0$, за неке $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$. Квадрирањем $\alpha + \beta\sqrt{2} = -\gamma\sqrt{3}$ добијамо

$$\alpha^2 + 2\beta^2 + 2\alpha\beta\sqrt{2} = 3\gamma^2.$$

Али онда мора бити $\alpha = 0$ или $\beta = 0$ јер би у супротном $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ био једнак $\frac{3\gamma^2 - \alpha^2 - \beta^2}{2\alpha\beta}$. Сад имамо два случаја

(1) Ако је $\beta = 0$ остаје $\alpha + \gamma\sqrt{3} = 0$, за $\alpha, \gamma \in \mathbb{Q}$, па мора бити $\alpha = \gamma = 0$.

(2) Ако је $\alpha = 0$ остаје $\beta\sqrt{2} + \gamma\sqrt{3} = 0$, за $\alpha, \gamma \in \mathbb{Q}$. Множењем овог израза са $\sqrt{2}$ добијамо $2\beta + \gamma\sqrt{6} = 0$, па мора бити $\beta = \gamma = 0$.

У сваком случају $\alpha = \beta = \gamma = 0$, што значи да је $\left\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\right\}$ база векторског простора V_8. Специјално, $\dim_{\mathbb{Q}} V_8 = 3$.

За произвљан аритметички низ $a \in V_9$ важи $a_n = a_1 + (n-1)d$, за неко $d \in \mathbb{R}$. Означимо са x и y низове $x_n = 1$ и $y_n = n - 1$ (из V_9), за све $n \in \mathbb{N}$. Једнакост $a_n = a_1 + (n-1)d$ можемо интерпретирати и као $a_n = a_1 x_n + d y_n$, односно $a = a_1 x + dy$ у смисли низова. То значи да низови x и y генеришу V_9, и остаје још да покажемо да су линеарно независни. Ако је $\alpha x + \beta y = \mathbb{O}$, за $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, упоређивањем прва два члана добијамо $\alpha = 0$ и $\alpha + \beta = 0$, следи $\beta = 0$. Специјално, $\dim V_9 = 2$.

Над коначним пољима је ситуација мало другачија (једноставнија). Овде можемо видети димензију векторског простора и пре одређивања базе. Наш V_{10} је потпростор $\mathbb{Z}_3^3$ који је димензије 3, па је $\dim_{\mathbb{Z}_3} V_{10} \leqslant 3$. Притом $\dim V_{10}$ није ни нула (јер је $V_{10} \supsetneqq \{(0,0,0)\}$), ни три (јер је $V_{10} \subsetneqq \mathbb{Z}_3^3$). Такође димензија V_{10} није ни један јер би тада $V_{10} = \mathscr{L}_{\mathbb{Z}_3}(v) = \{\mathbb{O}, v, 2v\}$ имао три вектора. Значи V_{10} је димензије 2. Зато ће база V_{10} бити било која два линеарно независна вектора из V_{10} (по Теореми 4.18(1)), нпр. $\mathcal{B} = \{(1,1,1), (0,1,2)\}$.

Други начин да ово видимо јесте да све векторе из V_{10} напишемо као линеарну комбинацију вектора $\mathcal{B}$:

$$\begin{aligned}
(0,0,0) &= 0 \cdot (1,1,1) + 0 \cdot (0,1,2),\\
(1,1,1) &= 1 \cdot (1,1,1) + 0 \cdot (0,1,2),\\
(2,2,2) &= 2 \cdot (1,1,1) + 0 \cdot (0,1,2),\\
(0,1,2) &= 0 \cdot (1,1,1) + 1 \cdot (0,1,2),\\
(0,2,1) &= 0 \cdot (1,1,1) + 2 \cdot (0,1,2),\\
(1,0,2) &= 1 \cdot (1,1,1) + 2 \cdot (0,1,2),\\
(1,2,0) &= 1 \cdot (1,1,1) + 1 \cdot (0,1,2),
\end{aligned}$$

$$(2,0,1) = 2 \cdot (1,1,1) + 1 \cdot (0,1,2),$$
$$(2,1,0) = 2 \cdot (1,1,1) + 2 \cdot (0,1,2).$$

$\square$

Задатак 4.21. *Нека је $n \geqslant 2$ фиксиран природан број. У зависности од реалног параметра λ одредити димензију векторског простора $V = \mathscr{L}(f_1, f_2, \ldots, f_n) \leqslant \mathbb{R}^n$, где је*

$$f_1 = (\lambda+1, \lambda, \ldots, \lambda),\ f_2 = \left(\lambda, \lambda + \frac{1}{2}, \lambda, \ldots, \lambda\right),\ \ldots,\ f_n = \left(\lambda, \lambda, \ldots, \lambda + \frac{1}{n}\right).$$

Решење. Проверимо да ли је генераторни скуп $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ линеарно зависан. Нека је $\alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_n f_n = \mathbb{O}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Тада је

$$\begin{array}{ccccccccc}
(\lambda+1)\alpha_1 & + & \lambda\alpha_2 & + & \ldots & + & \lambda\alpha_n & = & 0 \\
\lambda\alpha_1 & + & \left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\alpha_2 & + & \ldots & + & \lambda\alpha_n & = & 0 \\
\multicolumn{9}{c}{\dotfill} \\
\lambda\alpha_1 & + & \lambda\alpha_2 & + & \ldots & + & \left(\lambda+\frac{1}{n}\right)\alpha_n & = & 0
\end{array}$$

Одузимањем i-те једначине од прве добијамо да је $\alpha_1 - \frac{1}{i}\alpha_i = 0$, тј. $\alpha_i = i\alpha_1$, за све $1 \leqslant i \leqslant n$. Кад то вратимо у прву једначину добијамо

$$(\lambda + 1 + 2\lambda + \cdots + n\lambda)\alpha_1 = \left(1 + \frac{n(n+1)}{2}\lambda\right)\alpha_1 = 0.$$

Раздвајамо два случаја:

(1) Ако је $\lambda \neq -\frac{2}{n(n+1)}$ последња једнакост даје $\alpha_1 = 0$. Следи, $\alpha_i = i \cdot 0 = 0$, за све $1 \leqslant i \leqslant n$. Тада су вектори $f_1, f_2, \ldots, f_n$ линеарно независни и чине базу. Зато је $\dim V = n$.

(2) Ако је $\lambda = -\frac{2}{n(n+1)}$ наш систем има нетривијално решење $\alpha_1 = 1$ и $\alpha_i = i$, за све $1 \leqslant i \leqslant n$. Из линеарне зависности $f_1 + 2f_2 + \cdots + nf_n = \mathbb{O}$ добијамо да је $f_n = -\frac{1}{n}f_1 - \cdots - \frac{n-1}{n}f_{n-1}$ линеарна комбинација $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$. Зато је $V = \mathscr{L}(f_1, f_2, \ldots, f_{n-1})$. Проверимо још једном линеарну независност, претпоставимо да је $\alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_{n-1} f_{n-1} = \mathbb{O}$, за $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{R}$. Добијамо систем

$$\begin{array}{ccccccccc}
(\lambda+1)\alpha_1 & + & \lambda\alpha_2 & + & \ldots & + & \lambda\alpha_{n-1} & = & 0 \\
\lambda\alpha_1 & + & \left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\lambda\alpha_2 & + & \ldots & + & \lambda\alpha_{n-1} & = & 0 \\
\multicolumn{9}{c}{\dotfill} \\
\lambda\alpha_1 & + & \lambda\alpha_2 & + & \ldots & + & \left(\lambda+\frac{1}{n-1}\right)\alpha_{n-1} & = & 0 \\
\lambda\alpha_1 & + & \lambda\alpha_2 & + & \ldots & + & \lambda\alpha_{n-1} & = & 0
\end{array}$$

где је сада $\lambda = -\frac{2}{n(n+1)}$. Понављањем истог поступка добијамо

$$\left(1 + \frac{(n-1)n}{2}\lambda\right)\alpha_1 = 0,$$

при чему сада знамо да је $1+\lambda\frac{(n-1)n}{2} = 1 - 2\frac{n(n+1)}{2}\frac{(n-1)n}{2} = \frac{2}{n-1} \neq 0$. Следи, $\alpha_1 = 0$ и $\alpha_i = i \cdot 0 = 0$, за све $1 \leqslant i \leqslant n-1$. Тада су вектори $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$ линеарно независни и чине базу. Зато је $\dim V = n-1$. (Други начин да се изведе исти закључак је одузимањем последње једначине од осталих што даје $\alpha_i = 0$, за све $1 \leqslant i \leqslant n$).

□

Теорема 4.22. *Нека је V векторски простор над пољем F са коначном базом $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ и нека је $v \in V$ произвољан вектор. Тада се вектор на јединствен начин може представити као линеарна комбинација $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$, за неке скаларе $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$.*

Као што смо већ поменули, важи и обрнуто, ако се сваки вектор из V може на јединствен начин представити као линеарна комбинација вектора из $\mathcal{B}$, онда је $\mathcal{B}$ база векторског простора V.

Дефиниција 4.23. *Скаларе α_i из претходне теореме зовемо координате вектора v и пишемо $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$.*

На пример, координате вектора $v = (1, 4, -3) \in \mathbb{R}^3$ у канонској бази су $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$. А у Задатку 4.4 смо видели да су координате тог истог вектора у бази $\{(1,-2,5), (2,-3,0), (0,1,3)\}$ једнаке $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

У Задатку 4.5 скуп полинома $f = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ није база $\mathbb{R}^3[x]$ (јер има више елемената од $\dim \mathbb{R}^3[x] = 3$). Као последица тога се дешава да се полином p на више различитих начина може изразити као линеарна комбинација вектора из f.

Задатак 4.24. *Показати да $\frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ припада $\mathbb{Q}$-вектроском простору $\mathscr{L}_{\mathbb{Q}}\left(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\right)$ и одредити координате овог вектора у бази $\left\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\right\}$.*

Решење. Приметимо да је

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} &= \frac{1}{\sqrt{3}-1}\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} - \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{2}(\sqrt{3}+1) - (\sqrt{3}+\sqrt{2}) = \frac{1}{2} - \sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}.\end{aligned}$$

Сада је очигледно да $\frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \in \mathscr{L}_{\mathbb{Q}}(1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$ и да су у бази $\mathcal{B} = \{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$ његове координате $\left[\frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$. □

4.5 Пресек и сума векторских потпростора

Дефиниција 4.25. *Нека је W векторски простор и нека су U и V његови потпростори. Сума векторских потпростора U и V је скуп*

$$U + V = \{u + v \mid u \in U, \, v \in V\}.$$

Уколико је пресек потпростора U и V тривијалан, тј. $U \cap V = \{\mathbb{O}\}$, кажемо да је сума $U+V$ директна и у том случају уместо $U+V$ пишемо $U \oplus V$ или $U \dot{+} V$.

Приметимо да се у претходној дефиницији услов за директну суму може ослабити на $U \cap V \subseteq \{\mathbb{O}\}$, јер U и V (као векторски потпростори) морају садржати нулу, па исто важи и за њихов пресек. Еквивалентно, сума је директна ако и само ако је $\dim(U \cap V) = 0$.

Следећа теорема показује значај директне суме.

Теорема 4.26. *Нека је W векторски простор и нека су U и V његови потпростори. Тада је сума $U+V$ директна ако и само се сваки вектор из $U+V$ може на јединствен начин представити као директна сума једног вектора из U и једног вектора из V.*

Теорема 4.27. *Нека је W векторски простор и нека су U и V његови потпростори. Тада су пресек $U \cap V$ и сума $U+V$ векторски потпростори векторског простора W.*

Унија потпростора $U \cup V$ не мора бити потпростор од W. Штавише, ускоро ћемо видети и да најчешће није потпростор. Зато уместо уније користимо суму као најмањи потпростор W који садржи унију $U \cup V$ (што је еквивалентна дефиниција суме).

Из дефиниције суме и пресека следи да је $U \cap V \leqslant U \leqslant U+V$ (и аналогно кад заменимо U и V).

Следећа теорема даје везу између димензија U, V, $U+V$ и $U \cap V$.

Теорема 4.28 (Грасманова[1] формула)**.** *Нека је W векторски простор и нека су U и V његови потпростори коначне димензије. Тада су $U+V$ и $U \cap V$ коначне димензије и важи*

$$\dim U + \dim V = \dim(U+V) + \dim(U \cap V).$$

[1] *Hermann Günther Graßmann* (1809. - 1877.), немачки математичар и филолог

Специјално, сума $U + V$ *је директна ако и само ако је* $\dim U + \dim V = \dim(U + V)$.

Задатак 4.29. *Дати су потпростори*

$$\begin{aligned} U_1 &= \{(a, b, a) \mid a, b \in \mathbb{R}\}, \\ U_2 &= \{(0, 0, c) \mid c \in \mathbb{R}\}, \\ U_3 &= \{(a, b, -a - b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

векторског простора $\mathbb{R}^3$*. Показати да је*

а) $\mathbb{R}^3 = U_1 + U_2$,

б) $\mathbb{R}^3 = U_1 + U_3$,

в) $\mathbb{R}^3 = U_2 + U_3$.

Која од претходних сума је директна?

Решење. а) Инклузија $U_1 + U_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ тривијално јер је $U_1, U_2 \subseteq \mathbb{R}^3$, па исто важи и за њихову суму. Покажимо обрнуту инклузију, нека је (a, b, c) произвољан вектор из $\mathbb{R}^3$. Треба показати да $(a, b, c) \in U_1 + U_2$, тј. да се (a, b, c) може записати као збир једног вектора из U_1 и једног вектора из U_2.

То можемо урадити тако што (a, b, c) запишемо као

$$(a, b, c) = \underbrace{(\alpha, \beta, \alpha)}_{\in U_1} + \underbrace{(0, 0, \gamma)}_{\in U_2} = (\alpha, \beta, \alpha + \gamma),$$

за $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Онда мора бити $\alpha = a$, $\beta = b$ и $\gamma = c - a$ и имамо

$$(a, b, c) = (a, b, a) + (0, 0, c - a) \in U_1 + U_2.$$

б) Из истог разлога као у а) имамо да је $U_1 + U_2 \subseteq \mathbb{R}^3$. Обрнуто, покушајмо да произвољан вектор $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ запишемо као

$$(a, b, c) = \underbrace{(\alpha, \beta, \alpha)}_{\in U_1} + \underbrace{(\gamma, \delta, -\gamma - \delta)}_{\in U_3} = (\alpha + \gamma, \beta + \delta, \alpha - \gamma - \delta),$$

за $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Једна (не и једина) могућност је

$$(a, b, c) = (0, a + b + c, 0) + (a, -a - c, c) \in U_1 + U_3.$$

в) Слично, за произвљан вектор $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ имамо да

$$(a, b, c) = (0, 0, a + b + c) + (a, b, -a - b) \in U_2 + U_3.$$

Суме $U_1 + U_2$ и $U_2 + U_3$ су директне за разлику од суме $U_1 + U_3$. Један начин да се то види је из пресека

$$U_1 \cap U_2 = U_2 \cap U_3 = \{(0, 0, 0)\} \qquad \text{и} \qquad U_1 \cap U_3 = \{(a, -2a, a) \mid a \in \mathbb{R}\}.$$

Други начин је да помоћу Грасманове фромуле видимо да је

$$\begin{aligned}
\dim(U_1\cap U_2) &= \dim U_1+\dim U_2-\dim\left(\mathbb{R}^3\right)=2+1-3=0,\\
\dim(U_1\cap U_3) &= \dim U_1+\dim U_3-\dim\left(\mathbb{R}^3\right)=2+2-3=1,\\
\dim(U_2\cap U_3) &= \dim U_2+\dim U_3-\dim\left(\mathbb{R}^3\right)=2+1-3=0.
\end{aligned}$$

Трећи начин је да користимо Теорему 4.26 и проверимо да ли је растављање (a,b,c) на векторе из U_i и U_j једниствено. Уколико запишемо $(a,b,c)=u_1+u_2$, за неке $u_1\in U_1$ и $u_2\in U_2$, јасно је да тада мора бити $u_1=(a,b,a)$ и $u_2=(0,0,c-a)$. Са друге стране, имамо више различитих растављања

$$\begin{aligned}
(a,b,c) &= \underbrace{(0,a+b+c,0)}_{\in U_1}+\underbrace{(a,-a-c,c)}_{\in U_3}\\
&= \underbrace{(a,-a+b+c,a)}_{\in U_1}+\underbrace{(0,a-c,-a+c)}_{\in U_3}\\
&= \underbrace{(c,a+b-c,c)}_{\in U_1}+\underbrace{(a-c,c-a,0)}_{\in U_3}.
\end{aligned}$$

□

Задатак 4.30. *Показати да је $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}=P\oplus N$, где су P и N векторски потпростори парних и непарних функција, редом.*

Решење. Покажимо најпре да је $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}=P+N$ тј. $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\subseteq P+N$ јер обрнута инклузија тривијално важи. Другим речима, хоћемо да произвољну функцију $f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ напишемо као збир једне парне функције $g\in P$ и једне непарне $h\in N$. Видимо да функције

$$g(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}\qquad \text{и}\qquad h(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

задовољавају тражени услов.

Остаје још да покажемо да је $P\cap N=\{\mathbb{O}\}$. Нека је $f\in P\cap N$ произвоља функција која је и парна ($f(-x)=f(x)$, за све $x\in\mathbb{R}$) и непарна ($f(-x)=-f(x)$, за све $x\in\mathbb{R}$). Али онда из $f(x)=f(-x)=-f(x)$, за све $x\in\mathbb{R}$, следи да је f нула-функција. □

Следећи пример показује како се за фиксиран потпростор $U\leqslant W$ одређује његова „допуна“ до читавог простора W, односно потпростор $V\leqslant W$ такав да је $U\oplus V=W$. Такође, видећемо и на конкретном примеру како се линеарно независан скуп допуњава до базе (о чему је већ било речи).

Задатак 4.31. *Дати су (линеарно независни) вектори $v_1=(1,1,1,1)$ и $v_2=(2,1,1,0)$.*

а) Допунити скуп $\{v_1,v_2\}$ до базе читавог простора $\mathbb{R}^4$.

б) Одредити бар један векторски потпростор $V \leqslant \mathbb{R}^4$ *за који је* $\mathbb{R}^4 = V \oplus \mathscr{L}(v_1, v_2)$.

в) Допунити скуп $\{v_1, v_2\}$ *до базе векторског потпростора*

$$U = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, x + t = y + z \right\}.$$

Решење. а) Овде је довољно додати још два вектора v_3 и v_4 тако да скуп $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ буде линеарно независан. Да би било најочигледније можемо узети $v_3 = (1, 0, 0, 0)$ и $v_4 = (0, 1, 0, 0)$.

б) Видимо да векторски простор $V = \mathscr{L}(v_3, v_4)$ задовољава тражене услове: $\mathbb{R}^4 = V + \mathscr{L}(v_1, v_2)$ (инклузија $\supseteq$ је јасна, а инклузија $\subseteq$ следи из а)) и $V \cap \mathscr{L}(v_1, v_2) = \{(0, 0, 0, 0)\}$.

в) Слично, додамо још један вектор v_5 тако да скуп $\{v_1, v_2, v_5\}$ буде линеарно независан (јер је димензија U једнака 3). Видимо да вектор $(1, 1, 0, 0)$ испуњава тражене услове. □

Задатак 4.32. *Дати су потпростори* $U = \mathscr{L}(e_1, e_2, e_3)$ *и* $V = \mathscr{L}(f_1, f_2)$, *где је* $e_1 = (2, 5, 3, 1)$, $e_2 = (3, 9, 5, 1)$, $e_3 = (3, 6, 4, 2)$, $f_1 = (3, 1, -1, 0)$ *и* $f_2 = (-2, 0, 2, 1)$. *Одредити бар по једну базу и димензију векторских простора* U, V, $U + V$ *и* $U \cap V$.

Решење. Проверимо прво линеарну зависност вектора e_1, e_2 и e_3:

$$\begin{array}{rcrrrrrl}
e_1 & = & (& 2, & 5, & 3, & \boxed{1} &) \quad /(-1) \ /(-2) \\
e_2 & = & (& 3, & 9, & 5, & 1 &) \\
e_3 & = & (& 3, & 6, & 4, & 2 &) \\
\hline
e_1 & = & (& 2, & 5, & 3, & 1 &) \\
-e_1 + e_2 & = & (& \boxed{1}, & 4, & 2, & 0 &) \\
-2e_1 + e_3 & = & (& -1, & -4, & -2, & 0 &) \\
\hline
e_1 & = & (& 2, & 5, & 3, & 1 &) \\
-e_1 + e_2 & = & (& 1, & 4, & 2, & 0 &) \\
-2e_1 + e_2 + e_3 & = & (& 0, & 0, & 0, & 0 &) \\
\hline
\end{array}$$

Дакле, база потпростора U је $\{e_1, e_2\}$. А база потпростора V ће бити $\{f_1, f_2\}$, јер су ова два вектора очигледно линеарно независна. Димензије U и V су 2.

Пошто скупови $\{e_1, e_2\}$ и $\{f_1, f_2\}$ генеришу U и V, редом, њихова унија $\{e_1, e_2, f_1, f_2\}$ генерише $U + V$. Остаје да проверимо линеарну независност:

$$\begin{array}{rcrrrrrl}
e_1 & = & (& 2, & 5, & 3, & \boxed{1} &) \quad /(-1) \\
e_2 & = & (& 3, & 9, & 5, & 1 &) \\
f_1 & = & (& 3, & 1, & -1, & 0 &) \\
f_2 & = & (& -2, & 0, & 2, & 1 &) \\
\hline
e_1 & = & (& 2, & 5, & 3, & 1 &) \\
-e_1 + e_2 & = & (& \boxed{1}, & 4, & 2, & 0 &) \quad /(-3) \quad /\cdot 4 \\
f_1 & = & (& 3, & 1, & -1, & 0 &) \\
-e_1 + f_2 & = & (& -4, & -5, & -1, & 0 &) \\
\hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcrrrrl}
e_1 & = & (& 2, & 5, & 3, & 1 \ ) \\
-e_1+e_2 & = & (& 1, & 4, & 2, & 0 \ ) \\
3e_1-3e_2+f_1 & = & (& 0, & \boxed{-11}, & -7, & 0 \ ) \\
-5e_1+4e_2+f_2 & = & (& 0, & 11, & 7, & 0 \ ) \\
\hline
e_1 & = & (& 2, & 5, & 3, & 1 \ ) \\
-e_1+e_2 & = & (& 1, & 4, & 2, & 0 \ ) \\
3e_1-3e_2+f_1 & = & (& 0, & -11, & -7, & 0 \ ) \\
-2e_1+e_2+f_1+f_2 & = & (& 0, & 0, & 0, & 0 \ ) \\
\hline
\end{array}$$

То значи да је $\{e_1, e_2, f_1\}$ база $U+V$, па је ова сума тродимензионална.

Остаје још да видимо шта је пресек $U \cap V$. Произвољан вектор $x \in U \cap V$ припада и $U = \mathscr{L}(e_1, e_2, e_3)$ и $V = \mathscr{L}(f_1, f_2)$, па је

$$x = \alpha e_1 + \beta e_2 = \gamma f_1 + \delta f_2,$$

за неке скаларе $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Изједначавањем координата у једнакости $\alpha e_1 + \beta e_2 - \gamma f_1 - \delta f_2 = \mathbb{O}$ добијамо систем

$$\begin{array}{rcrcrcrcl}
2\alpha & + & 3\beta & - & 3\gamma & + & 2\delta & = & 0 \\
5\alpha & + & 9\beta & - & \gamma & & & = & 0 \\
3\alpha & + & 5\beta & + & \gamma & - & 2\delta & = & 0 \\
\alpha & + & \beta & & & - & \delta & = & 0
\end{array}$$

чије је опште решење $\{(-2\lambda, \lambda, -\lambda, -\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$. Онда је

$$x = -2\lambda e_1 + \lambda e_2 = \lambda(-2e_1 + e_2) = \lambda(-1, -1, -1, -1).$$

Као провера може да послужи једнакост $x = \lambda(-f_1 - f_2)$. Како је x био произвољан вектор из $U \cap V$ можемо закључити да је $U \cap V = \mathscr{L}(-1, -1, -1, -1)$.

Показаћемо још један (краћи али мање очигледан) начин да се одреди пресек. Из Грасманове формуле имамо да је

$$\dim(U \cap V) = \dim U + \dim V - \dim(U+V) = 2 + 2 - 3 = 1.$$

База једнодимензионалног простора $U \cap V$ је било који ненула вектор из тог простора. Приметимо да смо приликом провере линеарне независности добили везу $-2e_1 + e_2 + f_1 + f_2 = \mathbb{O}$. Уколико то запишемо као $-2e_1 + e_2 = -f_1 - f_2$ видимо да лева страна једнакости припада $\mathscr{L}(e_1, e_2, e_3) = U$ а десна страна припада $\mathscr{L}(f_1, f_2) = V$. То значи да вектор $(-1, -1, -1, -1) = -2e_1 + e_2$ припада пресеку $U \cap V$, а на основу претходне приче можемо закључити да је овај вектор уједно и база пресека $U \cap V$. $\square$

Задатак 4.33. *Одредити бар по једну базу векторских простора $(U \cap V) + W$, $U \cap V \cap W$, $(U+V) \cap W$ и $U+V+W$, ако је*

$$U = \left\{ p \in \mathbb{R}^4[x] \,\middle|\, p'(1) = p''(-1) \right\},$$
$$V = \mathscr{L}\left(x - x^2, x^2 - x^3, x^3 - x\right),$$
$$W = \left\{ p \in \mathbb{R}^3[x] \,\middle|\, 2p(1) = p(2) \right\}.$$

Решење. Прво, приметимо да је $x^3 - x = -\left(x - x^2\right) - \left(x^2 - x^3\right)$ што значи да је $\left\{x - x^2, x^2 - x^3\right\}$ генераторни скуп векторског простора V, а биће и база (јер су преостала два генератора очигледно линеарно назависни).

Одредимо најпре пресек $U \cap V$. Произвољан полином $p \in U \cap V$ припада и U и V. Зато се може записати као линеарна комбинација

$$p(x) = \alpha\left(x - x^2\right) + \beta\left(x^2 - x^3\right) = \alpha x + (-\alpha + \beta)x^2 - \beta x^3,$$

за неке $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Са друге стране, $p \in V$ задовољава једнакост $p'(1) = p''(-1)$ која се своди на $-\alpha - \beta = -2\alpha + 8\beta$, тј. $\alpha = 9\beta$. Другим речима, произвољан полином p из $U \cap V$ мора бити облика $9\beta\left(x - x^2\right) + \beta\left(x^2 - x^3\right) = \beta\left(9x - 8x^2 - x^3\right)$, па је $U \cap V = \mathscr{L}\left(9x - 8x^2 - x^3\right)$.

Сада кад смо одредили векторски потпростор $U \cap V$, векторске просторе $(U \cap V) + W$ и $U \cap V \cap W = (U \cap V) \cap W$ можемо израчунати на исти начин као у претходном задатку. Али у овом примеру можемо и избећи непотребан рачун. Гледамо димензије потпростора и користимо Теорему 4.19. Како је $U \cap V$ једнодимензионалан, а $(U \cap V) \cap W \leqslant U \cap V$, онда је димензија пресека $U \cap V \cap W$ нула или један.

(1) Ако је $\dim(U \cap V \cap W) = 0$, онда је $U \cap V \cap W = \{\mathbb{O}\}$.

(2) Ако је $\dim(U \cap V \cap W) = 1$, онда опет по Теореми 4.19 мора бити $U \cap V \cap W = U \cap V$. То би даље значило да $9x - 8x^2 - x^3 \in W$, што није могуће јер је полином $9x - 8x^2 - x^3$ степена 3, а $W \subseteq \mathbb{R}^3[x]$.

Дакле, друга могућност отпада па мора бити $U \cap V \cap W = \{\mathbb{O}\}$, тј. база пресека $U \cap V \cap W$ је празан скуп.

Да бисмо одредили $(U \cap V) + W$ прво приметимо да је скуп $\left\{x, 2 + x^2\right\}$ база векторског простора W. То даље значи да је $\mathcal{B} = \left\{3 - 2x - x^3\right\} \cup \left\{x, 2 + x^2\right\}$ један трочлани генераторни скуп за $(U \cap V) + W$. Грасманова формула каже да је

$$\dim((U \cap V) + W) = \dim(U \cap V) + \dim W - \dim(U \cap V \cap W) = 1 + 2 - 0 = 3,$$

што тачно значи да је $\mathcal{B}$ база векторског простора $(U \cap V) + W$ по Теореми 4.18(2).

Лако се проверава да је $\dim U = 3$ (одређивањем базе за U). Али онда је

$$\dim(U + V) = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V) = 3 + 2 - 1 = 4.$$

Са друге стране $U, V \leqslant \mathbb{R}^4[x]$, па исто важи и за њихову суму. Све заједно то значи да је $U + V = \mathbb{R}^4[x]$. Онда лако налазимо да је

$$(U + V) \cap W = \mathbb{R}^4[x] \cap W = W \qquad \text{и} \qquad U + V + W = \mathbb{R}^4[x] + W = \mathbb{R}^4[x],$$

јер $W \leqslant \mathbb{R}^4[x]$. □

Већ смо рекли да унија два потпростора не мора бити потпростор. Наредни задатак показује и више – никада неће бити потпростор сем у неким тривијалним ситуацијама.

Задатак 4.34. *Нека је W векторски простор и нека су U и V његови потпростори. Тада је $U \cup V \leqslant W$ ако и само ако $U \leqslant V$ или $V \leqslant U$.*

Решење. Један смер је очигледан, ако је нпр. $U \leqslant V$ тада је $U \cup V = V$ што наравно јесте потпростор од W.

Обрнуто, нека је сада $U \cup V \leqslant W$. Претпоставимо супротно, да $U \nsubseteq V$ и $V \nsubseteq U$. Тада постоје вектори $u \in U \setminus V$ и $v \in V \setminus U$. Али онда се и u и v налазе у унији $U \cup V$, а како смо претпоставили да је унија $U \cup V$ векторски потпростор од W, онда и вектор $u + v$ остаје у $U \cup V$. То значи да $u + v$ припада U или V. Нека је нпр. $u + v \in U$ (аналогно иде и случај када је $u + v \in V$). Али онда је

$$v = \underbrace{u + v}_{\in U} + (-1)\underbrace{u}_{\in U} \in U,$$

што је у контрадикцији са избором вектора v. $\square$

Задатак 4.35. *Нека је T векторски простор и нека су U, V и W његови потпростори за које важи $U + V = U + W$, $U \cap V = U \cap W$ и $V \leqslant W$. Показати да је $V = W$.*

Решење. Довољно је показати да је $W \subseteq V$. Нека је $w \in W$ произвољан вектор. Из $w \in W \subseteq U + W = U + V$ следи да постоје вектори $u \in U$ и $v \in V$такви да је $w = u + v$. Тада из $v \in V \subseteq W$ следи да је $u = w + (-1)v \in W$. Ово даље значи да $u \in U \cap W = V \cap W$, и специјално $u \in V$. Вратимо се на почетак, $w = u + v \in V$, што смо и хтели да покажемо. $\square$

Глава 5

Линеарна пресликавања векторских простора

Дефиниција 5.1. *Нека су U и V векторски простори над истим пољем скалара F. Кажемо да је пресликавање $L : U \longrightarrow V$ линеарно (или прецизније F-линеарно) уколико важи*

(1) Адитивност: $(\forall u_1, u_2 \in U)\ L(u_1 + u_2) = L(u_1) + L(u_2)$,

(2) Хомогеност: $(\forall \alpha \in F)(\forall u \in U)\ L(\alpha u) = \alpha L(u)$.

Јасно је да је пресликавање $L : U \longrightarrow V$ линеарно ако и само ако ,,чува линеарне комбинације", тј. задовољава услов

$$(\forall \alpha, \beta \in F)\,(\forall u_1, u_2 \in U)\ L(\alpha u_1 + \beta u_2) = \alpha L(u_1) + \beta L(u_2).$$

Слично, индукцијом се може извести и трећа еквивалентна дефиниција линеарног пресликавања – да чува линеарне комбинације произвољне дужине у смислу да је

$$\begin{gathered}(\forall \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F)\,(\forall u_1, \ldots, u_n \in U)\\ L(\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n) = \alpha_1 L(u_1) + \cdots + \alpha_n L(u_n),\end{gathered}$$

за све $n \in \mathbb{N}$.

Код линеарних пресликавања се често уместо $L(u)$ изоставља заграда и пише само Lu (наравно, уколико таква ознака не уноси забуну). Мотивација за овакву ознаку долази из линеарних пресликавања векторског простора реалних бројева. Наиме, за свако линеарно пресликавање $L : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ (или општије, $L : U \longrightarrow V$, где је $\dim U = 1$) важи $L(u) = L(1) \cdot u$, за све $u \in \mathbb{R}$, па је пресликавање L у ствари само множење скаларом $L(1)$.

Линеарно пресликавање $L : V \longrightarrow V$ код кога се домен и кодомен поклапају зовемо *линеарни оператор* векторског простора V.

Задатак 5.2. *Показати да је пресликавање*

$$L : \mathbb{R}^3[x] \longrightarrow \mathbb{R}^3, \qquad Lp = (p(0), p'(1), 3p(-2))$$

линеарно.

Решење. Ово пресликавање јесте линеарно јер важи

(1) $\big(\forall p, q \in \mathbb{R}^3[x]\big)$

$$\begin{aligned} L(p+q) &= ((p+q)(0), \underbrace{(p+q)'}_{=p'+q'}(1), 3(p+q)(-2)) \\ &= (p(0)+q(0), p'(1)+q'(1), 3p(-2)+3q(-2)) \\ &= (p(0), p'(1), 3p(-2)) + (q(0), q'(1), 3q(-2)) = Lp + Lq, \end{aligned}$$

(2) $(\forall \alpha \in \mathbb{R})\big(\forall p \in \mathbb{R}^3[x]\big)$

$$\begin{aligned} L(\alpha p) &= ((\alpha p)(0), \underbrace{(\alpha p)'}_{=\alpha p'}(1), 3(\alpha p)(-2)) \\ &= (\alpha p(0), \alpha p'(1), 3\alpha p(-2)) \\ &= \alpha(p(0), p'(1), 3p(-2)) = \alpha Lp. \end{aligned}$$

□

Задатак 5.3. *Испитати да ли је пресликавање $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ линеарно ако је*

а) $L(a, b, c) = (a + b, c + 1)$,

б) $L(a, b, c) = (ab, c)$,

в) $L(a, b, c) = (a, \sin b)$.

Решење. Ниједно од поменутих пресликавања није линеарно јер је:

а)

$$\begin{aligned} L(2(1,1,1)) &= L(2,2,2) = (4,3), \\ 2L(1,1,1) &= 2(2,2) = (4,4), \end{aligned}$$

б)

$$\begin{aligned} L((1,0,0)+(0,1,0)) &= L(1,1,0) = (1,0), \\ L(1,0,0)+L(0,1,0) &= (0,0)+(0,0) = (0,0), \end{aligned}$$

в)

$$\begin{aligned} L\left(2\left(0,\frac{\pi}{2},0\right)\right) &= L(0,\pi,0) = (0,\sin\pi) = (0,0),\\ 2L\left(0,\frac{\pi}{2},0\right) &= 2\left(0,\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2(0,1) = (0,2). \end{aligned}$$

$\square$

Задатак 5.4. *У зависности од комплексног параметра λ испитати да ли је пресликавање*

$$L : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^3[x], \qquad L(a,b) = a + \lambda x + (2a+b)x^2$$

$\mathbb{C}$-линеарно.

Решење. Прво проверимо адитивност, за све $(a,b),(c,d) \in \mathbb{C}^2$ важи

$$L((a,b)+(c,d)) = L(a+c,b+d) = (a+c) + \lambda x + (2a+2c+b+d)x^2$$

и

$$\begin{aligned} L(a,b) + L(c,d) &= a + \lambda x + (2a+b)x^2 + c + \lambda x + (2c+d)x^2\\ &= (a+c) + 2\lambda x + (2a+b+2c+d)x^2. \end{aligned}$$

Јасно је да су претходна два израза једнака ако и само ако је $\lambda = 0$. То значи да за $\lambda \neq 0$ пресликавање L није линеарно.

Нека је сада $\lambda = 0$, односно $L(a,b) = a + (2a+b)x^2$. Проверимо хомогеност, нека су $\alpha \in \mathbb{C}$ и $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ произвољни. Тада је

$$L(\alpha(a,b)) = L(\alpha a, \alpha b) = \alpha a + (2\alpha a + \alpha b)x = \alpha\left(a + (2a+b)x^2\right) = \alpha L(a,b).$$

Дакле, за $\lambda = 0$ пресликавање L јесте линеарно. $\square$

У наредном примеру користићемо следеће тврђење из елементарне теорије бројева.

Теорема 5.5 (Мала Фермаова[1] теорема)**.** *Нека је p прост број и нека је a цео број. Тада је $a^p \equiv a \pmod{p}$.*

Задатак 5.6. *Нека је p прост број. Показати да је*

$$L : \mathbb{Z}_p[x] \longrightarrow \mathbb{Z}_p[x], \qquad Lf = f^p$$

$\mathbb{Z}_p$-линеарни оператор векторског простора $\mathbb{Z}_p[x]$.

[1] *Pierre de Fermat* (1607. - 1665.), француски математичар и адвокат

Решење. Адитивност оператора L следи из Биномне формуле: за све $f, g \in \mathbb{Z}_p[x]$ важи

$$L(f+g) = (f+g)^p = \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} f^i g^{p-i} = Lf + Lg + \sum_{i=1}^{p-1} \binom{p}{i} f^i g^{p-i}.$$

Остаје још да покажемо да је сума $\sum\limits_{i=1}^{p-1} \binom{p}{i} f^i g^{p-i}$ једнака нули. Знамо да су биномни коефицијенти $\binom{p}{i} = \frac{p(p-1)\ldots(p-i+1)}{i!}$ целобројни (као број могућих избора i елемената из скупа од p елемената). То значи да се сви чиниоци $i, i-1, \ldots, 2$ из имениоца скраћују са нечим из бројиоца што очигледно није p јер p нема чиниоц (различит од 1) који мањи од p, а $i \leqslant p-1$. Одатле можемо закључити да је сваки биномни коефицијент $\binom{p}{i}$, $1 \leqslant i \leqslant p-1$, дељив са p у $\mathbb{Z}$, односно једнак нули у пољу остатака $\mathbb{Z}_p$. Онда ће и читава сума $\sum\limits_{i=0}^{p} \binom{p}{i} f^i g^{p-i}$ бити нула.

Хомогеност следи директно из Мале Фермаове Теореме примењене на скаларе из поља $\mathbb{Z}_p$:

$$(\forall \alpha \in \mathbb{Z}_p)\,(\forall f \in \mathbb{Z}_p[x])\;\; L(\alpha f) = (\alpha f)^p = \alpha^p f^p = \alpha L f.$$

$\square$

5.1 Језгро и слика линеарног пресликавања

Дефиниција 5.7. *Нека су U и V векторски простори над истим пољем скалара F и нека је $L : U \longrightarrow V$ линеарно пресликавање. Скуп*

$$\operatorname{Ker} L := L^{-1}\left(\{\mathbb{O}_V\}\right) = \{u \in U \mid Lu = \mathbb{O}_V\}$$

(где је $\mathbb{O}_V$ нула векторског простора V) зовемо језгро линеарног пресликавања L, а скуп

$$\operatorname{Im} L := L(U) = \{Lu \mid u \in U\}$$

зовемо слика линеарног пресликавања L.

Значај ових скупове се огледа у наредном тврђењу.

Теорема 5.8. *Нека су U и V векторски простори над истим пољем скалара F и нека је $L : U \longrightarrow V$ линеарно пресликавање. Тада је језгро $\operatorname{Ker} L$ векторски потпростор домена U, док је слика $\operatorname{Im} L$ векторски потпростор кодомена V. Додатно, ако је S генераторни скуп домена U, онда је $LS = \{Lv \mid v \in S\}$ генераторни скуп слике $\operatorname{Im} L$.*

Димензију језгра $\operatorname{Ker} L$ зовемо *дефект* линеарног пресликавања L и означавамо са δL, а димензију слике $\operatorname{Im} L$ зовемо *ранг* линеарног пресликавања L и означавамо са ρL.

Теорема 5.9 (Теорема о рангу и дефекту). *Нека су U и V векторски простори над истим пољем скалара F и нека је $L : U \longrightarrow V$ линеарно пресликавање. Тада је $\dim U = \rho L + \delta L$ (при чему ова једнакост важи у $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$).*

Теорема 5.10. *Нека су U и V векторски простори над истим пољем скалара F и нека је $L : U \longrightarrow V$ линеарно пресликавање.*

(1) Пресликавање L је инјективно ако и само ако је $\operatorname{Ker} L = \{\mathbb{O}\}$, односно $\delta L = 0$.

(2) Пресликавање L је сурјективно ако и само ако је $\operatorname{Im} L = V$. У случају да је кодомен V коначне димензије, претходно је еквивалентно са $\rho L = \dim V$.

(3) Претпоставимо додатно и да је $\dim U = \dim V < +\infty$. Следећи услови су еквивалентни:

(3.1) L је бијективно,

(3.2) L је инјективно,

(3.3) L је сурјективно.

Тада је и пресликавање L^{-1} линеарно.

Задатак 5.11. *Одредити бар по једну базу језгра и слике, као и ранг и дефект линеарног пресликавања*

$$L : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3,$$

$$L(x, y, z, t) = (2x + y + 3z + 6t, 3x + 4y + 2z + 9t, x + 6y - 4z + 3t).$$

Решење. Језгро $\operatorname{Ker} L$ је састављено од вектора $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ за које је

$$L(x, y, z, t) = (2x + y + 3z + 6t, 3x + 4y + 2z + 9t, x + 6y - 4z + 3t) = (0, 0, 0).$$

Другим речима, $\operatorname{Ker} L$ је скуп решења система

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x & + & y & + & 3z & + & 6t & = & 0 \\ 3x & + & 4y & + & 2z & + & 9t & = & 0 \\ x & + & 6y & - & 4z & + & 3t & = & 0 \end{array}$$

тј.

$$\{(-2\alpha - 3\beta, \alpha, \alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \mathscr{L}((-2, 1, 1, 0), (-3, 0, 0, 1)).$$

Очигледно је $\{(-2, 1, 1, 0), (-3, 0, 0, 1)\}$ једна база $\operatorname{Ker} L$. Специјално, $\delta L = \dim \operatorname{Ker} L = 2$.

Нека је $e = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ канонска база векторског простора $\mathbb{R}^4$. Тада је слика $\operatorname{Im} L$ генерисана векторима

$$Le_1 = (2,3,1), \quad Le_2 = (1,4,6), \quad Le_3 = (3,2,-4), \quad \text{и} \quad Le_4 = (6,9,3).$$

Из овог генераторног скупа можемо извући база као што смо то радили у претходној бази. Међутим, можемо и заобићи тај рачун и искористити оно што смо већ рачунали у претходном делу задатка. Сетимо се да је $-2e_1 + e_2 + e_3 = (-2,1,1,0) \in \operatorname{Ker} L$. Ово значи да је

$$(0,0,0) = L\left(-2e_1 + e_2 + e_3\right) = -2Le_1 + Le_2 + Le_3,$$

те имамо линеарну зависност $Le_3 = 2Le_1 - Le_2$. На исти начин налазимо и да је $Le_4 = 3Le_1$. Са друге стране, вектори Le_1 и Le_2 су (очигледно) линеарно независни, па ће чинити и базу $\operatorname{Im} L$. Специјално, $\rho L = 2$.

Други начин да одредимо слику је да прво одредимо ранг: $\rho L = \dim \mathbb{R}^4 - \delta L = 4 - 2 = 2$. То значи да било која два линеарно независна вектора из $\operatorname{Im} L$ чине базу тог простора. И онда изаберемо нпр. Le_1 и Le_2. $\square$

Задатак 5.12. *Показати да је*

$$L : \mathbb{R}^3[x] \longrightarrow \mathbb{R}^3[x], \qquad Lp = p(1)f - 3p,$$

где је $f(x) = 1 + x + x^2$, *линеарни оператор векторског простора* $\mathbb{R}^3[x]$. *Одредити бар по једну базу језгра и слике, као и ранг и дефект овог оператора.*

Решење. Прво, L јесте линеарни оператор простора $\mathbb{R}^3$ зато што је

(1) $\big(\forall p, q \in \mathbb{R}^3[x]\big)$

$$\begin{aligned} L(p+q) &= (p+q)(1)f - 3(p+q) = (p(1)+q(1))f - 3p - 3q \\ &= p(1)f - 3p + q(1)f - 3q = Lp + Lq, \end{aligned}$$

(2) $(\forall \alpha \in \mathbb{R})\,\big(\forall p \in \mathbb{R}^3[x]\big)$

$$L(\alpha p) = (\alpha p)(1)f - 3(\alpha p) = \alpha p(1)f - 3\alpha p = \alpha(p(1)f - 3p) = \alpha Lp.$$

За произвољан полином $p(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2 \in \operatorname{Ker} L \leqslant \mathbb{R}^3[x]$ треба да важи

$$\begin{aligned} L\left(\alpha + \beta x + \gamma x^2\right) &= (\alpha+\beta+\gamma)\left(1 + x + x^2\right) - 3\left(\alpha + \beta x + \gamma x^2\right) \\ &= (-2\alpha + \beta + \gamma) + (\alpha - 2\beta + \gamma)x + (\alpha + \beta - 2\gamma)x^2 = 0 \end{aligned}$$

Како је решење система $-2\alpha + \beta + \gamma = \alpha - 2\beta + \gamma = \alpha + \beta - 2\gamma = 0$ дато са $\{(\lambda,\lambda,\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ закључујемо да је

$$\operatorname{Ker} L = \left\{\, \lambda + \lambda x + \lambda x^2 \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \mathscr{L}(f).$$

Дакле, језгро је једнодимензионално са базом $\{f\}$.

Слика $\operatorname{Im} L$ је генерисана полиномима

$$\begin{aligned} L1 &= -2 + x + x^2, \\ Lx &= 1 - 2x + x^2, \\ Lx^2 &= 1 + x - 2x^2. \end{aligned}$$

Провером линеарне независности закључујемо да је база слике $\{L1, Lx\}$. Друго образложење би било: из $f \in \operatorname{Ker} L$ следи $Lx^2 = -L1 - Lx$, а како је $\rho L = \mathbb{R}^3 - \delta L = 2$ закључујемо да је $\{L1, Lx\}$ база $\operatorname{Im} L$. $\square$

Задатак 5.13. *Дати су потпростори* $U = \mathscr{L}\left(\sin^2 \frac{x}{2}, \cos^2 \frac{x}{2}, \sin^2 x, \cos^2 x\right)$ *и* $V = \mathscr{L}(\cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x)$ *векторског простора* $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

а) Допунити скуп $\{\cos x, \cos 2x\}$ *до базе за* U *и одредити базу за* V.

б) Доказати да је са $(Lf)(x) = f'(x) - f''(x) + f(0)\sin x$ *добро дефинисано линеарно пресликавање* $L : U \to V$.

в) Одредити слику, језгро, ранг и дефект пресликавања L. *Да ли је пресликавање* L *инвертибилно?*

Решење. а) Вектори $\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}$ и $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ очигледно припадају векторском потпростору U, али га не генеришу. Да бисмо добили генераторни скуп можемо додати нпр. вектор $1 = \cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} = \cos^2 x + \sin^2 x$. Тада је $e = \{1, \cos x, \cos 2x\}$ генераторни скуп простора U јер је

$$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos x, \qquad \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos x,$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x \qquad \text{и} \qquad \sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x.$$

Да бисмо проверили линеарну независност претпоставимо да важи $\alpha 1 + \beta \cos x + \gamma \cos 2x = 0$, за све $x \in \mathbb{R}$. Специјално,

$$\begin{array}{lclcccccc} x = 0 & : & \alpha & + & \beta & + & \gamma & = & 0 \\ x = \pi & : & \alpha & - & \beta & + & \gamma & = & 0 \\ x = \frac{\pi}{2} & : & \alpha & & & - & \gamma & = & 0 \end{array}$$

што повлачи да је $\alpha = \beta = \gamma = 0$, па је скуп e база векторског простора U. Наравно решење није јединствено, могли смо уместо 1 додати $\sin^2 \frac{x}{2}$, али смо намерно изабрали 1 да би даљи рачун био једноставнији.

На исти начин се показује и да је скуп $f = \{\cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x\}$ линеарно независан, а самим тим и база V.

б) Прескликавање L је линеарно (као пресликавање $L : U \longrightarrow \mathcal{C}^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, где је $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ векторски простор свих два пута диференцијабилних функција

$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$) јер је

$$\begin{aligned}
&(L(\alpha f + \beta y))(x) \\
&= (\alpha f + \beta g)'(x) - (\alpha f + \beta g)''(x) + (\alpha f + \beta g)(0) \sin x \\
&= \alpha \left(f'(x) - f''(x) + f(0) \sin x\right) + \beta \left(g'(x) - g''(x) + g(0) \sin x\right) \\
&= (\alpha L f + \beta L g)(x).
\end{aligned}$$

Зато је довољно да покажемо да $L1, L(\cos x), L(\cos 2x) \in V$ да би пресликавање L било добро дефинисано (јер се онда и произвољан вектор $\alpha + \beta \cos x + \gamma \cos 2x \in U$ слика у $\alpha L1 + \beta L(\cos x) + \gamma L(\cos 2x) \in V$). То се лако проверава:

$$\begin{aligned}
(L1)(x) &= \sin x \in V, \\
L(\cos x) &= -\sin x + \cos x + \sin x = \cos x \in V, \\
L(\cos 2x) &= -2 \sin 2x + 4 \cos 2x + \sin x \in V.
\end{aligned}$$

в) Нека је $\alpha + \beta \cos x + \gamma \cos 2x$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, произвољан вектор из језгра $\operatorname{Ker} L$. Тада је

$$\begin{aligned}
L(\alpha + \beta \cos x + \gamma \cos 2x) &= \alpha L1 + \beta L(\cos x) + \gamma L(\cos 2x) \\
&= \alpha \sin x + \beta \cos x + \gamma(\sin x - 2 \sin 2x + 4 \cos 2x) \\
&= (\alpha + \gamma) \sin x + \beta \cos x - 2\gamma \sin 2x + 4\gamma \cos 2x.
\end{aligned}$$

Како су по делу а) вектори $\sin x$, $\cos x$, $\sin 2x$ и $\cos 2x$ линеарно независни закључујемо да је $\alpha + \gamma = \beta = -2\gamma = 4\gamma = 0$, тј. $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Дакле, језгро $\operatorname{Ker} L = \{\mathbb{O}\}$, па му је база празан скуп.

То даље значи да је $\delta L = 0$ и $\rho L = \dim U - \delta L = 3$. А како је $\{L1, L(\cos x), L(\cos 2x)\}$ трочлан генераторни скуп слике $\operatorname{Im} L$ он ће бити и база $\operatorname{Im} L$.

На основу језгра и слике можемо закључити да је пресликавање L инјективно (јер је $\operatorname{Ker} L = \{\mathbb{O}\}$), али није сурјективно (јер је $\operatorname{Im} L \subsetneqq V$). Дакле, пресликавање $L : U \longrightarrow V$ није инвертибилно. $\square$

Напоменимо да ако смањимо кодомен у претходном задатку на $\operatorname{Im} L = \mathscr{L}(\sin x, \cos x, \sin 2x - 2 \cos 2x)$ пресликавање $L : U \longrightarrow \operatorname{Im} L$ постаје инвертибилно. Тада је инверз дат са

$$L^{-1}(\alpha \sin x + \beta \cos x + \gamma(\sin 2x - 2 \cos 2x)) = \left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right) + \beta \cos x - \frac{\gamma}{2} \cos 2x.$$

Закључак да L није инвертибилно у претходном задатку смо могли извући и из чињенице да су векторски простори U и V различитих димензија о чему ће бити више речи кад будемо причали о изоморфизмима векторских простора.

Задатак 5.14. *Нека је V векторски простор коначне димензије и нека је $L : V \longrightarrow V$ линеарни оператор на том простору. Показати да је* $\operatorname{Ker} L = \operatorname{Im} L$ *ако и само ако је* $L^2 = \mathbb{O}$ *(нула-функција) и* $\dim V = 2\rho L$.

Решење. Директан смер је очигледан. За произвољан вектор $v \in V$ знамо да је $Lv \in \operatorname{Im} L = \operatorname{Ker} L$, што значи да се Lv слика у нулу тј. $L^2 v = L(Lv) = \mathbb{O}_V$ (нула векторског простора V). А из $\delta L = \rho L$ и Теореме о рангу и дефекту закључујемо да је $\dim V = 2\rho L$.

Обрнуто претпоставимо сада да важи $L^2 = \mathbb{O}$ и $\dim V = 2\rho L$. Покажимо најпре да је $\operatorname{Im} L \subseteq \operatorname{Ker} L$. Нека је $Lv = \operatorname{Im} L$ произвољан вектор из слике. Тада из $L(Lv) = L^2 v = \mathbb{O} v = \mathbb{O}_V$ следи да се вектор Lv налази у $\operatorname{Ker} L$. Дакле, $\operatorname{Im} L \subseteq \operatorname{Ker} L$, а биће и једнаки као потпростори исте димезије јер је

$$\dim \operatorname{Ker} L = \delta L = \dim V - \rho L = 2\rho L - \rho L = \rho L = \dim \operatorname{Im} L.$$

□

Задатак 5.15. *Нека је $L : V \longrightarrow V$ линеарни оператор векторског простора V. Показати да је*

а) $\operatorname{Im}\left(L^2\right) = \operatorname{Im} L$ *ако и само ако је* $V = \operatorname{Ker} L + \operatorname{Im} L$,

б) $\operatorname{Ker}\left(L^2\right) = \operatorname{Ker} L$ *ако и само ако је* $\operatorname{Ker} L \cap \operatorname{Im} L = \{\mathbb{O}\}$.

Решење. а) Претпоставимо да је $\operatorname{Im}\left(L^2\right) = \operatorname{Im} L$ и хоћемо да покажемо $V = \operatorname{Ker} L + \operatorname{Im} L$. Како инклузија $\supseteq$ тривијално важи, биће довољно да покажемо само инклузију $\subseteq$. Нека је $v \in V$ произвољан вектор. Тада $Lv \in \operatorname{Im} L = \operatorname{Im}\left(L^2\right)$, па можемо рећи да је $Lv = L^2 u$, за неки вектор $u \in V$. Последњу једнакост можемо записати и у облику

$$\mathbb{O} = Lv - L^2 u = L(v - Lu).$$

Ово значи да је $v - Lu \in \operatorname{Ker} L$, па v можемо записати као

$$v = \underbrace{(v - Lu)}_{\in \operatorname{Ker} L} + \underbrace{Lu}_{\in \operatorname{Im} L} \in \operatorname{Ker} L + \operatorname{Im} L.$$

Обрнуто, претпоставимо сада да је $V = \operatorname{Ker} L + \operatorname{Im} L$. Инклузија $\operatorname{Im}\left(L^2\right) \subseteq \operatorname{Im} L$ важи увек (јер произвољан елемент $L^2 v \in \operatorname{Im}\left(L^2\right)$ можемо записати и као $L(Lv)$, те он припада и $\operatorname{Im} L$), па је довољно да покажемо да важи и обрнута инклузија. Нека је $Lv \in \operatorname{Im} L$ произвољан вектор. Како је $V = \operatorname{Ker} L + \operatorname{Im} L$, вектор v можемо записати у облику $v = u + Lw$, за неке $u \in \operatorname{Ker} L$ и $Lw \in \operatorname{Im} L$. Али тада је

$$Lv = L(u + Lw) = Lu + L(Lw) = \mathbb{O} + L^2 w = L^2 w \in \operatorname{Im} L.$$

б) Нека је $\operatorname{Ker}\left(L^2\right) = \operatorname{Ker} L$ и нека је $v \in \operatorname{Ker} L \cap \operatorname{Im} L$ произвољан вектор. То значи да је $Lv = 0$ и $v = Lu$, за неки вектор $u \in V$. Међутим, тада је

$L^2u = Lv = \mathbb{O}$, тј. $u \in \operatorname{Im}\left(L^2\right) = \operatorname{Im} L$ што повлачи $v = Lu = \mathbb{O}$. Како је вектор v био произвољан можемо закључити да је $\operatorname{Ker} L \cap \operatorname{Im} L = \{\mathbb{O}\}$.

И на крају претпоставимо да је $\operatorname{Ker} L \cap \operatorname{Im} L = \{\mathbb{O}\}$ и хоћемо да покажемо да је $\operatorname{Ker}\left(L^2\right) = \operatorname{Ker} L$. Инклузија $\supseteq$ тривијално важи: за све $v \in \operatorname{Ker} L$ важи $L^2v = L\mathbb{O} = \mathbb{O}$, тј. $v \in \operatorname{Ker}\left(L^2\right)$. Обрнуто, нека је сада $v \in \operatorname{Ker}\left(L^2\right)$ произвљан вектор и питамо се да ли v припада $\operatorname{Ker} L$. Вектор Lv припада и $\operatorname{Im} L$ (по дефиницији) и $\operatorname{Ker} L$ (јер смо претпоставили да је $L^2v = \mathbb{O}$). Зато ће припадати и пресеку $\operatorname{Ker} L \cap \operatorname{Im} L = \{\mathbb{O}\}$. Дакле, $Lv = \mathbb{O}$, односно $v \in \operatorname{Ker} L$ што комплетира доказ једнакости $\operatorname{Ker}\left(L^2\right) = \operatorname{Ker} L$. □

У претходном задатку смо заправо показали да је $V = \operatorname{Ker} L \oplus \operatorname{Im} L$ ако и само ако је $\operatorname{Ker}\left(L^2\right) = \operatorname{Ker} L$ и $\operatorname{Im}\left(L^2\right) = \operatorname{Im} L$.

5.2 Линеарна пресликавања у геометрији

Задатак 5.16. *За свако од следећих пресликавања $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ написати формулу у координатама и проверити да ли је линеарно:*

а) Транслација $\mathcal{T}_v$ за вектор $v = (x_0, y_0)$,

б) Симетрија $\mathcal{S}_{x\text{-оса}}$ око x-осе,

в) Ротација $\mathcal{R}_{(0,0),\varphi}$ око координатног почетка за угао φ,

г) Симетрија $\mathcal{S}_p$ око праве $p:\ y = kx$ кроз координатни почетак,

д) Симетрија $\mathcal{S}_p$ око праве $p:\ y = kx + n$, за $n \neq 0$ која не пролази кроз координатни почетак,

ђ) Ротација $\mathcal{R}_{v,\varphi}$ око тачке $v = (x_0, y_0)$ за угао φ,

е) Пројекција π_p на праву $p:\ y = kx + n$.

Решење. а) Транслација је у координатама дата са

$$\mathcal{T}_v(x, y) = (x + x_0, y + y_0)\,.$$

Ово пресликавање је линеарно ако и само ако је $x_0 = y_0 = 0$. Дакле, само је транслација за нула-вектор (тј. идентичко пресликавање) линеарна.

б) Симетрија око x-осе $\mathcal{S}_{x\text{-оса}}(x, y) = (x, -y)$ јесте линеарна.

в) Овде је главни трик да се променљива (x, y) запише у тригонометријском облику $(r\cos\theta, r\sin\theta)$ и онда је ротација $\mathcal{R}_{(0,0),\varphi}$ само увећање аргумента за угао φ. Наша ротација је дата са

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{(0,0),\varphi}(x,y) &= \mathcal{R}_{(0,0),\varphi}(r\cos\theta, r\sin\theta)\\ &= (r\cos(\theta+\varphi), r\sin(\theta+\varphi))\\ &= (r(\cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi), r(\sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi))\\ &= ((\cos\varphi)x - (\sin\varphi)y, (\sin\varphi)x + (\cos\varphi)y)\end{aligned}$$

и очигледно је линеарна.

г) Угао између x-осе и праве p је $\varphi = \operatorname{arctg} k \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Симетрију око праве p можемо урадити тако што раван $\mathbb{R}^2$ заротирамо за угао $-\varphi$ (тиме права p постаје x-оса), затим урадимо симетрију око x-осе и онда све заротирамо за угао φ, тј. вратимо све назад. Зато је

$$\begin{aligned}&\mathcal{S}_p(x,y)\\ =&\left(\mathcal{R}_{(0,0),\varphi} \circ \mathcal{S}_{x\text{-оса}} \circ \mathcal{R}_{(0,0),-\varphi}\right)(x,y)\\ =&\left(\mathcal{R}_{(0,0),\varphi} \circ \mathcal{S}_{x\text{-оса}}\right)((\cos(-\varphi))x - (\sin(-\varphi))y, (\sin(-\varphi))x + (\cos(-\varphi))y)\\ =&\left(\mathcal{R}_{(0,0),\varphi} \circ \mathcal{S}_{x\text{-оса}}\right)((\cos\varphi)x + (\sin\varphi)y, -(\sin\varphi)x + (\cos\varphi)y)\\ =&\mathcal{R}_{(0,0),\varphi}((\cos\varphi)x + (\sin\varphi)y, (\sin\varphi)x - (\cos\varphi)y)\\ =&(\cos\varphi((\cos\varphi)x + (\sin\varphi)y) - \sin\varphi((\sin\varphi)x - (\cos\varphi)y),\\ &\sin\varphi((\cos\varphi)x + (\sin\varphi)y) + \cos\varphi((\sin\varphi)x - (\cos\varphi)y))\\ =&((\cos 2\varphi)x + (\sin 2\varphi)y, (\sin 2\varphi)x - (\cos 2\varphi)y).\end{aligned}$$

Ово пресликавање је линеарно (што се може проверити директно, а може се и закључити да је линеарно као композиција три таква пресликавања).

д) Слично, транслацијом за вектор $v = (0, -n)$ права p се слика у праву $q: \ y = kx$ која је обрађена претходним делом задатка. Наша симетрија је дата са

$$\begin{aligned}&\mathcal{S}_p(x,y)\\ &= (\mathcal{T}_{-v} \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{T}_v)(x,y)\\ &= (\mathcal{T}_{-v} \circ \mathcal{S}_q)(x, y-n)\\ &= \mathcal{T}_{-v}((\cos 2\varphi)x + (\sin 2\varphi)(y-n), (\sin 2\varphi)x - (\cos 2\varphi)(y-n))\\ &= ((\cos 2\varphi)x + (\sin 2\varphi)y - n\sin 2\varphi, (\sin 2\varphi)x - (\cos 2\varphi)y + n(1+\cos 2\varphi)),\end{aligned}$$

где је $k = \operatorname{arctg} k \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Како је $n \neq 0$ и бар један од бројева $\sin 2\varphi$ и $1 + \cos 2\varphi$ различит од нуле (за $-\pi < 2\varphi < \pi$) закључујемо да симетрија $\mathcal{S}_p(x,y)$ није линеарна.

ђ) Слично, ротација $\mathcal{R}_{v,\varphi} = \mathcal{T}_{-v} \circ \mathcal{R}_{(0,0),\varphi} \circ \mathcal{T}_v$ неће бити линеарна (сем у случају да је v нула-вектор).

е) Пројекција на x-осу $\pi_{x\text{-оса}}(x,y) = (x,0)$ је линеарна. Затим, пројекција на праву $q:\ y = kx$, дата са

$$\begin{aligned}
\pi_q(x,y) &= \left(\mathcal{R}_{(0,0),\varphi} \circ \pi_{x\text{-оса}} \circ \mathcal{R}_{(0,0),-\varphi}\right)(x,y) \\
&= \left(\mathcal{R}_{(0,0),\varphi} \circ \pi_{x\text{-оса}}\right) \\
&\quad ((\cos(-\varphi))x - (\sin(-\varphi))y, (\sin(-\varphi))x + (\cos(-\varphi))y) \\
&= \left(\mathcal{R}_{(0,0),\varphi} \circ \pi_{x\text{-оса}}\right)((\cos\varphi)x + (\sin\varphi)y, -(\sin\varphi)x + (\cos\varphi)y) \\
&= \mathcal{R}_{(0,0),\varphi}((\cos\varphi)x + (\sin\varphi)y, 0) \\
&= \left(\left(\cos^2\varphi\right)x + \frac{\sin 2\varphi}{2}y, \frac{\sin 2\varphi}{2}x + \left(\sin^2\varphi\right)y\right),
\end{aligned}$$

где је $\varphi = \operatorname{arctg} k \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, јесте линеарна. И на крају пројекција

$$\begin{aligned}
\pi_p(x,y) &= \left(\mathcal{T}_{(0,n)} \circ \pi_{y=kx} \circ \mathcal{T}_{(0,-n)}\right)(x,y) \\
&= \left(\left(\cos^2\varphi\right)x + \frac{\sin 2\varphi}{2}y - n\frac{\sin 2\varphi}{2}, \frac{\sin 2\varphi}{2}x + \left(\sin^2\varphi\right)y + n\cos^2\varphi\right)
\end{aligned}$$

није линаарна сем у случају када је $n = 0$. $\square$

5.3 Изоморфизми векторских простора

Инвертибилно линеарно пресликавање векторских простора зовемо *изоморфизам.* За два векторска простора U и V над истим пољем ћемо рећи да су *изоморфни* уколико постоји изоморфизам $L : U \longrightarrow V$. У том случају пишемо $U \cong V$.

Уколико је L изоморфизам лако се проверава да је онда и L^{-1} линеарно пресликавање. То даље значи да је и L^{-1} изоморфизам.

Теорема 5.17. *Нека су U и V коначно димензионални векторски простори над истим пољем скалара. Тада је $U \cong V$ ако и само ако је $\dim U = \dim V$. Додатно, за сваки изоморфизам $L : U \longrightarrow V$ постоје базе $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ од U и $f = \{f_1, \ldots, f_n\}$ од V такве да је $Le_i = f_i$, за све $1 \leqslant i \leqslant n$.*

Претходна теорема даје брз критеријум за испитивање да ли су нека два векторска простора изоморфна или нису. Такође, даје и рецепт за налажење изоморфизма (и његовог инверза) између два векторска простора – то је линеарно пресликавање које слика базне векторе домена у базне векторе кодомена.

Имамо природни изоморфизам $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n[x]$, при чему се вектори канонске базе e_i сликају у полиноме x^i, за све $1 \leqslant i \leqslant n$. Са друге стране, $\mathbb{R}^n \ncong \mathbb{R}^m$, за $m \neq n$.

Задатак 5.18. *За сваки од следећих парова векторских простора U и V испитати да ли су изоморфни и уколико јесу одредити бар један изоморфизам $L : U \longrightarrow V$ и његов инверз:*

а) $U = \{ p \in \mathbb{R}^3[x] \mid p(2) = 0 \}$ *и* $V = \mathscr{L}\left(1 - x^3, 2 + x + x^2, 1 + x + x^2 + x^3,\right.$ $\left.1 + 2x + 3x^2 + 4x^3, x + 2x^2 + 3x^3\right)$,

б) $U = \mathbb{C}^3$ *као* $\mathbb{C}$*-векторски простор и* $V = \mathbb{R}^6$,

в) $U = \mathbb{C}^3$ *као* $\mathbb{R}$*-векторски простор и* $V = \mathbb{R}^6$,

г) $U = \{ p \in \mathbb{R}^3[x] \mid p(2) = 0 \}$ *и* $V = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - 5z = 0 \}$,

д) $U = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *и* $V = \{ a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid a_1 = a_2,\, a_4 = 0 \}$,

ђ) $U = \mathbb{Z}_3^3$ *и* $V = \mathbb{Z}_3^{\mathbb{Z}_3}$ *као* $\mathbb{Z}_3$*-векторски простори (или општије, за сваки прост број* p*,* $U = \mathbb{Z}_p^p$ *и* $V = \mathbb{Z}_p^{\mathbb{Z}_p}$ *као* $\mathbb{Z}_p$*-векторски простори).*

Решење. а) У Задатку 4.20 смо видели да је $\dim U = 2$, а $\dim V = 3$, што значи да U и V нису изоморфни.

б) Јасно је да $\mathbb{C}^3$ и $\mathbb{R}^6$ не могу бити изоморфни јер су у питању векторски простори над различитим пољима.

в) Сада ће $\mathbb{C}^6$ и $\mathbb{R}^6$ бити изоморфни јер је $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^3 = 6 = \dim \mathbb{R}^6$. Пресликавање којим се остварује изоморфизам може бити

$$L : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^6, \qquad L(a, b, c) = (\Re a, \Im a, \Re b, \Im b, \Re c, \Im c)$$

и

$$L : \mathbb{R}^6 \longrightarrow \mathbb{C}^3, \qquad L(a, b, c, d, e, f) = (a + ib, c + id, e + if).$$

г) Базе за ове векторске просторе смо већ одредили у Задатку 4.20. База U је $\{(-2, 1, 0), (5, 0, 1)\}$, а база V је $\{x - 2, x^2 - 4\}$. Као што видимо ова два векторска простора су исте димензије, па ће бити и изоморфни. Један изоморфизам L добијамо захтевом да се базни вектор $(-2, 1, 0)$ слика у базни вектор $x - 2$, а да се $(5, 0, 1)$ слика у $x^2 - 4$. Тада су изоморфизми $L : U \longrightarrow V$ и $L^{-1} : V \longrightarrow U$ дати са

$$\begin{aligned} L(-2\alpha + 5\beta, \alpha, \beta) &= L(\alpha(-2, 1, 0) + \beta(5, 0, 1)) \\ &= \alpha L(-2, 1, 0) + \beta L(5, 0, 1) \\ &= \alpha(x - 2) + \beta\left(x^2 - 4\right) \\ &= -2\alpha - 4\beta + \alpha x + \beta x^2 \end{aligned}$$

и

$$L^{-1}\left(-2\alpha - 4\beta + \alpha x + \beta x^2\right) = (-2\alpha + 5\beta, \alpha, \beta)$$

д) Овде наравно не ради трик са провером димензије. Иако можда делује да ови простори нису изоморфни (тј. да је U ,,већи“) испоставиће се ипак да јесу изоморфни. Нека је

$$L : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \longrightarrow V, \qquad (La)_n = \begin{cases} a_1, & \text{ако је } n = 1 \text{ или } n = 2, \\ a_2, & \text{ако је } n = 3, \\ 0, & \text{ако је } n = 4, \\ a_{n-2}, & \text{ако је } n \geqslant 5. \end{cases}$$

Пресликавање L је линеарно (јер су сви чланови низа $L(\alpha a+\beta b)$, за $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, једнаки одговарајућим члановима низа $\alpha La + \beta Lb$), а биће и изоморфизам јер има инверз

$$L^{-1} : V \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \qquad \left(L^{-1}a\right)_n = \begin{cases} a_1, & \text{ако је } n = 1, \\ a_3, & \text{ако је } n = 2, \\ a_{n+2}, & \text{ако је } n \geqslant 3. \end{cases}$$

Као што видимо, овде се дешава један феномен који није био могућ у коначно димензионалним просторима, векторски простори U и V су изоморфни, а притом је V прави потпростор од U.

ђ) База векторског простора $\mathbb{Z}_3^3$ је $\{e_1, e_2, e_3\}$, где је $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ и $e_3 = (0, 0, 1)$. Базу векторског простора $\mathbb{Z}_3^{\mathbb{Z}_3}$ ће чинити функције f_0, f_1 и f_2 задате са $f_i(j) = \begin{cases} 1, & \text{ако је } i = j, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$ (Јасно је да су овако дефинисане функције f_0, f_1 и f_2 линеарно независне, а биће и генераторни скуп јер се сваки вектор $f \in \mathbb{Z}_3^{\mathbb{Z}_3}$ може записати као $f = f(0)f_0 + f(1)f_1 + f(2)f_2$).

Како су димензије исте јасно је да је $\mathbb{Z}_3^3 \cong \mathbb{Z}_3^{\mathbb{Z}_3}$, при чему се изоморфизам остварује помоћу

$$L : \mathbb{Z}_3^3 \longrightarrow \mathbb{Z}_3^{\mathbb{Z}_3}, \qquad L(a, b, c) = af_0 + bf_1 + cf_2$$

и

$$L^{-1}f = (f(0), f(1), f(2)).$$

□

Скуп решења V хомогеног линеарног система

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}x_1 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & 0 \end{array} \tag{5.19}$$

(над пољем F) је векторски простор. Нека је r број слободних параметара из F који описују скуп решења V. Тада V мора бити изоморфан (а самим тим и у бијекцији) са векторским простором F^r. Специјално, број елемената скупа V је једнак $|F|^r$.

Са друге стране, ако нехомоген систем

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}x_1 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \tag{5.20}$$

има бар једно решење $(y_1, \dots, y_n)$ онда је скуп свих решења U система (5.20) дат са

$$U = \{\, (y_1, \dots, y_n) + (z_1, \dots, z_n) \mid (z_1, \dots, z_n) \in V \,\},$$

где је V скуп решења система (5.19). Зато, ако U није празан скуп, он мора имати тачно $|F|^r$ елемената (где је r број параметара који описују скуп решења).

Све заједно, ово потврђује све што смо експериментално видели о броју решења система у Глави 2.

Глава 6

Матрице

Таблицу $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, где су a_{ij} скалари из неког поља F, зовемо *матрица* реда $m \times n$ (над пољем F). Поред угластих заграда $(\ \cdot\ )$ матрице се понекад означавају и заградама $[\ \cdot\ ]$. Кажемо да је скалар a_{ij} коефицијент (фактор) матрице A на месту (i, j) . Уобичајена је пракса да се матрица означава великим словом, а коефицијенти истим словом само малим. Такође, често ћемо писати $A = (a_{ij})$ или $A = (a_{ij})_{i=1,\, j=1}^{n \quad m}$ уколико желимо да нагласимо да су a_{ij} коефицијенти матрице A. Скуп свих матрица реда $m \times n$ над пољем F означавамо са $M_{mn}(F)$.

Са $A_{i\rightarrow} := \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{pmatrix}$ означавамо i-ту *врсту* матрице A, а са $A_{\downarrow j} := \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ означавамо j-ту *колону* матрице A.

Уколико је $m = n$ кажемо да је матрица A квадратна и реда n (уместо реда $n \times n$. Скуп квадратних матрица $M_{nn}(F)$ краће означавамо са $M_n(F)$.

На скупу $M_{mn}(F)$ имамо дефинисано

(1) сабирање две матрице (истог реда!)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$:= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

(2) множење матрице скаларом из поља F

$$\alpha \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Јасно је да је $(M_{mn}(F), +, \cdot)$ векторски простор над пољем F који је изоморфан са векторским простором $(F^{mn}, +, \cdot)$. Или слободним речима, $M_{mn}(F)$ је исто што и F^{mn} само елементе не пишемо као mn-торке него као таблице.

Имамо канонску базу $e = \{e_{ij} \mid 1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant m\}$ векторског простора $M_{mn}(\mathbb{R})$, где је e_{ij} матрица која има 1 на месту (i,j) и све остале нуле.

Оно што прави разлику у $M_{mn}(F)$ у односу на F^{mn} је множење матрица. Нека је A матрица реда $m \times n$ и B матрица реда $n \times k$, тада је њихов производ матрица $C = AB$ реда $m \times k$ са коефицијентима $c_{ij} := \sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{lj}$. Другим речима, $c_{ij} = A_{i\to} B_{\downarrow j}$.

Неутрал за сабирање је *нула-матрица* $\mathbb{O} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$, а неутрал за множење матрица је матрица $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ коју зовемо *јединична матрица* и означавамо са E (или E_n уколико желимо да нагласимо ред ове матрице).

Задатак 6.1. *Израчунати*

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$,

б) $\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, *в)* $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$,

г) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Решење. Множење под б) није дефинисано јер покушавамо да помножимо 2×2 и 3×2 матрице. Што се осталих множења тиче имамо

а)

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1(-1) + 2 \cdot 6 & 1(-3) + 2 \cdot 0 \\ 3(-1) + 4 \cdot 6 & 3(-3) + 4 \cdot 0 \\ 5(-1) + 6 \cdot 6 & 5(-3) + 6 \cdot 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 11 & -3 \\ 21 & -9 \\ 31 & -15 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

в)

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 & 1(-1) + 2(-1) & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 4 \\ 3 \cdot 1 + 0 \cdot 2 & 3(-1) + 0(-1) & 3 \cdot 0 + 0 \cdot 4 \\ 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 & 2(-1) + 3(-1) & 2 \cdot 0 + 3 \cdot 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 & -3 & 8 \\ 3 & -3 & 0 \\ 8 & -5 & 12 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

г)

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 - 1 \cdot 3 + 0 \cdot 2 & 1 \cdot 2 - 1 \cdot 0 + 0 \cdot 3 \\ 2 \cdot 1 - 1 \cdot 3 + 4 \cdot 2 & 2 \cdot 2 - 1 \cdot 0 + 4 \cdot 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 7 & 16 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

Као што смо видели у претходном задатку може се десити да је множење AB дефинисано, а множење BA није. Али чак и ако су оба поменута множења дефинисана видимо да производи не морају бити исти. Дакле, множење матрица *није* комутативно. Зато када кажемо матрице A и B комутирају мислимо комутирају у односу на множење (јер у односу на сабирање све матрице комутирају па то не разматрамо).

За квадратну матрицу $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ кажемо да је

(1) *горње троугаона* ако је $a_{ij} = 0$, за све $1 \leqslant j < i \leqslant n$ (тј. има све нуле испод дијагонале),

(2) *доње троугаона* ако је $a_{ij} = 0$, за све $1 \leqslant i < j \leqslant n$ (тј. има све нуле изнад дијагонале),

(3) *дијагонална* ако је $a_{ij} = 0$, за све $1 \leqslant i, j \leqslant n$, $i \neq j$ (тј. има све нуле ван дијагонале). У том случају матрицу A означавамо са $\operatorname{diag}(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$. Приметимо да је дијагонална матрица и горње и доње троугаона. За дијагоналне матрице важи

$$\begin{aligned} &\operatorname{diag}(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}) \operatorname{diag}(b_{11}, b_{22}, \ldots, b_{nn}) \\ &= \operatorname{diag}(a_{11}b_{11}, a_{22}b_{22}, \ldots, a_{nn}b_{nn}) . \end{aligned} \tag{6.2}$$

За матрицу $A = \begin{pmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1n} & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ b_{m1} & \ldots & b_{mn} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & c_{11} & \ldots & c_{1l} \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & c_{k1} & \ldots & c_{kl} \end{pmatrix}$ кажемо да је *блок матрица* састављена од блокова $B = \begin{pmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1n} \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ b_{m1} & \ldots & b_{mn} \end{pmatrix}$ и $C = \begin{pmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1l} \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ c_{k1} & \ldots & c_{kl} \end{pmatrix}$ и пишемо $A = \begin{pmatrix} B & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & C \end{pmatrix}$.

Транспонована матрица матрице $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$ је матрица $A^T := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$. Или слободним речима, то је матрица у којој су замењене врсте и колоне. Пресликавање $A \mapsto A^T$ зовемо транспоновање матрица и оно задовољава следећа својства: $(A+B)^T = A^T + B^T$, $(\alpha A)^T = \alpha A^T$ (дакле, линеарно је) и $(AB)^T = B^T A^T$. Додатно, ако је матрица A инвертибилна (тј. има инверз) онда је и матрица A^T инвертибилна и важи $\left(A^{-1}\right)^T = \left(A^T\right)^{-1}$ (зато често пишемо кратко A^{-T} мислећи на један од претходних израза). Уколико је $A^T = A$ кажемо да је матрица A *симетрична* (у смислу симетрична у односу на дијагоналу), а уколико је $A^T = -A$ кажемо да је матрица A *антисиметрична* (кососиметрична).

Као што смо већ поменули у претходном пасусу, матрица не мора имати инверз. Занимљиво је да уколико имамо две матрице A и B које су инвертибилне и таквих редова да је множење AB дефинисано онда је и матрица AB инвертибилна и важи $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Траг је линеарно пресликавање $\mathrm{Tr} : M_n(F) \longrightarrow F$ задато са $\mathrm{Tr}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$. Јасно је да важи $\mathrm{Tr}\, A = \mathrm{Tr}\left(A^T\right)$.

Задатак 6.3. *Одредити транспоновану матрицу и траг матрице* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

Решење. Транспонована матрица је $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$, а траг је $\mathrm{Tr}\, A = 1 + 5 + 9 = 15$. □

Имамо примере векторских потпростора од $M_{mn}(F)$ (код којих суштински немамо ништа ново у односу на F^{mn}, али имамо елегентнији начин да их задамо).

Задатак 6.4. *Показати да су подскупови*

а) $U = \left\{ M \in M_2(\mathbb{R}) \mid \mathrm{Tr}\, M = 0,\ M^T = M \right\}$,

б) $V = \{ M \in M_2(\mathbb{R}) \mid AM = MA \}$, *где је* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

векторски потпростори простора $M_2(\mathbb{R})$ *и одредити њихове базе.*

Решење. а) Прво, U јесте векторски потпростор јер за све скаларе $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и све матрице $M, N \in U$ важи

$$\mathrm{Tr}(\alpha M + \beta N) = \mathrm{Tr}(\alpha M) + \mathrm{Tr}(\beta N) = \alpha\, \mathrm{Tr}\, M + \beta\, \mathrm{Tr}\, N = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0$$

и

$$(\alpha M + \beta N)^T = (\alpha M)^T + (\beta N)^T = \alpha M^T + \beta N^T = \alpha M + \beta N,$$

што значи да $\alpha M + \beta N \in U$.

За произвољну матрицу $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ треба да важи $\mathrm{Tr}\, M = a + d = 0$, тј. $d=-a$ и $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & -d \end{pmatrix}$, тј. $b=c$. Зато је

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \middle| \, a,b \in \mathbb{R} \right\} = \mathscr{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

Сада се лако види да је $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ база векторског простора U.

б) Слично, добијамо да је скуп $\left\{ E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ база векторског простора V. $\square$

Задатак 6.5. *Нека су $A, B \in M_(\mathbb{R})$ квадратне матрице. Показати да*

а) ако A и B комутирају онда важи Биномна формула: $(A+B)^n = \sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i} A^i B^{n-i}$,

б) ако важи $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$, онда A и B комутирају.

Решење. а) Степен $(A+B)^n = (A+B)(A+B)\dots(A+B)$ је збир производа облика $C_1C_2\dots C_n$, где су $C_i \in \{A, B\}$, за $1 \leqslant i \leqslant n$. Како A и B комутирају, сваки од изаза $C_1C_2\dots C_n$ се може свести на облик A^iB^{n-i}, за неко $1 \leqslant i \leqslant n$. Сваки од сабирака A^iB^{n-i} се појављује онолико пута колико има начина да се i чинилаца распореди на скуп од n чинилаца, тј. $\binom{n}{i}$.

б) Како је $(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$ из претпоставке задатке следи да је тада $AB = BA$, тј. A и B комутирају. $\square$

6.1 Матрица линеарног пресликавања

Матрице су уско повезано са линеарним пресликавањима. За почетак илуструјмо то на једном примеру.

Матрица $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 6 \\ 3 & 4 & 2 & 9 \\ 1 & 6 & -4 & 3 \end{pmatrix} \in M_{34}(\mathbb{R})$ дефинише једно линеарно пресликавање $L_A : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $L_A v = Av$. (Овде Av означава матрично множење, R^4 смо записали као колону тј. матрицу реда 4×1 и слично за $\mathbb{R}^3$.) Или ако распишемо преко координата наше пресликавање L_A је у ствари дато са

$$L_A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 6 \\ 3 & 4 & 2 & 9 \\ 1 & 6 & -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+y+3z+6t \\ 3x+4y+2z+9t \\ x+6y-4z+3t \end{pmatrix}.$$

Ово пресликавање смо заправо већ имали у Задатку 5.11 и тамо смо показали да је линеарно и одредили његову слику, језгро, итд.

И општије, матрица $A \in M_{mn}(F)$ дефинише линеарно пресликавање $L_A : F^n \longrightarrow F^m$, $L_A v = Av$ (где опет F^n и F^m пишемо као колоне).

Занимљиво је да важи и обрнут смер: свако линеарно пресликавање између два коначно димензионална простора се може представити као матрично множење. Присетимо се да смо координате вектора у бази писали као колону (матрицу реда нешто$\times 1$).

Теорема 6.6. *Нека су U и V коначно димензионални векторски простори над пољем скалара F са базама $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ и $f = \{f_1, \dots, f_m\}$, редом, и нека је $L : U \longrightarrow V$ линеарно пресликавање. Тада постоји јединствено одређена матрица $A \in M_{mn}(F)$ таква да је*

$$[Lu]_f = A[u]_e,$$

за све $u \in U$. Додатно, i-та колона матрице A садржи координате слике базног вектора e_i у бази f, тј. важи $A_{\downarrow i} = [Le_i]_f$, за све $1 \leqslant i \leqslant n$.

Дефиниција 6.7. *Матрицу A из претходне теореме зовемо матрица линеарног пресликавања L у односу на пар база e и f и означавамо је са $[L]_{e,f}$.*

Наглашавамо да ова дефиниција зависи од избора базе као и од редоследа базних вектора. Дакле, базу гледамо као уређен скуп.

Уколико су домен и кодомен исти (тј. имамо линарни оператор) и посматрамо исту базу у домену и кодомену писаћемо краће $[L]_e$ уместо $[L]_{e,e}$ и рећи само матрица оператора L у односу на базу e.

Ова матрица задовољава следеће особине:

- Ако имамо два линеарна пресликавања $L_1, L_2 : U \longrightarrow V$ онда важи $[L_1 + L_2]_{e,f} = [L_1]_{e,f} + [L_2]_{e,f}$. Затим, за сваки скалар α важи $[\alpha L]_{e,f} = \alpha [L]_{e,f}$. Заједно са претходном бијекцијом то значи да су векторски простор $\{L : U \longrightarrow V \,|\, L \text{ је линеарно}\}$ и $M_{mn}(F)$ (где је $n = \dim U$ и $m = \dim V$) *изоморфни*.
- Матрица идентичког пресликавања $\mathbb{1}_V : V \longrightarrow V$, $\mathbb{1}_V v = v$, за све $v \in V$, у односу на произвољну базу e је јединична, тј. $[\mathbb{1}_V]_e = E$.
- Ако имамо два линеарна пресликавања $L_1 : U \longrightarrow V$ и $L_2 : V \longrightarrow W$ онда важи $[L_2 \circ L_1]_{e,g} = [L_2]_{f,g} [L_1]_{e,f}$, где су e, f и g базе векторских простора U, V и W, редом.
- Из претходне две особине следи да за инвертибилна линеарна пресликавања важи $\left[L^{-1}\right]_{f,e} = [L]_{e,f}^{-1}$.

Због поменутог изоморфизма надаље ћемо поистовећивати линеарна пресликавања и матрице. Чак ћемо рећи језгро матрице $A \in M_{mn}(F)$ и писати $\operatorname{Ker} A$ мислећи на језгро линеарног пресликавања $F^n \longrightarrow F^m$, $v \mapsto Av$. И слично дефинишемо слику, ранг и дефект матрице.

Овде смо изабрали да пресликавања поистовећујемо са матричном множењем слева. Наравно, могли смо га поистоветити и са матричим множењем здесна. Али смо изабрали да увек пишемо слева како не бисмо увек имали по две сличне формуле (једну ако пишемо слева и другу аналогну ако пишемо здесна).

Задатак 6.8. *Дат је линеарни оператор*

$$L : \mathbb{R}^3[x] \longrightarrow \mathbb{R}^3[x], \qquad (Lp)(x) = x \cdot p'(x+1) + p''(x)$$

векторског простора $\mathbb{R}^3[x]$*. Одредити матрицу оператора* L *у односу на*

а) канонску базу e *векторског простора* $\mathbb{R}^3[x]$*,*

б) базу $f = \{x, x - x^2, 1 - x + x^2\}$*,*

в) базу $f' = \{x, 1 - x + x^2, x - x^2\}$*.*

Решење. а) Полином $p(x) = a + bx + cx^2$ се слика у полином

$$(Lp)(x) = x(b + 2c(x+1)) + 2c = 2c + (b+2c)x + 2cx^2.$$

Специјално, слике вектора канонске базе су

$$L1 = 0, \qquad Lx = x \qquad \text{и} \qquad Lx^2 = 2 + 2x + 2x^2.$$

Координате ових вектора у канонској бази су

$$[L1]_e = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad [Lx]_e = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{и} \qquad \left[Lx^2\right]_e = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Спајањем ових вектора у једну матрицу добијамо да је $[L]_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

б) Поступак је исти као у делу а), само што ће рачун бити мало компликованији. На основу онога што смо већ израчунали у делу а) можемо рећи да је $Lx = x$ што повлачи $[Lx]_f = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Затим имамо

$$L\left(x - x^2\right) = -2 - x - 2x^2 \qquad \text{и} \qquad L\left(1 - x + x^2\right) = 2 + x + 2x^2.$$

Сада треба изразити полином $L\left(x - x^2\right)$ као линеарну комбинацију $\alpha x + \beta\left(x - x^2\right) + \gamma\left(1 - x + x^2\right)$, за неке $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Решавањем система (или просто погађањем јер знамо да тај систем има јединствено решење пошто је f база) добијамо да је $\alpha = -3$, $\beta = 0$ и $\gamma = -2$. То значи да је $\left[L\left(x-x^2\right)\right]_f = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$. Сличним поступком можемо наћи и $\left[L\left(1-x+x^2\right)\right]_f$. А можемо и само приметити да је $L\left(1-x+x^2\right) = -L\left(x-x^2\right)$ што повлачи $\left[L\left(1-x+x^2\right)\right]_f = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Остаје само да све то ставимо у једну матрицу и кажемо да је $[L]_f = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

в) За ову матрицу већ имамо све израчунато у делу б), остаје само да прочитамо да је $[L]_{f'} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. □

Као што смо видели у претходном задатку матрица зависи од избора базе. За сада можемо рећи само да се матрице $[L]_e$ и $[L]_f$ разликују, а ускоро ћемо видети и каква је веза између њих. Посебно је занимљива веза између матрица $[L]_f$ и $[L]_{f'}$. Базу f' смо добили тако што смо у бази f пермутовали векторе, тј. заменили други и трећи вектор. То је довело до пермутовања колона (као последица замена редоследа базних вектора у домену) и до пермутовања врста (као последица замена редоследа базних вектора у кодомену).

Приметимо и да се матрица оператора у односу на канонску базу (или општије, пресликавања у односу на пар канонских база) лако може прочитати и „без рачуна“. Објашњење за ово се крије у поступку који смо применили. То ћемо илустровати на примеру из претходног задатка. Имали смо оператор

$$L\left(a+bx+cx^2\right) = 2c + (b+2c)x + 2cx^2.$$

Гледамо десну страну ове једнакости тј. резултат и матрицу $[L]_e$. У првој врсти матрице $[L]_e$ се налазе коефицијенти уз a, b и c, редом, из слободног члана. У нашем случају то су 0, 0 и 2. Затим, у другој врсти матрице $[L]_e$ се налазе коефицијенти уз a, b и c, редом, из члана уз x. У нашем случају то су 0, 1 и 2. И слично, у трећој врсти се налазе коефицијенти уз a, b и c, из члана уз x^2, тј. 0, 0 и 2. Наглашавамо да ово ради само за канонску базу и само за пресликавање које је дато у координатама (овде су a, b и c), нпр. из облика $(Lp)(x) = x \cdot p'(x+1) + p''(x)$ не бисмо могли ништа да видимо.

Задатак 6.9. *а) Одредити матрицу линеарног пресликавања*

$$L:\mathbb{R}^3[x]\longrightarrow\mathbb{R}^4,\qquad Lp=\left(p(1),\,p''(0),\,\int\limits_{-1}^{1}p(t)\,dt,\,p(2)+p(-2)\right)$$

у односу на пар база

$$e=\left\{1,1+2x,4-x^2\right\}\quad \textit{и}\quad f=\{(1,1,0,0),(0,0,1,1),(1,0,1,1),(0,1,2,3)\}.$$

б) Одредити бар једну базу језгра и слике, као и ранг и дефект линеарног пресликавања L.

Решење. а) Слике вектора из базе e су

$$L1=(1,0,2,2),\quad L(1+2x)=(3,0,2,2)\quad \text{и}\quad L\left(4-x^2\right)=\left(3,-2,\frac{22}{3},0\right).$$

Сада треба одредити координате ова три вектора у бази f. Нека су f_1, f_2, f_3 и f_4 елементи базе f. Требало би да је очигледно да је $(1,0,0,0)=f_3-f_2$ што нам даје

$$L1=f_3-f_2+2f_2=f_2+f_3\qquad \text{и}\qquad L(1+2x)=3\,(f_3-f_2)+2f_2=-f_2+3f_3.$$

Координате преосталог вектора можемо наћи решавањем система једначина $\left(3,-2,\frac{22}{3},0\right)=\alpha f_1+\beta f_2+\gamma f_3+\delta f_4$. Добијамо да је

$$L\left(4-x^2\right)=\frac{16}{3}f_1+\frac{73}{3}f_2-\frac{7}{3}f_3-\frac{22}{3}f_4.$$

Тиме смо добили и последњу колону тражене матрице

$$[L]_{e,f}=\begin{pmatrix}0&0&\frac{16}{3}\\1&-1&\frac{73}{3}\\1&3&-\frac{7}{3}\\0&0&-\frac{22}{3}\end{pmatrix}.$$

б) Сада ћемо показати још један начин за одређивање језгра и слике (помоћу матрице пресликавања). Нека је $p\in\operatorname{Ker}L$ произвољан полином и нека су његове координате $[p]_e=\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$. Тада је

$$[L]_{e,f}[p]_e=[Lp]_f=[(0,0,0,0)]_f=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix},$$

тј.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{16}{3} \\ 1 & -1 & \frac{73}{3} \\ 1 & 3 & -\frac{7}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{22}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{16}{3}\gamma \\ \alpha - \beta + \frac{73}{3}\gamma \\ \alpha + 3\beta - \frac{7}{3}\gamma \\ -\frac{22}{3}\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Најпре можемо закључити да је $\gamma = 0$, а потом из $\alpha - \beta = \alpha + 3\beta = 0$ и да је $\alpha = \beta = 0$. Дакле, $\operatorname{Ker} L$ садржи само вектор чије су координате $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ тј. нула-вектор, па је $\operatorname{Ker} L = \{\mathbb{O}\}$. То значи да је $\delta L = 0$ и $\rho L = \dim \mathbb{R}^3[x] - \delta L = 3$.

На сличан начин можемо одредити и слику. Када полином p пролази домен $\mathbb{R}^3[x]$, његове координате $[p]_e = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ пролазе цео простор $\mathbb{R}^3$ (на основу изоморфизма $\mathbb{R}^3[x]$ и $\mathbb{R}^3$). Зато се слика састоји од вектора свих Lp чије су координате

$$[Lp]_f = [L]_{e,f}[p]_e \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{16}{3} \\ 1 & -1 & \frac{73}{3} \\ 1 & 3 & -\frac{7}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{22}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{16}{3}\gamma \\ \alpha - \beta + \frac{73}{3}\gamma \\ \alpha + 3\beta - \frac{7}{3}\gamma \\ -\frac{22}{3}\gamma \end{pmatrix},$$

за $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Последњи скуп је једнак

$$\begin{aligned} \mathscr{L}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{16}{3} \\ \frac{73}{3} \\ -\frac{7}{3} \\ -\frac{22}{3} \end{pmatrix}\right) &= \mathscr{L}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{16}{3} \\ \frac{73}{3} \\ -\frac{7}{3} \\ -\frac{22}{3} \end{pmatrix}\right) \\ &= \mathscr{L}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{16}{3} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{22}{3} \end{pmatrix}\right) \\ &= \mathscr{L}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \\ -11 \end{pmatrix}\right). \end{aligned}$$

Овде смо у првој једнакости користили да вектори $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

генеришу простор $\{0\} \times \mathbb{R}^2 \times \{0\}$, исто као и вектори $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Тиме смо нашли координате вектора из $\operatorname{Im} L$. Наша слика $\operatorname{Im} L$ садржи све векторе са координатама $\begin{pmatrix} 8\nu \\ \lambda \\ \mu \\ -11\nu \end{pmatrix}$, за $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$. Зато је

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} L &= \{8\nu(1,1,0,0) + \lambda(0,0,1,1) + \mu(1,0,1,1) - 11\nu(0,1,2,3) \mid \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}\} \\ &= \{\lambda(0,0,1,1) + \mu(1,0,1,1) + \nu(8,-3,-22,-33) \mid \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Како је скуп $\{(0,0,1,1), (1,0,1,1), (8,-3,-22,-33)\}$ линеарно независан, он ће бити база слике $\operatorname{Im} L$. □

Задатак 6.10. *Дато је пресликавање*

$$L : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow M_2(\mathbb{R}), \qquad LX = X^T A - AX^T + (\operatorname{Tr} X)A,$$

где је $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

а) Показати да је L линеарни оператор векторског простора $M_2(\mathbb{R})$.

б) Одредити матрицу оператора L у односу на базу

$$f = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \right\}$$

векторског простора $M_2(\mathbb{R})$.

Решење. а) Пресликавање L јесте линеарни оператор јер је

(1) $(\forall X, Y \in M_2(\mathbb{R}))$

$$\begin{aligned} L(X+Y) &= (X+Y)^T A - A(X+Y)^T + (\operatorname{Tr}(X+Y))A \\ &= \left(X^T + Y^T\right) A - A\left(X^T + Y^T\right) + (\operatorname{Tr} X + \operatorname{Tr} Y)A \\ &= X^T A + Y^T A - AX^T - AY^T + (\operatorname{Tr} X)A + (\operatorname{Tr} Y)A \\ &= LX + LY, \end{aligned}$$

(2) $(\forall \alpha \in \mathbb{R}) (\forall X \in M_2(\mathbb{R}))$

$$\begin{aligned} L(\alpha X) &= (\alpha X)^T A - A(\alpha X)^T + (\operatorname{Tr}(\alpha X))A \\ &= \alpha X^T A - A\left(\alpha X^T\right) + \alpha(\operatorname{Tr} X)A \\ &= \alpha\left(X^T A - AX^T + (\operatorname{Tr} X)A\right) = \alpha LX. \end{aligned}$$

б) Да бисмо убрзали рачун запишимо најпре оператор L у облику

$$\begin{aligned}
&L\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix} + (x+t)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} z & x+3z \\ t & y+3t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y & t \\ x+3y & z+3t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & x+t \\ x+t & 3x+3t \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} z-y & 2x+3z \\ -3y+2t & 3x+y-z+3t \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Означимо векторе из базе f са f_1, f_2, f_3 и f_4, редом. Они се сликају у

$$Lf_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad Lf_2 = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 7 \end{pmatrix},$$

$$Lf_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{и} \qquad Lf_4 = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

Одредимо њихове координате. Прво ћемо векторе канонске базе изразити преко f_i-ова. Имамо да је

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = f_2 - 2f_1, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = f_2 - 3f_1,$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 3f_3 - f_4 \qquad \text{и} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = f_4 - 2f_3.$$

Зато је

$$\begin{aligned}
Lf_1 &= (f_2 - 2f_1) + 2(f_2 - 3f_1) + 3(3f_3 - f_4) + 2(f_4 - 2f_3) \\
&= -8f_1 + 3f_2 + 5f_3 - f_4, \\
Lf_3 &= (f_2 - 2f_1) + 3(f_2 - 3f_1) + 2(3f_3 - f_4) + 2(f_4 - 2f_3) \\
&= -11f_1 + 4f_2 + 2f_3, \\
Lf_2 &= Lf_4 = -22f_1 + 8f_2 + 4f_3 + f_4.
\end{aligned}$$

Дакле, тражена матрица је

$$[L]_f = \begin{pmatrix} -8 & -20 & -11 & -20 \\ 3 & 14 & 4 & 14 \\ 5 & 4 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

У претходном примеру смо имали пресликавање на скупу матрица. Ту не треба мешати матрице као векторе са матрицом пресликавања. Чак и да је пресликавање било задато са $M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$, $X \mapsto AX$ (где је A матрица из претходног задатка) то не значи да је матрица пресликавања L једнака A, већ ће то бити нека 4×4 матрица.

Задатак 6.11. *Одредити матрицу линеарног пресликавања из Задатка 5.13 у односу на пар база из дела а) поменутог задатка.*

Решење. Све што је потребно смо већ израчунали у Задатку 5.13, само што тада нисмо знали шта је матрица пресликавања па то нисмо могли да запишемо. Добили смо да је $e = \{1, \cos x, \cos 2x\}$ база домена U, а $f = \{\cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x)\}$ база кодомена V. Затим, израчунали смо да је

$$L1 = \sin x, \quad L(\cos x) = \cos x \quad \text{и} \quad L(\cos 2x) = \sin x + 4\cos 2x - 2\sin 2x.$$

Остаје само да констатујемо да је $[L]_{e,f} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. $\square$

Наредни пример показује како се матрица пресликавања „слаже" са композицијом. Узећемо канонске базе како бисмо убрзали рачун, а свакако исти закључак важи и за произвољне базе.

Задатак 6.12. *Дата су линеарна пресликавања*

$$L : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad L\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a + d, a - b + 3c)$$

и

$$K : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3[x], \qquad K(a, b) = a + (2a + b)x + (a - b)x^2.$$

Одредити матрицу линеарног пресликавања $K \circ L$ у односу на пар канонских база векторских простора $M_2(\mathbb{R})$ и $\mathbb{R}^3[x]$.

Решење. Један начин да се ово уради је да прво експлицитно одредимо композицију $K \circ L$. За произвољну матрицу $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ важи

$$(K\circ L)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = K(a+d, a-b+3c) = (a+d)+(3a-b+3c+2d)+(b-3c+2d)x^2.$$

Како су у питању канонске базе матрицу можемо лако одредити на основу напомене иза Задатка 6.8. Ако су e и f канонске базе векторских простора $M_2(\mathbb{R})$ и $\mathbb{R}^3[x]$, редом, онда је $[K \circ L]_{e,f} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

Други начин да се ово уради је да прво одредимо матрице пресликавања L и K. Нека је g канонска база простора $\mathbb{R}^2$, тада је

$$[L]_{e,g} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{и} \qquad [K]_{g,f} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Сада матрицу композиције можемо израчунати као

$$[K\circ L]_{e,f}=[K]_{g,f}[L]_{e,g}=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\1&-1&3&0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\3&-1&3&2\\0&1&-3&1\end{pmatrix}.$$

□

6.2 Елементарне трансформације матрица

Елементарне трансформације које смо увели у Глави 2 (и које смо користили за проверу линеарне независности) ћемо примењивати и на метрицама. Разлика је једино што ћемо сада радити трансформације и на врстама и на колонама. Тачније, имамо

(1) Елементарне трансформације врста матрице A (које ћемо надаље означавати са $\Psi(A)$): $A_{i\to}\leftrightarrow A_{j\to}$, $A_{i\to}\to\alpha A_{i\to}$ (за $\alpha\neq 0$) и $A_{i\to}\to A_{i\to}+\alpha A_{j\to}$.

(2) Елементарне трансформације колона матрице A (које ћемо надаље означавати са $\Phi(A)$): $A_{\downarrow i}\leftrightarrow A_{\downarrow j}$, $A_{\downarrow i}\to\alpha A_{\downarrow i}$ (за $\alpha\neq 0$) и $A_{\downarrow i}\to A_{\downarrow i}+\alpha A_{\downarrow j}$.

Занимљиво је да се код матрица елементарне трансформације могу видети као множење одговарајућом матрицом о чему говори наредна теорема.

Теорема 6.13. *Нека је $A\in M_{mn}(F)$ произвољна матрица. Тада је $\Psi(A)=\Psi(E_m)A$ и $\Phi(A)=A\Phi(E_n)$. Додатно, матрице $\Psi(E)$ и $\Phi(E)$ су инвертибилне и важи $(\Psi(E))^{-1}=\Psi^{-1}(E)$ и $(\Phi(E))^{-1}=\Phi^{-1}(E)$.*

Специјално, то значи да трансформације Φ и Ψ комутирају јер је $(\Phi\circ\Psi)(A)=\Phi(\Psi(E)A)=\Psi(E)A\Phi(E)=\Psi(A\Phi(E))=(\Psi\circ\Phi)(A)$. Са друге стране, две трансформације на врстама (или две на колонама) не морају да комутирају. Нпр. није исто да ли прво удвостручимо прву врсту па онда заменимо прву и другу врсту или их прво заменимо да онда удвостручимо (нову) прву врсту.

За дату матрицу $A\in M_{mn}(F)$ имамо F-векторски простор врста $\mathscr{L}(A_{1\to},\ldots,A_{m\to})$ и простор колона $\mathscr{L}(A_{\downarrow 1},\ldots,A_{\downarrow n})$.

Теорема 6.14. *За произвљну матрицу $A\in M_{mn}(F)$ важи*

$$\dim\mathscr{L}(A_{1\to},\ldots,A_{m\to})=\dim\mathscr{L}(A_{\downarrow 1},\ldots,A_{\downarrow n})=\rho A.$$

Напомињемо да је ранг матрице раније дефинисан као ранг одговарајућег линеарног пресликавања. Ово би била еквивалентна дефиниција ранга – то је димензија линеарног омотача врста (колона).

Видимо да елементарне трансформације врста чувају векторски простор врста $\mathscr{L}(A_{1\to},\dots,A_{m\to})$, а трансформације колона чувају простор колона $\mathscr{L}(A_{\downarrow 1},\dots,A_{\downarrow n})$. Специјално, све елеменентарне трансформације *чувају* ранг матрице.

Слично као у Гаусовом поступку, произвољну матрицу A елементарним трансформацијама можемо свести на матрицу $B = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & 0 & \\ & & & & & & \ddots \end{pmatrix}$ (истог реда као A) која има неколико јединица на почетном делу дијагонале и све нуле ван тога. Овде и надаље подразумевамо да празно место у матрици (и касније у детерминанти) означава нулу. На основу претходног број јединица на дијагонали одговара рангу матрице. Тиме је матрица B јединствено одређена матрицом A, зато ћемо је надаље звати *канонска матирца* матрице A и означавати је са A^0.

Овим поступком смо заправо добили да је

$$A^0 = \Psi_1(E)\Psi_2(E)\dots\Psi_k(E)A\Phi_1(E)\Phi_2(E)\dots\Phi_l(E).$$

Означимо са $P = \Psi_1(E)\Psi_2(E)\dots\Psi_k(E)$ и $Q = \Phi_1(E)\Phi_2(E)\dots\Phi_l(E)$. Наглашавамо да су матрице P и Q инвертибилне као производ инвертибилних матрица и важи

$$\begin{aligned} P &= \Psi_1(E)\Psi_2(E)\dots\Psi_k(E) = \Psi_1(E)\Psi_2(E)\dots\Psi_k(E)E \\ &= (\Psi_1\circ\Psi_2\circ\dots\circ\Psi_k)(E) \end{aligned}$$

и слично $Q = (\Phi_1\circ\Phi_2\circ\dots\circ\Phi_l)(E)$. Или слободним речима, матрица P (матрица Q) је добијена од јединичне истим елементарним трансформацијама врста (колона) којима је матрица A^0 добијена од матрице A. Подсећамо да су (према Теореми 6.14) матрице P и Q таквог реда да су множења PA и AQ дефинисана.

Уколико је матрица B добијена из матрице A применом елементарних трансформација кажемо да су матрице A и B *сличне* и пишемо $A \sim B$. Специјално, канонска матрица A^0 је слична почетној матрици A, а матрице P и Q су сличне јединичим матрицама (одговарајућег реда). Видели смо да еквивалентне матрице имају исти ранг.

Задатак 6.15. *Одредити ранг матрице*

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -2 & 9 \end{pmatrix}$,

б) $B = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & 6 & 2 & -4 \end{pmatrix}$.

Решење. а) Ово смо суштински већ радили када смо одређивали базу векторског простора, једино што сад имамо нови запис. Користећи елементарне трансформације добијамо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & \boxed{-1} & 3 \\ 1 & 4 & -2 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{-1} & 5 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & 1 & 9 \end{pmatrix} /(-2)$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & \boxed{2} & 1 & -1 \\ 0 & -6 & -3 & 3 \end{pmatrix} /\cdot 3 \sim \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Сада је јасно да је $\rho(A) = 2$ јер имамо две линеарно независне врсте.

б) Слично,

$$B = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 1 & -4 \\ \boxed{1} & 2 & 4 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & 6 & 2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 7 & 1 & -4 \\ -2 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 6 & 2 & -4 \end{pmatrix} /\cdot 2$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 & -2 \\ 0 & \boxed{1} & 7 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 7 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & 14 & 2 & -8 \end{pmatrix} /(-1) \ /(-2) \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 7 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Дакле, ранг матрице B је 2. $\square$

Задатак 6.16. *За дату матрицу A одредити бар један пар инвертибилних матрица P и Q такав да важи $A^0 = PAQ$, ако је*

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & -2 & -5 \end{pmatrix}$,

б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$.

Решење. Прво матрицу A елементарним трансформацијама сводимо на канонску матрицу A^0:

$$A=\begin{pmatrix}\boxed{1}&2&0&5\\3&1&-1&0\\5&0&-2&-5\end{pmatrix}/(-3)\ /(-5)\sim\begin{pmatrix}\boxed{1}&2&0&5\\0&-5&-1&-15\\0&-10&-2&-30\end{pmatrix}$$

$$/(-2)\qquad /(-5)$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-5&\boxed{-1}&-15\\0&-10&-2&-30\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\boxed{-1}&-5&-15\\0&-2&-10&-30\end{pmatrix}/(-2)$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\boxed{-1}&-5&-15\\0&0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\boxed{-1}&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}/(-1)$$

$$/(-5)\qquad /(-15)$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=A^0.$$

Матрицу P добијамо тако што на E_3 применимо исте елементарне трансформације које смо урадили на матрици A:

$$E_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}/(-3)\ /(-5)\sim\begin{pmatrix}1&0&0\\-3&1&0\\-5&0&1\end{pmatrix}/(-2)$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&0&0\\-3&1&0\\1&-2&1\end{pmatrix}/(-1)\sim\begin{pmatrix}1&0&0\\3&-1&0\\1&-2&1\end{pmatrix}=P.$$

Слично, матрицу Q добијамо тако што на E_4 применимо исте елементарне трансформације које смо урадили на матрици A:

$$E_4=\begin{pmatrix}\boxed{1}&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-2&0&-5\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-2&-5\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$/(-2)\quad /(-5)\qquad\qquad /(-5)\quad /(-15)$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = Q.$$

б) Поступак је исти као у делу а), само што ћемо сада показати и један елегантнији запис. Уместо са матрицом A радићемо са „већом“ матрицом $\begin{pmatrix} A & E_4 \\ E_3 & \end{pmatrix}$. (Подразумевамо да су нуле на празним местима, али тај део је небитан за нашу причу.) Овим постижемо да се трансформације које радимо на A аутоматски записују на преостале две матрице. На крају поступка, десно од A^0 ћемо добити матрицу P, а испод A^0 матрицу Q. На овом конкретном примеру имамо

$$\begin{pmatrix} A & E_4 \\ E_3 & \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|cccc} \boxed{1} & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 9 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & & \end{array}\right)$$

$/(-2)$

$/(-1)$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|cccc} \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & 10 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & -2 & -1 & & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & & \end{array}\right) /(-2)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 10 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & -2 & -1 & & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & & \end{array}\right)$$

$/(-2)$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & -2 & 3 & & & & \\ 0 & 1 & -2 & & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & & \end{array}\right) \; / \cdot 5$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 11 & -5 & 0 & 1 \\ \hline 1 & -2 & 3 & & & & \\ 0 & 1 & -2 & & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & & \end{array}\right) = \begin{pmatrix} A^0 & P \\ Q & \end{pmatrix}.$$

Овде смо писали вертикалне и хоризонталне црте само да раздвојимо матрице, а оне наравно немају никакакво значење. □

Наглашавамо да решење претходног задатка није јединствено. Могли смо матрицу A свести на A^0 и другачијим избором елементарних трансформација. Тада би и матрице P и Q изгледале другачије.

Задатак 6.17. *У зависности од реалног параметра λ одредити ранг матрице*

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$,

б) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 1 & \lambda^2 & \lambda \end{pmatrix}$.

Решење. а) Параметар овде суштински не мења ништа. Слично као код система и овде ћемо избегавати параметар колико је то могуће како не бисмо имали сувишно раздвајање на случајеве. Дакле,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 10 & -6 & 1 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & \lambda & -1 & 2 \end{pmatrix} /(-2) \; /(-1)$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 10 & -6 & 1 \\ 0 & -21 & \lambda+12 & 3 \\ 0 & \lambda-10 & 5 & \boxed{1} \end{pmatrix} /(-3) \sim \begin{pmatrix} 1 & 10 & -6 & 1 \\ 0 & -3\lambda+9 & \lambda-3 & 0 \\ 0 & \lambda-10 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Разликујемо два случаја:

(1) ако је $\lambda = 3$ друга врста ће бити нула-врста, па је $\rho A = 2$,

(2) ако је $\lambda \neq 3$ ранг ће бити једнак три.

б) Слично,

$$B = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 1 & \lambda^2 & \lambda \end{pmatrix} /(-1) \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{\lambda - 1} & \lambda^2 - 1 \\ 0 & \lambda^2 - 1 & \lambda - 1 \end{pmatrix} /(-(\lambda+1))$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & \lambda^2 - 1 \\ 0 & 0 & -\lambda(\lambda-1)(\lambda+2) \end{pmatrix}.$$

Дакле,

(1) ако је $\lambda = 1$ онда је $\rho A = 1$,

(2) ако је $\lambda = 0$ или $\lambda = -2$ онда је $\rho A = 2$,

(3) ако је $\lambda \neq 0, 1, -2$ онда је $\rho A = 3$.

□

6.3 Инверз матрице

Већ смо причали да неке матрице имају а неке немају инверз. Чак је могуће и да матрица има леви, а нема десни инверз (или обрнуто) јер множење није комутативно. Сад се поставља питање како препознати да ли је матрица инвертибилна и уколико јесте како израчунати њен инверз. У случају квадратних матрица имамо јасан критеријум.

Теорема 6.18. *Квадратна матрица $A \in M_n(F)$ је инвертибилна ако и само ако је $\rho A = n$.*

Дакле, матрица има инверз ако и само је максималног ранга (или еквивалентно, дефекта нула). У том случају, канонска матрица A^0 матрице A мора бити јединична. И управо релацију $PAQ = A^0 = E$ можемо искористити за налажење инверза. Најпре множењем слева са P^{-1} (за које знамо да постоји) добијамо да је $AQ = P^{-1}E = P^{-1}$. Затим множењем здесна са P добијамо да је $AQP = E$, што значи да је QP десни инверз матрице A. Али на исти начин (множењем са Q^{-1} здесна, па са Q слева) можемо закључити да је иста матрица QP и леви инверз. Све заједно то значи да је $A^{-1} = PQ$. Ово је уједно и доказ обрнутог смера претходне теореме али и упутство за налажење инверза.

Задатак 6.19. *Израчунати инверз матрице*

а) $A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 3 \\ -3 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$,

б) $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$,

Решење. а) Одредимо најпре инвертибилне матрице P и Q познатим алгоритмом:

$$\begin{pmatrix} A & E \\ E & \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & \boxed{1} & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & -1 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 1 & 0 & 0 & & & \end{array}\right) /(-3)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & -1 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -6 & 1 & 0 & -3 \\ \hline 0 & 0 & 1 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 1 & 0 & 0 & & & \end{array}\right)$$

$/(-4)$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -6 & 1 & 0 & -3 \\ \hline 0 & 0 & 1 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 1 & 1 & -4 & & & \end{array}\right) /(-1)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -7 & 1 & -1 & -4 \\ \hline 0 & 0 & 1 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 1 & 1 & -4 & & & \end{array}\right)$$

$$/(-1)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{-7} & 1 & -1 & -4 \\ \hline 0 & 0 & 1 & & & \\ 0 & 1 & -1 & & & \\ 1 & 1 & -5 & & & \end{array}\right) /\left(-\tfrac{1}{7}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{4}{7} \\ \hline 0 & 0 & 1 & & & \\ 0 & 1 & -1 & & & \\ 1 & 1 & -5 & & & \end{array}\right) = \begin{pmatrix} E & P \\ Q & \end{pmatrix}.$$

Сада лако можемо наћи инверз као

$$A^{-1} = QP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{6}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{5}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{6}{7} \end{pmatrix}.$$

Лако се може проверити да је $AA^{-1} = E = A^{-1}A$.

б) Радићемо истим поступком као у делу а), само што ћемо се овде додатно послужити једним триком. Све трансформације које радимо радићемо на врстама. Тиме обезбеђујемо да матрица Q остане јединична. Зато ће инверзна матрица бити $B^{-1} = QP = EP = P$, чиме смо цео поступак скратили за једно множење. А можемо и цео запис да релаксирамо тиме што доњи део матрице који је резервисан за Q нећемо писати јер се ту ништа занимљиво не дешава. На овом конкретном примеру имамо

$$\begin{pmatrix} B & E \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ \boxed{1} & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) /(-3)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & 1 & 0 & -3 \end{array}\right) /(-5)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & -5 & -3 \end{array}\right) /(-1)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -5 & -3 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} E & B^{-1} \end{array}\right).$$

□

6.4 Матрични запис система

Систем линеарних једначина

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \multicolumn{7}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ a_{m1}x_1 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

можемо матрично записати као $AX = B$, где је $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ и $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Уколико матрица A има инверз онда претходни систем има јединствено решење $X = A^{-1}B$. Штавише, да бисмо ово урадили било је довољно да имамо само леви инверз.

Задатак 6.20. *Решити систем*

$$\begin{array}{ccccccc} 3x & + & 2y & + & 2z & = & 2 \\ & & y & - & z & = & 4 \\ x & - & y & + & 2z & = & 3 \end{array}$$

Решење. Матрични запис овог система би био $AX = B$, где је $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ и $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Инверз матрице A смо већ израчунали у Задатку 6.19.б). То значи да је наш систем има јединствено решење

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 4 \\ 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 \\ -23 \\ -27 \end{pmatrix}.$$

□

Наравно, занимљивија је ситуација уколико матрица A нема инверз (или није квадратна па немамо начин да проверимо да ли је инвертибилна). О томе говори чувена Кронекер[1]–Капелијева[2] теорема. Означимо са $A_p = \begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix}$ тзв. проширену матрицу система. Тада је $\rho A_p \in \{\rho A, \rho A + 1\}$.

Теорема 6.21 (Кронекер–Капелијева теорема)**.** *(1) Ако је $\rho A = \rho A_p = n$ систем има јединствено решење.*

(2) Ако је $\rho A = \rho A_p < n$ систем има више од једног решења и број решења је једнак $|F|^{n-\rho A}$.

(3) Ако је $\rho A < \rho A_p$ систем нема решење.

Задатак 6.22. *Решити систем*

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 5y & - & 8z & = & 8 \\ 4x & + & 3y & - & 9z & = & 9 \\ 2x & + & 3y & - & 5z & = & 7 \\ x & + & 8y & - & 7z & = & 12 \end{array}$$

Решење. Да бисмо убрзали поступак рачунаћемо само ранг проширене матрице A_p и пазићемо да не мешамо последњу колону са претходним колонама. На тај начин ћемо из исте матрице моћи да видимо и ранг матрице A. Имамо

$$A_p = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -8 & 8 \\ 4 & 3 & -9 & 9 \\ 2 & 3 & -5 & 7 \\ \boxed{1} & 8 & -7 & 12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 8 & -7 & 12 \\ 4 & 3 & -9 & 9 \\ 2 & 3 & -5 & 7 \\ 2 & 5 & -8 & 8 \end{array}\right) /(-4)\ /(-2)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & -7 & 12 \\ 0 & -29 & 19 & -39 \\ 0 & -13 & 9 & -17 \\ 0 & -11 & 6 & -16 \end{array}\right) /(-2) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & -7 & 12 \\ 0 & -3 & \boxed{1} & -5 \\ 0 & -13 & 9 & -17 \\ 0 & -11 & 6 & -16 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -7 & 8 & 12 \\ 0 & \boxed{1} & -3 & -5 \\ 0 & 9 & -13 & -17 \\ 0 & 6 & -11 & -16 \end{array}\right) /(-9)\,/(-6) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -7 & 8 & 12 \\ 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 14 & 28 \\ 0 & 0 & 7 & 14 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -7 & 8 & 12 \\ 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 7 & 14 \\ 0 & 0 & 14 & 28 \end{array}\right) /(-2) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -7 & 8 & 12 \\ 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 7 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

[1] *Leopold Kronecker* (1823. - 1891.), немачки математичар
[2] *Alfredo Capelli* (1855. - 1910.), италијански математичар

Видимо да је $\rho A_p = \rho A = 3$, што је једнако броју непознатих. То значи да наш систем има јединствено решење.

Сада се поставља питање како прочитати то решење. Погледајмо шта смо заправо до сада урадили. Елеменетарне трансформације на врстама су тачно елементарне трансформације система, а елементарне трансформације колона одговарају смени променљивих у систему. Конкретно, овде смо имали замену друге и треће колоне која одговара замени $y \leftrightarrow z$. Ако сада систем вратимо на класичан запис имамо

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 7z & + & 8y & = & 12 \\ & & z & - & 3y & = & -5 \\ & & & & 7y & = & 14 \end{array}$$

Решење овог система је $(x, y, z) = (3, 2, 1)$. $\square$

Кронекер–Капелијева теорема има велики теоретски значај. Али са друге стране, видели смо на примеру да не доноси ништа ново (сем записа) у погледу поступка за решавање система.

6.5 Промена базе и матрица преласка

Нека је V векторски простор коначне димензије (над неким пољем скалара F) и нека су e и f две његове базе. Да би било интуитивније рећи ћемо стара база e и нова база f. Поставља се питање шта се дешава са координатама када променимо базу, тј. каква је веза између координата произвољног вектора $v \in V$ у старој и у новој бази.

Теорема 6.23. *Нека је V векторски простор коначне димензије n над пољем F и нека су $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ и $f = \{f_1, \dots, f_n\}$ две његове базе. Тада постоји јединствено одређена матрица $A \in M_n(F)$ за коју важи*

$$[v]_e = A[v]_f,$$

за све векторе $v \in V$. Додатно, i-та колона матрице A садржи координате вектора e_i, тј. важи $A_{\downarrow i} = [f_i]_e$, за све $1 \leqslant i \leqslant n$.

Дефиниција 6.24. *Матрицу A из претходне теореме зовемо матрица преласка са базе e на базу f и означавамо $P_{e,f}$.*

Напомињемо да су у претходној теореми старе координате $[v]_e$ изражене преко нових $[v]_f$. Међутим, матрица $P_{e,f}$ је инвертибилна јер су њене колоне $[e_i]_f$ линеарно независне па је максималног ранга. Зато можемо нове координате изразити преко старих као $[v]_f = P_{e,f}^{-1}[v]_e$. Због јединствености матрице преласка из $P_{e,f}^{-1}[v]_e = [v]_f = P_{f,e}[v]_e$, за све $v \in V$, можемо закључити да је $P_{f,e} = P_{e,f}^{-1}$.

Приметимо да се промена базе може видети и као специјални случај линеарног оператора. Тачније, посматрајмо идентички линеарни оператор $\mathbb{1}_V : V \longrightarrow V$ са новом базом f у домену и старом базом e у кодомену. Тада је матрица преласка $P_{e,f}$ једнака матрици оператора $[\mathbb{1}_V]_{f,e}$, јер је i-та колона и једне и друге матрице једнака $[f_i]_e = [\mathbb{1}_V f_i]_e$, за све $1 \leqslant i \leqslant n$.

Задатак 6.25. *Одредити матрицу преласка са канонске базе e векторског простора $\mathbb{R}^3$ на базу $f = \{f_1 = (1,-2,5),\ f_2 = (2,-3,0),\ f_3 = (0,1,3)\}$. Затим одредити координате вектора $v = (1,4,-3)$ бази f.*

Решење. Координате вектора из базе f у бази e су

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad f_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{и} \qquad f_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

То значи да је матрица преласка $P_{e,f} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Координате вектора v у канонској бази су $[v]_e = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$, а у бази f су $[v]_f = P_{e,f}^{-1}[v]_e$. Зато остаје још да одредимо инверз матрице преласка:

$$\begin{pmatrix} P_{e,f} \\ E \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc} \boxed{1} & 2 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \\ 5 & 0 & 3 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ /(-2) \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ -2 & \boxed{1} & 1 \\ 5 & -10 & 3 \\ \hline 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} / \cdot 2 \\ /(-1) \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -15 & -10 & \boxed{13} \\ \hline -3 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ /\frac{1}{13} \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -15 & -10 & \boxed{1} \\ \hline -3 & -2 & \frac{2}{13} \\ 2 & 1 & -\frac{1}{13} \\ 0 & 0 & \frac{1}{13} \end{array}\right) \begin{array}{c} / \cdot 15 \\ / \cdot 10 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline -\frac{9}{13} & -\frac{6}{13} & \frac{2}{13} \\ \frac{11}{13} & \frac{3}{13} & -\frac{1}{13} \\ \frac{15}{13} & \frac{10}{13} & \frac{1}{13} \end{array}\right) = \begin{pmatrix} E \\ P_{e,f}^{-1} \end{pmatrix}.$$

Коначно,

$$[v]_f = P_{e,f}^{-1}[v]_e = \begin{pmatrix} -\frac{9}{13} & -\frac{6}{13} & \frac{2}{13} \\ \frac{11}{13} & \frac{3}{13} & -\frac{1}{13} \\ \frac{15}{13} & \frac{10}{13} & \frac{1}{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Други начин да одредимо инверз матрицу преласка $P_{e,f}$ је да кажемо да је $P_{e,f}^{-1} = P_{f,e}$ и да потом израчунамо координате (нпр. решавањем система)

$$[e_1]_f = \begin{pmatrix} -\frac{9}{13} \\ \frac{11}{13} \\ \frac{15}{13} \end{pmatrix}, \qquad [e_2]_f = \begin{pmatrix} -\frac{6}{13} \\ \frac{3}{13} \\ \frac{10}{13} \end{pmatrix} \qquad \text{и} \qquad [e_3]_f = \begin{pmatrix} \frac{2}{13} \\ -\frac{1}{13} \\ \frac{1}{13} \end{pmatrix},$$

које чине колоне матрице $P_{f,e}$. □

Напомињемо да смо други део претходног задатка већ урадили у Задатку 4.4 на други (тј. трећи) начин.

Задатак 6.26. *Нека је*

$$f = \left\{ f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, f_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

база векторског простора $M_2(\mathbb{R})$.

а) Одредити матрицу преласка са канонске базе e на базу f. (Подразумевемо да је редослед вектора у канонској бази e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22}.)

б) Одредити матрицу преласка са базе f на базу e.

в) Одредити координате матрице $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ у бази f.

Решење. а) Овај део задатка је очигледан, само узмемо координате вектора f_i и ставимо у једну матрицу. Добијамо

$$P_{e,f} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

б) Један начин да се ово уради је понављањем поступка из дела а). Решавањем система

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \alpha f_1 + \beta f_2 + \gamma f_3 + \delta f_4$$

по промењљивим $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ добијамо координате произвољног вектора из $M_2(\mathbb{R})$ у бази f:

$$\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right]_f = \begin{pmatrix} \frac{a}{2} - b + c + \frac{d}{2} \\ \frac{a}{2} - \frac{d}{2} \\ b \\ -c \end{pmatrix}. \tag{6.27}$$

Специјално, заменом одговарајућих вредности добијамо коордианте вектора канонске базе у бази f. Када све то ставимо у једну матрицу имамо да је

$$P_{f,e} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Наравно, имамо и други начин

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} P_{e,f} & E \end{pmatrix} &= \left(\begin{array}{cccc|cccc} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} /(-1) \\ \\ \\ \\ \end{array} \\
&\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{-2} & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-2} & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ /(-\frac{1}{2}) \\ \\ \\ \end{array} \\
&\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ /(-1) \\ \\ \\ \end{array} \\
&\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-1} & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ /(-1) \\ /(-1) \end{array} \\
&\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ /(-1) \end{array} \\
&\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \\
&= \begin{pmatrix} E & P_{e,f}^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & P_{f,e} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

в) Један начин да се одреде координате матрице A је заменом одговарајућих вредности у (6.27). Други начин је из једнакости

$$[A]_f = P_{f,e}[A]_e = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

□

Задатак 6.28. *Одредити матрицу преласка са базе*

$$f = \left\{1+\sqrt{2}, 3+2\sqrt{3}, -1+2\sqrt{2}+3\sqrt{3}\right\}$$

на базу

$$g = \left\{-3+3\sqrt{3}, 3+3\sqrt{2}+5\sqrt{3}, 7+7\sqrt{2}+10\sqrt{3}\right\}$$

$\mathbb{Q}$*-векторског простора* $V = \mathscr{L}_{\mathbb{Q}}\left(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\right)$.

Решење. Одредимо најпре координате вектора из базе g у бази f:

$$\begin{aligned} -3+3\sqrt{3} &= -2(1+\sqrt{2}) + (-1+2\sqrt{2}+3\sqrt{3}), \\ 3+3\sqrt{2}+5\sqrt{3} &= (1+\sqrt{2}) + (3+2\sqrt{3}) + (-1+2\sqrt{2}+3\sqrt{3}), \\ 7+7\sqrt{2}+10\sqrt{3} &= 3(1+\sqrt{2}) + 2(3+2\sqrt{3}) + 2(-1+2\sqrt{2}+3\sqrt{3}). \end{aligned}$$

Следи, $P_{f,g} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Други начин би био да убацимо у игру и ,,канонску" базу $e = \left\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\right\}$. За произвољан вектор $v \in V$ знамо да је $[v]_e = P_{e,g}[v]_g$ и $[v]_f = P_{e,f}^{-1}[v]_e$. Али онда из $[v]_f = P_{e,f}^{-1}[v]_e = P_{e,f}^{-1}P_{e,g}[v]_g$, за све $v \in V$, следи да је

$$\begin{aligned} P_{f,g} = P_{e,f}^{-1}P_{e,g} &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -3 & 3 & 7 \\ 0 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 10 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{4}{15} & \frac{11}{15} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{2}{15} & \frac{2}{15} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 3 & 7 \\ 0 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

Нека је сада $L : U \longrightarrow V$ линеарно пресликавање између два коначно димензионална векторска простора U и V, и нека су e и e' базе простора U, а f и f' базе V. Поставља се питање каква је веза између матрица $[L]_{e,f}$ и $[L]_{e',f'}$.

Знамо да је $[u]_e = P_{e,e'}[u]_{e'}$ и $[Lu]_{f'} = P_{f,f'}^{-1}[Lu]_f$, за све $u \in U$. Али онда из јединствености матрице линеарног пресликавања и

$$[Lu]_{f'} = P_{f,f'}^{-1}[Lu]_f = P_{f,f'}^{-1}[L]_{e,f}[u]_e = P_{f,f'}^{-1}[L]_{e,f}P_{e,e'}[u]_{e'}$$

следи да је

$$[L]_{e',f'} = P_{f,f'}^{-1}[L]_{e,f}P_{e,e'}$$

Сада ћемо дати још једно решење Задатка 6.8.б) коришћењем ове нове технике. Ту је ситуација мало једноставнија јер је у питању оператор па имамо да је $U = V$, $e = f$ и $e' = f'$. Тада претходна релација постаје $[L]_{e'} = P_{e,e'}^{-1}[L]_e P_{e,e'}$.

Задатак 6.29. *Одредити матрицу линеарног оператора*

$$L : \mathbb{R}^3[x] \longrightarrow \mathbb{R}^3[x], \qquad (Lp)(x) = x \cdot p'(x+1) + p''(x)$$

у односу на базу $e' = \{x, x - x^2, 1 - x + x^2\}$.

Решење. У Задатку 6.8.а) смо видели да је $[L]_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, где је e канонска база векторског простора $\mathbb{R}^3[x]$. Са друге стране, очигледно је да је $P_{e,e'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Зато је

$$\begin{aligned}
[L]_{e'} = P_{e,e'}^{-1}[L]_e P_{e,e'} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

што се поклапа са резултатом добијеним у Задатку 6.8.б). □

Задатак 6.30. *Одредити матрицу линеарног пресликавања*

$$L : \mathbb{R}^3[x] \longrightarrow \mathbb{R}^4, \qquad Lp = \left(p(1),\, p''(0),\, \int_{-1}^{1} p(t)\,dt,\, p(2) + p(-2)\right)$$

у односу на пар база

$$e' = \{1, 1 + 2x, 4 - x^2\} \quad \textit{и} \quad f' = \{(1,1,0,0), (0,0,1,1), (1,0,1,1), (0,1,2,3)\}.$$

Решење. Нека су e и f канонске базе векторских простора $\mathbb{R}^3[x]$ и $\mathbb{R}^4$, редом. Тада су матрице преласка

$$P_{e,e'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{и} \qquad P_{f,f'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Одредимо сада матрицу линеарног пресликавања L у односу на пар канонских база. Слике базних вектора $\mathbb{R}^3[x]$ су

$$L1 = (1,0,2,2), \qquad Lx = (1,0,0,0) \qquad \text{и} \qquad Lx^2 = \left(1,2,\frac{2}{3},8\right).$$

Тиме смо добили матрицу пресликавања L у односу на пар канонских база $[L]_{e,f} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & \frac{2}{3} \\ 2 & 0 & 8 \end{pmatrix}$.

Коначно, тражена матрица је

$$[L]_{e',f'} = P_{f,f'}^{-1}[L]_{e,f}P_{e,e'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & \frac{2}{3} \\ 2 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 4 & -3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & \frac{2}{3} \\ 2 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{16}{3} \\ 1 & -1 & \frac{73}{3} \\ 1 & 3 & -\frac{7}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{22}{3} \end{pmatrix},$$

што се поклапа са матрицом коју смо добили (на други начин) у Задатку 6.9.а). $\square$

Задатак 6.31. *Дато је линеарно пресликавање*

$$L : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3[x],$$

$$L\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (2a+b+3c+6d) + (3a+4b+2c+9d)x + (a+3b-c+3d)x^2.$$

а) Одредити бар један пар база векторских простора $M_2(\mathbb{R})$ и $\mathbb{R}^3[x]$ у односу на који пресликавање L има канонску матрицу.

б) Одредити језгро и слику линеарног пресликавања L.

Решење. а) Идеја је следећа. Прво ћемо одредити матрицу $[L]_{e,f}$ у односу на пар канонских база векторских простора $M_2(\mathbb{R})$ и $\mathbb{R}^3[x]$. Затим ћемо одредити канонску матрицу $[L]^0_{e,f}$ матрице $[L]_{e,f}$ и пар инвертибилних матрица P и Q за које важи $[L]^0_{e,f} = P[L]_{e,f}Q$.

На крају ћемо изабрати базе e' простора $M_2(\mathbb{R})$ и f' простора $\mathbb{R}^3[x]$, такве да P и Q буду матрице преласка. Тачније хоћемо да важи $P = P^{-1}_{f,f'}$ и $Q = P_{e,e'}$. Тиме ћемо постићи да је матрица $[L]_{e',f'} = [L]^0_{e,f}$ канонска.

Кренимо редом, матрица пресликавања L у односу на пар канонских база је $[L]_{e,f} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 6 \\ 3 & 4 & 2 & 9 \\ 1 & 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Стандардни поступак нам даје канонску матрицу $[L]^0_{e,f}$ и инвертибилне матрице P и Q:

$$\begin{pmatrix} [L]_{e,f} & E \\ E & \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cccc|ccc} 2 & 1 & 3 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 9 & 0 & 1 & 0 \\ \boxed{1} & 3 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|ccc} \boxed{1} & 3 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 9 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right) /(-3)\,/(-2)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|ccc} \boxed{1} & 3 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 5 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & -5 & 5 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right)$$

$/(-3)$

$$
\sim \left(\begin{array}{cccc|ccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & \boxed{-5} & 5 & 0 & 0 & 1 & -3 \\
0 & -5 & 5 & 0 & 1 & 0 & -2 \\
\hline
1 & -3 & 1 & -3 & & & \\
0 & 1 & 0 & 0 & & & \\
0 & 0 & 1 & 0 & & & \\
0 & 0 & 0 & 1 & & &
\end{array}\right)
\begin{array}{l} \\ /(-1) \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}
$$

$$
\sim \left(\begin{array}{cccc|ccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & \boxed{-5} & 5 & 0 & 0 & 1 & -3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\
\hline
1 & -3 & 1 & -3 & & & \\
0 & 1 & 0 & 0 & & & \\
0 & 0 & 1 & 0 & & & \\
0 & 0 & 0 & 1 & & &
\end{array}\right)
\begin{array}{l} \\ /(-\frac{1}{5}) \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}
$$

$$
\sim \left(\begin{array}{cccc|ccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\
\hline
1 & -3 & -2 & -3 & & & \\
0 & 1 & 1 & 0 & & & \\
0 & 0 & 1 & 0 & & & \\
0 & 0 & 0 & 1 & & &
\end{array}\right)
= \begin{pmatrix} [L]^0_{e,f} & P \\ Q & \end{pmatrix}.
$$

Као што смо већ рекли базу e' бирамо тако да важи $P_{e,e'} = Q = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Знајући да су колоне ове матрице координате вектора из e' у канонској бази e векторског простора $M_2(\mathbb{R})$, лако можемо прочитати да је

$$
\begin{aligned}
e' = \Bigg\{ e'_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e'_2 = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
e'_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e'_4 = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Bigg\}.
\end{aligned}
$$

На исти начин ћемо наћи и базу f', само што нам прво треба инверз матрице P. Да сада не бисмо радили цео рачун испочетка искористићемо елементарне трансформације које смо већ урадили. Матрица P је добијена од јединичне матрице E помоћу пет елементарних трансформација врста, означимо их са Ψ_i, за $1 \leqslant i \leqslant 5$. Тада из $P = (\Psi_5 \circ \cdots \circ \Psi_1)(E)$ следи да је $E = \left(\Psi_1^{-1} \circ \cdots \circ \Psi_5^{-1}\right)(P)$, тј. јединичну матрицу смо елементарним трансформацијама врста $\Psi_5^{-1}, \ldots, \Psi_1^{-1}$ (тим редом) добили од матрице P. Ово последње значи да је $P^{-1} = \left(\Psi_1^{-1} \circ \cdots \circ \Psi_5^{-1}\right)(E)$, тј.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} /(-5) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} /\cdot 3 & /\cdot 2 \\ & \\ & \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 0 \\ 2 & -5 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 3 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = P^{-1} = P_{f,f'}.$$

Тражена база је

$$f' = \left\{ f_1'(x) = 2 + 3x + x^2,\ f_2'(x) = -5 - 5x,\ f_3'(x) = 1 \right\}.$$

И као што смо већ рекли,

$$[L]_{e',f'} = P_{f,f'}^{-1} [L]_{e,f} P_{e,e'} = P[L]_{e,f} Q = [L]_{e,f}^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

б) Помоћу канонске матрице $[L]_{e',f'}$ можемо лако одредити језгро и слику. Нека је M произвољна матрица из језгра $\operatorname{Ker} L$ и нека су $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$ њене координате у бази e'. Како је матрица $[L]_{e',f'}$ канонска, из

$$[LM]_{f'} = [L]_{e',f'} [M]_{e'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix}$$

следи $\alpha = \beta = 0$. Дакле,

$$\operatorname{Ker} L = \{ \gamma e_3' + \delta e_4' \mid \gamma, \delta \in \mathbb{R} \} = \mathscr{L}(e_3', e_4').$$

На крају, имамо слику

$$\operatorname{Im} L = \mathscr{L}(Le_1', Le_2', Le_3', Le_4') = \mathscr{L}(f_1', f_2', 0, 0) = \mathscr{L}(f_1', f_2').$$

$\square$

Глава 7

Детерминанте

Нека је $A \in M_n(F)$ квадратна матрица реда n. Њене колоне $A_{\downarrow 1}, \dots, A_{\downarrow n}$ (врсте $A_{1\rightarrow}, \dots, A_{n\rightarrow}$) образују један n-димензионални паралелопипед у векторском простору F^n. То би била дуж у $\mathbb{R}$, паралелограм у $\mathbb{R}^2$, односно паралелопипед у $\mathbb{R}^3$. Наравно, веће димензије немају геометријски смисао али у алгебарском смислу нема неке разлике.

Детерминанту матрице A ћемо означавати са $\det A$ или тако што у запису матрице A заграде $(\,\cdot\,)$ заменимо заградама $|\cdot|$. Она би требала да представља n-димензионалну запремину (n-димензионалну меру) тог n-димензионалног паралелопипеда. У $\mathbb{R}$ то би била дужина дужи, у $\mathbb{R}^2$ површина паралелограма, а у $\mathbb{R}^3$ запремина паралелопипеда.

Овде ћемо дозволити да запремина тј. детерминанта узима и негативне вредности, а знак детерминанте ће само означавати позитивну или негативну оријентацију базе $\{A_{\downarrow 1}, \dots, A_{\downarrow n}\}$.

Природно је тражити да је n-димензионална запремина линеарна по колонама тј. да задовољава

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,i-1} & a'_{1i}+a''_{1i} & a_{1,i+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2,i-1} & a'_{2i}+a''_{2i} & a_{2,i+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,i-1} & a'_{ni}+a''_{ni} & a_{n,i+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,i-1} & a'_{1i} & a_{1,i+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2,i-1} & a'_{2i} & a_{2,i+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,i-1} & a'_{ni} & a_{n,i+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,i-1} & a''_{1i} & a_{1,i+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2,i-1} & a''_{2i} & a_{2,i+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,i-1} & a''_{ni} & a_{n,i+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{7.1}$$

и

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,i-1} & \alpha a_{1i} & a_{1,i+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2,i-1} & \alpha a_{2i} & a_{2,i+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,i-1} & \alpha a_{ni} & a_{n,i+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$
$$= \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,i-1} & a_{1i} & a_{1,i+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2,i-1} & a_{2i} & a_{2,i+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,i-1} & a_{ni} & a_{n,i+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \tag{7.2}$$

за све $\alpha \in F$. Наравно, ово аутоматски значи да детерминанта није линеарно пресликавање, тј. не важи ни $\det(A+B) = \det A + \det B$ ни $\det(\alpha A) = \alpha \det A$ (барем не за све $A, B \in M_n(F)$ и $\alpha \in F$).

Даље, рекли смо да знак детерминанте зависи од оријентације. Зато је природно тражити да замена места i-те и j-те колоне промени и знак детерминанте тј. да важи

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,i-1} & a_{1i} & a_{1,i+1} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1j} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2,i-1} & a_{2i} & a_{2,i+1} & \dots & a_{2,j-1} & a_{2j} & a_{2,j+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,i-1} & a_{ni} & a_{n,i+1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{nj} & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,i-1} & a_{1j} & a_{1,i+1} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1i} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2,i-1} & a_{2j} & a_{2,i+1} & \dots & a_{2,j-1} & a_{2i} & a_{2,j+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,i-1} & a_{nj} & a_{n,i+1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{ni} & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{7.3}$$

И на крају, колоне јединичне матрице E образују јединични n-димензионални паралелопипед (тј. n-димензионалну коцку), па би требало да важи и

$$\det E = 1 \tag{7.4}$$

Испоставн се да су ове четири особине довољне да једнозначно дефинишемо детерминанту.

Теорема 7.5. *Постоји тачно једно пресликавање $M_n(F) \longrightarrow F$ које задовољава особине* (7.1) - (7.4).

Дакле, пресликавање из претходне теореме ћемо звати *детерминанта* матрице. Ускоро ћемо видети још неколико еквивалентних дефиниција детерминанте које интуитивно нису толико јасне, али су оперативније.

Што се тиче малих димензија, неким елементарним геометријским расуђивањем (тј. израчунавањем дужине, површине и запремене за $n = 1, 2, 3$, редом) можемо доћи до формула за детерминанту. А и лако се проверава да следеће три функције задовољавају особине (7.1) - (7.4):

(1)
$$|a| = a,$$

(2)
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

(3)
$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =& a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ & - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33}.\end{aligned}$$

Последњи израз је познат као Сарусово[1] правило и обично се памти тако што се прве две колоне допишу са десне стране и онда се из $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$ саберу три главне дијагонале, а затим се од тога одузму три споредне дијагонале.

7.1 Детермиманта преко пермутација

Сада ћемо дати експлицитну формулу за детерминанту. За то ће нам бити потребна симетрична група $\mathbb{S}_n$ коју смо упознали у Задатку 1.11. Већ на основу формула за детерминанту у малим димензијама је јасно да ће детерминанта бити сума чланова облика $\pm a_{1\star}a_{2\star}\dots a_{n\star}$, где се уместо звездица налазе испермутовани индекси $1, 2, \dots, n$.

Дефиниција 7.6. *Нека су $c_1, c_2, \dots, c_m \in \{1, 2, \dots, n\}$ међусобно различити бројеви. Пермутацију*

$$\sigma(k) = \begin{cases} c_{i+1}, & \text{ако је } k = c_i, \text{ за } i = 1, 2, \dots, m-1, \\ c_1, & \text{ако је } k = c_m, \\ k, & \text{иначе}, \end{cases}$$

[1] *Pierre Frédéric Sarrus* (1798. - 1861.), француски математичар

зовемо циклус дужине m *и означавамо са* $\lceil c_1, c_2, \ldots, c_m\rfloor$. *Специјално, циклусе дужине* 2 *зовемо транспозиције.*

Теорема 7.7. *Свака пермуатација се може записати као композиција транспозиција. Додатно, ако неку пермутацију* $\sigma \in \mathbb{S}_n$ *на два начина запишемо као композицију транспозиција тј.* $\sigma = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \cdots \circ \tau_r = \upsilon_1 \circ \upsilon_2 \circ \cdots \circ \upsilon_s$, *где су* $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_r, \upsilon_1, \upsilon_2, \ldots, \upsilon_s$ *транспозиције, тада су бројеви* r *и* s *исте парности.*

Зато наредна дефиниција има смисла:

Дефиниција 7.8. *Нека је* $\sigma \in \mathbb{S}_n$ *произвољна пермутација и нека је* $\sigma = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \cdots \circ \tau_r$ *њена произвољна декомпозиција на транспозиције. Број* $(-1)^r$ *зовемо знак пермутације* τ *и означавамо са* $\operatorname{sgn}\tau$.

Ови појмови о пермутацијама нам омогућавају да експлицитно опишемо детерминанту.

Теорема 7.9. *Важи*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} \operatorname{sgn}\sigma \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}.$$

Последња теорема се лако доказује, просто се само провери да функција на десној страни задовољава све особине Теореме 7.5. Често се у литератури детерминанта и дефинише као израз на десној страни Теореме 7.9, без приче о n-димензионалној запремини.

Специјално, у димензији 3, симетрична група $\mathbb{S}_3$ садржи пермутације

$$\lceil\rfloor,\ \lceil 1,2\rfloor,\ \lceil 1,3\rfloor,\ \lceil 2,3\rfloor,\ \lceil 1,2,3\rfloor = \lceil 1,2\rfloor\lceil 2,3\rfloor \text{ и } \lceil 1,3,2\rfloor = \lceil 1,3\rfloor\lceil 3,2\rfloor.$$

Њихови знакови су

$$\operatorname{sgn}\lceil\rfloor = (-1)^0 = 1, \quad \operatorname{sgn}\lceil 1,2\rfloor = \operatorname{sgn}\lceil 1,3\rfloor = \operatorname{sgn}\lceil 2,3\rfloor = (-1)^1 = -1$$

$$\text{и} \quad \operatorname{sgn}\lceil 1,2,3\rfloor = \operatorname{sgn}\lceil 1,3,2\rfloor = (-1)^2 = 1.$$

Одатле и из Теореме 7.9 добијамо Сарусово правило.

Аналогно можемо добити и формулу за детерминанту у већим димензијама. Једини проблем је што онда та формула има $|\mathbb{S}_n| = n!$ сабирака. (Пермутација у $\mathbb{S}_n$ има онолико колико и могућности да се скуп $\{1, 2, \ldots, n\}$ пресликa на себе. Елемент 1 се може сликати у било шта. За елемент 2 имамо $n-1$ могућност, тј. долази у обзир све сем слике од 1. Затим, за 3 имамо $n-2$ могућности, итд.)

7.2 Особине детерминанти

Већ за $n = 4$ израз за детерминанту има $4! = 24$ сабирака, тако да директно израчунавање детерминанте по Теореми 7.9 није препоручљиво. Уместо тога користићемо особине детерминанте које следе из поменуте теореме (уз већ познате особине (7.1) - (7.4)). Нека су $A, B \in M_n(F)$.

(1) Важи $\det\left(A^T\right) = \det A$. То значи да у целокупној претходној и наредној причи реч колона можемо заменити речју врста.

(2) Уколико матрица има две исте или пропорционалне колоне (врсте) њена детерминанта је нула. Општије, детермнинатна је једнака нули ако и само ако су њене колоне линеарно зависне. (А од раније знамо да је последњи услов еквивалентан са тим да матрица нема инверз.) И специјално, уколико матрица има нула-колону њена детерминанта је нула.

(3) Као последицу претходне особине добијамо да позната елементарна трасформација додавање једне скалиране врсте другој врсти не мења вредност детерминанте, односно важи

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,i-1} & a_{1i} & a_{1,i+1} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2,i-1} & a_{2i} & a_{2,i+1} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,i-1} & a_{ni} & a_{n,i+1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,i-1} & a_{1i} + \alpha a_{1j} & a_{1,i+1} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2,i-1} & a_{2i} + \alpha_{2j} & a_{2,i+1} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,i-1} & a_{ni} + \alpha a_{nj} & a_{n,i+1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

за све $\alpha \in F$ (при чему је овде записано као да је $i < j$, али исто важи и уколико је $i > j$).

(4) Важи $\det(\alpha A) = \alpha^n \det A$.

(5) Бине[2]–Кошијева[3] теорема каже да је $\det(AB) = \det A \det B$.

(6) Детерминанта горње троуганоне матрице је

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

[2] *Jacques Philippe Marie Binet* (1786. - 1856.), француски математичар, физичар и астроном

[3] *Augustin-Louis Cauchy* (1789. - 1857.), француски математичар, физичар и инжењер

И аналогно важи и за доње троугаоне и дијагоналне матрице.

(7) *Минор* $\widehat{A}_{ij}$ матрице $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ се добија тако што се из матрице A изоставе i-та врста и j-та колона, тј.

$$\widehat{A}_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,i-1} & a_{n,i+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Број $A_{ij} = (-1)^{i+j} \det \widehat{A}_{ij}$ зовемо ***кофактор*** фактора a_{ij} (кофактор матрице A).

Имамо Лапласов[4] развој по i-тој врсти матрице A:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}.$$

Још једна еквивалентна дефиниција детерминанте би била да она задовољава Лапласов развој по једној фиксираној колони (врсти) и да је у димензији 1 детерминанта дефинисана са $|a| = a$.

7.3 Детерминанте малог реда

Задатак 7.10. *Израчунати вредност детерминанте*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}.$$

Решење. Један начин да се ово уради је преко Сарусовог правила:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 5 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -2 & 3 & 1 \end{array}\right.$$
$$= 1 \cdot (-1)(-2) + 2 \cdot 5 \cdot 3 + 3 \cdot 2 \cdot 1 - 3 \cdot (-1) \cdot 3 - 2 \cdot 2 \cdot (-2) - 1 \cdot 1 \cdot 5 = 50.$$

Показаћемо још један начин који ћемо надаље чешће користити, поготово када се ради о детерминантама већег реда. Генерална стратегија

[4] *Pierre-Simon Marquis de Laplace* (1749. - 1827.), француски математичар и астроном

је направити што више нула у једној врсти (колони) и затим применити Лапласов развој по тој колони. На овом конкретном примеру имамо да је

$$\begin{vmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & -1 \\ 3 & -5 & -11 \end{vmatrix}$$

$/(-2)$

$/(-3)$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} -5 & -1 \\ -5 & -11 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -11 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -5 & -1 \\ -5 & -11 \end{vmatrix} = 55 - 5 = 50.$$

□

Задатак 7.11. *Израчунати вредност детерминанте*

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}.$$

Решење. Поновићемо поступак описан у претходном задатку. Овде је најлакше кренути од треће врсте и добити да је

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & \boxed{1} & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 & 1 \\ -11 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & -5 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$/(-2)$

$$= +1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 & \boxed{1} \\ -11 & 1 & -1 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -6 & 2 & 0 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -6 & 2 \\ -5 & -5 \end{vmatrix} = 40.$$

□

Задатак 7.12. *Израчунати вредност детерминанте*

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Решење. Овог пута ћемо искористити чињеницу да се у свим колонама (врстама) налазе исти бројеви у одређеном редоследу. Њиховим сабирањем добићемо врсту са истим коефицијентима:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ \boxed{4} & 4 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix}$$

$/(-1)$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= -1 \cdot (-1)^3 4 = 4.$$

На крају смо приметили да се заменом колона детерминанта може свести на горње троугану. Тиме смо избегли даље развијање и скратили поступак. □

Приметимо да би метод изложен у претходном задатку радио и за детерминанте већег реда (са аналогним коефицијентима).

Задатак 7.13. *Израчунати вредност детерминанте*

$$\begin{vmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & \sqrt{5} & \sqrt{3} \\ \sqrt{6} & \sqrt{21} & \sqrt{10} & -2\sqrt{3} \\ \sqrt{10} & 2\sqrt{15} & 5 & \sqrt{6} \\ 2 & 2\sqrt{6} & \sqrt{10} & \sqrt{15} \end{vmatrix}.$$

Решење. Приметимо да је прва колона „дељива“ са $\sqrt{2}$, друга са $\sqrt{3}$, итд. Прво ћемо извући те коефицијенте испред детерминанте, како бисмо лакше приметили шта се може пократити погодно изабраним елементарним трансформацијама. Имамо да је

$$\begin{vmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & \sqrt{5} & \sqrt{3} \\ \sqrt{6} & \sqrt{21} & \sqrt{10} & -2\sqrt{3} \\ \sqrt{10} & 2\sqrt{15} & 5 & \sqrt{6} \\ 2 & 2\sqrt{6} & \sqrt{10} & \sqrt{15} \end{vmatrix} = \sqrt{2}\sqrt{3}\sqrt{5}\sqrt{3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \sqrt{3} & \sqrt{7} & \sqrt{2} & -2 \\ \sqrt{5} & 2\sqrt{5} & \sqrt{5} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2\sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{5} \end{vmatrix}$$

$/(-1)$

$$= 3\sqrt{10}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ \sqrt{3} & \sqrt{7} & \sqrt{2}-\sqrt{3} & -2 \\ \sqrt{5} & 2\sqrt{5} & 0 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 0 & \sqrt{5} \end{vmatrix}$$

$$= -3\sqrt{10}\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sqrt{5} & 2\sqrt{5} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2\sqrt{2} & \sqrt{5} \end{vmatrix}$$

$/(-2)$

$$= 3\sqrt{5}\left(\sqrt{6}-2\right)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ \sqrt{5} & 0 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{5} \end{vmatrix}$$

$$= 3\sqrt{5}\left(\sqrt{6}-2\right)\begin{vmatrix} \sqrt{5} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{5} \end{vmatrix} = 9\sqrt{5}\left(\sqrt{6}-2\right).$$

□

Задатак 7.14. *У зависности од реалних параметара a, b, c, d израчунати вредност детерминанте*

$$\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}.$$

Решење. Овде параметри не мењају ништа значајно (за разлику од система, ранга матрица, итд. када су доводили до дискусије). Исто као у претходним примерима добијамо

$$\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & b-a & b-a & b-a \\ a & b-a & c-a & c-a \\ a & b-a & c-a & d-a \end{vmatrix}$$

$/(-1)$

$$= a\begin{vmatrix} b-a & b-a & b-a \\ b-a & c-a & c-a \\ b-a & c-a & d-a \end{vmatrix} = a(b-a)\begin{vmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 \\ b-a & c-a & c-a \\ b-a & c-a & d-a \end{vmatrix}$$

$/(-1)$

$$= a(b-a)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b-a & c-b & c-b \\ b-a & c-b & d-b \end{vmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= a(b-a)\begin{vmatrix} c-b & c-b \\ c-b & d-b \end{vmatrix} = a(b-a)(c-b)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ c-b & d-b \end{vmatrix} \\
&= a(b-a)(c-b)(d-c).
\end{aligned}
$$

□

7.4 Инверз матрице

Већ смо поменули да је матица инвертибилна ако и само ако је њена детерминанта различита од нуле. Како у пољу сви елементи сем нуле имају инверз, можемо рећи и да је матрица $A \in M_n(F)$ инвертибилна ако и само ако је њена детерминанта $\det A$ инвертибилна у пољу F. Али поставља се питање како у том случају наћи инверз?

Дефиниција 7.15. *Нека је $A \in M_n(F)$. Матрицу* $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$ *зовемо адјунгована матрица матрице A и означавамо је са* $\operatorname{adj} A$.

Наглашавамо да се у дефиницији адјунговане матрице кофактор A_{ij} налази на месту (j,i), а не на месту (i,j). Дакле, то је транспонована матрица састављена од кофактора.

Изабрали смо баш овакву матрицу да би производ $A \cdot \operatorname{adj} A$ на месту (i,j) имао коефицијент $c_{ij} := \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}$. Ако погледамо пажљивије последњи израз је управо Лапласов развој неке детерминанте. На дијагонали ћемо баш добити да је $c_{ii} = \det A$. Са друге стране, ван дијагонале (тј. за $i \neq j$) имамо да је c_{ij} једнако детерминанти која има две исте врсте, па мора бити нула. Дакле, $A \cdot \operatorname{adj} A = (\det A)E$, а слично се показује и да је $(\operatorname{adj} A) \cdot A = (\det A)E$. Специјално, за $\det A \neq 0$ инверз матрице A је једнак $(\det A)^{-1} \operatorname{adj} A$.

Задатак 7.16. *Одредити инверз матрице*

$$
A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 3 \\ -3 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}.
$$

Решење. Сарусово правило каже да је

$$
\det A = \begin{vmatrix} 6 & -2 & 3 \\ -3 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 6 & -2 \\ -3 & 2 \\ 4 & -1 \end{matrix} = 12 + 8 + 9 - 6 - 6 - 24 = -7.
$$

Са друге стране, кофактори су

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -5,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -6,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -4,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = -3,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 6.$$

Инверз матрице A је

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A = -\frac{1}{7} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -4 \\ -1 & -6 & -3 \\ -5 & -2 & 6 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{6}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{5}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{6}{7} \end{pmatrix},$$

што се поклапа са резултатом добијеним у задатку (6.19). □

Задатак 7.17. *У зависности од реалног параметра λ испитати да ли је матрица*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3\lambda & \lambda & -1 \end{pmatrix}$$

инвертибилна. За оне вредности $\lambda \in \mathbb{R}$ за које је матрица A инвертибилна израчунати инверз A^{-1}.

Решење. Детерминанта матрице A је

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ \boxed{1} & 0 & 4 \\ 3\lambda & \lambda & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -11 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3\lambda & \lambda & -12\lambda - 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -11 \\ \lambda & -12\lambda - 1 \end{vmatrix}$$
$/(-4)$
$$= -(-12\lambda - 1 + 11\lambda) = \lambda + 1.$$

То значи да је матрица A инвертибина ако и само ако је $\lambda \neq -1$.

За $\lambda \neq 1$ инверз матрице A је

$$A^{-1} = \frac{1}{\lambda+1}\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ \lambda & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ \lambda & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3\lambda & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3\lambda & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3\lambda & \lambda \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3\lambda & \lambda \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\lambda+1}\begin{pmatrix} -4\lambda & -3\lambda+1 & 4 \\ 12\lambda+1 & 9\lambda-2 & -11 \\ \lambda & \lambda & -1 \end{pmatrix}.$$

□

Задатак 7.18. *Одредити све матрице A за које је*

$$\operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -6 & 9 & -1 \\ 8 & -12 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решење. Матрицу A је најлакше наћи из познате једнакости $A \cdot \operatorname{adj} A = (\det A)E$, али за то ће нам поред матрице $\operatorname{adj} A$ (коју имамо) требати и $\det A$. Иако не знамо шта је A њену детерминанту можемо наћи помоћу поменуте једнакости и Бине–Кошијеве теореме:

$$(\det A)\det(\operatorname{adj} A) = \det(A \cdot \operatorname{adj} A) = \det((\det A)E) = (\det A)^3 \det E = (\det A)^3.$$

(1) Ако је $\det A \neq 0$ након скраћивања добијамо $(\det A)^2 = \det(\operatorname{adj} A)$, тј. $\det A = \pm\sqrt{\det(\operatorname{adj} A)}$. Кореновање је оправдано јер је

$$\det(\operatorname{adj} A) = \begin{vmatrix} \boxed{2} & -2 & 0 \\ -6 & 9 & -1 \\ 8 & -12 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 4 \geqslant 0.$$

Такође, сад знамо и да је матрица $\operatorname{adj} A$ инвертибилна, па је

$$A = (\det A)(\operatorname{adj} A)^{-1} = \frac{\det A}{\det(\operatorname{adj} A)}\operatorname{adj}(\operatorname{adj} A)$$

$$= \pm\frac{1}{\sqrt{\det(\operatorname{adj} A)}}\operatorname{adj}(\operatorname{adj} A)$$

$$= \pm\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 9 & -1 \\ -12 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -12 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 9 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -6 & -1 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -6 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -6 & 9 \\ 8 & -12 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 8 & -12 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -6 & 9 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \pm \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

(2) Уколико је $\det A = 0$ тада је $A \cdot \operatorname{adj} A = 0 \cdot E = \mathbb{O}$. Врсте $(2,-2,0)$, $(-6,9,-1)$ и $(8,-12,2)$ матрице $\operatorname{adj} A$ су линеарно независне јер је $\det(\operatorname{adj} A) \neq 0$ (а може се и лако проверити рачунски). Са друге стране, i-та врста нула-матрице $A \cdot \operatorname{adj} A$ је $a_{i1}(2,-2,0) + a_{i2}(-6,9,-1) + a_{i3}(8,-12,2)$ је нула-вектор (где су a_{ij} коефицијенти матрице A), па из линеарне независности следи да је $a_{i1} = a_{i2} = a_{i3}$, за $i = 1,2,3$, тј. $A = \mathbb{O}$. Али онда је $\operatorname{adj} A = \operatorname{adj} \mathbb{O} = \mathbb{O}$, што очигледно није тачно.

Дакле, задатак има два решења. То је донекле и очекивано. Наиме, минори $\widehat{A}_{ij}$ матрице A су 2×2 матрице, па ће за кофакторе важити

$$\begin{aligned}(-A)_{ij} &= (-1)^{i+j} \det\left(\widehat{(-A)}_{ij}\right) = (-1)^{i+j} \det\left(-\widehat{A}_{ij}\right) \\ &= (-1)^{i+j}(-1)^2 \det\left(\widehat{A}_{ij}\right) = A_{ij}.\end{aligned}$$

То значи да за свако решење A и матрица $-A$ мора бити решење истог проблема. $\square$

Приметимо да метод изложен у претходом задатку ради и за веће димензије уз напомену да бисмо тада имали $\det(\operatorname{adj} A) = (\det A)^{n-1}$, где је n димензија матрице A.

7.5 Крамерово правило

Већ смо рекли да се квадратни систем

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\ a_{n1}x_1 & + & \dots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array} \tag{7.19}$$

од n једначина са n непознатих може матрично записати као $AX = B$. Ако је матрица A инвертибилна (тј. $\det A \neq 0$) систем има јединствено решење $X = A^{-1}B = \frac{1}{\det A}(\operatorname{adj} A)B$.

У циљу елегантнијег записа нека су детерминанта система

$$\Delta := \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

и детерминанта по промењивој x_i

$$\Delta_{x_i} := \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

за све $1 \leqslant x_i \leqslant n$.

Претходним разматрањем (и неком додатном анализом у случају $\Delta = 0$) долазимо до Крамеровог[5] правила:

(1) Ако је $\Delta \neq 0$ систем једначина (7.19) има јединствено решење $x_i = \frac{\Delta_{x_i}}{\Delta}$, за све $1 \leqslant i \leqslant n$.

(2) Ако је $\Delta = 0$ и бар један од бројева $\Delta_{x_i} \neq 0$ систем (7.19) нема решење.

(3) Ако је $\Delta = \Delta_{x_1} = \cdots = \Delta_{x_n} = 0$ једначине система (7.19) су линеарно зависне, па систем има нула или више од једног решења.

У последњем случају Крамерово правило практично не даје никакав одговор (сем да је једна од једначина сувишна, па систем више и није квадратни), па систем треба решити неким другим методом.

Специјално, уколико је $n = 2$ и $\Delta = \Delta_{x_1} = \Delta_{x_2} = 0$ наш систем има више од једног решења ако и само ако једна од његових ненула једначина има решења. Ово последње је еквивалентно са тим да је $\alpha_{ij} \neq 0$, за бар једно $i, j \in \{1, 2\}$, или $\alpha_{ij} = b_i = 0$, за све $i, j \in \{1, 2\}$. У супротном (тј. ако је $\alpha_{ij} = 0$, за све $i, j \in \{1, 2\}$, и $b_i \neq 0$, за бар једно $i \in \{1, 2\}$) наш систем нема решења.

Међутим, за $n \geqslant 3$ не важи исти закључак. На пример, систем

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = 1 \\ x & + & y & + & z & = 2 \\ x & + & y & + & z & = 3 \end{array}$$

нема решење, а притом је $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$ (јер свака од ових детерминанти има бар по две исте колоне).

Задатак 7.20. *Решити систем*

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & 4z & = & -4 \\ 5x & + & 11y & - & 21z & = & -22 \\ 3x & - & 2y & + & 3z & = & 11 \end{array}$$

[5] *Gabriel Cramer* (1704. - 1752.), швајцарски математичар

Решење. Пошто је детерминанта система

$$\Delta = \begin{vmatrix} \boxed{1} & 2 & -4 \\ 5 & 11 & -21 \\ 3 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & -1 \\ 3 & -8 & -15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -8 & -15 \end{vmatrix} = 7$$

$/(-2)$

$/\cdot 4$

различита од нуле, систем ће имати јединствено решење. Из

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -4 & \boxed{2} & -4 \\ -22 & 11 & -21 \\ 11 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 11 & 1 \\ 7 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} = 14$$

$/\cdot 2$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 5 & -22 & -21 \\ 3 & 11 & 3 \end{vmatrix} = \cdots = -7,$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 5 & 11 & -22 \\ 3 & -2 & 11 \end{vmatrix} = \cdots = 7$$

следи да је то јединствено решење једнако

$$(x, y, z) = \left(\frac{\Delta_x}{\Delta}, \frac{\Delta_y}{\Delta}, \frac{\Delta_z}{\Delta} \right) = (2, -1, 1),$$

што се поклапа са решењем које смо добили у Задатку 2.2 Гаусовим поступком. □

Задатак 7.21. *Решити систем*

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & 3z & = & -1 \\ 3x & - & y & + & 2z & = & 7 \\ 5x & + & 3y & - & 4z & = & 2 \end{array}$$

Решење. Овај систем нема решења јер је

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

(јер је трећа врста ове детерминанте једнака два пута прва плус друга врста) и

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 7 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix} = \cdots = -3 \neq 0.$$

□

Задатак 7.22. *У зависности од реалног параметра α решити систем*

$$\begin{array}{rcrcrcl} (\alpha+1)x & + & y & + & z & = & 2-\alpha \\ x & + & (\alpha+1)y & + & z & = & -2 \\ x & + & y & + & (\alpha+1)z & = & \alpha \end{array}$$

Решење. Одредимо најпре све потребне детерминанте:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha+1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha+1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boxed{\alpha+3} & \alpha+3 & \alpha+3 \\ 1 & \alpha+1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha+1 \end{vmatrix}$$
$$/(-1)$$
$$= \begin{vmatrix} \alpha+3 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 \\ 1 & 0 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^2(\alpha+3),$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2-\alpha & 1 & 1 \\ -2 & \alpha+1 & 1 \\ \alpha & 1 & \alpha+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \boxed{\alpha+3} & \alpha+3 \\ -2 & \alpha+1 & 1 \\ \alpha & 1 & \alpha+1 \end{vmatrix}$$
$$/(-1)$$
$$= \begin{vmatrix} 0 & \alpha+3 & 0 \\ -2 & \alpha+1 & -\alpha \\ \alpha & 1 & \alpha \end{vmatrix} = -(\alpha+3)\begin{vmatrix} -2 & -\alpha \\ \alpha & \alpha \end{vmatrix} = -(\alpha+3)\alpha\begin{vmatrix} -2 & -\alpha \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= -\alpha(\alpha-2)(\alpha+3),$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} \alpha+1 & 2-\alpha & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boxed{\alpha+3} & 0 & \alpha+3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha+1 \end{vmatrix}$$
$$/(-1)$$
$$= \begin{vmatrix} \alpha+3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & \alpha & \alpha \end{vmatrix} = -2\alpha(\alpha+3),$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} \alpha+1 & 1 & 2-\alpha \\ 1 & \alpha+1 & -2 \\ 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boxed{\alpha+3} & \alpha+3 & 0 \\ 1 & \alpha+1 & -2 \\ 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix}$$
$$/(-1)$$
$$= \begin{vmatrix} \alpha+3 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & -2 \\ 1 & 0 & \alpha \end{vmatrix} = (\alpha+3)\begin{vmatrix} \alpha & -2 \\ 0 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^2(\alpha+3).$$

Сада ћемо имати неколико случајева у зависности од тога да ли су ове детерминанте једнаке нули или не.

(1) Ако је $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 0\}$ детерминанта система Δ је различита од нуле. Тада Крамерово правило каже да почетни систем има јединствено

решење

$$(x,y,z) = \left(\frac{\Delta_x}{\Delta}, \frac{\Delta_y}{\Delta}, \frac{\Delta_z}{\Delta}\right) = \left(-\frac{\alpha-2}{\alpha}, -\frac{2}{\alpha}, 1\right).$$

За $\alpha \in \{-3, 0\}$ важи $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$. Тада Крамерово правило не даје никакав одговор, па ћемо систем решити Гаусовим поступком.

(2) Ако је $\alpha = 0$ наш систем се своди на систем

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 2 \\ x & + & y & + & z & = & -2 \\ x & + & y & + & z & = & 0 \end{array}$$

који нема решење.

(3) Ако је $\alpha = -3$ имамо

$$\begin{array}{rcrcrcll} -2x & + & y & + & z & = & 5 & \\ \boxed{x} & + & -2y & + & z & = & -2 & /\cdot 2 \quad /(-1) \\ x & + & y & + & -2z & = & -3 & \\ \hline x & + & -2y & + & z & = & -2 & \\ & - & 3y & + & 3z & = & 1 & \\ & & \cancel{3y} & \cancel{-} & \cancel{3z} & \cancel{=} & \cancel{-1} & \\ \hline \end{array}$$

Дакле, наш систем има бесконачно много решења

$$(x,y,z) \in \left\{ \left(\beta - \frac{8}{3}, \beta, \beta + \frac{1}{3}\right) \,\middle|\, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

$\square$

Као што смо видели у претходном примеру, код система са параметром је можда једноставније применити Крамерово правило него Гаусов поступак. Код Крамеровог правила услов по коме дискутујемо долази природно из детерминанте. Са друге стране, код Гаусовог поступка тај услов се некако чудно појављивао у току рачуна. Због тога је могло да се догоди да имамо више случајева него што је неопходно уколико не изаберемо најефикаснији начин да решимо систем.

Приметимо да је 3×3 детерминанте са параметрима боље рачунати елементарним трансформацијама и Лапласовим развојем него Сарусовим правилом. Разлог је што први поменути поступак аутоматски даје растављен полином (по параметру). Нпр. да смо радили Сарусовим правилом у претходном задатку добили бисмо да је

$$\begin{aligned} \Delta_x &= \left|\begin{array}{ccc} 2-\alpha & 1 & 1 \\ -2 & \alpha+1 & 1 \\ \alpha & 1 & \alpha+1 \end{array}\right| \begin{array}{cc} 2-\alpha & 1 \\ -2 & \alpha+1 \\ \alpha & 1 \end{array} \\ &= (2-\alpha)(\alpha+1)^2 + \alpha - 2 - \alpha(\alpha+1) + 2(\alpha+1) - (2-\alpha), \end{aligned}$$

па би онда тај израз требало растављати (да бисмо проверили за које вредности параметра је једнак нули). Ситуација би се додатно закомпликовала да смо имали више од једног параметара и било би јако тешко раставити добијени израз.

Додатно, детерминанте по применљивим Δ_{x_i} се разликују од детерминанте система Δ највише за једну колону. Зато се један део рачуна детерминанте Δ може искористити и приликом рачунања Δ_{x_i}. Нпр. видимо да смо у претходном задатку имали исте потезе и иста сабирања и одузимања у првих пар корака рачунања Δ, Δ_x, Δ_y и Δ_z.

Задатак 7.23. *У зависности од реалног параметра α решити систем*

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & \alpha \\ x & + & \alpha y & + & \alpha^2 z & = & \alpha^2 \\ x & + & \alpha^2 y & + & \alpha^4 z & = & \alpha^4 \end{array}$$

Решење. Овај систем већ смо решили Гаусовим поступком у Задатку 2.7, а сада ћемо приказати и решење преко Крамеровог правила. Требаће нам детерминанте

$$\Delta = \begin{vmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha^4 \end{vmatrix} \begin{matrix} /(-1) \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha-1 & \alpha^2-1 \\ 0 & \alpha^2-1 & \alpha^4-1 \end{vmatrix}$$

$$= (\alpha-1)\left(\alpha^2-1\right) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & \alpha+1 \\ 0 & 1 & \alpha^2+1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ /(-1) \\ \\ \end{matrix}$$

$$= (\alpha-1)^2(\alpha+1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha^2-\alpha \end{vmatrix} = \alpha(\alpha-1)^3(\alpha+1),$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ \alpha^2 & \alpha & \alpha^2 \\ \alpha^4 & \alpha^2 & \alpha^4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha-1 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha & \alpha^2 \\ 0 & \alpha^2 & \alpha^4 \end{vmatrix} = (\alpha-1) \begin{vmatrix} \alpha & \alpha^2 \\ \alpha^2 & \alpha^4 \end{vmatrix}$$

$/(-1)$

$$= (\alpha-1)\left(\alpha^5-\alpha^4\right) = \alpha^4(\alpha-1)^2,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha^2 \\ 1 & \alpha^4 & \alpha^4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \alpha-1 & 1 \\ 1 & 0 & \alpha^2 \\ 1 & 0 & \alpha^4 \end{vmatrix} = -(\alpha-1) \begin{vmatrix} 1 & \alpha^2 \\ 1 & \alpha^4 \end{vmatrix}$$

$/(-1)$

$$= -(\alpha-1)\left(\alpha^4-\alpha^2\right) = -\alpha^2(\alpha-1)^2(\alpha+1),$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} \boxed{1} & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha^4 \end{vmatrix} \begin{matrix} /(-1) \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 0 & \alpha-1 & \alpha^2-\alpha \\ 0 & \alpha^2-1 & \alpha^4-\alpha \end{vmatrix}$$

$$= \alpha(\alpha-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha+1 & \alpha^2+\alpha+1 \end{vmatrix} \longleftarrow$$

$$= \alpha(\alpha-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \alpha+1 & \alpha^2+\alpha+1 \end{vmatrix} = \alpha^3(\alpha-1)^2.$$

На основу Крамеровог правила знамо да:

(1) Ако је $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, \pm 1\}$ систем има јединствено решење

$$(x, y, z) = \left(-\frac{\alpha^3}{(\alpha-1)(\alpha+1)}, -\frac{\alpha}{\alpha-1}, \frac{\alpha^2}{(\alpha-1)(\alpha+1)} \right).$$

(2) Ако је $\alpha = -1$ систем нема решења јер је $\Delta = 0$, а $\Delta_x = 4$.

(3) У преостала два случаја $\alpha \in \{0, 1\}$ Крамерово правило не даје никакав одговор, па би то требало посебно разматрати што смо већ урадили у тачкама (2) и (4) Задатка 2.7.

□

Задатак 7.24. *У зависности од реалних параметара α и β решити систем*

$$\begin{array}{rcrcrcl} \alpha x & + & y & + & z & = & 4 \\ x & + & \beta y & + & z & = & 3 \\ x & + & 2\beta y & + & z & = & 4 \end{array}$$

Решење. Детерминанта система је

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 2\beta & 1 \\ 1 & \beta & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha-1 & 1 & 1 \\ 0 & 2\beta & 1 \\ 0 & \beta & 1 \end{vmatrix} \longleftarrow$$

$/(-1)$

$$= (\alpha-1) \begin{vmatrix} 2\beta & 1 \\ \beta & 1 \end{vmatrix} = -(\alpha-1)\beta.$$

Слично се добијају и детерминанте по променљивим

$$\Delta_x = -2\beta + 1, \qquad \Delta_y = -\alpha + 1 \qquad \text{и} \qquad \Delta_z = -2\alpha\beta + 4\beta - 1.$$

Пошто овде имамо два параметра може бити јако тешко (или немогуће као код Δ_z) раставити добијене изразе за детерминанте. Али и то је прихватљиво, уколико успемо да раставимо детерминанту система Δ онда имамо све за дискусију.

(1) Ако је $\alpha \neq 1$ и $\beta \neq 0$ систем има јединствено решење

$$(x, y, z) = \left(\frac{2\beta-1}{(\alpha-1)\beta}, \frac{1}{\beta}, \frac{2\alpha\beta-4\beta+1}{(\alpha-1)\beta} \right).$$

(2) За $\alpha = 1$ је $\Delta = \Delta_y = 0$, $\Delta_x = 1 - 2\beta$ и $\Delta_z = 2\beta - 1$.

(2.1) Ако је додатно и $\beta \neq \frac{1}{2}$ систем нема решење.

(2.2) За $\beta = \frac{1}{2}$ Крамерово правило не даје никакав одговор, а наш систем се своди на

$$\begin{array}{rcrcrcr} \alpha x & + & y & + & z & = & 4 \\ x & + & \frac{1}{2}y & + & z & = & 3 \\ \cancel{x} & \cancel{+} & \cancel{y} & \cancel{+} & \cancel{z} & \cancel{=} & \cancel{4} \end{array}$$

чије је решење

$$(x, y, z) \in \{(\gamma, 2, 2-\gamma) \mid \gamma \in \mathbb{R}\}.$$

(3) За $\beta = 0$ систем нема решења јер је $\Delta = 0$ и $\Delta_x = 1$.

Напомињемо да је случај $\alpha = 1$, $\beta = 0$ обухваћен два пута, али и то је у реду јер смо добили исто решење. Евентуално смо могли у последњем случају да поред $\beta = 0$, додамо и $\alpha \neq 1$, како бисмо избегли преклапање. □

Задатак 7.25. *Решити систем над пољем $\mathbb{Z}_7$ у зависности од параметра $\alpha \in \mathbb{Z}_7$:*

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 4y & + & z & = & 2 \\ 3x & + & 3y & + & z & = & \alpha \\ 2x & + & (\alpha+6)y & & & = & \alpha^2 + 2\alpha + 5 \end{array}$$

Решење. Пошто имамо коначно поље $\mathbb{Z}_7$ детерминанте ћемо рачунати по модулу 7:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 & \boxed{1} \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & \alpha+6 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} / \cdot 6 \\ \hookleftarrow \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 6 & 0 \\ 2 & \alpha+6 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 2 & \alpha+6 \end{vmatrix} = 2\alpha,$$

$$\begin{aligned} \Delta_x &= \begin{vmatrix} 2 & 4 & \boxed{1} \\ \alpha & 3 & 1 \\ \alpha^2+2\alpha+5 & \alpha+6 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} / \cdot 6 \\ \hookleftarrow \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ \alpha+5 & 6 & 0 \\ \alpha^2+2\alpha+5 & \alpha+6 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \alpha+5 & 6 \\ \alpha^2+2\alpha+5 & \alpha+6 \end{vmatrix} \begin{matrix} / \cdot 6 \\ \hookleftarrow \end{matrix} = \begin{vmatrix} \alpha+5 & 6 \\ \alpha^2+\alpha & \alpha \end{vmatrix} \\ &= \alpha^2 + 5\alpha + \alpha^2 + \alpha = 2\alpha(\alpha+3), \end{aligned}$$

$$\Delta_y = \cdots = 2\alpha(\alpha+1) \qquad \text{и} \qquad \Delta_z = \cdots = 4\alpha(\alpha+1).$$

Дакле, за $\alpha \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ систем има јединствено решење

$$(x, y, z) = (\alpha+3, \alpha+1, 2\alpha+2).$$

Случај $\alpha = 0$ треба посебно испитати као у тачки (2) Задатка 2.16. □

7.6 Детерминанте произвољног реда

Слично као и код детерминанти малог реда и овде ћемо најпре покушати да елементарним трансформацијама врста и колона детерминанту сведемо на неки лепши облик - на пример, горње или доње троугаону детерминанту или детерминанту чији се ред може ,,смањити“ Лапласовим развојем. Уколико не нагласимо другачије у задатку број n ће означавати ред детерминанте.

Задатак 7.26. *Израчунати вредност детерминанте*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & 4 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & 4 & \dots & n \\ -1 & -2 & -3 & 0 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & -4 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

Решење. С обзиром да се испод дијагонале налазе коефицијенти супротни онима из прве врсте, природно је прву врсту додати осталим врстама чиме добијамо

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & 4 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & 4 & \dots & n \\ -1 & -2 & -3 & 0 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & -4 & \dots & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n \\ 0 & 2 & 6 & 8 & \dots & 2n-2 & 2n \\ 0 & 0 & 3 & 8 & \dots & 2n-2 & 2n \\ 0 & 0 & 0 & 4 & \dots & 2n-2 & 2n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n-1 & 2n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n \end{vmatrix}$$

$$= n!,$$

као детерминанта горње троугаоне матрице. □

Као што већ из првог примера можемо видети, циљ је доћи до детерминанте са великим бројем нула. Због прегледности надаље ћемо уместо тих нула остављати празно место (као што смо већ радили код матрица).

Задатак 7.27. *Израчунати вредност детерминанте*

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & \dots & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & \dots & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & \dots & 3 & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 3 & n-1 & \dots & 3 & 3 & 3 \\ n & 3 & \dots & 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}.$$

Решење. Прва идеја која се намеће јесте одузимање прве врсте од осталих. То би оставило ненула коефицијенте у првој врсти, у последњој колони и на споредној дијагонали. Међутим, овде је боље трећу врсту одузети од осталих, јер тиме добијамо ненула коефицијенте само у тој трећој врсти и на споредној дијагонали, тј.

$$
\begin{array}{l}
\begin{array}{cl}
\begin{vmatrix}
3 & 3 & \dots & 3 & 3 & 1\\
3 & 3 & \dots & 3 & 2 & 3\\
3 & 3 & \dots & 3 & 3 & 3\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\
3 & n-1 & \dots & 3 & 3 & 3\\
n & 3 & \dots & 3 & 3 & 3
\end{vmatrix}
&
\begin{array}{l}
\\ \\ /(-1) \\ \vdots \\ \\ \\
\end{array}
\end{array}
\\
=\begin{vmatrix}
 & & & & & & & -2\\
 & & & & & & -1 & \\
3 & 3 & \dots & 3 & 3 & 3 & 3\\
 & & & 1 & & & \\
 & & \iddots & & & & \\
 & n-4 & & & & & \\
n-3 & & & & & &
\end{vmatrix}
\\
=(-1)^{3+n-2}3\begin{vmatrix}
 & & & & & -2\\
 & & & & -1 & \\
 & & & 1 & & \\
 & & \iddots & & & \\
 & n-4 & & & & \\
n-3 & & & & &
\end{vmatrix}.
\end{array}
\tag{7.28}
$$

Пошто знамо да израчунамо дијагоналну детерминанту, тј. детерминанту која има нуле на главној дијагонали, најлакше је заменити прву и последњу колону, другу и претпоследњу итд. и свести проблем на дијагоналну детерминанту. Вредност те дијагоналне детерминанте ће бити једнака

$$(-2)(-1)1 \cdot 2 \cdot \ldots (n-4)(n-3) = 2(n-3)!.$$

Овде само треба пазити да свака промена места колона избацује по један минус, зато ће знак наше детерминанте бити $(-1)^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}$, где $[\cdot]$ означава цео део броја. Дакле, наша детерминанта је $(-1)^{n+1}3(-1)^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}2(n-3)! = (-1)^{\left[\frac{3n+1}{2}\right]}6(n-3)!$.

Други начин да се израчуна детерминанта (7.28) је развој по првој колони, затим по другој, затим по трећој, итд. Тиме бисмо добили да је

(7.28) једнако

$$(-1)^{n+1}3(-1)^{1+n-1}(n-3)\begin{vmatrix} & & & & -2 \\ & & & -1 & \\ & & 1 & & \\ & \iddots & & & \\ n-4 & & & & \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= \cdots = (-1)^{n+1}(-1)^{n}(-1)^{n-1}\dots(-1)^{2}6(n-3)! = (-1)^{\sum\limits_{i=1}^{n+1} i-1}6(n-3)! \\ &= (-1)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}-1}6(n-3)! = (-1)^{\frac{n(n+3)}{2}}6(n-3)!. \end{aligned}$$

Овде је занимљиво напоменути да $\left[\frac{3n+1}{2}\right]$ није једнако $\frac{n(n+3)}{2}$, али ипак важи

$$(-1)^{\left[\frac{3n+1}{2}\right]} = (-1)^{\frac{n(n+3)}{2}} = \begin{cases} 1, & \text{ако је } n \equiv 0 \pmod 4 \text{ или } n \equiv 1 \pmod 4, \\ -1, & \text{ако је } n \equiv 2 \pmod 4 \text{ или } n \equiv 3 \pmod 4. \end{cases}$$

□

Задатак 7.29. *У зависности од реалних параметара α_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, израчунати вредност детерминанте*

$$\begin{vmatrix} 1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots & -\alpha_{n-1} & -\alpha_n \\ \alpha_1 & 1 & & & & \\ \alpha_2 & & 1 & & & \\ \vdots & & & \ddots & & \\ \alpha_{n-1} & & & & 1 & \\ \alpha_n & & & & & 1 \end{vmatrix}.$$

(Напомињемо да је ова детерминанта реда $n+1$.)

Решење. Иако ово делује компликовано због великог броја параметара заправо је једноставније од претходних примера. Ову детерминанту лако можемо свести на доње троугаону тако што помоћу јединица са дијагонале направимо нуле у првој врсти (колони):

$$\begin{vmatrix} 1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots & -\alpha_{n-1} & -\alpha_n \\ \alpha_1 & 1 & & & & \\ \alpha_2 & & 1 & & & \\ \vdots & & & \ddots & & \\ \alpha_{n-1} & & & & 1 & \\ \alpha_n & & & & & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ /\,(-\alpha_1) \\ \quad /\,(-\alpha_2) \\ \qquad \ddots \\ \qquad\quad /\,(-\alpha_{n-1}) \\ \qquad\qquad /\,(-\alpha_n) \end{array}$$

$$= \begin{vmatrix} 1+\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i^2 & & & & & \\ \alpha_1 & 1 & & & & \\ \alpha_2 & & 1 & & & \\ \vdots & & & \ddots & & \\ \alpha_{n-1} & & & & 1 & \\ \alpha_n & & & & & 1 \end{vmatrix} = 1 + \sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2.$$

□

Задатак 7.30. *У зависности од реалних параметара* β *и* α_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, *израчунати вредност детерминанте*

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_{n-1} & \alpha_n \\ -\beta & \beta & & & & \\ & -\beta & \beta & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & -\beta & \beta & \\ & & & & -\beta & \beta \end{vmatrix}.$$

Решење. Видимо да се ова детерминанта разликује од горње троугаоне само по томе што има још једну дијагоналу (са коефицијентима $-\beta$) испод главне дијагонале. Зато је најлакше добити њену вредност тако што уклонимо све коефицијенте $-\beta$ испод главне дијагонале. Прво ћемо последњу колону додати претпоследњој чиме нестаје $-\beta$ у последњој врсти. Затим ћемо исти поступак понављати пењући се уз дијагоналу. Тачније,

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_{n-1} & \alpha_n \\ -\beta & \beta & & & & \\ & -\beta & \beta & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & -\beta & \beta & \\ & & & & -\beta & \boxed{\beta} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_{n-1}+\alpha_n & \alpha_n \\ -\beta & \beta & & & & \\ & -\beta & \beta & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & -\beta & \boxed{\beta} & \\ & & & & & \beta \end{vmatrix} = \dots$$

$$
= \begin{vmatrix}
\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i & \sum\limits_{i=2}^{n}\alpha_i & \sum\limits_{i=3}^{n}\alpha_i & \dots & \alpha_{n-1}+\alpha_n & \alpha_n \\
 & \beta & & & & \\
 & & \beta & & & \\
 & & & \ddots & & \\
 & & & & \beta & \\
 & & & & & \beta
\end{vmatrix} = \beta^{n-1}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i.
$$

□

Задатак 7.31. *У зависности од реалних параметара x и y израчунати вредност детерминанте*

$$
\begin{vmatrix}
x & y & & & & \\
 & x & y & & & \\
 & & x & y & & \\
 & & & \ddots & \ddots & \\
 & & & & x & y \\
y & & & & & x
\end{vmatrix}.
$$

Решење. Коефицијенти детерминанте нису баш најпогоднији за извођење елементарних трансформација. Уместо тога развићемо детерминанту по првој врсти, тиме ћемо добити два минора димензије $(n-1)\times(n-1)$, један чија је детерминанта горње троугаона и други чија је детерминанта доње троугаона:

$$
\Delta_n = \begin{vmatrix}
x & y & & & & \\
 & x & y & & & \\
 & & x & y & & \\
 & & & \ddots & \ddots & \\
 & & & & x & y \\
y & & & & & x
\end{vmatrix}
$$

$$
= x\begin{vmatrix}
x & y & & & & \\
 & x & y & & & \\
 & & x & y & & \\
 & & & \ddots & \ddots & \\
 & & & & x & y \\
 & & & & & x
\end{vmatrix} + (-1)^{n+1}y\begin{vmatrix}
y & & & & & \\
x & y & & & & \\
 & x & y & & & \\
 & & \ddots & \ddots & & \\
 & & & & x & y
\end{vmatrix}
$$

$$
= xx^{n-1} + (-1)^{n+1}yy^{n-1} = x^n + (-1)^{n+1}y^n.
$$

□

Задатак 7.32. *Израчунати вредност детерминанте*

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 & 8 & \dots & 2n-2 & 2n \\ 2 & 2 & 6 & 8 & \dots & 2n-2 & 2n \\ 2 & 4 & 3 & 8 & \dots & 2n-2 & 2n \\ 2 & 4 & 6 & 4 & \dots & 2n-2 & 2n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2 & 4 & 6 & 8 & \dots & n-1 & 2n \\ 2 & 4 & 6 & 8 & \dots & 2n-2 & n \end{vmatrix}.$$

Решење. Видимо да се по колонама понављају исте вредности сем на дијагонали. Зато је природно почети одузимањем једне врсте од осталих и добити

$$\begin{array}{l} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 & 8 & \dots & 2n-2 & 2n \\ 2 & 2 & 6 & 8 & \dots & 2n-2 & 2n \\ 2 & 4 & 3 & 8 & \dots & 2n-2 & 2n \\ 2 & 4 & 6 & 4 & \dots & 2n-2 & 2n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2 & 4 & 6 & 8 & \dots & n-1 & 2n \\ 2 & 4 & 6 & 8 & \dots & 2n-2 & n \end{vmatrix} \end{array} \begin{array}{l} /(-1) \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 & 8 & \dots & 2n-2 & 2n \\ 1 & -2 & & & & & \\ 1 & & -3 & & & & \\ 1 & & & -4 & & & \\ \vdots & & & & \ddots & & \\ 1 & & & & & -n+1 & \\ 1 & & & & & & -n \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{cccccc} /\cdot\frac{1}{2} & /\cdot\frac{1}{3} & /\cdot\frac{1}{4} & \ddots & /\cdot\frac{1}{n-1} & /\cdot\frac{1}{n} \end{array}$$

$$= \begin{vmatrix} 1+\underbrace{2+2\cdots+2}_{n-1} & 4 & 6 & 8 & \dots & 2n-2 & 2n \\ & -2 & & & & & \\ & & -3 & & & & \\ & & & -4 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & -n+1 & \\ & & & & & & -n \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n-1}(2n-1)n!.$$

$\square$

Задатак 7.33. *Израчунати вредност детерминанте*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & 5 & \dots & n & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-1 & n & n & \dots & n & n & n \\ n & n & n & \dots & n & n & n \end{vmatrix}.$$

Решење. Како се испод споредне дијагонале понављају исте вредности почећемо са одузимањем колона што ће довести до покраћења поменутих коефицијената. Да бисмо добили највише нула одузећемо последњу колону од осталих и добити да је

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & 5 & \dots & n & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-1 & n & n & \dots & n & n & n \\ n & n & n & \dots & n & n & n \end{vmatrix} \; /(-1)$$

$$= \begin{vmatrix} 1-n & 2-n & \dots & -3 & -2 & -1 & n \\ 2-n & 3-n & \dots & -2 & -1 & & n \\ 3-n & 4-n & \dots & -1 & & & n \\ \vdots & \vdots & \iddots & & & & \vdots \\ -2 & -1 & & & & & n \\ -1 & & & & & & n \\ & & & & & & n \end{vmatrix}.$$

Ову детерминанту можемо израчунати свођењем на дијагоналну детерминанту на исти начин као у Задатку 7.28. Заменом прве и претпоследње колоне, затим друге колоне и треће здесна, итд. наша детерминанта се своди

$$
\begin{vmatrix}
1-n & 2-n & \dots & -3 & -2 & -1 & n \\
2-n & 3-n & \dots & -2 & -1 & & n \\
3-n & 4-n & \dots & -1 & & & n \\
\vdots & \vdots & \iddots & & & & \\
-2 & -1 & & & & & n \\
-1 & & & & & & n \\
 & & & & & & n
\end{vmatrix}
$$

$$
= (-1)^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}
\begin{vmatrix}
-1 & -2 & -3 & \dots & 2-n & 1-n & n \\
 & -1 & -2 & \dots & 3-n & 2-n & n \\
 & & -1 & \dots & 4-n & 3-n & n \\
 & & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & & & & -1 & -2 & n \\
 & & & & & -1 & n \\
 & & & & & & n
\end{vmatrix}
= (-1)^{\left[\frac{3}{2}(n-1)\right]} n.
$$

□

Задатак 7.34. *Израчунати вредност детерминанте*

$$
\begin{vmatrix}
\binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \dots & \binom{n}{m} \\
\binom{n+1}{0} & \binom{n+1}{1} & \binom{n+1}{2} & \dots & \binom{n+1}{m} \\
\binom{n+2}{0} & \binom{n+2}{1} & \binom{n+2}{2} & \dots & \binom{n+2}{m} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\binom{n+m}{0} & \binom{n+m}{1} & \binom{n+m}{2} & \dots & \binom{n+m}{m}
\end{vmatrix}
$$

за природне бројеве m и n, где је $n \geqslant m$.

Решење. Како су сви коефицијенти у првој колони $\binom{n}{0}$, $\binom{n+1}{0}$, $\dots$, $\binom{n+m}{0}$ једнаки 1 треба почети са одузимањем врста. Уколико бисмо прву врсту одузели од осталих добили бисмо нуле у првој колони, али и изразе $\binom{n+i}{k} - \binom{n+j}{k}$ (које није лако израчунати) у остатку детерминанте. Ефикасније би било одузимати две узастопне врсте. Тиме ћемо опет добити нуле у првој колони, а у осталим колонама

$$
\binom{n+i+1}{j} - \binom{n+i}{j} = \binom{n+i}{j-1}.
$$

Другим речима, ако почетну детерминанту (чији је ред $m+1$) означимо са Δ_m имамо

$$
\begin{aligned}
\Delta_m :=& \begin{vmatrix}
1 & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \dots & \binom{n}{m} \\
1 & \binom{n+1}{1} & \binom{n+1}{2} & \dots & \binom{n+1}{m} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
1 & \binom{n+m-1}{1} & \binom{n+m-1}{2} & \dots & \binom{n+m-1}{m} \\
1 & \binom{n+m}{1} & \binom{n+m}{2} & \dots & \binom{n+m}{m}
\end{vmatrix}
\begin{array}{l} \\ \\ \\ /(-1) \\ \\ \end{array} \\
=& \begin{vmatrix}
1 & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \dots & \binom{n}{m} \\
1 & \binom{n+1}{1} & \binom{n+1}{2} & \dots & \binom{n+1}{m} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
1 & \binom{n+m-2}{1} & \binom{n+m-2}{2} & \dots & \binom{n+m-2}{m} \\
1 & \binom{n+m-1}{1} & \binom{n+m-1}{2} & \dots & \binom{n+m-1}{m} \\
0 & \binom{n+m-1}{0} & \binom{n+m-1}{1} & \dots & \binom{n+m-1}{m-1}
\end{vmatrix}
\begin{array}{l} \\ \\ \\ /(-1) \\ \\ \\ \end{array} \\
=& \begin{vmatrix}
1 & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \dots & \binom{n}{m} \\
1 & \binom{n+1}{1} & \binom{n+1}{2} & \dots & \binom{n+1}{m} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
1 & \binom{n+m-3}{1} & \binom{n+m-3}{2} & \dots & \binom{n+m-3}{m} \\
1 & \binom{n+m-2}{1} & \binom{n+m-2}{2} & \dots & \binom{n+m-2}{m} \\
0 & \binom{n+m-2}{0} & \binom{n+m-2}{1} & \dots & \binom{n+m-2}{m-1} \\
0 & \binom{n+m-1}{0} & \binom{n+m-1}{1} & \dots & \binom{n+m-1}{m-1}
\end{vmatrix}
\begin{array}{l} \\ \\ \\ /(-1) \\ \\ \\ \\ \end{array} \\
= \dots =& \begin{vmatrix}
1 & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \dots & \binom{n}{m} \\
0 & \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \dots & \binom{n}{m-1} \\
0 & \binom{n+1}{0} & \binom{n+1}{1} & \dots & \binom{n+1}{m-1} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \binom{n+m-2}{0} & \binom{n+m-2}{1} & \dots & \binom{n+m-2}{m-1} \\
0 & \binom{n+m-1}{0} & \binom{n+m-1}{1} & \dots & \binom{n+m-1}{m-1}
\end{vmatrix} \\
=& \Delta_{m-1} = \Delta_{m-2} = \dots = \Delta_0 = \left|\binom{n}{0}\right| = 1.
\end{aligned}
$$

□

У претходном задатку смо користили познати идентитет

$$\binom{k+1}{j} - \binom{k}{j} = \frac{(k+1)!}{j!(k-j+1)!} - \frac{k!}{j!(k-j)!}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{k!}{j!(k-j+1)!}(k+1-(k-j+1)) \\
&= \frac{k!}{(j-1)!(k-j+1)!} = \binom{k}{j-1}.
\end{aligned}
$$

Задатак 7.35. *У зависности од реалних параметара α_i и β_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, израчунати вредност детерминанте*

$$
\begin{vmatrix}
\cos(\alpha_1+\beta_1) & \cos(\alpha_1+\beta_2) & \dots & \cos(\alpha_1+\beta_n) \\
\cos(\alpha_2+\beta_1) & \cos(\alpha_2+\beta_2) & \dots & \cos(\alpha_2+\beta_n) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\cos(\alpha_n+\beta_1) & \cos(\alpha_n+\beta_2) & \dots & \cos(\alpha_n+\beta_n)
\end{vmatrix}. \tag{7.36}
$$

Решење. Применом адиционих формула детерминанта (7.36) се своди на

$$
\begin{vmatrix}
\cos\alpha_1\cos\beta_1-\sin\alpha_1\sin\beta_1 & \cos\alpha_1\cos\beta_2-\sin\alpha_1\sin\beta_2 & \dots & \cos\alpha_1\cos\beta_n-\sin\alpha_1\sin\beta_n \\
\cos\alpha_2\cos\beta_1-\sin\alpha_2\sin\beta_1 & \cos\alpha_2\cos\beta_2-\sin\alpha_2\sin\beta_2 & \dots & \cos\alpha_2\cos\beta_n-\sin\alpha_2\sin\beta_n \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\cos\alpha_n\cos\beta_1-\sin\alpha_n\sin\beta_1 & \cos\alpha_n\cos\beta_2-\sin\alpha_n\sin\beta_2 & \dots & \cos\alpha_n\cos\beta_n-\sin\alpha_n\sin\beta_n
\end{vmatrix}.
$$

Видимо да се у i-тој врсти ове детерминанте појављују исте вредности $\cos\alpha_i$ и $\sin\alpha_i$, а у j-тој колони $\cos\beta_i$ и $\sin\beta_i$. Знајући правило за множење матрица и Бине–Кошијеву теорему нашу детерминанту (7.36) можемо свести (под претпоставком да је $n \geqslant 2$) на

$$
\begin{vmatrix}
\cos\alpha_1 & \sin\alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\
\cos\alpha_2 & \sin\alpha_2 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\cos\alpha_n & \sin\alpha_n & 0 & \dots & 0
\end{vmatrix}
\begin{vmatrix}
\cos\beta_1 & \cos\beta_2 & \dots & \cos\beta_n \\
-\sin\beta_1 & -\sin\beta_2 & \dots & -\sin\beta_n \\
0 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0
\end{vmatrix}.
$$

Вредност ове детерминанте ће зависити од њеног реда.

(1) Уколико је $n \geqslant 3$ детерминанта (7.36) ће бити једнака нули.

(2) Ако је $n = 1$ детерминанта (7.36) је једнака $\cos(\alpha_1+\beta_1)$.

(3) За $n = 2$ детерминанта (7.36) је једнака

$$
\begin{aligned}
&\begin{vmatrix}
\cos\alpha_1 & \sin\alpha_1 \\
\cos\alpha_2 & \sin\alpha_2
\end{vmatrix}
\begin{vmatrix}
\cos\beta_1 & \cos\beta_2 \\
-\sin\beta_1 & -\sin\beta_2
\end{vmatrix} \\
&= -(\cos\alpha_1\sin\alpha_2-\cos\alpha_2\sin\alpha_1)(\cos\beta_1\sin\beta_2-\cos\beta_2\sin\beta_1) \\
&= -\sin(\alpha_1-\alpha_2)\sin(\beta_1-\beta_2).
\end{aligned}
$$

□

Задатак 7.37. *У зависности од реалних параметара α_i и β_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, израчунати вредност детерминанте*

$$\begin{vmatrix} \beta_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_n \\ \alpha_1 & \beta_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \beta_3 & \dots & \alpha_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \beta_n \end{vmatrix}.$$

Решење. Означимо тражену детерминанту са $\Delta(\alpha_1, \dots, \alpha_n; \beta_1, \dots, \beta_n)$. С обзиром да се по колонама понављају исте вредности (сем на дијагонали) било би згодно одузети нпр. прву врсту од осталих. Међутим, то би направило проблем у првој колони.

Зато ћемо мало модификовати претходну идеју. Најпре ћемо β_1 записати као $\alpha_1 + (\beta_1 - \alpha_1)$ и применити сабирање по првој колони. Тиме ћемо добити једну детерминанту која је једнака $\Delta(\alpha_1, \dots, \alpha_n; \alpha_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ (што смо и хтели да наместимо) и другу детерминанту која у првој колони има скоро све нуле. Другим речима, имамо да је

$$\begin{aligned}
&\Delta(\alpha_1, \dots, \alpha_n; \beta_1, \dots, \beta_n) \\
&= \begin{vmatrix} \alpha_1 + (\beta_1 - \alpha_1) & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_n \\ \alpha_1 + 0 & \beta_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_n \\ \alpha_1 + 0 & \alpha_2 & \beta_3 & \dots & \alpha_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1 + 0 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \beta_n \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \boxed{\alpha_1} & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_n \\ \alpha_1 & \beta_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \beta_3 & \dots & \alpha_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \beta_n \end{vmatrix} \ /(-1) \ + \begin{vmatrix} \beta_1 - \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_n \\ 0 & \beta_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_n \\ 0 & \alpha_2 & \beta_3 & \dots & \alpha_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \beta_n \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_n \\ & \beta_2 - \alpha_2 & & & \\ & & \beta_3 - \alpha_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \beta_n - \alpha_n \end{vmatrix} + (\beta_1 - \alpha_1) \begin{vmatrix} \beta_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_n \\ \alpha_2 & \beta_3 & \dots & \alpha_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \beta_n \end{vmatrix} \\
&= \alpha_1 \prod_{j=2}^{n} (\beta_j - \alpha_j) + (\beta_1 - \alpha_1)\, \Delta(\alpha_2, \dots, \alpha_n; \beta_2, \dots, \beta_n).
\end{aligned}$$

Овим смо проблем свели на израчунавање исте детерминанте али реда за један мањег од реда почетне детерминанте. Понављањем претходног поступка добијамо да је

$$\begin{aligned}
&\Delta(\alpha_1,\ldots,\alpha_n;\beta_1,\ldots,\beta_n)\\
&=\alpha_1\prod_{j=2}^{n}(\beta_j-\alpha_j)+(\beta_1-\alpha_1)\,\Delta(\alpha_2,\ldots,\alpha_n;\beta_2,\ldots,\beta_n)\\
&=\alpha_1\prod_{j=2}^{n}(\beta_j-\alpha_j)\\
&\quad+(\beta_1-\alpha_1)\left(\alpha_2\prod_{j=3}^{n}(\beta_j-\alpha_j)+(\beta_2-\alpha_2)\,\Delta(\alpha_3,\ldots,\alpha_n;\beta_3,\ldots,\beta_n)\right)\\
&=\alpha_1\prod_{j=2}^{n}(\beta_j-\alpha_j)+\alpha_2\prod_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ j\neq 2}}(\beta_j-\alpha_j)\\
&\quad+\prod_{j=1}^{2}(\beta_j-\alpha_j)\left(\alpha_3\prod_{j=4}^{n}(\beta_j-\alpha_j)+(\beta_3-\alpha_3)\,\Delta(\alpha_4,\ldots,\alpha_n;\beta_4,\ldots,\beta_n)\right)\\
&=\sum_{i=1}^{3}\alpha_i\prod_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ j\neq i}}(\beta_j-\alpha_j)+\prod_{j=1}^{3}(\beta_j-\alpha_j)\,\Delta(\alpha_4,\ldots,\alpha_n;\beta_4,\ldots,\beta_n)\\
&=\sum_{i=1}^{4}\alpha_i\prod_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ j\neq i}}(\beta_j-\alpha_j)+\prod_{j=1}^{4}(\beta_j-\alpha_j)\,\Delta(\alpha_5,\ldots,\alpha_n;\beta_5,\ldots,\beta_n)\\
&=\cdots=\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i\prod_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ j\neq i}}(\beta_j-\alpha_j)+\prod_{j=1}^{n-1}(\beta_j-\alpha_j)\underbrace{\Delta(\alpha_n;\beta_n)}_{=|\beta_n|}\\
&=\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i\prod_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ j\neq i}}(\beta_j-\alpha_j)+\prod_{j=1}^{n-1}(\beta_j-\alpha_j)\underbrace{\beta_n}_{=\alpha_n+(\beta_n-\alpha_n)}\\
&=\prod_{j=1}^{n}(\beta_j-\alpha_j)+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\prod_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ j\neq i}}(\beta_j-\alpha_j).
\end{aligned}$$

□

Задатак 7.38. *Нека је p прост број. Израчунати вредност детерминанте над коначним пољем $\mathbb{Z}_p$:*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & p-3 & p-2 & p-1 \\ 2 & 3 & 4 & \dots & p-2 & p-1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \dots & p-1 & 1 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p-2 & p-1 & 1 & \dots & p-5 & p-4 & p-3 \\ p-1 & 1 & 2 & \dots & p-4 & p-3 & p-2 \end{vmatrix}. \tag{7.39}$$

Решење. Прво, уколико је $p = 2$ детерминанта (7.39) је једнака $|1| = 1$. Зато ћемо надаље претпоставити да је p непаран прост број.

Уколико све колоне додамо првој сви коефицијенти прве колоне ће постати

$$1 + 2 + 3 + \cdots + p - 1 = \frac{(p-1)p}{2} = p\frac{p-1}{2} \equiv 0 \pmod{p},$$

јер је $\frac{p-1}{2}$ цео број. Дакле, почетна детерминанта (7.39) има нула колону, па је једнака нули. $\square$

7.7 Вандермондова детерминанта

У наредном примеру ћемо израчунати Вандермондову[6] детерминанту (детерминанту Вандермондове матрице), а затим ћемо дати пар примена ове детерминанте.

Задатак 7.40. *У зависности од реалних параметара x_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, израчунати вредност Вандермондове детерминанте*

$$W(x_1, x_2, \dots, x_n) := \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \dots & x_n^{n-2} \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Решење. Можемо покушати да прву колону одузмемо од осталих и направимо нуле у првој врсти. Међутим, тиме бисмо у остатку детерминанте добили коефицијенте $x_i^j - x_1^j$ са којима даље не можемо ништа да урадимо. Зато ћемо покушати да ову детерминанту израчунамо неким другим медотом.

[6] *Alexandre-Théophile Vandermonde* (1735. - 1796.), француски математичар, хемичар и музичар

Искористићемо идеју из Задатка 7.34 са одузимањем узастопних врста и добити да је Вандермондова детереминанта једнака

$$W(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \ldots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \ldots & x_n^{n-2} \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ /\,(-x_1) \\ \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \ldots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-3} & x_2^{n-3} & \ldots & x_n^{n-3} \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \ldots & x_n^{n-2} \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & \ldots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ /\,(-x_1) \\ \\ \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \ldots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-4} & x_2^{n-4} & \ldots & x_n^{n-4} \\ x_1^{n-3} & x_2^{n-3} & \ldots & x_n^{n-3} \\ 0 & x_2^{n-3}(x_2 - x_1) & \ldots & x_n^{n-3}(x_n - x_1) \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & \ldots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ /\,(-x_1) \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$= \cdots = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & \ldots & x_n - x_1 \\ 0 & x_2(x_2 - x_1) & \ldots & x_n(x_n - x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x_2^{n-3}(x_2 - x_1) & \ldots & x_n^{n-3}(x_n - x_1) \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & \ldots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \ldots & x_n - x_1 \\ x_2(x_2 - x_1) & x_3(x_3 - x_1) & \ldots & x_n(x_n - x_1) \\ x_2^2(x_2 - x_1) & x_3^2(x_3 - x_1) & \ldots & x_n^2(x_n - x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_2^{n-3}(x_2 - x_1) & x_3^{n-3}(x_3 - x_1) & \ldots & x_n^{n-3}(x_n - x_1) \\ x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & x_3^{n-2}(x_3 - x_1) & \ldots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= \prod_{j=2}^{n} (x_j - x_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_2^{n-3} & x_3^{n-3} & \dots & x_n^{n-3} \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \dots & x_n^{n-2} \end{vmatrix} \\
&= \prod_{j=2}^{n} (x_j - x_1) \, W(x_2, x_3, \dots, x_n)
\end{aligned}
$$

Понављањем овог поступка добијамо да је

$$
\begin{aligned}
W(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \prod_{j=2}^{n} (x_j - x_1) \, W(x_2, x_3, \dots, x_n) \\
&= \prod_{j=2}^{n} (x_j - x_1) \prod_{j=3}^{n} (x_j - x_2) \, W(x_3, x_4, \dots, x_n) \\
&= \prod_{j=2}^{n} (x_j - x_1) \prod_{j=3}^{n} (x_j - x_2) \prod_{j=4}^{n} (x_j - x_2) \, W(x_4, x_5, \dots, x_n) \\
&= \prod_{i=1}^{3} \prod_{j=i+1}^{n} (x_j - x_i) \, W(x_4, x_5, \dots, x_n) \\
&= \prod_{i=1}^{4} \prod_{j=i+1}^{n} (x_j - x_i) \, W(x_5, x_6, \dots, x_n) \\
&= \dots = \prod_{i=1}^{n-1} \prod_{j=i+1}^{n} (x_j - x_i) \underbrace{W(x_n)}_{=|1|} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i) \, .
\end{aligned}
$$

□

Задатак 7.41. *У зависности од реалних параметара* x_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, *израчунати вредност детерминанте*

$$
\begin{vmatrix} 1 & x_1 + 1 & x_1^2 + x_1 & \dots & x_1^{n-1} + x_1^{n-2} \\ 1 & x_2 + 1 & x_2^2 + x_2 & \dots & x_2^{n-1} + x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n + 1 & x_n^2 + x_n & \dots & x_n^{n-1} + x_n^{n-2} \end{vmatrix} .
$$

Решење. Одузимањем узастопних колона ову детерминанту можемо свести на Вандермондову:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1+1 & x_1^2+x_1 & \dots & x_1^{n-1}+x_1^{n-2} \\ 1 & x_2+1 & x_2^2+x_2 & \dots & x_2^{n-1}+x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n+1 & x_n^2+x_n & \dots & x_n^{n-1}+x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$
$/(-1)$

$$= \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2+x_1 & \dots & x_1^{n-1}+x_1^{n-2} \\ 1 & x_2 & x_2^2+x_2 & \dots & x_2^{n-1}+x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2+x_n & \dots & x_n^{n-1}+x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$
$/(-1)$

$$= \dots = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= W(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i),$$

при чему смо на крају искористили да је $\det\left(A^T\right) = \det A$. □

Задатак 7.42. *Израчунати вредност детерминанте*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 8 & 27 & \dots & n^3 \\ 1 & 32 & 243 & \dots & n^5 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2^{2n-1} & 3^{2n-1} & \dots & n^{2n-1} \end{vmatrix}.$$

Решење. Ова детерминанта подсећа на Вандермондову (додуше транспоновану, али то нема никаквог ефекта о чему смо већ причали у претходном задатку). Извлачењем скалара 2 из друге колоне, 3 из треће, итд. добићемо детерминанту која у i-тој колони има парне степене i. Уколико те парне степене интерпретирамо као степене i^2 добићемо да је

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 8 & 27 & \dots & n^3 \\ 1 & 32 & 243 & \dots & n^5 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2^{2n-1} & 3^{2n-1} & \dots & n^{2n-1} \end{vmatrix} = n! \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 4 & 9 & \dots & n^2 \\ 1 & 16 & 81 & \dots & n^4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2^{2n-2} & 3^{2n-2} & \dots & n^{2n-2} \end{vmatrix}$$
$$= n!\, W\left(1, 4, 9, \dots, n^2\right)$$
$$= n! \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \left(j^2 - i^2\right)$$

$$= n! \prod_{j=2}^{n} \left(\prod_{i=1}^{j-1} (j-i) \right) \left(\prod_{i=1}^{j-1} (j+i) \right).$$

Уколико у производима по i уведемо смену $k = j - i$ и $k = j + i$, редом, претходни израз постаје

$$\prod_{j=2}^{n} j \left(\prod_{k=1}^{j-1} k \right) \left(\prod_{k=j+1}^{2j-1} k \right) = \prod_{j=2}^{n} \left(\prod_{k=1}^{2j-1} k \right) = \prod_{j=2}^{n} (2j-1)! = 3!\,5!\,7! \ldots (2n-1)!.$$

Алтернативни начин да се запише претходни резултат је $\underbrace{6}_{=2\cdot 3}{}^{n-1} \underbrace{20}_{=4\cdot 5}{}^{n-2} \ldots ((2n-4)(2n-3))^2 (2n-2)(2n-1)$.

У случају $n = 1$ подразумевамо да су празни производи $\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}$ и $\prod\limits_{j=2}^{n}$ једнаки 1 (тј. неутралу за множење). $\square$

Задатак 7.43. *У зависности од реалних параметара x_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, израчунати вредност детерминанте*

$$\begin{vmatrix} x_1+1 & x_2+1 & \ldots & x_n+1 \\ x_1^2+1 & x_2^2+1 & \ldots & x_n^2+1 \\ x_1^3+1 & x_2^3+1 & \ldots & x_n^3+1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^n+1 & x_2^n+1 & \ldots & x_n^n+1 \end{vmatrix}.$$

Решење. Поучени Задатком 7.41 знамо да када бисмо имали врсту (колону) јединица могли бисмо ову детерминанту свести на Вандермондову. Зато ћемо вештачки уметнути једну врсту са јединицама тако што применимо Лапласов развој „уназад“ (и дакле повећамо ред детерминанте за један). Тиме добијамо

$$\begin{vmatrix} x_1+1 & x_2+1 & \ldots & x_n+1 \\ x_1^2+1 & x_2^2+1 & \ldots & x_n^2+1 \\ x_1^3+1 & x_2^3+1 & \ldots & x_n^3+1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^n+1 & x_2^n+1 & \ldots & x_n^n+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & x_1+1 & x_2+1 & \ldots & x_n+1 \\ 1 & x_1^2+1 & x_2^2+1 & \ldots & x_n^2+1 \\ 1 & x_1^3+1 & x_2^3+1 & \ldots & x_n^3+1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_1^n+1 & x_2^n+1 & \ldots & x_n^n+1 \end{vmatrix}$$

$$/(-1)$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & \ldots & -1 \\ 1 & x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ 1 & x_1^2 & x_2^2 & \ldots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_1^n & x_2^n & \ldots & x_n^n \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ 1 & x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_1^n & x_2^n & \dots & x_n^n \end{vmatrix}.$$

Видимо да нам сада смета коефицијент -1 на месту $(1,1)$. Када би ту било 1, имали бисмо Вандермондову детерминанту (јер прва колона садржи степене јединице). Зато ћемо применити познати трик и Задатка 7.37 којим ћемо претходну детерминанту записати као збир једне Вандермондове детерминанте и једне детерминанте која има велики број нула. Дакле, тражена детерминанта је једнака

$$\begin{aligned}
&-\begin{vmatrix} 1-2 & 1+0 & 1+0 & \dots & 1+0 \\ 1 & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ 1 & x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_1^n & x_2^n & \dots & x_n^n \end{vmatrix} \\
&= -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ 1 & x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_1^n & x_2^n & \dots & x_n^n \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ 1 & x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_1^n & x_2^n & \dots & x_n^n \end{vmatrix} \longleftarrow \\
&= -W(1, x_1, x_2, \dots, x_n) + 2\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^n & x_2^n & \dots & x_n^n \end{vmatrix} \\
&= -\prod_{j=1}^{n}(x_j-1)\prod_{i=1}^{j-1}(x_j-x_i) + 2\prod_{k=1}^{n} x_k\, W(x_1, x_2, \dots, x_n) \\
&= -\prod_{k=1}^{n}(x_k-1)\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i) + 2\prod_{k=1}^{n} x_k \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i) \\
&= \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)\left(2\prod_{k=1}^{n} x_k - \prod_{k=1}^{n}(x_k-1)\right).
\end{aligned}$$

$\square$

Глава 8

Сопствени потпростори

За линеарни оператор $L : V \longrightarrow V$ векторског простора V су нам посебно занимљиви вектори $v \in V$ који се сликају на себе или „скоро на себе“.

Дефиниција 8.1. *Нека је V векторски простор над пољем F и $L : V \longrightarrow V$ његов линеарни оператор. Уколико постоје ненула вектор $v \in V \setminus \{\mathbb{O}\}$ и скалар $\lambda \in F$ за које важи $Lv = \lambda v$ кажемо да је λ сопствена вредност линеарног оператора L, а v сопствени вектор оператора L (за сопствену вредност λ).*

Услов из претходне дефиниције је еквивалентан са $(L - \lambda\mathbb{1})v = \mathbb{O}$, тј. $v \in \operatorname{Ker}(L - \lambda\mathbb{1})$, где је $\mathbb{1} : V \longrightarrow V$ идентичко пресликавање.

Теорема 8.2. *Нека је V векторски простор над пољем F, $L : V \longrightarrow V$ његов линеарни оператор и λ сопствена вредност тог оператора. Скуп $\operatorname{Ker}(L - \lambda\mathbb{1})$ (свих сопствених вектора за сопствену вредност λ са нула-вектором) је векторски потпростор простора V.*

Дефиниција 8.3. *Нека је V векторски простор над пољем F и $L : V \longrightarrow V$ његов линеарни оператор. Скуп $\operatorname{Ker}(L - \lambda\mathbb{1})$ зовемо сопствени потпростор линеарног оператора L за сопствену вредност λ.*

Напомињемо да нула-вектор није сопствени вектор (ни за једну сопствену вредност), али јесте елемент сопственог потпростора (за сваку сопствену вредност). За остале векторе префикс сопствени значи исто што и елемент одговарајућег сопственог потпростора.

Знамо да је векторски простор линеарних пресликавања коначно димензионалног простора изоморфан са вектроским простором матрица. Специјално, линеарним операторима коначно димензионалног простора одговара векторски простор квадратхих матрица. Зато ћемо имати идентичну причу и на језику матрица.

Дефиниција 8.4. *Нека је $A \in M_n(F)$ квадратна матрица. Уколико постоје ненула вектор $v \in F^n \setminus \{\mathbb{O}\}$ и скалар $\lambda \in F$ за које важи $Av = \lambda v$ кажемо да је λ сопствена вредност матрице A, а v сопствени вектор матрице A (за сопствену вредност λ). Скуп $\mathrm{Ker}(A-\lambda E)$ (свих сопствених вектора за сопствену вредност λ са нула-вектором) зовемо сопствени потпростор матице A за сопствену вредност λ.*

Следећа теорема показује једно битно својство сопствених вектора.

Теорема 8.5. *Сопствени вектори исте матрице (истог линеарног оператора) који одговарају међусобно различитим сопственим вредностима су линеарно независни.*

Последица овог тврђења је да су сопствени потпростори међусобно дисјунктни, па ће њихова сума бити директна. Дакле, наш почетни векторски простор V садржи директну суму $\bigoplus\limits_{\lambda} \mathrm{Ker}(L - \lambda \mathbb{1})$. (И аналогно, F^n садржи директну суму $\bigoplus\limits_{\lambda} \mathrm{Ker}(A - \lambda E)$.)

Почећемо са одређивањем сопствених вредости и вектора матрица јер је то технички једноставније од аналогне приче са операторима.

8.1 Карактеристични полином матрице и линеарног оператора

Сопствену вредност λ матрице $A \in M_n(F)$ смо дефинисали захтевом да матична једначина $(A - \lambda E)v = \mathbb{O}$ (по променљивој $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in F^n$) има бар једно ненула решење. Другим речима тражимо да систем линеарних једначина $(A - \lambda E)v = \mathbb{O}$ има бар два решења (јер је нула-вектор $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ увек решење хомогеног система). Према Крамеровом правилу то значи да детерминанта овог система $\det(A-\lambda E)$ мора бити једнака нули. (Преостали услови из Крамеровог правила, да је детерминанта по свим променљивим једнака нули, су тривијално испуњени јер свака од тих детерминанти сада садржи нула-колону.)

Дефиниција 8.6. *Нека је $A \in M_n(F)$ квадратна матрица. Полином $\det(A - \lambda E)$ по променљивој λ зовемо карактеристичи полином матрице A и означавамо са $\chi_A(\lambda)$.*

Претходно разматрање нас доводи до следећег тврђења.

Теорема 8.7. *Нека је $A \in M_n(F)$ квадратна матрица. Скалар $\lambda \in F$ је сопствена вредност матрице A ако и само ако је нула (корен) њеног карактеристичог полинома $\chi_A(\lambda)$.*

Из дефиниције је јасно да за карактеристични полином χ_A, за $A \in M_n(F)$, важи следеће:

- водећи коефицијент (коефицијент уз λ^n) једнак $(-1)^n$,
- коефицијент уз λ^{n-1} једнак $(-1)^{n-1} \operatorname{Tr} A$,
- слободни члан (коефицијент уз 1) једнак $\chi_A(0) = \det A$.

Задатак 8.8. *Одредити сопствене вредности и сопствене потрпросторе матрице* $A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -3 \\ -5 & 4 & -5 \\ 11 & 3 & 12 \end{pmatrix}$.

Решење. Карактеристични полином матрице A је

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & -3 & -3 \\ -5 & 4-\lambda & -5 \\ 11 & 3 & 12-\lambda \end{vmatrix}$$
$$/(-1)$$

$$= \begin{vmatrix} -2-\lambda & -3 & -1+\lambda \\ -5 & 4-\lambda & 0 \\ 11 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9-\lambda & 0 & 0 \\ -5 & 4-\lambda & 0 \\ 11 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= -(\lambda-1)(-\lambda+4)(-\lambda+9) = -(\lambda-1)(\lambda-4)(\lambda-9),$$

што значи да су сопствене вредности матрице A управо 1, 4 и 9.

Одредимо сада сопствене потпросторе матрице A. Почећемо са сопственом вредношћу $\lambda = 1$. Она одговара сопственом потпростору $\operatorname{Ker}(A - E)$ који садржи решења $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ система

$$(A - E)v = \begin{pmatrix} -3 & -3 & -3 \\ -5 & 3 & -5 \\ 11 & 3 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

односно

$$\begin{array}{rcrcrcrl}
-3x & - & 3\boxed{y} & - & 3z & = & 0 & \\
-5x & + & 3y & - & 5z & = & 0 & \\
11x & + & 3y & + & 11z & = & 0 & \\
\hline
-3x & - & 3y & - & 3z & = & 0 & /\cdot\frac{1}{3} \\
-8x & & & - & 8z & = & 0 & /\cdot\frac{1}{8} \\
\cancel{8x} & & & \cancel{+} & \cancel{8z} & \cancel{=} & \cancel{0} & \\
\hline
x & + & y & + & z & = & 0 & \\
x & & & + & z & = & 0 & \\
\hline
\end{array}$$

Дакле, $y = 0$ и $z = -x$, па је

$$\mathrm{Ker}(A - E) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ -\alpha \end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha \in \mathbb{R} \right\} = \mathscr{L} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Слично, за сопствену вредност $\lambda = 4$ сопствени потпростор $\mathrm{Ker}(A - 4E)$ садржи решења система

$$(A - 4E)v = \begin{pmatrix} -6 & -3 & -3 \\ -5 & 0 & -5 \\ 11 & 3 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

односно

$$\begin{array}{rcrcrcl|l}
-6x & - & 3y & - & 3z & = & 0 & /(-\frac{1}{3}) \\
-5x & & & - & 5z & = & 0 & /(-\frac{1}{5}) \\
11x & + & 3y & + & 8z & = & 0 & \\
\hline
2x & + & y & + & z & = & 0 & \\
x & & & + & z & = & 0 & \\
& & & & \cancel{0} & \cancel{=} & \cancel{0} & \\
\hline
\end{array}$$

Дакле,

$$\mathrm{Ker}(A - 4E) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \\ -\alpha \end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha \in \mathbb{R} \right\} = \mathscr{L} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

И на крају, сопствени потпростор $\mathrm{Ker}(A - 9E)$ садржи решења система

$$(A - 9E)v = \begin{pmatrix} -11 & -3 & -3 \\ -5 & -5 & -5 \\ 11 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

тј.

$$\begin{array}{rcrcrcll}
x & + & y & + & z & = & 0 & /(-3) \\
11x & + & 3y & + & 3z & = & 0 & \\
\hline
x & + & y & + & z & = & 0 & \\
8x & & & & & = & 0 & \\
\hline
\end{array}$$

чије је решење

$$\mathrm{Ker}(A - 9E) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ -\alpha \end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha \in \mathbb{R} \right\} = \mathscr{L} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$\square$

Наглашавамо да три квадратна система која смо решавали у претходном задатку морају имати више од једног решења. Да смо добили једно или ниједно решење то би значило да смо погрешили у рачуну приликом одређивања сопствених вредности или приликом решавања поменутих система.

Овде смо прво користили Крамерово правило да детектујемо вредности λ за које систем има више од једног решења, а затим смо за те вредности параметра λ систем решавали другим (Гаусовим) методом (јер у овом случају Крамерово правило не даје одговор).

Задатак 8.9. *Одредити сопствене вредности и сопствене потрпросторе матрице* $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & -6 \\ -2 & 7 & 6 \\ 2 & -5 & -4 \end{pmatrix}$.

Решење. Карактеристични полином матрице A можемо израчунати на сличан начин као у претходном задатку. Али да бисмо показали нешто ново израчунаћемо га Сарусовим правилом

$$\begin{aligned}\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = &\left| \begin{array}{ccc} 4-\lambda & -5 & -6 \\ -2 & 7-\lambda & 6 \\ 2 & -5 & -4-\lambda \end{array} \right| \begin{array}{cc} 4-\lambda & -5 \\ -2 & 7-\lambda \\ 2 & -5 \end{array} \\ =&(7-\lambda)\left(\lambda^2-16\right) - 60 - 60 + 12(7-\lambda) + 30(4-\lambda) + 10(4+\lambda) \\ =& -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 16\lambda + 12 = -\left(\lambda^3 - 7\lambda^2 + 16\lambda - 12\right).\end{aligned}$$

Сада треба одредити корене овог полинома. (То је разлог зашто обично избегавамо директну примену Сарусовог правила.) Према Безуовом[1] ставу уколико карактеристичини полином χ_A има целобројне нуле оне могу бити једино ±1, ±2, ±3, ±4, ±6 или ±12. Директом провером видимо да је 2 корен полинома χ_A. Дељењем $\chi_A(\lambda)$ са $\lambda - 2$ добијамо да је

$$\chi_A(\lambda) = -(\lambda-2)\left(\lambda^2 - 5\lambda + 6\right) = -(\lambda-2)^2(\lambda-3),$$

при чему смо у последњем кораку користили формулу за корене квадратне једначине или Вијетова[2] правила.

Одредимо сада сопствене потпросторе матрице A. Сопствени потпростор $\operatorname{Ker}(A - 2E)$ садржи решења $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ система

$$(A - 2E)v = \begin{pmatrix} 2 & -5 & -6 \\ -2 & 5 & 6 \\ 2 & -5 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

који је еквивалентан једначини

$$2x - 5y - 6z = 0.$$

[1] *Étienne Bézout* (1730. - 1783.), француски математичар

[2] *François Viéte* (1540. - 1603.), француски математичар, астроном и адвокат

Дакле,

$$\mathrm{Ker}(A-2E)=\left\{\begin{pmatrix}\frac{5}{2}\alpha+3\beta\\ \alpha\\ \beta\end{pmatrix}\,\middle|\,\alpha,\beta\in\mathbb{R}\right\}=\mathscr{L}\left(\begin{pmatrix}5\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}\right).$$

Слично, за сопствену вредност $\lambda=3$ сопствени потпростор $\mathrm{Ker}(A-3E)$ садржи решења система

$$\begin{array}{rcrcrcl l}
\boxed{x} & - & 5y & - & 6z & = & 0 & /\cdot 2 \quad /(-2)\\
-2x & + & 4y & + & 6z & = & 0 & \\
2x & - & 5y & - & 7z & = & 0 & \\
\hline
x & - & 5y & - & 6z & = & 0 & \\
 & - & 6y & - & 6z & = & 0 & /(-\frac{1}{6})\\
 & & \cancel{-5y} & \cancel{+} & \cancel{5z} & \cancel{=} & \cancel{0} & \\
\hline
\end{array}$$

Дакле, $z=-y$, $y=-x$ и

$$\mathrm{Ker}(A-3E)=\left\{\begin{pmatrix}\alpha\\ -\alpha\\ \alpha\end{pmatrix}\,\middle|\,\alpha\in\mathbb{R}\right\}=\mathscr{L}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

□

Приметимо да смо у претходна два задатка добили да је $\mathrm{Ker}(A-E)\oplus\mathrm{Ker}(A-4E)\oplus\mathrm{Ker}(A-9E)\leqslant\mathbb{R}^3$, односно $\mathrm{Ker}(A-2E)\oplus\mathrm{Ker}(A-3E)\leqslant\mathbb{R}^3$. У оба случаја ће важити и једнакост јер су у питању векторски простори исте димензије. Ова једнакост је очекивана у првом наведеном примеру јер имамо три различите сопствене вредности а сваки сопствени потпростор је (по дефиницији) димензије бар један. Са друге стране, делује да је једанкост у другом примеру случајност (јер није било разлога да очекујемо да ће $\mathrm{Ker}(A-2E)$ бити дводимензионалан). Ускоро ћемо видети од чега зависи да ли ће директна сума сопсвтених потпростора испунити цео простор или не.

Вратимо се сада на причу са операторима. Нека је $L:V\longrightarrow V$ линеарни оператор векторског просотра V коначне димензије n над пољем F. И нека је $v\in V\setminus\{\mathbb{O}\}$ сопствени вектор оператора L за сопствену вредност $\lambda\in F$. Уколико је $e=\{e_1,\dots,e_n\}$ произвољна база V, из $Lv=\lambda v$ следи да је

$$[L]_e[v]_e=[Lv]_e=[\lambda v]_e=\lambda[v]_e.$$

Последња једнакост каже да је колона $[v]_e\in F^n$ сопствени вектор матрице $[L]_e$ за сопствену вредност λ. И обрнуто, ако је $x=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\neq\mathbb{O}$ сопствени вектор матрице $[L]_e$ за сопствену вредност μ, слично се показује да је $v=x_1e_1+\cdots+x_ne_n$ сопствени вектор линеарног оператора L. Дакле,

Теорема 8.10. *Нека је $L : V \longrightarrow V$ линеарни оператор векторског просотра V коначне димензије n над пољем F са базом e, и нека је $\lambda \in F$ произвољан скалар. Вектор $v \in V \setminus \{\mathbb{O}\}$ је сопствени вектор оператора L за сопствену вредност λ ако и само ако је вектор $[v]_e \in F^n \setminus \{\mathbb{O}\}$ сопствени вектор матрице $[L]_e$ за сопствену вредност λ.*

Специјално, то значи да сопствене вредности линеарног оператора L (тј. матрице $[L]_e$) можемо наћи као корене карактеристичног полинома $\chi_{[L]_e}$.

Претпоставимо сада да је f нека друга база векторског просотра V. Питање је у каквој су вези карактеристични полиноми $\chi_{[L]_e}$ и $\chi_{[L]_f}$, тј. да ли карактеристични полином зависи од избора базе? Из $[L]_f = P_{e,f}^{-1}[L]_e P_{e,f}$ добијамо да је

$$\begin{aligned}
\chi_{[L]_f}(\lambda) &= \det([L]_f - \lambda E) = \det\left(P_{e,f}^{-1}[L]_e P_{e,f} - \lambda E\right) \\
&= \det\left(P_{e,f}^{-1}[L]_e P_{e,f} - \lambda P_{e,f}^{-1} P_{e,f}\right) = \det\left(P_{e,f}^{-1}\left([L]_e - \lambda E\right) P_{e,f}\right) \\
&= \frac{1}{\det(P_{e,f})} \det([L]_e - \lambda E) \det(P_{e,f}) = \chi_{[L]_e}(\lambda),
\end{aligned}$$

по Бине–Кошијевој теореми. Дакле, нема потребе наглашавати која је база у питању.

Дефиниција 8.11. *Нека је $L : V \longrightarrow V$ линеарни оператор коначно димензионалног просотра V и нека је e његова произвољна база. Полином $\chi_{[L]_e}$ ћемо звати карактеристични полином линеарног оператора L и означавати са χ_L.*

Како је избор базе небитан најпрактичније је радити са канонском базом.

Задатак 8.12. *Одредити све сопствене вредности и сопствене потпросторе линеарног оператора*

$$L : \mathbb{R}^3[x] \longrightarrow \mathbb{R}^3[x], \qquad Lp = p(1)g - p,$$

где је $g(x) = 1 + 2x + x^2 \in \mathbb{R}^3[x]$.

Решење. Одредимо најпре матрицу оператора L у канонској бази $e = \left\{1, x, x^2\right\}$. Из $L1 = 2x + x^2$, $Lx = 1 + x + x^2$ и $Lx^2 = 1 + 2x$ следи да је

$$[L]_e = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Карактеристични полином линеарног оператора L је

$$\chi_L(\lambda) = \det\left([L]_e - \lambda E\right) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} /(-1)$$

$$= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 1+\lambda & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 4 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+1)\left((\lambda-1)^2-4\right)$$
$$= -(\lambda+1)^2(\lambda-3).$$

Сопствене вредности линеарног оператора L су -1 и 3. Сопствене векторе $p \in \mathbb{R}^3[x]$ за сопствену вредност $\lambda = -1$ тражимо из услова

$$L(p)(x) = -p(x) + p(1)g = -p(x),$$

што се своди на $p(1) = 0$ (јер g није нула-полином). Зато је сопствени потпростор

$$\operatorname{Ker}(L + \mathbb{1}) = \left\{ p \in \mathbb{R}^3[x] \,\middle|\, p(1) = 0 \right\} = \mathscr{L}\left(1-x, 1-x^2\right).$$

И слично, сопствене векторе $p(x) = a + bx + cx^2 \in \mathbb{R}^3[x]$ за сопствену вредност 3 тражимо из услова

$$L(p) = p(1)g - p = 3p, \qquad \text{тј.} \qquad p(1)g = 4p,$$

који се своди на систем једначина

$$\begin{aligned} a+b+c &= 4a \\ 2(a+b+c) &= 4b \\ a+b+c &= 4c \end{aligned}$$

Очигледно је решење овог система $c = a$ и $b = 2a$, па је

$$\operatorname{Ker}(L - 3\cdot\mathbb{1}) = \left\{ a\left(1+2x+x^2\right) \,\middle|\, a \in \mathbb{R} \right\} = \mathscr{L}\left(1+2x+x^2\right).$$

Други начин да се ово уради (или можда боље рећи други запис) јесте да прво израчунамо сопствене потрпосторе матрице $[L]_e$, а затим одредимо вектори чије су то координате у канонској бази e. Прво, јасно је да се систем

$$\left([L]_e + E\right)v = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

своди на само једну једначину чије је решење $\operatorname{Ker}([L]_e + E) = \mathscr{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$. Други сопствени потпростор добијамо из система

$$\begin{array}{rcrcrcl} -3a & + & b & + & c & = & 0 \\ 2a & - & 2b & + & 2c & = & 0 \\ a & + & b & - & 3c & = & 0 \end{array}$$

чије је решење $\operatorname{Ker}([L]_e - 3E) = \cdots = \mathscr{L}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Одавде се лако може прочитати да је

$$\operatorname{Ker}(L + \mathbb{1}) = \mathscr{L}\left(1 - x, 1 - x^2\right) \qquad \text{и} \qquad \operatorname{Ker}(L - 3 \cdot \mathbb{1}) = \mathscr{L}\left(1 + 2x + x^2\right).$$

□

8.2 Теорема Кејли–Хамилтона

Да бисмо формулисали Теорему Кејли[3]–Хамилтона[4] потребно је да знамо шта је полином од матрице (линеарног оператора).

Прво, за квадратне матрице A имамо дефинисане степене A^k. Затим имамо дефинисано множење скаларом и сабирање αA^k и βA^l. То значи да имамо и полиноме од матрице. Нека је $p(x) = \alpha_k x^k + \alpha_{k-1} x^{k-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$ полином из $F[x]$ и нека је A матрица из $M_n(F)$, имамо вредност полинома p у матрици A дефинисану са

$$p(A) := \alpha_k A^k + \alpha_{k-1} A^{k-1} + \cdots + \alpha_1 A + \alpha_0 E.$$

Наглашавамо да уз слободни члан додајемо јединичу матрицу (као нулти степен матрице A).

Задатак 8.13. *Израчунати* $p(A)$ *ако је*

а) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ *и* $p(x) = x^3 + x^2 + 3x + 4$.

б) $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 7 & 3 \end{pmatrix}$ *и* $p(x) = -x^3 + 2x^2 + x - 5$.

[3] *Arthur Cayley* (1821. - 1895.), британски математичар
[4] *Sir William Rowan Hamilton* (1805. - 1865.), ирски математичар, физичар и астроном

Решење. а) Директним рачуном добијамо да је

$$\begin{aligned}p(A) =& A^3 + A^2 + 3A + 4\\ =& \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}\\ &+ 3\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\\ =& \begin{pmatrix} -43 & -6 \\ 15 & -49 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -8 \\ 20 & -9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 15 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\\ =& \begin{pmatrix} -31 & -20 \\ 50 & -51 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

б) Слично,

$$\begin{aligned}p(A) =& - A^3 + 2A^2 + A - 5\\ =& - \begin{pmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 7 & 3 \end{pmatrix}^3 + 2\begin{pmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 7 & 3 \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 7 & 3 \end{pmatrix}\\ &- 5\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\\ =& - \begin{pmatrix} -3 & -28 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & -7 & 3 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 28 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 14 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 7 & 3 \end{pmatrix}\\ &+ \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}\\ =& \begin{pmatrix} -3 & 84 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 42 & -3 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

□

Имамо аналогну причу и на језику оператора. И код оператора имамо дефинисано сабирање и множење скаларом, а степен оператора је у ствари композиција $L^k := \underbrace{L \circ \cdots \circ L}_{k}$. Нека је $p(x) = \alpha_k x^k + \alpha_{k-1}x^{k-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$ полином из $F[x]$ и нека је L линеарнои оператор неког векторског простора над пољем F, имамо вредност полинома p у оператору L дефинисану са

$$p(L) := \alpha_k L^k + \alpha_{k-1}L^{k-1} + \cdots + \alpha_1 L + \alpha_0 \mathbb{1}.$$

Наглашавамо да уз слободни члан додајемо идентички оператор $\mathbb{1}$ (као нулти степен оператора L).

Задатак 8.14. *Израчунати оператор* $p(L)$ *ако је*

а) $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $L(a, b, c) = (a - b, 2b + c, a + b + c)$ *и* $p(x) = x^2 - 3x + 1$.

б) $L : \mathbb{R}^3[x] \longrightarrow \mathbb{R}^3[x]$, $L\left(a + bx + cx^2\right) = (-3a + 4c) - bx + (-2a + 7b + 3c)x^2$ *и* $p(x) = -x^3 + 2x^2 + x - 5$.

Решење. а) Израчунајмо најпре

$$\begin{aligned}
&L^2(a, b, c)\\
&= (L \circ L)(a, b, c) = L(a - b, 2b + c, a + b + c)\\
&= ((a - b) - (2b + c), 2(2b + c) + (a + b + c), (a - b) + (2b + c) + (a + b + c))\\
&= (a - 3b - c, a + 5b + 3c, 2a + 2b + 2c).
\end{aligned}$$

Линеарни оператор $p(L)$ је дат са

$$\begin{aligned}
p(L)(a, b, c) = &\left(L^2 - 3L + \mathbb{1}\right)(a, b, c) = L^2(a, b, c) - 3L(a, b, c) + \mathbb{1}(a, b, c)\\
=&(a - 3b - c, a + 5b + 3c, 2a + 2b + 2c)\\
&- 3(a - b, 2b + c, a + b + c) + (a, b, c)\\
=&(-a + b, a, -a - b).
\end{aligned}$$

б) Овде треба бити пажљив и не мешати полиноме као векторе векторског простора $\mathbb{R}^3[x]$ и полином који примењујемо на оператор L. Прво, имамо да је

$$\begin{aligned}
L^2\left(a + bx + cx^2\right) &= L\left((-3a + 4c) - bx + (-2a + 7b + 3c)x^2\right)\\
&= (a + 28b) + bx + (14b + c)x^2
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
L^3\left(a + bx + cx^2\right) &= L\left((a + 28b) + bx + (14b + c)x^2\right)\\
&= (-3a - 28b + 4c) - bx + (-2a - 7b + 3c)x^2.
\end{aligned}$$

Следи,

$$\begin{aligned}
&\left(-L^3 + 2L^2 + L - 5 \cdot \mathbb{1}\right)\left(a + bx + cx^2\right)\\
&= -\left((-3a - 28b + 4c) - bx + (-2a - 7b + 3c)x^2\right)\\
&\quad + 2\left((a + 28b) + bx + (14b + c)x^2\right) + \left((-3a + 4c) - bx + (-2a + 7b + 3c)x^2\right)\\
&\quad - 5\left(a + bx + cx^2\right)\\
&= (-3a + 84b) - 3bx + (42b - 3c)x^2.
\end{aligned}$$

Други начин да се ово уради јесте да прво одредимо матрицу $[L]_e = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 7 & 3 \end{pmatrix}$ линеарног оператора L у канонској бази e. Затим израчунамо полином

$$p\left([L]_e\right) = -[L]_e^3 + 2[L]_e^2 + [L]_e - 5E = \begin{pmatrix} -3 & 84 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 42 & -3 \end{pmatrix}$$

(што смо већ урадили у Задатку 8.14.б)) и искористимо чињеницу да је

$$[p(L)]_e = -\left[L^3 + 2L^2 + L - 5 \cdot \mathbb{1}\right]_e = -[L]_e^3 + 2[L]_e^2 + [L]_e - 5E = p\left([L]_e\right).$$

Дакле, $p(L)$ је линеарни оператор који у канонској бази има матрицу $\begin{pmatrix} -3 & 84 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 42 & -3 \end{pmatrix}$, односно

$$p(L)\left(a + bx + cx^2\right) = (-3a + 84b) - 3bx + (42b - 3c)x^2.$$

□

Задатак 8.15. *Нека је L линеарни оператор и нека су p и q полиноми. Показати да важи $p(L) \circ q(L) = q(L) \circ p(L)$.*

Решење. Нека је $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i$ и $q(x) = \sum\limits_{j=0}^{m} b_j x^j$. Тада је

$$p(L) \circ q(L) = \left(\sum_{i=0}^{n} a_i L^i\right) \circ \left(\sum_{j=0}^{m} b_j L^j\right) = \sum_{i=0}^{n} a_i L^i \circ \left(\sum_{j=0}^{m} b_j L^j\right), \tag{8.16}$$

где је $L^0 = \mathbb{1}$. Притом смо у последњој једнакости користили да је $(\alpha f + \beta g) \circ h = \alpha f \circ h + \beta g \circ h$, за све функције f, g и h. Ово следи директно из дефиниције сабирања функција и множења скаларом јер је

$$\begin{aligned} ((\alpha f + \beta g) \circ h)(x) &= (\alpha f + \beta g)(h(x)) = \alpha f(h(x)) + \beta g(h(x)) \\ &= (\alpha f \circ h + \beta g \circ h)(x). \end{aligned}$$

Уколико бисмо желели да урадимо исту ствар и са другом заградом у (8.16) требала би нам аналогна једнакост $f \circ (\alpha g + \beta h) = \alpha f \circ g + \beta f \circ h$. Ова једнакост важи само уколико је функција f линеарна. У том случају је

$$\begin{aligned} (f \circ (\alpha g + \beta h))(x) &= f((\alpha g + \beta h)(x)) = f(\alpha g(x) + \beta h(x)) \\ &= \alpha f \circ g(x) + \beta f \circ h(x) = (\alpha f \circ g + \beta f \circ h)(x). \end{aligned}$$

Овим (8.16) постаје

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \sum_{j=0}^{m} b_j L^i \circ L^j = \sum_{i=0}^{n} a_i \sum_{j=0}^{m} b_j L^{i+j} = \sum_{j=0}^{m} b_j \sum_{i=0}^{n} a_i L^j \circ L^i. \tag{8.17}$$

Последњи израз се на идентичан начин своди на $q(L) \circ p(L)$. □

Решење претходног задатка нам говори и више. За произвољне полиноме $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ и $q(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j$ можемо дефинисати њихов производ са $(pq)(x) := \sum_{k=0}^{n+m} \left(\sum_{\substack{0 \leqslant i \leqslant n \\ 0 \leqslant j \leqslant m \\ i+j=k}} a_i b_j \right) x^k$ (што до сада нисмо формално урадили). Тада нам (8.17) каже да ће важити $(pq)(L) = p(L) \circ q(L)$ (уз напомену да ово важи само за линеарне операторе L, не и за произвољна пресликавања). Одатле индукцијом следи да важи и $\left(\prod_{i=1}^{n} p_i \right)(L) = p_1(L) \circ p_2(L) \circ \cdots \circ p_n(L)$, за све n. Наравно, све речено важи и уколико линеарни оператор L заменимо квадратном матрицом A. То ће нам ускоро бити од велике помоћи приликом одређивања минималног полинома матрица и линеарних оператора.

Задатак 8.18. *Нека је A квадратна матрица таква да је -2 сопствена вредност матрице $A^2 - 2A$. Показати да је -4 сопствена вредност матрице A^4.*

Решење. Ако је $v \neq 0$ сопствени вектор матрице $A^2 - 2A$ за сопствену вредност -2. Тада из $\left(A^2 - 2A\right) = -2v$ следи $A^2 v = 2(A - E)v$ и

$$\begin{aligned} A^4 v = A^2 \left(A^2 v\right) &= A^2(2(A-E))v = 2(A^3 - A^2)v = 2(A-E)A^2 v \\ &= 2(A-E) \cdot 2(A-E)v = 4(A-E)^2 v. \end{aligned}$$

Сада из Задатка 6.5 (јер је $A(-E) = -A = (-E)A$) следи да је

$$A^4 v = 4\left(A^2 - 2A + E\right)v = 4(2(A-E)v + (-2A+E)v) = 4(-E)v = -4v.$$

Другим речима, скуп $\operatorname{Ker}\left(A^4 + 4E\right)$ је нетривијалан, па је -4 сопствена вредност матрице A^4. □

Сада када знамо шта је вредност полинома у матрици (линеарном оператору) можемо формулисати чувену Кејли–Хамилтонову теорему. За потребе те теореме подразумеваћемо да је поље скалара F једнако $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ или такво да се карактеристични полином матрице A (линеарног оператора L) може раставити на линеарне факторе. Како ће у свим задацима овај услов бити тривијално испуњен то надаље нећемо наглашавати.

Теорема 8.19. *(1)* (Теорема Кејли–Хамилтона за матрице) *За произвољну кватратну матрицу A важи $\chi_A(A) = \mathbb{O}$.*

(2) (Теорема Кејли–Хамилтона за линеарне операторе) *За произвољан линеарни оператор L коначно димензионалног векторског простора важи $\chi_L(L) = \mathbb{O}$.*

Другим речима, свака матрица (линеарни оператор) је корен свог карактеристичног полинома.

Овим смо пронашли један полином који поништава матрица. Заправо то смо већ и знали, како је векторски простор матрица $M_n(F)$ димензије n^2, јасно је да матрице $E, A, \ldots, A^n$ морају бити линеарно зависне, што даје један полином степена највише n^2 чији је корен матрица A. Али Теорема Кејли–Хамилтона тврди да постоји и полином ,,много мањег“ степена n. Следеће природно питање је да ли је карактеристични полином заправо полином најмањег степена који поништава матрица или постоји неки полином још мањег степена?

Теорема 8.20. *Нека је $A \in M_n(F)$ произвољна квадратна матрица. Постоји тачно један полином $p \in F[x]$ који задовољава следеће три особине:*

(1) Полином p је моничан (тј. водећи коефицијент му је један).

(2) Матрица A поништава полином p (тј. важи $p(A) = \mathbb{O}$).

(3) $(\forall q \in F[x])\ q(A) = \mathbb{O} \ \Rightarrow\ p|q$ (тј. $(\exists r \in F[x])\ q = pr$).

Дефиниција 8.21. *Полином p из претходне теореме зовемо минимални полином матрице A и означавамо са μ_A.*

Из ове дефиниције и Теореме Кејли–Хамилтона следи да минимални полином μ_A дели карактеристични полином χ_A. Специјално, сваки прост (нерастављив) делилац полинома μ_A дели и полином χ_A. Међутим, занимљиво је да важи и обрнуто. О томе говори наредна теорема.

Теорема 8.22. *Нека је $\chi_A = \pm \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ факторизација карактеристичног полинома на просте чиниоце (где су p_i прости полиноми и $\alpha_i \in \mathbb{N}$). Тада је $\mu_A = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\beta_i}$, где је $1 \leqslant \beta_i \leqslant \alpha_i$, за све $1 \leqslant i \leqslant k$.*

Дакле, минимални полином има исте просте чиниоце као и карактеристични полином, само евентуално мање вишеструкости.

Минимални полином линеарног оператора се дефинише аналогно и задовољава аналогна тврђења.

Сада ћемо приказати неколико примена карактеристичог и минималног полинома. Искористићемо матрице и операторе чије смо карактеристичне полиноме већ израчунали.

Задатак 8.23. *Нека је* $A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -3 \\ -5 & 4 & -5 \\ 11 & 3 & 12 \end{pmatrix}$.

а) Показати да је матирца A инвертибилна и израчунати инверз A^{-1}.

б) Израчунати степен A^n, за све $n \in \mathbb{N}$.

в) Одредити бар једну базу и димензију векторског простора $V = \mathscr{L}\left(E, A, A^2, A^3, \ldots\right)$.

Решење. Карактеристични полином матрице A је

$$\chi_A(\lambda) = -(\lambda-1)(\lambda-4)(\lambda-9) = -\lambda^3 + 14\lambda^2 - 49\lambda + 36,$$

што смо већ израчунали у Задатку 8.8.

а) Матрица A је инвертибилна јер је $\det A = \chi_A(0) = 36 \neq 0$. Према Теореми Кејли–Хамилтона важи $\chi_A(A) = -A^3 + 14A^2 - 49A + 36E = 0$, тј.

$$A(-A^2 + 14A - 49E) = -A^3 + 14A^2 - 49A = -36E.$$

Дељењем овог израза са -36 добијамо инверз

$$\begin{aligned}
A^{-1} =& \frac{1}{36}\left(A^2 - 14A + 49A\right) \\
=& \frac{1}{36}\left(\begin{pmatrix} -14 & -15 & -15 \\ -65 & 16 & -65 \\ 95 & 15 & 96 \end{pmatrix} - 14\begin{pmatrix} -2 & -3 & -3 \\ -5 & 4 & -5 \\ 11 & 3 & 12 \end{pmatrix}\right. \\
&\left. +49\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\
=& \begin{pmatrix} \frac{7}{4} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{5}{36} & \frac{1}{4} & \frac{5}{36} \\ -\frac{59}{36} & -\frac{3}{4} & -\frac{23}{36} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

б) Из $\chi_A(A) = -A^3 + 14A^2 - 49A + 36E = 0$ следи да је

$$\begin{aligned}
A^3 &= 14A^2 - 49A + 36E, \\
A^4 &= A\left(14A^2 - 49A + 36E\right) = 14A^3 - 49A^2 + 36A \\
&= 14\left(14A^2 - 49A + 36E\right) - 49A^2 + 36A, \\
&\ \ \vdots
\end{aligned} \tag{8.24}$$

Понављањем овог поступка можемо закључити да су сви степени A^n линеарне комбинације матрица E, A и A^2. Само треба скаларе у тим линеарним комбинацијама. У овом тренутку не видимо неку правилност на основу A^3, A^4, ...

Узећемо полином λ^n и поделити га карактеристичним полиномом $\chi_A(\lambda)$. Добићемо неки количник $q(\lambda)$ и неки остатак $r(\lambda)$ (чији је степен мањи од степена делиоца χ_A, који износи 3). Тада је

$$\lambda^n = \chi_A(\lambda)q(\lambda) + a\lambda^2 + b\lambda + c,$$

за неке скаларе $a, b, c \in \mathbb{R}$. Али онда је

$$A^n = aA^2 + bA + cE,$$

по Кејли–Хамилтоновој теореми. Ово смо суштински радили и у (8.24), само што смо то мало другачије писали.

Остаје још да одредимо коефицијенте a, b и c. То ћемо урадити тако што мењамо λ сопственим вредностима $\lambda = 1, 4, 9$. Свака од њих поништава карактеристични полином χ_A, те добијамо систем

$$\begin{array}{rcrcrcl} a & + & b & + & c & = & 1 \\ 16a & + & 4b & + & c & = & 4^n \\ 81a & + & 9b & + & c & = & 9^n \end{array}$$

Његове детерминанте су

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \\ 81 & 9 & 1 \end{vmatrix} = -120,$$

$$\Delta_a = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4^n & 4 & 1 \\ 9^n & 9 & 1 \end{vmatrix} = -5 + 8 \cdot 4^n - 3 \cdot 9^n,$$

$$\Delta_b = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 16 & 4^n & 1 \\ 81 & 9^n & 1 \end{vmatrix} = 65 - 80 \cdot 4^n + 15 \cdot 9^n,$$

$$\Delta_c = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 16 & 4 & 4^n \\ 81 & 9 & 9^n \end{vmatrix} = -180 + 72 \cdot 4^n - 12 \cdot 9^n,$$

па је

$$a = \frac{5 - 8 \cdot 4^n + 3 \cdot 9^n}{120},$$
$$b = \frac{-65 + 80 \cdot 4^n - 15 \cdot 9^n}{120},$$
$$c = \frac{180 - 72 \cdot 4^n + 12 \cdot 9^n}{120}.$$

Сада можемо израчунати и

$$A^n = aA^2 + bA + cE = \cdots = \begin{pmatrix} 2 - 4^n & 1 - 4^n & 1 - 4^n \\ 4^n - 9^n & 4^n & 4^n - 9^n \\ -2 + 4^n + 9^n & -1 + 4^n & -1 + 4^n + 9^n \end{pmatrix}. \tag{8.25}$$

в) Иако је векторски простор V задат преко бесконачног броја генератора јасно је да он мора бити коначне димензије као потпростор деветодимензионалног простора $M_3(\mathbb{R})$.

У претходном делу задатка смо показали да је $A^n \in \mathscr{L}\left(E, A, A^2\right)$, за све $n \in \mathbb{N}$. То значи да је скуп $\left\{E, A, A^2\right\}$ генератриса векторског простора V. Покажимо да су ове три матрице линеарно независне. То се може урадити и директном провером, али је вероватно лакше искористити мало теорије. Претпоставимо да је $\alpha A^2 + \beta A + \gamma E = \mathbb{O}$, за неке скаларе $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Тада је полином $p(\lambda) = \alpha\lambda^2 + \beta\lambda + \gamma$ дељив полиномом μ_A (по дефиницији минималног полинома). Са друге стране, како су све нуле карактеристичног полинома једноструке по Теореми 8.22 мора бити $\mu_A = -\chi_A$ (јер је минимални полином моничан). Сада из $\mu_A | p$ и $\deg p \leqslant 2 < 3 = \deg \mu_A$ следи да је p нула-полином, односно $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Дакле, скуп $\left(E, A, A^2\right)$ је база векторског простора V, па је $\dim V = 3$. $\square$

Наглашавамо да коефицијенти a, b и c и полиноми q и r који се јављају у претходном задатку зависе од степена n, па је можда исправније (али мање прегледно) писати a_n, b_n, итд.

Приликом одређивања инверза смо имали дељење са 36. Тај број (до на знак) представља слободан члан у полиному χ_A, а знамо да је слободан члан једнак $\chi_A(0) = \det A$. Ово дељење је потпуно очекивано јер знамо да је $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A$.

Такође, приметимо и да смо приликом одређивања степена у једном тренутку имали неке разломке. То је очекивано јер смо коефицијенте a, b и c тражили као решења система, а Крамерово правило каже да ће та решења често бити разломци. Ипак, крајње решење (8.25) мора имати све целобројне коефицијенте као степен матрице A која је имала све целобројне коефицијенте.

Као проверу, можемо заменити $n = 0, 1, 2$ у (8.25) и уверити се да заиста добијамо E, A, A^2, редом.

Задатак 8.26. *Дата је матрица* $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & -6 \\ -2 & 7 & 6 \\ 2 & -5 & -4 \end{pmatrix}$.

а) Израчунати минимални полином матрице A.

б) Израчунати инверз A^{-1}.

в) Израчунати степен A^n, *за све* $n \in \mathbb{N}$.

Решење. а) Карактеристични полином

$$\chi_A(\lambda) = -\left(\lambda^3 - 7\lambda^2 + 16\lambda - 12\right) = -(\lambda-2)^2(\lambda-3)$$

смо израчунали у Задатку 8.9. Сада са њим можемо поновити поступак из претходног задатка за преостала два дела задатка. Међутим, пошто карактеристични полином има двоструку нулу могуће је да минимални полином има мањи степен од $\deg \chi_A$. Зато би било практичније да прво нађемо минимални полином μ_A, па да онда радимо са њим. (А ово се и свакако тражи у задатку.)

Према Теореми 8.22 кандидати за минимални полином су $p(\lambda) = (\lambda-2)(\lambda-3)$ и $q(\lambda) = (\lambda-2)^2(\lambda-3)$. Међу њима тражимо онај са најмањим степеном који поништава A. Зато ћемо проверити да ли је $p(A) = \mathbb{O}$:

$$p(A) = (A-2E)(A-3E) = \begin{pmatrix} 2 & -5 & -6 \\ -2 & 5 & 6 \\ 2 & -5 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -5 & -6 \\ -2 & 4 & 6 \\ 2 & -5 & -7 \end{pmatrix} = \mathbb{O}.$$

(Овде смо искористили напомену из Задатка 8.15.) Дакле, минимални полином је $\mu_A(\lambda) = p(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6$.

б) Из $A^2 - 5A + 6E = 0$ следи да је $A(A-5E) = -6E$, па је инверз

$$A^{-1} = -\frac{1}{6}(A-5E) = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

в) Уколико полином λ^n поделимо минималним полином μ_A добићемо количник q и остатак r чији је степен мањи од $\deg \mu_A = 2$. Дакле,

$$\lambda^n = q(\lambda)\mu_A(\lambda) + a\lambda + b,$$

за неке $a, b \in \mathbb{R}$. Заменом $\lambda = 2$ и $\lambda = 3$ добијамо систем

$$\begin{array}{rcrcl} 2a & + & b & = & 2^n \\ 3a & + & b & = & 3^n \end{array}$$

чије је решење $a = -2^n + 3^n$ и $b = 3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n$. Зато је

$$\begin{aligned} A^n &= q(A)\mu_A(A) + aA + b \\ &= (-2^n + 3^n) \begin{pmatrix} 4 & -5 & -6 \\ -2 & 7 & 6 \\ 2 & -5 & -4 \end{pmatrix} + (3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2^n + 2 \cdot 3^n & 5\,(2^n - 3^n) & 6\,(2^n - 3^n) \\ 2\,(2^n - 3^n) & -4 \cdot 2^n + 5 \cdot 3^n & 6\,(-2^n + 3^n) \\ 2\,(-2^n + 3^n) & 5\,(2^n - 3^n) & 7 \cdot 2^n - 6 \cdot 3^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

У последњем задатку смо радили са минималним полиномом (а не са карактеристичним) како би рачун био једноставнији. Али ту постоји и други разлог. Да смо радили са карактертичним полиномом, уместо параметара a и b бисмо имали три непозната параметра, која потом не бисмо могли једнозначно да одредимо из две једначине. Постоји начин да и се то разреши (видећемо како у Задатку 8.31), али свакако је знатно компликованије од решења које смо управо изложили.

Задатак 8.27. *Дат је линеарни оператор*

$$L : \mathbb{R}^3[x] \longrightarrow \mathbb{R}^3[x], \qquad Lp = p(1)g - p,$$

где је $g(x) = 1 + 2x + x^2 \in \mathbb{R}^3[x]$.

а) Одредити линеарни оператор L^n*, за све* $n \in \mathbb{N}$.

б) Показати да је оператор L *инвертибилан и одредити линеарни оператор* L^{-1}.

Решење. У Задатку 8.12 смо видели да је карактеристични полином линеарног оператора L једнак $\chi_L(\lambda) = -(\lambda+1)^2(\lambda-3)$. Зато ће минимални полином овог оператора бити или $(\lambda+1)(\lambda-3)$ или $(\lambda+1)^2(\lambda-3)$. Проверимо да ли је први поменути полином минимални. Из

$$(L + \mathbb{1})p = Lp + \mathbb{1}p = p(1)g - p + p = p(1)g$$

и

$$(L - 3 \cdot \mathbb{1})p = Lp - 3 \cdot \mathbb{1}p = p(1)g - p - 3p = p(1)g - 4p$$

следи да је

$$\begin{aligned}((L + \mathbb{1}) \circ (L - 3 \cdot \mathbb{1}))p &= (L + \mathbb{1})(p(1)g - 4p) = (p(1)g - 4p)(1)g \\ &= (p(1)g(1) - 4p(1))g = (p(1) \cdot 4 - 4p(1))g = 0 = \mathbb{O}p.\end{aligned}$$

То значи да је $\mu_L(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda - 3)$ минимални полином линеарног оператора L.

а) Примењујемо исти трик као са матрицама. Прво полином λ^n поделимо минималним полиномом μ_L. Добијамо да је

$$\lambda^n = \mu_L(\lambda)q(\lambda) + a\lambda + b,$$

за неке скаларе $a, b \in \mathbb{R}$. Заменом сопствених вредности у претходној релацији добијамо систем

$$\begin{array}{rcrcl}(-1)^n &=& -a &+& b \\ 3^n &=& 3a &+& b\end{array}$$

чије је решење $a = \frac{3^n-(-1)^n}{4}$ и $b = \frac{3^n+3(-1)^n}{4}$. На крају заменом $\lambda = L$ добијамо да је

$$L^n = \mu_L(L)q(L) + aL + b \cdot \mathbb{1} = \frac{3^n - (-1)^n}{4}L + \frac{3^n + 3(-1)^n}{4}\mathbb{1},$$

односно

$$\begin{aligned}L^n p &= \frac{3^n - (-1)^n}{4}Lp + \frac{3^n + 3(-1)^n}{4}\mathbb{1}p \\ &= \frac{3^n - (-1)^n}{4}(p(1)g - p) + \frac{3^n + 3(-1)^n}{4}p = \frac{3^n - (-1)^n}{4}p(1)g + (-1)^n p.\end{aligned}$$

б) Из $L^2 - 2L - 3 \cdot \mathbb{1} = (L + \mathbb{1}) \circ (L - 3 \cdot \mathbb{1}) = \mathbb{O}$ следи да је $L \circ (L - 2 \cdot \mathbb{1}) = 3 \cdot \mathbb{1}$, односно $L \circ \big(\frac{1}{3}L - \frac{2}{3} \cdot \mathbb{1}\big) = \mathbb{1}$. На исти начин се показује и да је $\big(\frac{1}{3}L - \frac{2}{3} \cdot \mathbb{1}\big) \circ L = \mathbb{1}$ (а и следи из претходног и из Задатка 8.15). То значи да је оператор L инвертибилан, као и да је његов инверз једнак

$$L^{-1}p = \left(\frac{1}{3}L - \frac{2}{3} \cdot \mathbb{1}\right) p = \frac{1}{3}Lp - \frac{2}{3} \cdot \mathbb{1}p = \frac{1}{3}(p(1)g - p) - \frac{2}{3}p = \frac{1}{3}p(1)g - p.$$

□

Наглашавамо да смо претходни задатак могли урадити и тако што прво одредимо инверз и степен матрице $[L]_e$, па потом нађемо линеарне операторе чије су то матрице.

Задатак 8.28. *Нека је $A \in M_3(\mathbb{R})$ чија је детерминанта 8, траг 7, а једна сопствена вредност 1.*

а) Одредити све сопствене вредности матрице A.

б) Показати да је $\mathcal{B} = \{E, A, A^2\}$ база векторског простора $V = \mathscr{L}(E, A, A^2, A^3, \dots)$ и одредити координате матрице A^{2021} у бази $\mathcal{B}$.

Решење. а) Из особина карактеристичног полинома знамо да је

$$\chi_A(\lambda) = -\lambda^3 + (\operatorname{Tr} A)\lambda^2 + \dots \lambda + \det A = -\lambda^3 + 7\lambda^2 + \dots \lambda + 8.$$

Како је једна нула овог полинома $\lambda = 1$ преостале две нуле можемо наћи из Вијетових правила

$$\lambda_1 + \lambda_2 + 1 = 7 \qquad \text{и} \qquad \lambda_1\lambda_2 \cdot 1 = 8.$$

Одавде добијамо да је $\lambda_1 = 2$ и $\lambda_2 = 4$ (или обрнуто). Сада је карактеристични полином (опет по Вијетовим правилима)

$$\chi_A(\lambda) = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - (1 \cdot 2 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot 4)\lambda + 8 = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 14\lambda + 8.$$

б) Дељењем полинома λ^n карактеристичним полиномом добијамо да је

$$\lambda^n = \chi_A(\lambda)q(\lambda) + a\lambda^2 + b\lambda + c, \tag{8.29}$$

за неке скаларе $a, b, c \in \mathbb{R}$. Специјално, то значи да је

$$A^n = aA^2 + bA + cE \in \mathscr{L}(\mathcal{B}), \tag{8.30}$$

за све $n \in \mathbb{N}$. Дакле, скуп $\mathcal{B}$ генерише векторски простор V, па остаје још да покажемо да је линеарно независан. Нека су $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ скалари за које је $\alpha A^2 + \beta A + \gamma E = 0$. Онда полином $p(\lambda) = \alpha\lambda^2 + \beta\lambda + \gamma$ мора бити дељив минималним полиномом $\mu_A(\lambda)$. Како карактеристични полином нема вишеструке нуле, минимални полином ће бити $\mu_A = -\chi_A$ (због моничности). Из $\mu_A | p$ и $\deg \mu_A > \deg p$ следи да је $p = \mathbb{O}$, тј. $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Све заједно значи да је $\mathcal{B}$ база векторског простора V.

Координате матрице A^n, $n = 2021$, у бази $\mathcal{B}$ су скалари a, b и c из (8.30). Заменом $\lambda = 1, 2, 4$ у (8.29) долазимо до система

$$
\begin{array}{rcrcrcll}
a & + & b & + & \boxed{c} & = & 1 & /(-1) \\
4a & + & 2b & + & c & = & 2^n & \\
16a & + & 4b & + & c & = & 4^n & \\
\hline
a & + & b & + & c & = & 1 & \\
3\boxed{a} & + & b & & & = & 2^n - 1 & /(-5) \\
15a & + & 3b & & & = & 4^n - 1 & \\
\hline
\end{array}
$$

чије је решење $b = -\frac{1}{2}4^n + \frac{5}{2}2^n - 2$, $a = \frac{1}{6}4^n - \frac{1}{2}2^n + \frac{1}{3}$ и $c = \frac{1}{3}4^n - 2 \cdot 2^n + \frac{8}{3}$.

Другим речима, $[A]_e = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}4^{2021} - 2^{2020} + \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2}4^{2021} + 5 \cdot 2^{2020} - 2 \\ \frac{1}{3}4^{2021} - 2^{2022} + \frac{8}{3} \end{pmatrix}$. $\square$

Задатак 8.31. *Дат је линеарни оператор*

$$L : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow M_2(\mathbb{R}), \qquad LX = AXA^{-1},$$

где је $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

а) Одредити сопствене вредности и сопствене потпросторе линеарног оператора L.

б) Одредити оператор L^n*, за све* $n \in \mathbb{N}$.

Решење. а) Линеарни оператор

$$
\begin{aligned}
L\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x + 2y & y \\ -2x - 4y + z + 2t & -2y + t \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

у канонској бази e векторског простора $M_2(\mathbb{R})$ има матрицу

$$[L]_e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Зато је карактеристични полином овог оператора једнак

$$\chi_L(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ -2 & -4 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \longleftarrow$$

$$= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ -2 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \longleftarrow$$

$$= (1-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)^4.$$

Једини сопствени потпростор садржи матрице $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ за које важи

$$\begin{pmatrix} x+2y & -y \\ -2x-4y+z+2t & -2y+t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}.$$

Дакле,

$$\mathrm{Ker}(L-\mathbb{1}) = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ z & x \end{pmatrix} \,\middle|\, x,z \in \mathbb{R} \right\} = \mathscr{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

б) Кандидати за минимални полином су $(\lambda-1)^i$, за $i = 1,2,3,4$. Кренимо редом,

$$(L-\mathbb{1})\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y & 0 \\ -2x-4y+2t & -2y \end{pmatrix},$$

$$(L-\mathbb{1})^2\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = (L-\mathbb{1})\begin{pmatrix} 2y & 0 \\ -2x-4y+2t & -2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -8y & 0 \end{pmatrix},$$

$$(L-\mathbb{1})^3\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = (L-\mathbb{1})\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -8y & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

па је $\mu_L(\lambda) = (\lambda-1)^3$.

Степен одређујемо стандрардним триком. Из

$$\lambda^n = \mu_L(\lambda)q(L) + a\lambda^2 + b\lambda + c, \tag{8.32}$$

за неке $a, b, c \in \mathbb{R}$, следи да је

$$L^n = aL^2 + bL + c\mathbb{1}.$$

Међутим, сада је проблем како помоћу (8.32) одредити сва три коефицијента a, b и c када имамо само једну сопствену вредност $\lambda = 1$. Како је 1 трострука нула μ_L она мора бити нула и његових извода μ_L' и μ_L''. Диференцирањем (8.32) по λ добијамо

$$n\lambda^{n-1} = \mu_L'(\lambda)q(L) + \mu_L(\lambda)q'(L) + 2a\lambda + b$$

и

$$n(n-1)\lambda^{n-2} = \mu_L''(\lambda)q(L) + 2\mu_L'(\lambda)q'(L) + \mu_L(\lambda)q''(L) + 2a.$$

Заменом $\lambda = 1$ у последње две једнакости и у (8.32) долазимо до система

$$\begin{array}{ccccccc} a & + & b & + & c & = & 1 \\ 2a & + & b & & & = & n \\ 2a & & & & & = & n(n-1) \end{array}$$

чије је решење $a = \frac{n(n-1)}{2}$, $b = -n(n-2)$ и $c = 1 + \frac{n(n-3)}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$. Следи,

$$\begin{aligned} L^n X &= \frac{n(n-1)}{2} L^2 X - n(n-2)LX + \frac{(n-1)(n-2)}{2} \mathbb{1} X \\ &= \frac{n(n-1)}{2} A^2 X \left(A^{-1}\right)^2 - n(n-2)AXA^{-1} + \frac{(n-1)(n-2)}{2} X, \end{aligned}$$

за све $n \in \mathbb{N}$, или у координатама

$$\begin{aligned} & L^n \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \\ & = \frac{n(n-1)}{2} \begin{pmatrix} x+4y & y \\ -4x-16y+z+4t & -4y+t \end{pmatrix} \\ & \quad - n(n-2) \begin{pmatrix} x+2y & y \\ -2x-4y+z+2t & -2y+t \end{pmatrix} + \frac{(n-1)(n-2)}{2} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} x+2ny & y \\ -2nx-4ny+z+2nt & -2ny+t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

У претходном задатку смо видели два феномена (која нисмо имали у претходним примерима). Прво, минимални полином је имао вишеструку нулу. Друго, имамо (строго) мање сопствених вектора од димензије векторског простора, тј. важи $\mathrm{Ker}(L - \mathbb{1}) \subsetneqq M_2(\mathbb{R})$. Ускоро ћемо видети да су ове две ствари повезане.

8.3 Дијагонализација матрица и оператора

Вратимо се за тренутак на Задатак 8.12 и линеарни оператор

$$L : \mathbb{R}^3[x] \longrightarrow \mathbb{R}^3[x], \qquad Lp = p(1)g - p,$$

где је $g(x) = 1 + 2x + x^2 \in \mathbb{R}^3[x]$. Ту смо показали да се векторски простор $\mathbb{R}^3[x]$ може записати као

$$\mathbb{R}^3[x] = \mathrm{Ker}(L + \mathbb{1}) \oplus \mathrm{Ker}(L - 3 \cdot \mathbb{1}) = \mathscr{L}\left(1 - x, 1 - x^2\right) \oplus \mathscr{L}\left(1 + 2x + x^2\right),$$

тј. као директна сума сопствених потпростора. Нека је

$$f = \left\{ f_1(x) = 1 - x,\ f_2(x) = 1 - x^2,\ f_3(x) = 1 + 2x + x^2 \right\}$$

база векторског простора $\mathbb{R}^3[x]$ састављена од сопствених вектора оператора L. Када радимо са оператором L много је лакше и природније уместо канонске базе $e = \left\{1, x, x^2\right\}$ изабрати баш ову базу f. Нпр. из

$$L(f_1) = -f_1, \qquad L(f_2) = -f_2 \qquad \text{и} \qquad L(f_3) = 3f_3$$

следи да оператор L у бази f има дијагоналну матрицу

$$[L]_f = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ово разматрање нам омогућава да лако одредимо степен пресликавања L^n, за све $n \in \mathbb{N}$, тако што прво одредимо његову матрицу

$$[L^n]_f = [L]_f^n = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix},$$

на основу правила (6.2) за множење дијагоналних матрица. Да бисмо открили оператор чија је ово матрица требаће нам матрица преласка

$$P_{e,f} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

и њен инверз

$$P_{e,f}^{-1} = P_{f,e} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Онда је матрица линеарног оператора L у канонској бази e једнака

$$\begin{aligned}
[L^n]_e &= P_{e,f}\,[L^n]_f\,P_{e,f}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (-1)^n & (-1)^n & 3^n \\ -(-1)^n & 0 & 2 \cdot 3^n \\ 0 & -(-1)^n & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{3(-1)^n+3^n}{4} & \frac{-(-1)^n+3^n}{4} & \frac{-(-1)^n+3^n}{4} \\ \frac{-(-1)^n+3^n}{2} & \frac{(-1)^n+3^n}{2} & \frac{-(-1)^n+3^n}{2} \\ \frac{-(-1)^n+3^n}{4} & \frac{-(-1)^n+3^n}{4} & \frac{3(-1)^n+3^n}{4} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Коначно, степен оператора L је дат са

$$\begin{aligned}
L^n\left(a+bx+cx^2\right) = &\left(\frac{3(-1)^n+3^n}{4}a+\frac{-(-1)^n+3^n}{4}b+\frac{-(-1)^n+3^n}{4}c\right)\\
&+\left(\frac{-(-1)^n+3^n}{2}a+\frac{(-1)^n+3^n}{2}b+\frac{-(-1)^n+3^n}{2}c\right)x\\
&+\left(\frac{-(-1)^n+3^n}{4}a+\frac{-(-1)^n+3^n}{4}b+\frac{3(-1)^n+3^n}{4}c\right)x^2,
\end{aligned}$$

што се поклапа са резултатом из Задатка 8.27.а) (само је другачије записано).

Наравно, могли смо линаерни оператор L^n одредити и без преласка на матрични запис. Знајући да је

$$L^n f_1 = L^{n-1}\left(-f_1\right) = -L^{n-1}f_1 = (-1)^2L^{n-2}f_1 = \cdots = (-1)^n f_1$$

и слично, $L^n f_2 = (-1)^n f_2$ и $L^n f_3 = 3^n f_3$ добијамо

$$\begin{aligned}
&L^n\left(a+b+cx^2\right)\\
&= L^n\left(\frac{a}{4}\left(2f_1+f_2+f_3\right)+\frac{b}{4}\left(-2f_1+f_2+f_3\right)+\frac{c}{4}\left(2f_1-3f_2+f_3\right)\right)\\
&= L^n\left(\frac{a-b+c}{2}f_1+\frac{a+b-3c}{4}f_2+\frac{a+b+c}{4}f_3\right)\\
&= \frac{a-b+c}{2}L^nf_1+\frac{a+b-3c}{4}L^nf_2+\frac{a+b+c}{4}L^nf_3\\
&= \frac{a-b+c}{2}(-1)^nf_1+\frac{a+b-3c}{4}(-1)^nf_2+\frac{a+b+c}{4}3^nf_3\\
&= \left(\frac{3(-1)^n+3^n}{4}a+\frac{-(-1)^n+3^n}{4}b+\frac{-(-1)^n+3^n}{4}c\right)\\
&\quad+\left(\frac{-(-1)^n+3^n}{2}a+\frac{(-1)^n+3^n}{2}b+\frac{-(-1)^n+3^n}{2}c\right)x\\
&\quad+\left(\frac{-(-1)^n+3^n}{4}a+\frac{-(-1)^n+3^n}{4}b+\frac{3(-1)^n+3^n}{4}c\right)x^2.
\end{aligned}$$

На сличан начин смо могли одредити и инверз L^{-1} јер је

$$\left[L^{-1}\right]_e = P_{e,f}\left[L^{-1}\right]_f P_{e,f}^{-1} = P_{e,f}[L]_f^{-1}P_{e,f}^{-1},$$

где је

$$[L]_f^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}.$$

Поставља се питање да ли можемо урадити исту ствар са било којим оператором, тј. да ли постоји база састављена само од сопствених вектора?

Одговор је не, а о томе сведочи и линеарни оператор из Задатка 8.31. Зато је згодно издвојити линеарне операторе који имају поменуту базу, или еквивалентно, базу у којој оператор има дијагоналну матрицу.

Дефиниција 8.33. *Кажемо да је линеарни оператор $L : V \longrightarrow V$ коначно димензионалног простора V дијагоналног типа (дијагонализабилан) уколико постоји база f векторског простора V у којој линеарни оператор L има дијагоналну матрицу.*

Након Задатка 8.31 смо напоменули је вишеструког нуле код минималног полинома у вези са тим да нема ,,довољно“ сопствених вектора. Испоставиће се да то није случајност и да управо од тога зависи да ли ће оператор бити дијагоналног типа.

Теорема 8.34. *Нека је $L : V \longrightarrow V$ линеарни оператор коначно димензионалног простора V. Следећи услови су еквивалентни:*

(1) Линеарни оператор L је дијагоналног типа.

(2) Векторски простор V је директна сума сопствених потпростора.

(3) Векторски простор V има базу састављену од сопствених вектора.

(4) Карактеристични полином χ_L се факторише на линеарне факторе и минимални полином μ_L нема вишеструке нуле.

Сада ћемо целу причу пребацити и на језик матрица.

Дефиниција 8.35. *Кажемо да је квадратна матрица A дијагоналног типа (дијагонализабилна) уколико постоје инвертибилна матрица P и дијагонална матрица D такве да је $A = PDP^{-1}$.*

Иако то није експлицитно речено у претходној дефиницији јасно је да из формулације следи да су матрице P и D квадратне и исте димензије као и почетна матрица A.

Веза са линеарним операторима дијагоналног типа је следећа. Нека је $L : F^n \longrightarrow F^n$, $Lv = Av$. Тада је $A = [L]_e$ матрица оператора L у канонској бази e простора F^n, $D = [L]_f$ матрица оператора L у бази F^n састављеној од сопствених вектора, а $P = P_{e,f}$ матрица преласка са базе e на базу f. Ово објашњава зашто смо матрице дијагоналног типа дефинисали баш на овакав начин, Дефиниција 8.35 се своди на познату формулу $[L]_e = P_{e,f}[L]_f P_{e,f}^{-1}$. Имамо аналогно тврдење и на језику матрица (које следи из Теореме 8.34).

Теорема 8.36. *Нека је $A \in M_n(F)$ квадратна матрица. Следећи услови су еквивалентни:*

(1) Матрица A је дијагоналног типа.

(2) *Векторски простор F^n је директна сума сопствених потпростора.*

(3) *Векторски простор F^n има базу f састављену од сопствених вектора.*

(4) *Карактеристични полином χ_A се факторише на линеарне факторе и минимални полином μ_A нема вишеструке нуле.*

У том случају важи $A = PDP^{-1}$, где су колоне матрице P сопствени вектори матрице A који формирају базу f, а на дијагонали матрице D се налазе одговарајуће сопствене вредности матрице A. (Овде „одговарајуће" значи да је вектор $P_{\downarrow i}$ сопствени за сопствену вредност d_{ii}.)

Задатак 8.37. *Дата је матрица* $A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -3 \\ -5 & 4 & -5 \\ 11 & 3 & 12 \end{pmatrix}$.

а) Показати да је матрица A дијагоналног типа и одредити бар по једну дијагоналну матрицу D и инвертибилну матрицу P за које важи $A = PDP^{-1}$.

б) Израчунати A^n, за све $n \in \mathbb{N}$.

в) Одредити бар једну матрицу B такву да је $A = B^2$.

Решење. а) Према Теореми 8.36 матрица A је дијагоналног типа јер минимални полином $\mu_A(\lambda) = -\chi_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 4)(\lambda - 9)$ нема вишеструке нуле, што смо видели у Задацима 8.8 и 8.23. Друго образложење би било: матрица A је дијагоналног типа јер је $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(A - E) \oplus \mathrm{Ker}(A - 4E) \oplus \mathrm{Ker}(A - 9E)$, што смо исто видели у Задатку 8.8.

Према Теореми 8.36 тражене матрице су

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \qquad \text{и} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Дакле, на дијагонали матрице D се налазе сопствене вредности 1, 4 и 9, а у колонама матрице P су сопствени вектори. Притом у првој колони P имамо сопствени вектор који одговара сопственој вредности 1 (првој на дијагонали D), затим у другој колони P сопствени вектор који одговара вредности 4, итд. Наравно, решење није јединствено. Вредности на дијагонали D можемо пермутовати, али онда то мора бити пропраћено и истим пермутовањем колонама матрице P. Друго, у првој колони смо могли уместо $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ ставити и $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ или $\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$, итд.

б) Степен ћемо лако наћи помоћу претходног дела задатка:

$$
\begin{aligned}
A^n = \left(PDP^{-1}\right) &= PD\underbrace{P^{-1}P}_{=E}D\underbrace{P^{-1}P}_{=E}DP^{-1}\dots PDP^{-1} = PD^nP^{-1}\\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}\\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 4^n & 0\\ 0 & 0 & 9^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1\\ -1 & -1 & -1\\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} 1 & 4^n & 0\\ 0 & -4^n & 9^n\\ -1 & -4^n & -9^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1\\ -1 & -1 & -1\\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} 2-4^n & 1-4^n & 1-4^n\\ 4^n-9^n & 4^n & 4^n-9^n\\ -2+4^n+9^n & -1+4^n & -1+4^n+9^n \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

као што смо већ израчунали у Задатку 8.23.б).

в) Неформално, овде се тражи корен матрице A. Пошто смо научили како се степенује матрица, покушаћемо на исти и да је ,,коренујемо“. Нека је $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$,,корен“ дијагоналне матрице D. Тада матрица

$$
\begin{aligned}
B := PCP^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1\\ -1 & -1 & -1\\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0\\ 0 & -2 & 3\\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1\\ -1 & -1 & -1\\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1\\ -1 & 2 & -1\\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

задовољава услове задатке јер је

$$B^2 = PC\underbrace{P^{-1}P}_{=E}CP^{-1} = PC^2P^{-1} = PDP^{-1} = A.$$

Друго решење исте једначине је наравно $-B$. Треће решење уколико у матрици C заменимо 1 са -1, итд. Дакле, ова квадратна матрична једначина има више од два решења (што није случај са квадратном једначином над $\mathbb{R}$). Мењајући знакове на дијагонали можемо добити укупно осам решења, а не можемо тврдити и да су то једина решења. $\square$

Трик са степеновањем који смо користили у делу б) претходног задатка је потпуно очекиван. Уколико се присетимо претходне теорије матрица

A^n ће бити једнака $[L^n]_e$ где је је $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $Lv = Av$, а e канонска база $\mathbb{R}^3$. Тада је $D^n = [L^n]_f$ матрица оператора L^n у бази $f = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$, а $P = P_{e,f}$ матрица преласка са базе e на базу f, те је $A^n = PD^nP^{-1}$.

Овде смо на сличан начин могли израчунати и инверз

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \left(PDP^{-1}\right)^{-1} = \left(P^{-1}\right)^{-1} D^{-1}P^{-1} = PD^{-1}P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \dots \end{aligned}$$

Додуше, овде смо проблем израчунавања A^{-1} свели на израчунавање P^{-1}, па делује да нисмо ништа урадили. Али P^{-1} већ имамо израчунато (за потребе A^n) па је можда овако брже. А може се израчунати и као $P^{-1} = P_{e,f}^{-1} = P_{f,e}$ што више није инверз.

Задатак 8.38. *Нека је* $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & -6 \\ -2 & 7 & 6 \\ 2 & -5 & -4 \end{pmatrix}$.

а) Показати да је матрица A дијагоналног типа и одредити бар по једну дијагоналну матрицу D и инвертибилну матрицу P за које важи $A = PDP^{-1}$.

б) Израчунати A^n, за све $n \in \mathbb{N}$.

Решење. а) Матрица A јесте дијагоналног типа јер је $\chi_A(\lambda) = -(\lambda-2)^2(\lambda-3)$ и $\mu_A(\lambda) = (\lambda-2)(\lambda-3)$, према Задацима 8.9 и 8.26. Тражене матрице су

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{и} \qquad P = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

б) Степен матрице A је

$$\begin{aligned} A^n &= \left(PDP^{-1}\right) = PD\underbrace{P^{-1}P}_{=E}D\underbrace{P^{-1}P}_{=E}DP^{-1}\dots PDP^{-1} = PD^nP^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -2 & 5 & 7 \\ 2 & -5 & -6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 5\cdot 2^n & 3\cdot 2^n & 3^n \\ 2\cdot 2^n & 0 & -3^n \\ 0 & 2^n & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -2 & 5 & 7 \\ 2 & -5 & -6 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2^n + 2\cdot 3^n & 5\left(2^n - 3^n\right) & 6\left(2^n - 3^n\right) \\ 2\left(2^n - 3^n\right) & -4\cdot 2^n + 5\cdot 3^n & 6\left(-2^n + 3^n\right) \\ 2\left(-2^n + 3^n\right) & 5\left(2^n - 3^n\right) & 7\cdot 2^n - 6\cdot 3^n \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

□

У свим досадашњим примерима смо имали карактеристични полином који се може раставити на линеарне чиниоце. Знамо да постоје полиноми са реалним коефицијентима који се не могу раставити на линеарне чиниоце, нпр. $\lambda^2 + 1$. Са друге стране, знамо да се над пољем комплексних бројева сваки полином може раставити на линеарне чиниоце. Међутим, тада понином χ_A може имати и комплексне корене (чак и у случају да има све реалне коефицијенте). Специјално, за $A \in M_n(\mathbb{R})$, полином χ_A ће имати све реалне коефицијенте и евентуални комплексни корени ће се увек јављати у конјуговано комплексним паровима.

Задатак 8.39. *Одредити све (комплексне) сопствене вредности и сопствене векторе матрице* $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -9 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$. *Показати да је матрица A дијагоналног типа и одредити бар по једну инвертибилну матрицу P и дијагоналну матрицу D такве да је $A = PDP^{-1}$.*

Решење. Према Сарусовом правилу је

$$
\begin{aligned}
\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) &= \left| \begin{matrix} -2-\lambda & -2 & -9 \\ -1 & 1-\lambda & -3 \\ 1 & 1 & 4-\lambda \end{matrix} \right| \begin{matrix} -2-\lambda & -2 \\ -1 & 1-\lambda \\ 1 & 1 \end{matrix} \\
&= (-2-\lambda)(1-\lambda)(4-\lambda) + 6 + 9 + 9(1-\lambda) + 3(-2-\lambda) - 2(4-\lambda) \\
&= -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 4\lambda + 2.
\end{aligned}
$$

По Безуовом ставу кандидати за целобројне нуле χ_A су ± 1 и ± 2. Провером видимо да је $\lambda = 1$ једна нула χ_A. Дакле,

$$
\begin{aligned}
\chi_A(\lambda) &= -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 4\lambda + 2 = -(\lambda - 1)\left(\lambda^2 - 2\lambda + 2\right) \\
&= -(\lambda - 1)(\lambda - 1 - i)(\lambda - 1 + i).
\end{aligned}
$$

Сопствене вредности су 1, $1+i$ и $1-i$.

Одредимо све сопствене векторе за сопствену вредност 1. Тражимо сва решења $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$ система једначина $(A - E)v = \mathbb{O}$:

$$\begin{array}{rcrcrcll}
-3x & - & 2y & - & 9z & = & 0 & \\
-\boxed{x} & & & - & 3z & = & 0 & /(-3) \\
x & + & y & + & 3z & = & 0 & \\ \hline
-x & & & - & 3z & = & 0 & \\
 & & \cancel{2y} & & & \cancel{=} & \cancel{0} & \\
 & & y & & & = & 0 & \\ \hline
\end{array}$$

Дакле, $\operatorname{Ker}(A - E) = \left\{ \begin{pmatrix} -3\alpha \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix} \middle| \, \alpha \in \mathbb{C} \right\} = \mathscr{L}_{\mathbb{C}} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Одредимо сада све сопствене векторе за сопствену вредност $1 + i$. То су решења $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$ система једначина $(A - (1+i)E)v = \mathbb{O}$:

$$\begin{array}{rcrcrcll}
(-3-i)x & - & 2y & - & 9z & = & 0 & \\
-\boxed{x} & - & iy & - & 3z & = & 0 & (-3-i) \\
x & + & y & + & (3-i)z & = & 0 & \\ \hline
-x & - & iy & - & 3z & = & 0 & \\
 & & (1-i)y & - & iz & = & 0 & \\
 & & \cancel{(-3+3i)xy} & \cancel{+} & \cancel{3iz} & \cancel{=} & \cancel{0} & \\ \hline
\end{array}$$

Дакле, $y = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{C}$ произвољно, $z = \frac{1-i}{i}\alpha = (-1-i)\alpha$ и $x = -i\alpha - 3(-1-i)\alpha = (3+2i)\alpha$, па је

$$\operatorname{Ker}(A - (1+i)E) = \left\{ \begin{pmatrix} (3+2i)\alpha \\ \alpha \\ (-1-i)\alpha \end{pmatrix} \middle| \, \alpha \in \mathbb{C} \right\} = \mathscr{L}_{\mathbb{C}} \begin{pmatrix} 3+2i \\ 1 \\ -1-i \end{pmatrix}.$$

Сада можемо да поновимо поступак за сопствену вредност $1 - i$. А можемо и избећи рачун и просто приметити да је

$$(A - (1-i)E)v = (A - \overline{(1+i)}E)v = \overline{(A - (1+i)E)}v = \overline{(A - (1+i)E)\overline{v}},$$

јер је матрица A реална. То значи да је систем $(A - (1-i)E)v = \mathbb{O}$ је еквивалентан са системом $(A - (1+i)E)\overline{v} = \overline{\mathbb{O}} = \mathbb{O}$. Следи,

$$\operatorname{Ker}(A - (1-i)E) = \overline{\operatorname{Ker}(A - (1+i)E)} = \mathscr{L}_{\mathbb{C}} \begin{pmatrix} 3-2i \\ 1 \\ -1+i \end{pmatrix}.$$

Матрица A је дијагоналног типа јер минимални полином μ_A нема вишеструке нуле (јер χ_A нема вишеструке нуле). Други разлог је то што A

има 3 линеарно независна сопствена вектора (који одговарају различитим сопственим вредностима). Тражене матрице су

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & 1-i \end{pmatrix} \qquad \text{и} \qquad P = \begin{pmatrix} 3 & 3+2i & 3-2i \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1-i & -1+i \end{pmatrix}.$$

□

Матрица из претходног задатка је дијагоналног типа над $\mathbb{C}$, али није дијагоналног типа над $\mathbb{R}$ (јер карактеристични полиномм χ_A има нерастављив чинилац $\lambda^2 - 2\lambda + 2$ степена 2). Међутим, како је матрица A реална хтели бисмо да урадимо и нешто слично дијагонализацији над $\mathbb{R}$. Имамо пар конјуговано комплексних нула $\lambda = 1 + i$ и $\overline{\lambda}$ и пар конјуговано комплексних сопствених вектора $v = \begin{pmatrix} 3-2i \\ 1 \\ -1+i \end{pmatrix}$ и $\overline{v}$. Ако је $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $LX = AX$, тада је

$$\begin{aligned} L(\Re v) = A(\Re v) &= A\left(\frac{1}{2}v + \frac{1}{2}\overline{v}\right) = \frac{1}{2}Av + \frac{1}{2}A\overline{v} \\ &= \frac{1}{2}\lambda v + \frac{1}{2}\overline{\lambda}\overline{v} = \Re(\lambda v) = \Re\lambda\,\Re v - \Im\lambda\,\Im v \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} L(\Im v) = A(\Im v) &= A\left(\frac{1}{2}v - \frac{1}{2}\overline{v}\right) = \frac{1}{2}Av - \frac{1}{2}A\overline{v} \\ &= \frac{1}{2}\lambda v - \frac{1}{2}\overline{\lambda}\overline{v} = \Im(\lambda v) = \Im\lambda\,\Re v + \Re\lambda\,\Im v. \end{aligned}$$

Матрица овог пресликавања у канонској бази e је $A = [L]_e$, а у бази $f = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \Re v = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \Im v = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ је $D := [L]_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \Re\lambda & \Im\lambda \\ 0 & -\Im\lambda & \Re\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Како је матрица преласка једнака $P := P_{e,f} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ биће $A = PDP^{-1}$.

И генерално, кад год имамо реалну матрицу са комплексним сопственим вредностима, сопствене вредности и вектори ће се појављивати у конјуговано комплексним паровима. Тада поред реалне имамо и комплексну дијагонализацију. За сваки пар λ и $\overline{\lambda}$ различитих конјугованих сопствених вредности и пар v и $\overline{v}$ одговарајућих сопствених вектора у матрици D блок $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \overline{\lambda} \end{pmatrix}$ на дијагонали треба заменити блоком $\begin{pmatrix} \Re\lambda & \Im\lambda \\ -\Im\lambda & \Re\lambda \end{pmatrix}$, а пар колона $\begin{pmatrix} v & \overline{v} \end{pmatrix}$ у матрици P треба заменити паром колона $\begin{pmatrix} \Re v & \Im v \end{pmatrix}$. За овакву матирцу D кажемо да је *блок дијагонална*.

Ако сопствену вредност запишемо у тригонометријском облику $\lambda = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ блок $\begin{pmatrix} \Re\lambda & \Im\lambda \\ -\Im\lambda & \Re\lambda \end{pmatrix}$ постаје $\begin{pmatrix} r\cos\theta & r\sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

Задатак 8.40. *Показати да је*

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos(n\theta) & \sin(n\theta) \\ -\sin(n\theta) & \cos(n\theta) \end{pmatrix},$$

за све $\theta \in \mathbb{R}$ *и* $n \in \mathbb{N}$.

Решење. Тврђење показујемо индукцијом, за $n = 1$ тривијално важи. Претпоставимо да важи и за n, тада је

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^{n+1} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(n\theta) & \sin(n\theta) \\ -\sin(n\theta) & \cos(n\theta) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(n\theta)\cos\theta - \sin(n\theta)\sin\theta) & \cos(n\theta)\sin\theta + \sin(n\theta)\cos\theta \\ -\sin(n\theta)\cos\theta - \cos(n\theta)\sin\theta & -\sin(n\theta)\sin\theta + \cos(n\theta)\cos\theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos((n+1)\theta) & \sin((n+1)\theta) \\ -\sin((n+1)\theta) & \cos((n+1)\theta) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

□

Геометријски гледано, пресликавање $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ представља ротацију равни $\mathbb{R}^2$ око координатног почетка за угао $-\theta$ (према Задатку 5.16.в)), па претходни задатак каже да n ротација за угао $-\theta$ одговара ротацији за угао $-n\theta$.

Из претходног задатка следи и

$$\begin{pmatrix} r\cos\theta & r\sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} r^n\cos(n\theta) & r^n\sin(n\theta) \\ -r^n\sin(n\theta) & r^n\cos(n\theta) \end{pmatrix}.$$

Задатак 8.41. *Нека је* $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -9 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ *(матрица из Задатка 8.39). Израчути степен* A^n, *за све* $n \in \mathbb{N}$.

Решење. Записаћемо матрицу A као PDP^{-1}, где је $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$,

$P = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ и $P^{-1} = \cdots = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, и искористићемо добро познати трик $A^n = \left(PDP^{-1}\right)^n = PD^nP^{-1}$. Степен дијагоналне матрице можемо израчунати помоћу претходног задатка:

$$\begin{aligned}
D^n &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} & \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4} \\ 0 & -\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4} & \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix}^n \\
&= \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{$\begin{pmatrix} \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} & \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4} \\ -\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4} & \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix}^n$}} \\ 0 & & \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4} & 2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{n\pi}{4} \\ 0 & -2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{n\pi}{4} & 2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Онда је

$$\begin{aligned}
A^n &= PD^nP^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4} & 2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{n\pi}{4} \\ 0 & -2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{n\pi}{4} & 2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2^{\frac{n}{2}}\left(2\cos\frac{n\pi}{4} + 3\sin\frac{n\pi}{4}\right) + 3 & 2^{\frac{n}{2}}\left(3\cos\frac{n\pi}{4} - 2\sin\frac{n\pi}{4}\right) - 3 & -3\cdot 2^{\frac{n}{2}}\left(2\cos\frac{n\pi}{4} + 3\sin\frac{n\pi}{4}\right) + 6 \\ -2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{n\pi}{4} & 2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4} & -3\cdot 2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{n\pi}{4} \\ 2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4} + \sin\frac{n\pi}{4}\right) - 1 & 2^{\frac{n}{2}}\left(-\cos\frac{n\pi}{4} + \sin\frac{n\pi}{4}\right) + 1 & 3\cdot 2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4} + \sin\frac{n\pi}{4}\right) - 2 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{8.42}$$

Наравно, исти резултат смо могли добити и помоћу комплексних матрица из Задатка 8.39:

$$\begin{aligned}
A^n &= \begin{pmatrix} 3 & 3+2i & 3-2i \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1-i & -1+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & 1-i \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 3 & 3+2i & 3-2i \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1-i & -1+i \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 3 & 3+2i & 3-2i \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1-i & -1+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1+i)^n & 0 \\ 0 & 0 & (1-i)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ \frac{i}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2}i \\ -\frac{i}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2}i \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3 + \Re\left((-2+3i)(1+i)^n\right) & -3 + \Re\left((3+2i)(1+i)^n\right) & 6 + \Re\left((-6+9i)(1+i)^n\right) \\ -\Im\left((1+i)^n\right) & \Re\left((1+i)^n\right) & -3\Im\left((1+i)^n\right) \\ -1 + \Re\left((1-i)(1+i)^n\right) & 1 - \Re\left((1+i)^{n+1}\right) & -2 + 3\Re\left((1-i)(1+i)^n\right) \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{8.43}$$

при чему смо у последњем кораку користили познату једнакост $\left(-1+\frac{3}{2}i\right)(1+i)^n + \left(-1-\frac{3}{2}i\right)(1+i)^n = \Re\left((-2+3i)(1+i)^n\right)$, итд. Резултат

(8.43) је једнак (8.42) јер је

$$\begin{aligned}\Re\left((-2+3i)(1+i)^n\right) &= \Re\left((-2+3i)\left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right)^n\right)\\ &= 2^{\frac{n}{2}}\Re\left((-2+3i)\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right)\right)\\ &= 2^{\frac{n}{2}}\left(-2\cos\frac{n\pi}{4}-3\sin\frac{n\pi}{4}\right),\end{aligned}$$

а слично важи и за остале коефицијенте. □

Задатак 8.44. *Дат је линеарни оператор*

$$L : M_2(\mathbb{Z}_5) \longrightarrow M_2(\mathbb{Z}_5), \qquad LX = CXC^T + 4X^T,$$

где је $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

а) Да ли је оператор L *дијагоналног типа?*

б) Одредити L^n*, за све* $n \in \mathbb{N}$.

Решење. а) Прво ћемо оператор L записати у облику

$$L\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y+2z+4t & y+4z+2t \\ 4y+z+2t & 0 \end{pmatrix},$$

да бисмо видели да је његова матрица у канонској бази $M_2(\mathbb{Z}_5)$ једнака

$$[L]_e = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Онда је његов карактеристични полином

$$\chi_L(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1-\lambda & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 & 2 \\ 4 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^2 \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2\left(\lambda^2-2\lambda+1-16\right) = \lambda^3(\lambda-2) = \lambda^3(\lambda+3)$$

(овде наравно -1 означава 4, итд). Овде је битно нагласити да се карактеристични полином раставља на линеарне факторе (јер је поље $\mathbb{Z}_5$) да би уопште имало смисла причати о дијагонализабилности преко минималног полинома. Кандидати за минимални полином су $\lambda(\lambda+3)$, $\lambda^2(\lambda+3)$ и $\lambda^3(\lambda+3)$. Оно што нас занима, линеарни оператор L

је дијагоналног типа ако и само ако је $\mu_L(\lambda) = \lambda(\lambda+3)$, односно $L \circ (L + 3\cdot \mathbb{1}) = \mathbb{O}$. Са друге стране, лако се проверава да је

$$\begin{aligned}(L\circ(L+3\cdot\mathbb{1}))\begin{pmatrix} x & y \\ z & t\end{pmatrix} &= L\begin{pmatrix} 3x+2y+2z+4t & 4y+4z+2t \\ 4y+4z+2t & 3t\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} y+z & \dots \\ \dots & \dots\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix},\end{aligned}$$

што значи да оператор L није дијагоналног типа.

б) Како оператор L није дијагоналног типа нећемо моћи да га степенујемо користећи дијагонализацију. Овде ћемо показати један трик за степеновање користи то да имамо „леп“ карактеристични полином $\chi_L(\lambda) = \lambda^4 + 3\lambda^3$. Теорема Кејли–Хамилтона каже да је тада $L^4 = 2L^3$, па је

$$\begin{aligned}L^n &= L^4 \circ L^{n-4} = (2L^3)\circ L^{n-4} = 2L^{n-1} = 2^2L^{n-2} = 2^3L^{n-3} = 2^4L^{n-4} \\ &= \dots = 2^{n-3}L^3 = \begin{cases} 2L^3, & \text{ако је } n \equiv 0 \pmod 4, \\ 4L^3, & \text{ако је } n \equiv 1 \pmod 4, \\ 3L^3, & \text{ако је } n \equiv 2 \pmod 4, \\ L^3, & \text{ако је } n \equiv 3 \pmod 4,\end{cases}\end{aligned} \tag{8.45}$$

за $n \geqslant 3$. (Наглашавамо да последњи израз није једнак $2^{n-2}L^2$.)

Исти резултат бисмо добили и уколико λ^n запишемо као

$$\lambda^n = \chi_L(\lambda)q(\lambda) + a\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d. \tag{8.46}$$

Тада је $L^n = aL^3 + bL^2 + cL + d\mathbb{1}$. Коефицијенте можемо наћи заменом $\lambda = 0$ у (8.46) и њеном првом и другом изводу, што даје $b = c = d = 0$. Затим заменом $\lambda = 2$ у (8.46) добијамо $a = \frac{1}{8}$. Овде би се појавио услов $n \geqslant 2$, јер у супротном изводи леве стране (8.46) тј. $n\lambda^{n-1}$ и $n(n-1)\lambda^{n-2}$ нису дефинисани за $\lambda = 0$. Додуше, у (8.45) стоји услов $n \geqslant 3$, али видимо да та формула тривијално важи и за $n = 3$. □

У последњем делу претходног задатка смо користили извод полинома из $\mathbb{Z}_5[x]$. Ту наравно нема смисла стандардна дефиниција извода преко лимеса као у случају реалних бројева. Уместо тога, на $\mathbb{Z}_5[x]$ (или општије, на $F[x]$, где је F произвољно поље) извод дефинишемо као $\mathbb{Z}_5$-линеарни (односно F-линеарни) оператор који је на канонској бази дат са $1' = 0$ и $(x^n)' = nx^{n-1}$, за $n \geqslant 1$. Лако се проверава да овај оператор задовољава $(pq)' = p'q + pq'$, за произвољне полиноме p и q, што је коришћено у претходном задатку. Наглашавамо да се извод на овај начин може дефинисати само на полиномима, не и на произвољним функцијама.

8.4 Диференцне једначине

Једна занимљива примена степена матрица је решавање линеарних хомогених *диференцних* (*рекурентних*) *једначина* и њихових система. То су једначине облика

$$a_k x_{n+k} + a_{k-1} x_{n+k-1} + \dots a_1 x_{n+1} + a_0 x_n = 0,$$

за све $n \in \mathbb{N}$, где су $a_0, a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ скалари, $a_0, a_k \neq 0$, а $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ је непознат реални низ. Број k зовемо ред диференцне једначине. Диференцној једначини се обично додају и почетни услови који обезбеђују јединственост решења. Низове ћемо често индексирати од нуле (ради једноставнијег рачуна, то не мења ништа суштински).

Диференцне једначине првог реда се елементарно решавају, али већ решавање једначине другог реда може да буде проблем. Идеја за решавање диференцних једначина вишег реда долази из система једначина првог реда, а како се решава такав систем видећемо у наредном примеру.

Задатак 8.47. *Решити систем диференцних једначина*

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_{n+1} & = & & & 2y_n & - & 2z_n \\ y_{n+1} & = & 2x_n & + & 3y_n & - & 4z_n \\ z_{n+1} & = & -2x_n & - & 4y_n & + & 3z_n \end{array}$$

са почетним условима $x_0 = 1$, $y_0 = -1$ *и* $z_0 = 1$.

Решење. Нека је $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ колона непознатих. Записаћемо наш систем у матричном облику $X_{n+1} = AX_n$, где је $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -4 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$. Тада је

$$X_n = AX_{n-1} = A^2 X_{n-2} = A^3 X_{n-3} = \cdots = A^n X_0.$$

Знамо да је $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Остаје још да се израчуна степен матрице A^n што знамо да урадимо (на два начина), а за ову конкретну матрицу је тај степен једнак

$$A^n = \cdots = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 8^n + 8(-1)^n & 2\cdot 8^n - 2(-1)^n & -2\cdot 8^n + 2(-1)^n \\ 2\cdot 8^n - 2(-1)^n & 4\cdot 8^n + 5(-1)^n & -4\cdot 8^n + 4(-1)^n \\ -2\cdot 8^n + 2(-1)^n & -4\cdot 8^n + 4(-1)^n & 4\cdot 8^n + 5(-1)^n \end{pmatrix}.$$

То значи да је решење нашег система

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = A^n X_0$$

$$= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8^n + 8(-1)^n & 2\cdot 8^n - 2(-1)^n & -2\cdot 8^n + 2(-1)^n \\ 2\cdot 8^n - 2(-1)^n & 4\cdot 8^n + 5(-1)^n & -4\cdot 8^n + 4(-1)^n \\ -2\cdot 8^n + 2(-1)^n & -4\cdot 8^n + 4(-1)^n & 4\cdot 8^n + 5(-1)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{-8^n+4(-1)^n}{3} \\ \frac{-2\cdot 8^n-(-1)^n}{3} \\ \frac{2\cdot 8^n+(-1)^n}{3} \end{pmatrix}.$$

□

Задатак 8.48. *Решити диференцну једначину* $x_{n+3} = -x_{n+2} + 4x_{n+1} + 4x_n$, *са почетним условима* $x_0 = 3$, $x_1 = 8$ *и* $x_2 = 6$.

Решење. Основни трик је да се једначина трећег реда сведе на систем једначина првог реда који сада знамо да решимо. Уведимо две нове фиктивне променљиве $y_n = x_{n+1}$ и $z_n = y_{n+1}$. Тада је наша једначина еквивалентна са системом

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_{n+1} & = & & & y_n & & \\ y_{n+1} & = & & & & & z_n \\ z_{n+1} & = & 4x_n & + & 4y_n & - & z_n \end{array}$$

или у матричном запису $X_{n+1} = AX_n$, где је $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ и $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$. Следи, $X_n = AX_{n-1} = A^2X_{n-2} = \cdots = A^nX_0$, где је $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Остаје да се израчуна A^n, а довољно је и само наћи прву врсту A^n пошто тражимо само низ x_n. Карактеристичи полином матрице A је

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & \boxed{1} \\ 4 & 4 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -\lambda^2-\lambda+4 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\lambda^3-\lambda^2+4\lambda+4 & -\lambda^2-\lambda+4 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda^3-\lambda^2+4\lambda+4 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -\left(\lambda^3+\lambda^2-4\lambda-4\right)$$

$$= -(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda+2). \tag{8.49}$$

(Приметимо да се коефицијенти полинома $\pm\chi_A$ поклапају са коефицијентима из једначине $x_{n+3} + x_{n+2} - 4x_{n+1} - 4x_n = 0$.) Нека је $\lambda^n = \chi_A(\lambda)q(\lambda) + a\lambda^2 + b\lambda + c$. Тада је $A^n = aA^2 + bA + cE$, где коефицијенте a, b и c тражимо као решење система

$$\begin{array}{rcrcrcl} a & - & b & + & c & = & (-1)^n \\ 4a & + & 2b & + & c & = & 2^n \\ 4a & - & 2b & + & c & = & (-2)^n \end{array}$$

Јасно је да је $b = \frac{2^n-(-2)^n}{4}$, $a + c = (-1)^n + \frac{2^n-(-2)^n}{4}$ и $4a + c = \frac{2^n+(-2)^n}{2}$, односно $a = -\frac{(-1)^n}{3} + \frac{2^n}{12} + \frac{(-2)^n}{4}$ и $c = \frac{4}{3}(-1)^n + \frac{2^n}{6} - \frac{(-2)^n}{2}$. Одредимо прву врсту матрице A^n:

$$\begin{aligned} A^n &= aA^2 + bA + cE \\ &= a\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ & \cdots\cdots & \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & \cdots\cdots & \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & \cdots\cdots & \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c & b & a \\ & \cdots\cdots & \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{4}{3}(-1)^n + \frac{2^n}{6} - \frac{(-2)^n}{2} & \frac{2^n-(-2)^n}{4} & -\frac{(-1)^n}{3} + \frac{2^n}{12} + \frac{(-2)^n}{4} \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Следи,

$$\begin{aligned} x_n &= (A^n)_{1\to} X_0 \\ &= \begin{pmatrix} \frac{4}{3}(-1)^n + \frac{2^n}{6} - \frac{(-2)^n}{2} & \frac{2^n-(-2)^n}{4} & -\frac{(-1)^n}{3} + \frac{2^n}{12} + \frac{(-2)^n}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} \\ &= 2(-1)^n + 3 \cdot 2^n - 2(-2)^n. \end{aligned}$$

Други начин да се ово уради је да прво одредимо сопствене вредности -1, 2 и -2 матрице A и запишемо A^n као $aA^2+bA+cE$. Затим без решавања система кажемо да су a, b и c линеарне комбинације $(-1)^n$, 2^n и $(-2)^n$. Онда ће исто важити и за све координате матрице A^n, па и за решење x_n. Нека је $x_n = \alpha(-1)^n + \beta 2^n + \gamma(-2)^n$ где скаларе α, β и γ тражимо као решење система

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_0 & = & \alpha & + & \beta & + & \gamma & = & 3 \\ x_1 & = & -\alpha & + & 2\beta & - & 2\gamma & = & 8 \\ x_2 & = & \alpha & + & 4\beta & + & 4\gamma & = & 6 \end{array}$$

Види се да је $\alpha = 2$ што повлачи $\beta = 3$, $\gamma = -2$ и $x_n = 2(-1)^n + 3 \cdot 2^n - 2(-2)^n$. □

Приметимо да поступак изложен у претходном примеру ради за произвољну линеарну хомогену диференцну једначину. Из поступка за израчунавање каратеристичног полинома у (8.49) је јасно да тај полином (који се често назива и *карактеристични полином диференцне једначине*) има исте коефицијенте као и почетна једначина (до на знак што је небитно јер само тражимо његове нуле). Зато можемо прескочити израчунавање карактеристичног полинома и само рећи да је $\chi_A(\lambda) = 0$ еквивалентно једначином у којој је члан x_{n+k} замењем са λ^k. Овде би једно (евентуално) побољшање било да уместо карактеристичног полинома користимо минимални, али он нема овако елегантан запис, већ би морао да се израчуна стандардним путем.

Овде смо видели пример када карактеристични полином има само једноструке нуле. Уколико бисмо имали и вишеструке нуле овде би се поред вредности λ^n појављивали и изводи $n\lambda^{n-1}$, $n(n-1)\lambda^{n-2}$, итд (што смо имали у Задатку 8.31.б)). Пошто причамо о линерним комбинацијама небитно је да ли овде стоји $n\lambda^{n-1}$ или $n\lambda^n$, $n(n-1)\lambda^{n-2}$ или $n(n-1)\lambda^n$ или $\binom{n}{2}\lambda^n$, итд.

У случају да се појаве и комплексне сопствене вредности $\lambda = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ и $\overline{\lambda} = r(\cos\theta - i\sin\theta)$ (које увек иду у паровима) у решењу би се појављивали $r^n\cos(n\theta)$ и $r^n\sin(n\theta)$. То смо видели у Задатку 8.41.

Све заједно даје следећу теорему.

Теорема 8.50. *Нека је*

$$a_k x_{n+k} + a_{k-1}x_{n+k-1} + \dots a_1 x_{n+1} + a_0 x_n = 0,$$

диференцна једначина, где су $a_0, a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ и $a_0, a_k \neq 0$, и нека су λ_i реални корени вишеструкости s_i и $\mu_j = r_j(\cos\theta_j + i\sin\theta_j)$ и $\overline{\mu_j} = r_j(\cos\theta_j - i\sin\theta_j)$ парови комплексних корена вишеструкости t_j карактеристичног полинома диференцне једначине

$$\chi(\lambda) = a_k\lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \dots a_1\lambda + a_0.$$

Тада су сва решења x_n претходне диференцне једначине линеарне комбинације ${\lambda_i}^n$, $n{\lambda_i}^n$, $\dots$, $n^{s_i-1}{\lambda_i}^n$, ${r_j}^n\cos(n\theta_j)$, $n{r_j}^n\cos(n\theta_j)$, $\dots$, $n^{t_j-1}{r_j}^n\cos(n\theta_j)$, ${r_j}^n\sin(n\theta_j)$, $n{r_j}^n\sin(n\theta_j)$, $\dots$, $n^{t_j-1}{r_j}^n\sin(n\theta_j)$, за све i и j.

Задатак 8.51. *Решити диференцну једначину $x_{n+3} = x_{n+2} + 8x_{n+1} - 12x_n$, са почетним условима $x_0 = 3$, $x_1 = -5$ и $x_2 = -7$.*

Решење. Карактеристични полином ове диференцне једначине је

$$\lambda^3 - \lambda^2 - 8\lambda + 12 = (\lambda-2)^2(\lambda+3),$$

што значи да је решење ове једначине $x_n = \alpha 2^n + \beta n 2^n + \gamma(-3)^n$, за неке $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Из почетних услова

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_0 & = & \alpha & & & + & \gamma & = & 3 \\ x_1 & = & 2\alpha & + & 2\beta & - & 3\gamma & = & -5 \\ x_2 & = & 4\alpha & + & 8\beta & + & 9\gamma & = & -7 \end{array}$$

налазимо скаларе $\alpha = 2$, $\beta = -3$ и $\gamma = 1$. Коначно, решење диференцне једначине је $x_n = 2^{n+1} - 3n2^n + (-3)^n$. $\square$

Вратићемо се на тренутак на детерминанте. Постоје детерминанте које се могу израчунати рекурзивно тј. свођењем на диференцне једначине (и које тада нисмо могли али сада можемо да израчунамо). Једну такву детерминанту смо имали у Задатку 7.34, али је тада добијена диференцна једначина била првог реда па смо још онда могли да је решимо.

Задатак 8.52. *Израчунати вредност детерминанте*

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & & & \\ 2 & 5 & 3 & & \\ & 2 & 5 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 3 \\ & & & 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

Решење. Ако означимо почетну детерминанту са Δ_n имаћемо

$$\begin{aligned} \Delta_n &= \begin{vmatrix} 5 & 3 & & & \\ 2 & 5 & 3 & & \\ & 2 & 5 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 3 \\ & & & 2 & 5 \end{vmatrix} \leftarrow \\ &= 5\begin{vmatrix} 5 & 3 & & & \\ 2 & 5 & 3 & & \\ & 2 & 5 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 3 \\ & & & 2 & 5 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 2 & 3 & & & \\ & 5 & 3 & & \\ & 2 & 5 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 3 \\ & & & 2 & 5 \end{vmatrix} = 5\Delta_{n-1} - 6\Delta_{n-2}. \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\ \uparrow \end{aligned} \tag{8.53}$$

Померањем индекса долазимо до диференцне једначине

$$\Delta_{n+2} - 5\Delta_{n+1} + 6\Delta_n = 0. \tag{8.54}$$

Ово померање индекса је значајно (сем што даје исти облик као у Теореми 8.50) због тога што (8.53) важи за $n \geqslant 3$ (да би Δ_{n-2} било дефинисано), а после померања (8.54) важи за све $n \in \mathbb{N}$. Карактеристични полином диференцне једначине (8.54) је

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 2)(\lambda - 3).$$

Следи, $\Delta_n = \alpha 2^n + \beta 3^n$, а скаларе α и β ћемо наћи из услова

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= 2\alpha + 3\beta = |5| = 5, \\ \Delta_2 &= 4\alpha + 9\beta = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 19. \end{aligned}$$

Одатле је $\beta = 3$, $\alpha = -2$ и $\Delta_n = 3^{n+1} - 2^{n+1}$. $\square$

Задатак 8.55. *У зависности од реалних параметара α и β израчунати вредност детерминанте*

$$\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & & & \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & & \\ & 1 & \alpha+\beta & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \alpha\beta \\ & & & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}.$$

Решење. Ако означимо почетну детерминанту са Δ_n имаћемо

$$\begin{aligned} \Delta_n = & \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & & & \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & & \\ & 1 & \alpha+\beta & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \alpha\beta \\ & & & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix} \\ =&(\alpha+\beta) \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & & & \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & & \\ & 1 & \alpha+\beta & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \alpha\beta \\ & & & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix} \\ & -\alpha\beta \begin{vmatrix} 1 & \alpha\beta & & & \\ & \alpha+\beta & \alpha\beta & & \\ & 1 & \alpha+\beta & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \alpha\beta \\ & & & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix} \\ =&(\alpha+\beta)\Delta_{n-1} - \alpha\beta\Delta_{n-2}. \end{aligned}$$

Дакле, наша детерминанта је решење диференцне једначине

$$\Delta_{n+2} - (\alpha+\beta)\Delta_{n+1} + \alpha\beta\Delta_n = 0. \tag{8.56}$$

Ред ове једначине зависи од тога да ли је неки од бројева α и β једнак нули, те ћемо имати неколико случајева.

(1) Ако је $\alpha = \beta = 0$, тада је $\Delta = 0$, за све $n \in \mathbb{N}$.

(2) Ако је $\alpha \neq 0$ и $\beta = 0$, диференцна једначина (8.56) постаје $\Delta_{n+2} - \alpha\Delta_{n+1} = 0$, тј. $\Delta_{n+1} = \alpha\Delta_n$, чије је решење

$$\Delta_n = \alpha^{n-1}\Delta_1 = \alpha^{n-1}|\alpha| = \alpha^n.$$

(3) Ако је $\alpha = 0$ и $\beta \neq 0$, слично долазимо до $\Delta_n = \beta^n$.

(4) Ако је $\alpha, \beta \neq 0$ диференцна једначина (8.56) је другог реда, а корени њеног карактеристичног полинома $\lambda^2 - (\alpha+\beta)\lambda + \alpha\beta$ су α и β. Сада ћемо опет имати два случаја у зависности од тога да ли су ови корени једнаки или не.

(4.1) Ако је $\alpha = \beta$, детерминанта Δ_n је једнака $a\alpha^n + bn\alpha^n$, за неке скаларе $a, b \in \mathbb{R}$ које ћемо одредити из почетних услова

$$\Delta_1 = a\alpha + b\alpha = |2\alpha| = 2\alpha,$$
$$\Delta_2 = a\alpha^2 + 2b\alpha^2 = \begin{vmatrix} 2\alpha & \alpha^2 \\ 1 & 2\alpha \end{vmatrix} = 3\alpha^2.$$

Скратимо α (које није нула) чиме долазимо до система $a + b = 2$, $a + 2b = 3$. Дакле, $a = b = 1$, па је $\Delta_n = (n+1)\alpha^n$

(4.2) Ако је $\alpha \neq \beta$, детерминанта Δ_n је једнака $a\alpha^n + n\beta^n$, за неке скаларе $a, b \in \mathbb{R}$ које ћемо одредити из почетних услова

$$\Delta_1 = a\alpha + b\beta = |\alpha + \beta| = \alpha + \beta,$$
$$\Delta_2 = a\alpha^2 + b\beta^2 = \begin{vmatrix} 2\alpha + \beta & \alpha\beta \\ 1 & \alpha + \beta \end{vmatrix} = \alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta.$$

Ово је систем једначина по променљивим a и b са параметрима α и β. Његове детерминанте су

$$\delta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha^2 & \beta^2 \end{vmatrix} = \alpha\beta(\beta - \alpha) \neq 0,$$
$$\delta_a = \begin{vmatrix} \alpha + \beta & \beta \\ \alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta & \beta^2 \end{vmatrix} = -\alpha^2\beta,$$
$$\delta_b = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha + \beta \\ \alpha^2 & \alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta \end{vmatrix} = \alpha\beta^2.$$

Онда Крамерово правило каже да је $a = \frac{\delta_a}{\delta} = \frac{\alpha}{\alpha - \beta}$, $b = \frac{\delta_b}{\delta} = -\frac{\beta}{\alpha - \beta}$ и $\Delta_n = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}$.

□

Задатак 8.57. *У зависности од реалног параметра α израчунати вредност детерминанте*

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & 1 & & & \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & & \\ & 1 & 2\cos\alpha & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix}.$$

Решење. И овде ћемо применити трик са рекурентним израчунавањем детерминанте. Једино што нам се ова детерминанта (означимо је са Δ_n) мало разликује у горњем левом ћошку па развој по првој врсти (колони) не би дао детерминанту Δ_{n-1}. Зато је боље кренути из доњег десног ћошка и добити

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \cos\alpha & 1 & & & \\ 1 & 2\cos\alpha & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & 1 & \\ & & 1 & 2\cos\alpha & 1 \\ & & & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix} \longleftarrow$$

$$=2(\cos\alpha)\begin{vmatrix} \cos\alpha & 1 & & & \\ 1 & 2\cos\alpha & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & 1 & \\ & & 1 & 2\cos\alpha & 1 \\ & & & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix}$$

$$-\begin{vmatrix} \cos\alpha & 1 & & & \\ 1 & 2\cos\alpha & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & 1 & \\ & & 1 & 2\cos\alpha & \\ & & & 1 & \underset{\uparrow}{1} \end{vmatrix}$$

$$=2(\cos\alpha)\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}.$$

Дакле, наша детерминанта је решење диференцне једначине

$$\Delta_{n+2} - 2(\cos\alpha)\Delta_{n+1} + \Delta_n = 0,$$

чији је карактеристични полином $\lambda^2 - 2(\cos\alpha)\lambda + 1 = 0$. Корени овог полинома су $\lambda_{1,2} = \cos\alpha \pm i\sin\alpha$. Овде ћемо имати два случаја.

(1) Ако $\alpha \notin \pi\mathbb{Z}$, имаћемо два комплексна корена λ_1 и $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$. Тада је

$$\Delta_n = a\cos(n\alpha) + b\sin(n\alpha),$$

за неке скаларе $a, b \in \mathbb{R}$ које можемо одредити из услова

$$\Delta_1 = a\cos\alpha + b\sin\alpha = |\cos\alpha| = \cos\alpha,$$

$$\Delta_2 = a\cos(2\alpha) + b\sin(2\alpha) = \begin{vmatrix} \cos\alpha & 1 \\ 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix} = 2\cos^2\alpha - 1 = \cos(2\alpha),$$

Овде су променљиве a и b, а α је параметар. Очигледно је решење овог система $a = 1$, $b = 0$, па ће тражена детерминанта бити $\Delta_n = \cos(n\alpha)$.

(2) Ако је $\alpha \in \pi\mathbb{Z}$, корени λ_1 и λ_2 су реални и једнаки и износе $\cos\alpha = \pm 1$. Тада је $\Delta_n = a(\cos\alpha)^n + bn(\cos\alpha)^n = (a + bn)(\cos\alpha)^n$, за неке скаларе

$a, b \in \mathbb{R}$ које можемо одредити из услова

$$\Delta_1 = (a+b)\cos\alpha = \cos\alpha,$$
$$\Delta_2 = (a+2b)\underbrace{(\cos\alpha)^2}_{=1} = \cos(2\alpha) = 1.$$

Након дељења прве једначине са $\cos\alpha = \pm 1$ лако добијамо $a = 1$ и $b = 0$. Следи, $\Delta_n = (\cos\alpha)^n$.

Овде је занимљиво да за $\alpha \in \pi\mathbb{Z}$ важи

$$\cos(n\alpha) = (\cos\alpha)^n = \begin{cases} 1, & \text{ако је } n \text{ парно}, \\ \cos\alpha, & \text{ако је } n \text{ непарно}. \end{cases}$$

Зато можемо рећи да важи $\Delta_n = \cos(n\alpha)$, за све $\alpha \in \mathbb{R}$.

Сада ћемо приказати још једну (већ виђену) идеју како „решити проблем“ што се на главној прва вредност разликује од осталих. Детерминанту с почетка можемо записати као

$$\begin{vmatrix} 2\cos\alpha - \cos\alpha & 1 & & & \\ 1+0 & 2\cos\alpha & 1 & & \\ & 1 & 2\cos\alpha & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix}.$$

Због адитивности по првој колони претходна детерминанта је једнака збиру детерминанте

$$\delta_n = \begin{vmatrix} 2\cos\alpha & 1 & & & \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & & \\ & 1 & 2\cos\alpha & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix}$$

и још једне детерминанте која ће након Лапласовог развоја по првој колони постати $-(\cos\alpha)\delta_{n-1}$. А детерминанту δ_n можемо израчунати слично као у претходна два задатка. $\square$

Глава 9

Жорданова нормална форма

Видели смо колико дијагонализација може да буде корисна (нпр. за налажење степена). Међутим, све што смо до сада радили било је ограничено само на матрице (линеарне операторе) дијагоналног типа. Жорданова[1] нормална форма нам омогућава да све то уопштимо на произвољне квадратне матрице (линеарне операторе коначно димензионалног простора). Мало ћемо ослабити услов дијагоналности што ће нам омогућити поменуту примену. За почетак, илуструјмо све на једном примеру.

Нека је

$$L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \qquad L\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x+z \\ 4y \\ -x+z \end{pmatrix} \tag{9.1}$$

линеарни оператор векторског простора $\mathbb{R}^3$. Његова матрица у канонској бази e простора $\mathbb{R}^3$ је $[L]_e = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, па ће карактеристични полином бити

$$\begin{aligned} \chi_L(\lambda) = \det\left([L]_e - \lambda E\right) &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 4-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \longleftarrow \\ &= (4-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)\left(3 - 3\lambda - \lambda + \lambda^2 + 1\right) \\ &= -(\lambda-4)(\lambda-2)^2. \end{aligned}$$

[1] *Marie Ennemond Camille Jordan* (1838. - 1922.), француски математичар

Сопствени потпростор који одговара сопственој вредности $\lambda_1 = 4$ је скуп решења једначине $(L - 4 \cdot \mathbb{1})v = \mathbb{O}$, тј.

$$\begin{array}{rcrcl} -x & & + & z = & 0 \\ & & & \cancel{0 = 0} & \\ -x & & - & 3z = & 0 \end{array}$$

Дакле, $z = 0$ и $x = 0$, па је $\operatorname{Ker}(L - 4 \cdot \mathbb{1}) = \mathscr{L}(v_1)$, где је $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Сопствени потпростор који одговара сопственој вредности $\lambda_2 = 2$ је скуп решења једначине $(L - 2 \cdot \mathbb{1})v = \mathbb{O}$, тј.

$$\begin{array}{l} x \quad\quad + \; z = 0 \\ \quad\; 2y \quad\quad\; = 0 \\ \cancel{x \quad\quad - \; z = 0} \end{array}$$

Дакле, $y = 0$ и $z = -x$, па је $\operatorname{Ker}(L - 2 \cdot \mathbb{1}) = \mathscr{L}(v_2)$, где је $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Оператор L није дијагоналног типа јер је $\operatorname{Ker}(L - 4 \cdot \mathbb{1}) \oplus \operatorname{Ker}(L - 2 \cdot \mathbb{1}) \subsetneqq \mathbb{R}^3$. Суштински, овде нам недостаје још један сосптвени вектор за двоструку сопствену вредност $\lambda_2 = 2$. Уместо тога имаћемо тзв. *уопштени сопствени вектор* који тражимо као решење једначине $(L - \lambda_2)\, v = v_2$, тј.

$$\begin{array}{l} x \quad\quad + \; z = 1 \\ \quad\; 2y \quad\quad\; = 0 \\ \cancel{x \quad\quad - \; z = -1} \end{array}$$

Дакле, $y = 0$ и $z = 1 - x$. Изаберимо једно решење нпр. $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Укратко, уопштени сопствени вектор v_3 смо тражили у $\operatorname{Ker}(L - \lambda_2 \cdot \mathbb{1})^2$, јер је $(L - \lambda_2)^2 v_3 = (L - \lambda_2)\, v_2 = \mathbb{O}$. Прецизније, v_3 смо тражили из $\operatorname{Ker}(L - \lambda_2 \cdot \mathbb{1})^2 \setminus \operatorname{Ker}(L - \lambda_2 \cdot \mathbb{1})$ јер је $(L - \lambda_2)\, v_3 = v_2 \neq \mathbb{O}$.

Према претходном имамо базу $f = \{v_1, v_2, v_3\}$ за коју важи

$$Lv_1 = \lambda_1 v_1, \qquad Lv_2 = \lambda_2 v_2 \qquad \text{и} \qquad Lv_3 = v_2 + \lambda_3 v_3.$$

Тада линеарни оператор L у бази f има матрицу

$$[L]_f = \left(\begin{array}{c|cc} \lambda_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|cc} 4 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

Сваки од уоквирених блокова (које ћемо звати Жорданови блокови) има сопствене вредности на главној дијагонали, јединице изнад главне дијагонале и нуле на свим осталим местима.

Напомињемо да је тада $[L]_e = P_{e,f}[L]_f P_{e,f}^{-1}$, где је $P_{e,f} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Сада ћемо претходну причу уопштити на произвољан линеарни оператор (квадратну матрицу). У претходном примеру смо уопштени сопствени вектор v_3 добили помоћу сопственог вектора v_2. Да се десило да број уопштених сопствених вектора (који одговарају сопственој вредности λ_2) није био довољан, наредни бисмо тражили помоћу v_3, тј. из услова $(L - \lambda_2)\, v = v_3$, итд.

Дефиниција 9.2. *Матрицу*

$$J(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & & \\ & \lambda & 1 & & & \\ & & \lambda & 1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & \lambda & 1 \\ & & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

зовемо Жорданов блок или Жорданова матрица.

Теорема 9.3. *(1) За сваки линеарни оператор $L : V \longrightarrow V$ коначно димензионалног простора V постоји база f векторског простора V у којој оператор L има матрицу $[L]_f = J = \begin{pmatrix} J(\lambda_1) & & & \\ & J(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J(\lambda_m) \end{pmatrix}$.*

(2) За сваку квадратну матрицу $A \in M_n(F)$ постоји инвертибилна матрица P и блок матрица $J = \begin{pmatrix} J(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J(\lambda_m) \end{pmatrix}$ такве да је $A = PJP^{-1}$.

Додатно, λ_i су сопствене вредности оператора L (матрице A). У бази f (у колонама матрице P) на местима које одговарају $J(\lambda)$ у J, се налазе вектори $v_1, \ldots, v_k$, где је $k = \dim J(\lambda)$, који се добијају као решења система

$$(L - \lambda\mathbb{1})v_1 = \mathbb{O} \qquad и \qquad (L - \lambda\mathbb{1})v_i = v_{i-1}$$

(односно $(A - \lambda E)v_1 = \mathbb{O}$ и $(A - \lambda E)v_i = v_{i-1}$), за $2 \leqslant i \leqslant k$.

Дефиниција 9.4. *Матрицу J из претходне теореме зовемо Жорданова (нормална) форма линераног оператора L (матрице A), а векторе v_i зовемо уопштени сопствени вектори.*

Напомињемо да је Жорданова форма одређена јединствено до на пермутацију блокова. Са друге стране, база f (односно матрица P) која се помиње у претходној теореми није јединствена.

Специјално, линеарни оператор L је дијагоналног типа ако и само ако су сви блокови $J(\lambda_i)$-ови димензије 1×1, тј. Жорданова форма је дијагонална матрица. У том случају су уопштени сопствени вектори баш једнаки сопственим векторима. (А генерално, постоје и уопштени сопствени вектори који нису сопствени, што смо видели у уводном примеру.)

Задатак 9.5. *Одредити Жорданову нормалну форму J матрице $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, као и бар једну инвертибилну матрицу P, такву да је $A = PJP^{-1}$.*

Решење. Карактеристични полином матрице A је

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \longleftarrow \quad &= (2-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ = -(\lambda-2)\left(\lambda^2 - 4\lambda + 4\right) &= -(\lambda-2)^3. \end{aligned}$$

Сопствени потпростор који одговара сопственој вредности 2 је скуп решења једначине $(A-2E)v = \mathbb{O}$, тј.

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & 0 \\ & & & & \cancel{0} & \cancel{=} & \cancel{0} \\ \cancel{x} & \cancel{+} & \cancel{y} & \cancel{-} & \cancel{z} & \cancel{=} & \cancel{0} \end{array}$$

Дакле, $z = x + y$ и $\operatorname{Ker}(A-2E) = \mathscr{L}(v_1, v_2)$, где је $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ и $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Тражимо још један уопштени сопствени вектор као решење система $(A-2E)v = v_1$. (На десној страни једначине може да буде и $= v_2$ и $= v_1 + v_2$ и $= v_1 + 3v_2$ итд. јер су то све сопствени вектори. Ово може да да више различитих решења. А можда и нека од ових једначина нема решење као нпр. $= v_2$, па треба пробати са неком другом.) Из

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & 1 \\ & & & & \cancel{0} & \cancel{=} & \cancel{0} \\ \cancel{x} & \cancel{+} & \cancel{y} & \cancel{-} & \cancel{z} & \cancel{=} & \cancel{1} \end{array}$$

Нпр. можемо изабрати $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Имаћемо један блок $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ који одговара сопственој вредности 2 и сопственим векторима v_1 и v_3 и један блок (2) који одговара сопственој вредности 2 и сопственом вектору v_2. Зато је

$$J = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \qquad \text{и} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

Наравно, претходно решење није јединствено. Нпр. могли смо уместо v_2 да узмемо $2v_2$ и добили бисмо другачију матрицу P. Једино на шта треба обратити пажњу је редослед колона матрице P. Одмах иза сопственог вектора v_1 мора стајати уопштени сопствени вектор v_3 који је добијен од v_1.

Задатак 9.6. *Нека је*

$$L : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow M_2(\mathbb{R}), \qquad L\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y & y \\ -2x-4y+z+2t & -2y+t \end{pmatrix}.$$

Одредити Жорданову нормалну форму J оператора L и бар једну базу векторског f простора $M_2(\mathbb{R})$ такву да је $[L]_f = J$.

Решење. Матрица овог оператора у канонској бази e је

$$[L]_e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

па ће карактеристични полином бити

$$\chi_L(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ -2 & -4 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \cdots = (\lambda-1)^4.$$

Једина сопствена вредност оператора L је 1, а њени сопствени вектори су $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ такви да је $(L - \mathbb{1})X = \mathbb{O}$ тј.

$$\begin{pmatrix} 2y & 0 \\ -2x-4y+2t & -2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

што се своди на $y = 0$ и $t = x$. Сопствени потпростор је $\operatorname{Ker}(L - \mathbb{1}) = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ z & x \end{pmatrix} \middle| \, x, z \in \mathbb{R} \right\} = \mathscr{L}(v_1, v_2)$, где је $v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Потражимо још два уопштена сопствена вектора v_3 и v_4. Сад ту имамо две могућности. Једна је да v_3 добијемо од v_1 (као решење једначине $(L - \mathbb{1})v = v_1$), а v_4 од v_2. Или, општије, да v_3 и v_4 добијемо од неких различитих линеарних комбинација v_1 и v_2. Друга (суштински различита) могућност је да v_3 добијемо нпр. од v_1, потом v_4 од v_3.

Јасно је да једначина $(L - \mathbb{1})X = v_1$ нема решење, а исто важи и уколико v_1 заменимо било којом линеарном комбинацијом v_1 и v_2, па је ово друга од две поменуте могућности. Зато ћемо v_3 тражити као решење једначине $(L - \mathbb{1})X = v_2$, тј.

$$\begin{pmatrix} 2y & 0 \\ -2x - 4y + 2t & -2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Бирамо једно решење v_3 овог система и пазимо да једначина $(L - \mathbb{1})X = v_3$ има решење (јер је то једини начин да у следећем кораку нађеемо још један уопштени сопствени вектор). Нпр. можемо узети $v_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$. И на крају тражимо последњи уопштени сопствени вектор v_4 као решење једначине $(L - \mathbb{1})X = v_3$, тј.

$$\begin{pmatrix} 2y & 0 \\ -2x - 4y + 2t & -2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Нпр. нека је $v_4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Сада можемо закључити да је Жорданова форма оператора L једнака

$$J = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

и она представља матрицу оператора L у бази $f = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. $\square$

Дакле, имамо прецизан алгоритам за одређивање Жорданове форме. Нека је λ сопствена вредност матрице A и нека је $v_1 \in \operatorname{Ker}(A - \lambda E)$ сопствени вектор. Уопштени сопствени вектор v_2 смо тражили из $\operatorname{Ker}(A - \lambda E)^2 \setminus \operatorname{Ker}(A - \lambda E)$, јер је

$$(A - \lambda E)^2 v_2 = (A - \lambda E) v_1 = \mathbb{O} \qquad \text{и} \qquad (A - \lambda E) v_2 = v_1 \neq \mathbb{O}.$$

Затим бисмо v_3 тражили из $\mathrm{Ker}(A-\lambda E)^3 \setminus \mathrm{Ker}(A-\lambda E)^2$, па $v_4 \in \mathrm{Ker}(A-\lambda E)^4 \setminus \mathrm{Ker}(A-\lambda E)^3$, итд. И тако за сваки сопствени вектор v_1 који одговара сопственој вредности λ.

Нека $\delta_i = \delta(A-\lambda E)^i = \dim \mathrm{Ker}(A-\lambda E)^i$. за $i \in \mathbb{N}$. Базу f смо конструисали на следећи начин. Најпре смо изабрали δ_1 линеарно независних вектора из $\mathrm{Ker}(A-\lambda E)$, затим $\delta_2-\delta_1$ линеарно независних вектора из $\mathrm{Ker}(A-\lambda E)^2$ (јер $\mathrm{Ker}(A-\lambda E)^2$ садржи и δ_1 вектора из базе $\mathrm{Ker}(A-\lambda E)$ који нам не одговарају), затим $\delta_3-\delta_2$ линеарно независних вектора из $\mathrm{Ker}(A-\lambda E)^3$, итд.

Погледајмо како то утиче на Жорданове блокове који одговарају сопственој вредности λ. Из претходног следи да постоји δ_1 блокова димензије бар 1×1, $\delta_2-\delta_1$ блокова димензије бар 2×2, $\delta_3-\delta_2$ блокова димензије бар 3×3, итд. Додатно, збир димензија свих тих блокова ће бити једнак вишеструкости сопствене вредности λ (јер смо управо толико уопштених сопствених вектора нашли). Ради лакшег рачуна уместо дефекта обично ћемо радити са рангом знајући да је $\rho(A-\lambda E)^i + \delta(A-\lambda E)^i = n$, по Теореми о рангу и дефекту, где је n димензија квадратне матрице A.

Наравно, исти закључак важи и за линеарне операторе.

Задатак 9.7. *Одредити Жорданову нормалну форму J матрице*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решење. Карактеристични полином матрице A је

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} \leftarrow$$

$$= (3-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (3-\lambda)(2-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= (3-\lambda)(2-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (3-\lambda)(2-\lambda)^2 \left(3 - 4\lambda + \lambda^2 + 1\right) = -(\lambda-3)(\lambda-2)^4.
\end{aligned}
$$

Како је 3 једнострука нула, Жорданова форма ће имати блок (3).

Остали блокови одговарају сопственој вредности 2 и збир њихових димезија је 4. Имамо следеће могућности (до на пермутацију блокова што занемарујемо):

(1) 4 блока 1×1: $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,

(2) 1 блок 2×2 и 2 блока 1×1: $\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \boxed{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$,

(3) 2 блока 2×2: $\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$,

(4) 1 блок 3×3 и 1 блок 1×1: $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$ или

(5) 1 блок 4×4: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Прво, ранг матрице

$$
A - 2E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

је 3, па ће бити $\delta_1 = \delta(A-2E) = 5 - \rho(A-2E) = 2$. То значи да Жорданов блок садржи тачно 2 блока (димензије бар 1×1), што нам сужава избор на случајеве (3) и (4). Затим имамо да је

$$(A-2E)^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и $\delta_2=\delta(A-2E)^2=5-\rho(A-2E)^2=3$. Следи, постоји тачно $\delta_2-\delta_1=1$ блок димензије бар 2×2, па је једина могућност (4), односно Жорданова нормална форма матрице A је

$$J=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Као проверу можемо искористити да је

$$(A-2E)^3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

тј. $\delta_3=5-\rho(A_2E)^3=4$. Онда број блокова димензије бар 3×3 износи $\delta_3-\delta_2=1$, што је у складу са добијеном Жордановом формом J. Затим, када се израчуна четврти степен испостави се да је $(A-2E)^4=(A-2E)^3$, а самим тим $(A-2E)^n=(A-2E)^3$, за све $n\geqslant 4$. То значи да је $\delta_n-\delta_{n-1}=4-4=0$, односно да Жорданова форма J нема блокове димензије бар $n\times n$, за све $n\geqslant 4$. □

Задатак 9.8. *Одредити Жорданову нормалну форму J матрице*

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 1\\ -1 & -1 & 3 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решење. Карактеристични полином матрице A је $\chi_A(\lambda)=(\lambda-3)^6$. Директним рачуном добијамо

$$A - 3E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(A - 3E)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Зато је $\delta_1 = \dim \operatorname{Ker}(A - 3E) = 6 - 3 = 3$ и $\delta_2 = \dim \operatorname{Ker}(A - 3E)^2 = 5$. Следи, постоје $\delta_1 = 3$ блока димензије бар 1×1 што даје три могућности: два блока 1×1 и један блок 4×4 или по један блок 1×1, 2×2 и 3×3 или три блока 2×2). Додатно, знамо и да има $\delta_2 - \delta_1 = 2$ блока димензије бар 2×2, што искључује прву и трећу поменуту могућност. Другим речима, тражена Жорданова форма је

$$J = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

□

Остаје још питање како (брзо) одредити уопштене сопствене векторе. За произвољну сопствену вредност λ линеарног оператора L на коначно димензионалном векторском простору V (и слично, матрице A) скуп

$$\widetilde{\operatorname{Ker}}(L - \lambda\mathbb{1}) := \bigcup_{i=1}^{\infty} \operatorname{Ker}(L - \lambda\mathbb{1})^i.$$

ћемо звати *уопштени сопствени потпростор* (линеарног оператора L који одговара сопственој вредности λ). Знамо да унија векторских простора не мора бити векторски простор, али ова унија ће бити. За векторске просторе који учествују у унији важи

$$\operatorname{Ker}(L - \lambda\mathbb{1}) \leqslant \operatorname{Ker}(L - \lambda\mathbb{1})^2 \leqslant \operatorname{Ker}(L - \lambda\mathbb{1})^3 \leqslant \cdots \leqslant V.$$

Како је простор V коначне димензије претходним потпросторима има највише $\dim V$ различитих. Зато ће $\widetilde{\operatorname{Ker}}(L - \lambda\mathbb{1})$ бити једнако $\operatorname{Ker}(L - \lambda\mathbb{1})^i$, за неко довољно велико $i \in \mathbb{N}$. Специјално, $\widetilde{\operatorname{Ker}}(L - \lambda \mathbb{1})$ јесте векторски потпростор од V, а из претходне приче следи и да је то најмањи потпростор који садржи све уопштене сопствене векторе за сопствену вредност λ.

Сада ћемо показати на примеру како се одређује уопштени сопствени потпростор. Вратимо се на линеарни оператор L из (9.1) са почетка главе. Његов карактеристични полином је био $\chi_L(\lambda) = -\lambda^2(\lambda - 2)$. Покушаћемо да одредимо уопштени сопствени потпростор $\widetilde{\operatorname{Ker}} L$. Из $L^2 \circ (L - 2 \cdot \mathbb{1}) = -\chi_L(L) = \mathbb{O}$ следи да је

$$\operatorname{Im}(L - 2 \cdot \mathbb{1}) \subseteq \operatorname{Ker} L^2 \subseteq \widetilde{\operatorname{Ker}} L.$$

Слично, $\operatorname{Im} L^2 \subseteq \widetilde{\operatorname{Ker}}(L - 2 \cdot \mathbb{1})$. Тврдимо да овде важи и једнакости. Да бисмо то показали довољно је да докажемо да у инклузији

$$\operatorname{Im}(L - 2 \cdot \mathbb{1}) + \operatorname{Im} L^2 \subseteq \widetilde{\operatorname{Ker}} L + \widetilde{\operatorname{Ker}}(L - 2 \cdot \mathbb{1}) \subseteq \mathbb{R}^3$$

важи једнакост.

Прво ћемо полином 1 представити као $(\lambda - 2)p(\lambda) + \lambda^2 q(\lambda)$. То можемо урадити Еуклидовим алгоритмом јер знамо да су полиноми $\lambda - 2$ и λ^2 узајамно прости. Дељењем λ^2 са $\lambda - 2$ добијамо $\lambda^2 = (\lambda - 2)(\lambda + 2) + 4$. Следи,

$$1 = (\lambda - 2)\left(-\frac{1}{4}\lambda - \frac{1}{2}\right) + \lambda^2 \cdot \frac{1}{4}$$

и $\mathbb{1} = (L - 2 \cdot \mathbb{1}) \circ \left(-\frac{1}{4}L - \frac{1}{2}\mathbb{1}\right) + L^2 \circ \left(\frac{1}{4}\mathbb{1}\right)$. За произвољан вектор $v \in \mathbb{R}^3$ важи

$$\begin{aligned} v = \mathbb{1} v &= \left((L - 2 \cdot \mathbb{1}) \circ \left(-\frac{1}{4}L - \frac{1}{2}\mathbb{1}\right) + L^2 \circ \left(\frac{1}{4}\mathbb{1}\right)\right) v \\ &= \underbrace{(L - 2 \cdot \mathbb{1})\left(-\frac{1}{4}Lv - \frac{1}{2}v\right)}_{\in \operatorname{Im}(L - 2\cdot\mathbb{1})} + \underbrace{L^2\left(\frac{1}{4}v\right)}_{\in \operatorname{Im} L^2} \in \operatorname{Im}(L - 2 \cdot \mathbb{1}) + \operatorname{Im} L^2. \end{aligned}$$

Овим смо показали да је

$$\begin{aligned} \widetilde{\operatorname{Ker}} L = \operatorname{Im}(L - 2 \cdot \mathbb{1}) &= \left\{ (L - 2 \cdot \mathbb{1}) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; x, y, z \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} -x + z \\ 0 \\ -x - 3z \end{pmatrix} \;\middle|\; x, z \in \mathbb{R} \right\} = \mathscr{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

и

$$\widetilde{\operatorname{Ker}}(L - 2 \cdot \mathbb{1}) = \operatorname{Im} L^2 = \left\{ L^2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ L \begin{pmatrix} x+z \\ 2y \\ -x-z \end{pmatrix} \;\middle|\; x,y,z \in \mathbb{R} \right\}$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 4y \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; y \in \mathbb{R} \right\} = \mathscr{L} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

што се поклапа резултатима са почетка главе. Додатно, овим смо показали и да је сума $\widetilde{\mathrm{Ker}} L^2 + \widetilde{\mathrm{Ker}}(L - 2 \cdot \mathbb{1})$ једнака целом $\mathbb{R}^3$, па ова сума мора бити директна (због димензије).

Одавде можемо извући следећи закључак.

Теорема 9.9. *Нека је $L : V \longrightarrow V$ линеарни оператор и нека је λ_0 његова сопствена вредност вишеструкости k. Тада је $\widetilde{\mathrm{Ker}}\,(L - \lambda_0 \mathbb{1}) = \mathrm{Im}\,(h_{\lambda_0}(L))$, где је $h_{\lambda_0}(\lambda) = \frac{\chi_L(\lambda)}{(\lambda-\lambda_0)^k}$. Додатно, важи $V = \bigoplus\limits_{\lambda_0} \widetilde{\mathrm{Ker}}\,(L - \lambda_0 \mathbb{1})$.*

А имамо и аналогно тврђење на језику матрица.

Напомињемо да је у претходном примеру $h_2(\lambda) = -\lambda^2$ и $h_0(\lambda) = -(\lambda-2)$. Ми смо уместо ових полинома користили са $-h_2$ и $-h_0$, али то ништа не мења јер је $\mathrm{Im}(-F) = \mathrm{Im}\, F$, за све линеарне операторе F.

Задатак 9.10. *Одредити уопштене сопствене потпросторе матрице*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решење. У Задатку 9.7 смо одредили карактеристични полином $\chi_A(\lambda) = -(\lambda-3)(\lambda-2)^4$. То значи да су уопштени сопствени потпростори

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathrm{Ker}}(A - 2E) &= \mathrm{Im}(-(A-3E)) = \mathrm{Im}(A - 3E) \\ &= \mathscr{L}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \mathscr{L}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

и

$$\widetilde{\operatorname{Ker}}(A-3E) = \operatorname{Im}\left(-(A-2E)^4\right) = \operatorname{Im}(A-2E)^4 = \mathscr{L}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

jер је $(A-2E)^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. □

9.1 Нилпотентне матрице

Наредни циљ је да одредимо степен Жордановог блока јер знамо да је $A^n = \left(PJP^{-1}\right)^n = PJ^nP^{-1}$, као и да се Жорданова форма J степенује тако што се степенује сваки Жорданов блок посебно.

Задатак 9.11. *а) Нека је*

$$N_{m,k} = \begin{pmatrix} \overbrace{0 \ \ldots \ 0}^{k} & 1 & \overbrace{0 \ \ldots \ 0}^{m-k-1} \\ & & 1 \ \ \ddots \ \ \vdots \\ & & \qquad \ddots \ \ 0 \\ & & \qquad\quad 1 \\ & & \qquad\quad 0 \\ & & \qquad\quad \vdots \\ & & \qquad\quad 0 \end{pmatrix}$$

квадратна $m \times m$ матрица која има јединице на $k+1$-ој дијагонали. Показати да је $N_{m,1}^k = \begin{cases} N_{m,k}, & \text{за } k \leqslant m-1, \\ \mathbb{O}, & \text{за } k \geqslant m. \end{cases}$

б) Израчунати степен Жордановог блока $J(\lambda)^n$, за све $n \in \mathbb{N}$.

Решење. а) Пре него што покажемо тражену једнакост, погледајмо када се степенује матрица $N_{m,1}$ у малим димензијама нпр. $m = 4$. Имали бисмо

$$N_{4,1}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = N_{4,2},$$

$$N_{4,1}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = N_{4,3},$$

$$N_{4,1}^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = N_{4,3}.$$

Слободним речима, свако множење са $N_{m,k}$ помера дијагоналу са јединицама ка горњем десном ћошку и у неком тренутку та дијагонала ,,изађе" из матрице.

Покажимо сада тврђење индукцијом по k, за $k = 1$ тривијално важи. Претпоставимо да тврђење важи за k.

(1) Ако је $k \leqslant m-2$, лако се проверава да је

$$N_{m,1}^{k+1} = N_{m,1}^k N_{m,1} = N_{m,k} N_{m,1} = N_{m,k+1}.$$

(2) Ако је $k = m-1$, тада је $N_{m,1}^m = N_{m,1}^{m-1} N_{m,1} = N_{m,m-1} N_{m,1} = \mathbb{O}$.

(3) Ако је $k \geqslant m$, онда је $N_{m,1}^{k+1} = N_{m,1}^k N_{m,1} = \mathbb{O} \cdot N_{m,1} = \mathbb{O}$.

б) Уколико је $\lambda = 0$ одговор већ имамо у делу а). Зато ћемо надаље претпостављати да је $\lambda \neq 0$.

Жорданов блок $J(\lambda)$ ћемо записати као $\lambda E + N_{m,1}$, где је m димензија квадратне матрице $J(\lambda)$. Како матрице λE и $N_{m,1}$ комутирају биномном формулом ћемо добити

$$J(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\lambda E)^{n-k} N_{m,1}^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \lambda^{n-k} N_{m,k}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} & \binom{n}{3}\lambda^{n-3} & \dots & \binom{n}{m}\lambda^{n-m} \\ & \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} & \dots & \binom{n}{m-1}\lambda^{n-m+1} \\ & & \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \dots & \binom{n}{m-2}\lambda^{n-m+2} \\ & & & \lambda^n & \dots & \binom{n}{m-3}\lambda^{n-m+3} \\ & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & \lambda^n \end{pmatrix},$$

при чему подразумевамо да је $N_{m,0} = E$ и $N_{m,k} = \mathbb{O}$, за $k \geqslant m$. $\square$

Матрица из претходног задатка $N_{m,k}$ је пример *нилпотентне* матрице о којима ћемо тек причати.

Задатак 9.12. *Израчунати степене Жордановихформи J из Задатака 9.5, 9.7 и 9.8.*

Решење. Према претходном задатку је

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & (2)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} (3)^n & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \end{matrix} & 0 \\ \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^n & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \\ 0 & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \end{matrix} & (2)^n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}2^{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 2^n & n2^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^n & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^n & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & (3)^n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3^n & n3^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}3^{n-2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3^n & n3^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}.$$

$\square$

На примеру последње Жорданове форме из претходног задатка видимо да ће сви коефицијенти матрице $A^n = PJ^nP^{-1}$ бити из $\mathscr{L}\left(3^n, n3^{n-1}, \frac{n(n-1)}{2}3^{n-2}\right) = \mathscr{L}\left(3^n, n3^{n-1}, n^2 3^{n-2}\right) = \mathscr{L}\left(3^n, n3^n, n^2 3^n\right)$, што бисмо добили и да смо A^n тражили делећи полином λ^n минималним полиномом $\mu_A(\lambda) = \cdots = (\lambda - 3)^3$.

Дефиниција 9.13. *За квадратну матрицу A кажемо да је нилпотентна уколико постоји природан број n такав да је $A^n = \mathbb{O}$. За линеарни оператор L кажемо да је нилпотентан уколико постоји природан број n такав да је $L^n = \mathbb{O}$.*

Наравно, ако је $A^n = \mathbb{O}$, онда ће бити и $A^m = \mathbb{O}$, за све $m \geqslant n$.

Разне елементарне функције (синус, косинус, логаритам, експоненцијална функција, итд.) се могу дефинисати и за реалне и комплексне матрице (линеарне операторе на реалном или комплексном векторском простору) коришћењем Тејлоровог[2] развоја. Нпр. експоненцијалну функцију бисмо дефинисали са

$$e^A := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n.$$

Овде је наравно питање да ли ред на десној страни уопште конвергира. Специјално, ако је матрица A нилпотентна овај ред ће бити коначна сума. те ће увек конвергирати. Другим речима експонецијална (синусна, логаритамска, итд.) функција нилпотентне матрице је само полином од те матрице.

Задатак 9.14. *Показати да је матрица* $N = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 5 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}$ *нилпотентна, а затим израчунати*

а) e^N, *б)* $\cos N$, *в)* $\log(E - N)$.

Решење. Лако се проверава да је

$$N^2 = \begin{pmatrix} 12 & -4 & -4 \\ 12 & -4 & -4 \\ 24 & -8 & -8 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

што значи да је матрица N нилпотентна.

а) Према Тејлоровом развоју је

$$e^N = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} N^n = E + N + \frac{1}{2} N^2,$$

јер је $N^n = \mathbb{O}$, за све $n \geqslant 3$. Дакле,

$$\begin{aligned} e^N &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 5 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 12 & -4 & -4 \\ 12 & -4 & -4 \\ 24 & -8 & -8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 9 & 0 & -4 \\ 11 & 0 & -5 \\ 13 & 1 & -6 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

[2] *Brook Taylor* (1685. - 1731.), енглески математичар

б) Слично,

$$\begin{aligned}\cos N &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} N^{2n} = E - \frac{1}{2} N^2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 12 & -4 & -4 \\ 12 & -4 & -4 \\ 24 & -8 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 2 \\ -6 & 3 & 2 \\ -12 & 4 & 5 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

в) И још једном на исти начин добијамо

$$\begin{aligned}\log(E-N) &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} N^n = -N - \frac{1}{2} N^2 \\ &= -\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 5 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 12 & -4 & -4 \\ 12 & -4 & -4 \\ 24 & -8 & -8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -8 & 0 & 4 \\ -11 & 1 & 5 \\ -13 & -1 & 7 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

□

Напомињемо да метод изложен у претходном задатку ради само за нилпотентне матрице. За остале матрице имамо питање да ли Тејлоров ред конвергира. У то нећемо превише залазити. Само ћемо показати на једном примеру како израчунати тај ред у случају да конвергира. У томе ће нам помоћи Жорданова форма.

Нека је $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ матрица из Задатка 9.5, у коме смо показали да је $A = PJP^{-1}$, где је $J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (Жорданова форма матрице A) и $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Тада је

$$\begin{aligned}e^A &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(PJP^{-1}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} PJ^nP^{-1} \\ &= P\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} J^n\right) P^{-1} = Pe^JP^{-1},\end{aligned}$$

па остаје још само питање (да ли и) како можемо да израчунамо e^J. Пошто знамо како се степенује Жорданова форма лако добијамо да је

$$
\begin{aligned}
e^J &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} & \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{(n-1)!} & 0 \\ 0 & \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} & 0 \\ 0 & 0 & \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^2 & e^2 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Напомињемо да овде конвергенција може да буде проблем. Нпр. овде смо могли да дефинишемо e^A, али не бисмо могли да дефинишемо $\log(E-A)$ (јер би ред дивергирао).

Иако елементарне функције од матрица можда делује чудно, оне имају јако широку примену. На пример, експоненцијална функција се користити за решавање хомогених диференцијалних једначина и њихових система. Ове једначине имају доста сличности са диференцним једначинама (па отуда и јако сличан назив).

Задатак 9.15. *Ако је N нилпотентна матрица, показати да је матрица $E+N$ инвертибилна.*

Решење. Ако је матрица N нилпотентна онда постоји природан број n такав да је $N^n = \mathbb{O}$. То можемо искористити да јединичну матрицу запишемо као

$$
\begin{aligned}
E &= E - \mathbb{O} = E - (-1)^n N^n = E^n - (-N)^n \\
&= (E-(-N))\left(E^{n-1} - NE^{n-2} + (-N)^2 E^{n-3} + \cdots + (-N)^{n-1}\right) \\
&= (E+N)\left(E - N + N^2 + \cdots + (-1)^{n-1} N^{n-1}\right),
\end{aligned}
$$

при чему смо у претпоследњој једнакости искористили комутативност матрица E и $-N$. На исти начин се показује и да је $\left(E - N + N^2 + \cdots + (-1)^{n-1}N^{n-1}\right)(E+N) = E$, што значи да је матрица $E+N$ инвертибилна и њен инверз је

$$
(E+N)^{-1} = \left(E - N + N^2 + \cdots + (-1)^{n-1} N^{n-1}\right).
$$

□

Задатак 9.16. *Одредити корен линеарног оператора*

$$
L : \mathbb{R}^3[x] \longrightarrow \mathbb{R}^3[x], \qquad L\left(a + bx + cx^2\right) = (3a + b - c) + 2bx + (a + b + c)x^2.
$$

Решење. Матрица овог оператора у канонској бази e је $[L]_e = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. У Задатку 9.5 смо видели да је Жорданова форма матрице $[L]_e$ (а самим тим и Жорданова форма оператора L) једнака $J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ и важи $[L]_e = PJP^{-1}$, где је $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. На језику оператора то значи да наш оператор L у бази

$$f = \left\{ f_1(x) = 1 + x^2,\ f_2(x) = 1,\ f_3(x) = x + x^2 \right\}$$

има матрицу $[L]_f = J$.

Тиме смо проблем свели на кореновање Жорданове форме J знајући да је $\left[\sqrt{L}\right]_f = \sqrt{[L]_f} = \sqrt{J}$. Матрицу J ћемо кореновати тако што појединачно коренујемо њене блокове $J_1 = (2)$ и $J_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. За почетак, јасно је да је $\sqrt{J_1} = \left(\sqrt{2}\right)$.

Дводимензионални блок можемо записати као $J_2 = 2E + N$, где је $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ нилпотентна матрица. Онда је

$$\sqrt{J_2} = \sqrt{2E + N} = \sqrt{2}\sqrt{E + \frac{1}{2}N} = \sqrt{2}\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} \left(\frac{1}{2}N\right)^n,$$

према Тејлоровом развоју, где је $\binom{\frac{1}{2}}{n} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\dots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}$. Али како је $\left(\frac{1}{2}N\right)^n = \frac{1}{2^n}N^n = \frac{1}{2^n}\mathbb{O} = \mathbb{O}$, за све $n \geqslant 2$, претходни корен постаје

$$\sqrt{J_2} = \sqrt{2}\left(E + \frac{1}{4}N\right) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Када све спојимо добијамо да линеарни оператор $\sqrt{L}$ у бази f има матрицу $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{4} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$. Одатле ћемо лако прочитати да је

$$\begin{aligned}
\sqrt{L}\left(a + bx + cx^2\right) &= \sqrt{L}\left(af_2 + b\left(-f_1 + f_2 + f_3\right) + c\left(f_1 - f_2\right)\right) \\
&= \sqrt{L}\left((-b + c)f_1 + (a + b - c)f_2 + bf_3\right) \\
&= (-b + c)\sqrt{2}f_1 + (a + b - c)\left(\frac{\sqrt{2}}{4}f_1 + \sqrt{2}f_2\right) + b\sqrt{2}f_3 \\
&= \frac{\sqrt{2}}{4}(5a + b - c) + \sqrt{2}bx + \frac{\sqrt{2}}{4}(a + b + 3c)x^2,
\end{aligned}$$

за све $a + bx + cx^2 \in \mathbb{R}^3[x]$.

Наравно, овде лако можемо проверити да је $\sqrt{L} \circ \sqrt{L} = L$ оператор са почетка задатка. $\square$

Глава 10

Дуални простори

Дефиниција 10.1. *Нека је V векторски простор над пољем F. Скуп свих линеарних пресликавања из V у поље F зовемо дуални простор (или краће дуал) простора V и означавамо са V^*.*

Лако се провера да је дуални простор заиста један векторски простор. Елементе дуалног простора V^* зовемо *линеарни функционали* на V.

Теорема 10.2. *Нека је $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ једна база векторског простора V. Тада линеарни функционали $L_i : V \longrightarrow F$, $1 \leqslant i \leqslant n$, задати са*

$$L_i e_j = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & \textit{иначе}, \end{cases}$$

формирају базу дуалног простора V^*. Специјално, ово значи да су векторски простори V и V^* изоморфни, као и да је $\dim V = \dim V^*$

Дефиниција 10.3. *За базу $\{L_1, \ldots, L_n\}$ кажемо да је дуална бази e и означавамо је са e^*. Функционале L_i ћемо означавати са e_i^*, за све $1 \leqslant i \leqslant n$.*

Дуалну базу e^* канонске базе e простора V ћемо кратко звати канонска база дуалног простора V^*. На пример, канонска база векторског простора $\left(\mathbb{R}^3\right)^*$ (дуална база канонске базе $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$) се састоји од линеарних функционала

$$e_1^*(a,b,c) = a, \qquad e_2^*(a,b,c) = b \qquad \text{и} \quad e_3^*(a,b,c) = c.$$

Задатак 10.4. *Одредити дуалну базу базе $\{p_1, p_2, p_3\}$ простора $\mathbb{R}^3[x]$, где је $p_1(x) = 1 - x + 3x^2$, $p_2(x) = x - x^2$ и $p_3(x) = 3x - 2x^2$.*

Решење. Да бисмо дошли до дуалних функционала прво ћемо произвољан полином $a+bx+cx^2$ расписати преко координата у бази $\{p_1, p_2, p_3\}$. Добијамо

$$a + bx + cx^2 = ap_1(x) + (7a - 2b - 3c)p_2(x) + (-2a + b + c)p_3(x).$$

Како за дуалну базу $\{p_1^*, p_2^*, p_3^*\}$ треба да важи $p_i^* p_j = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases}$ за $i, j \in \{1, 2, 3\}$, биће

$$\begin{aligned}
p_1^*\left(a + bx + cx^2\right) &= ap_1^*p_1 + (7a - 2b - 3c)p_1^*p_2 + (-2a + b + c)p_1^*p_3 = a, \\
p_2^*\left(a + bx + cx^2\right) &= ap_2^*p_1 + (7a - 2b - 3c)p_2^*p_2 + (-2a + b + c)p_2^*p_3 \\
&= 7a - 2b - 3c, \\
p_3^*\left(a + bx + cx^2\right) &= ap_3^*p_1 + (7a - 2b - 3c)p_3^*p_2 + (-2a + b + c)p_3^*p_3 \\
&= -2a + b + c.
\end{aligned}$$

□

Погледајмо сада пажљивије решење претходног задатка. Нека је $e = \left\{1, x, x^2\right\}$ канонска база и $f = \{p_1, p_2, p_3\}$ друга база из задатка. Њихове дуалне базе су $e^* = \left\{1^*, x^*, \left(x^2\right)^*\right\}$ и $f^* = \{p_1^*, p_2^*, p_3^*\}$, редом, где је

$$1^*\left(a + bx + cx^2\right) = a, \quad x^*\left(a + bx + cx^2\right) = b \quad \text{и} \quad \left(x^2\right)^*\left(a + bx + cx^2\right) = c.$$

Рачун у претходном задатку показује да је $1 = p_1 + 7p_2 - 2p_3$, $x = -2p_2 + p_3$ и $x^2 = -3p_2 + p_3$, као и $p_1^* = 1^*$, $p_2^* = 7 \cdot 1^* - 2x^* - 3\left(x^2\right)^*$ и $p_3^* = -2 \cdot 1^* + x^* + \left(x^2\right)^*$. Следи,

$$P_{f,e} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7 & -2 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad P_{e^*,f^*} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} = P_{f,e}^T = P_{e,f}^{-T}.$$

(Када смо тражили координате произвољног полинома у бази f ми смо суштински рачунали $P_{e,f}^{-1}$, а код прелаза на функционале је дошло до транспоновања.) Генерално, имамо следеће тврђење.

Теорема 10.5. *Нека је V коначно димензионални векторски простор и нека су e и f две његове базе. Тада је $P_{e^*,f^*} = P_{e,f}^{-T}$.*

Задатак 10.6. *Одредити дуалну базу базе $\{f_1, f_2, f_3\}$ комплексног векторског простора $\mathbb{C}^3$, где је $f_1 = (1, i, 0)$, $f_2 = (-1, 0, 1 + i)$ и $f_3 = (0, -2i, -1 - i)$.*

Решење. Матрица преласка са канонске базе e на базу $f = \{f_1, f_2, f_3\}$ је $P_{e,f} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ i & 0 & -2i \\ 0 & 1 + i & -1 - i \end{pmatrix}$. Како је

$$P_{e^*,f^*} = P_{e,f}^{-T} = \cdots = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ i & i & i \\ 1 - i & 1 - i & \frac{1-i}{2} \end{pmatrix},$$

дуална база f^* ће садржати векторе

$$\begin{aligned}
f_1^*(a,b,c) &= 2e_1^*(a,b,c) + ie_2^*(a,b,c) + (1-i)e_3^*(a,b,c) = 2a + ib + (1-i)c, \\
f_2^*(a,b,c) &= e_1^*(a,b,c) + ie_2^*(a,b,c) + (1-i)e_3^*(a,b,c) = a + ib + (1-i)c, \\
f_3^*(a,b,c) &= a + ib + \frac{1-i}{2}c.
\end{aligned}$$

Овде се лако може проверити да је

$$\begin{aligned}
f_1^* f_1 &= (2e_1^* + ie_2^* + (1-i)e_3^*)\,(1,i,0) = 2\cdot 1 + i\cdot i + (1-i)0 = 1, \\
f_1^* f_2 &= (2e_1^* + ie_2^* + (1-i)e_3^*)\,(-1,0,1+i) = 2(-1) + i\cdot 0 + (1-i)(1-i) = 0,
\end{aligned}$$

итд. □

Задатак 10.7. *Показати да линеарни функционали $L_1 p = p(1)$, $L_2 p = p(-1)$ и $L_3 p = p''(0)$ чине базу векторског простора $\left(\mathbb{R}^3[x]\right)^*$. Наћи базу векторског $\mathbb{R}^3[x]$ чија је дуална база $\{L_1, L_2, L_3\}$.*

Решење. Како је $\dim\left(\mathbb{R}^3[x]\right)^* = \dim \mathbb{R}^3[x] = 3$, довољно је показати да су L_i-ови линеарно независни. Претпоставимо да за неке скаларе $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ важи $\alpha L_1 + \beta L_2 + \gamma L_3 = \mathbb{O}$. Специјално, имамо да је

$$\begin{aligned}
\alpha L_1 1 + \beta L_2 1 + \gamma L_3 1 &= \alpha + \beta = 0 \\
\alpha L_1 x + \beta L_2 x + \gamma L_3 x &= \alpha - \beta = 0,
\end{aligned}$$

одакле закључујемо да је $\alpha = \beta = 0$. Затим, из $\gamma L_3 = \mathbb{O}$ следи да је $\gamma = 0$ јер L_3 није нула-функционал.

Нека је $\{p_1, p_2, p_3\}$ база $\mathbb{R}^3[x]$ чија је дуална база $\{L_1, L_2, L_3\}$, тј. за коју важи $p_i^* = L_i$, за све $1 \leqslant i \leqslant 3$. За $p_1(x) = a + bx + cx^2$ треба да важи

$$1 = L_1 p_1 = a + b + c, \qquad 0 = L_2 p_1 = a - b + c, \qquad \text{и} \qquad 0 = L_3 p_1 = 2c.$$

Следи, $c = 0$, $a = b = \frac{1}{2}$ и $p_1(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x$.

Аналогно, из услова $L_1 p_2 = 0$, $L_2 p_2 = 1$ и $L_3 p_2 = 0$ закључујемо да је $p_2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x$. А из услова $L_1 p_3 = 0$, $L_2 p_3 = 0$ и $L_3 p_3 = 1$ добијамо $p_3(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x^2$. □

Дефиниција 10.8. *Нека је V векторски простор и U његов потпростор. Скуп*

$$\{\, L \in V^* \mid (\forall u \in U)\, Lu = \mathbb{O} \}$$

зовемо анихилатор векторског потпростора U (у простору V) и означавамо са $U^\perp$.

Ознака анихилатора која подсећа на ортогоналност није случајна. О томе ћемо причати када уведемо скаларни производ и угао између вектора. И генерално, дуалне просторе ћемо лакше разумети када будемо увели скаларни производ.

Теорема 10.9. *Нека је V векторски простор коначне димензије и U његов потпростор. Тада је* $\dim U^{\perp} = \dim V - \dim U$.

Задатак 10.10. *Нека је* $V = \left\{ p \in \mathbb{R}^4[x] \,\middle|\, p(1) = p(-1) \right\}$ *потпростор векторског простора* $\mathbb{R}^4[x]$. *Одредити бар једну базу и димензију анихилатора* $V^{\perp}$.

Решење. За произвољан вектор $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$ важи $a + b + c + d = a - b + c - d$, што повлачи $d = -b$. Дакле,

$$V = \left\{ a + b\left(x - x^3\right) + cx^2 \,\middle|\, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Нека је сада L произвољан функционал из $V^{\perp} \leqslant \left(\mathbb{R}^4[x]\right)^*$. Распишимо L преко координата у канонској бази e^* дуалног простора $\left(\mathbb{R}^4[x]\right)^*$ као $L = \alpha 1^* + \beta x^* + \gamma \left(x^2\right)^* + \delta \left(x^3\right)^*$. За произвољан вектор $p(x) = a + b\left(x - x^2\right) + cx^3 \in V$ треба да важи $Lp = 0$. Другим речима, тражимо скаларе α, β, γ и δ за које је

$$\begin{aligned} 0 = Lp &= \left(\alpha 1^* + \beta x^* + \gamma \left(x^2\right)^* + \delta \left(x^3\right)^*\right) \left(a + b\left(x - x^3\right) + cx^2\right) \\ &= \alpha a + (\beta - \delta) b + \gamma c, \end{aligned}$$

за све $a, b, c \in \mathbb{R}$. Јасно је да мора бити $\alpha = \gamma = 0$ и $\delta = \beta$. Дакле, анихилатор

$$V^{\perp} = \left\{ \beta x^* + \beta \left(x^2\right)^* \,\middle|\, \beta \in \mathbb{R} \right\} = \mathscr{L}\left(x^* + \left(x^2\right)^*\right).$$

је једнодимензионалан и његова база је $x^* + \left(x^2\right)^*$. $\square$

Задатак 10.11. *Нека је* $V = \left\{ A \in M_2(\mathbb{R}) \mid \operatorname{Tr} A = 0,\ A^T = A \right\}$ *потпростор векторског простора* $M_2(\mathbb{R})$. *Одредити бар једну базу и димензију анихилатора* $V^{\perp}$.

Решење. Овде наравно можемо поновити поступак из претходног задатка. Међутим, пробаћемо да мало скратимо тај поступак. Прво, база векторског простора V је $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$. Знамо да је

$$\dim V^{\perp} = \dim M_2(\mathbb{R}) - \dim V = 4 - 2 = 2.$$

Један линеарни функционал из анихилатора $V^{\perp}$ већ знамо. То је траг (према дефиницији V), а можемо га видети и као $\operatorname{Tr} = e_{11}^* + e_{22}^*$. Да бисмо дошли до базе анихилатора $V^{\perp}$ довољно је пронаћи још само један функционал из $V^{\perp}$ који је линеарно независан са Tr. Пошто знамо како изгледа база V најједноставније је узети функционал $e_{12}^* - e_{21}^*$ за други члан базе $V^{\perp}$. $\square$

Нека је $L : U \longrightarrow V$ линеарно пресликавање векторских простора U и V над пољем F. Ово пресликавање индукује и једно пресликавање између дуалних простора U^* и V^*. Наиме, сваки линеарни функционал $\Phi \in V^*$, тј. $\Phi : V \longrightarrow F$, можемо пресликавањем L „продужити“ до линеарног функционала $\Psi \circ L \in U^*$ (јер $\Psi \circ L : U \longrightarrow V \longrightarrow F$). Овим смо добили пресликавање $V^* \longrightarrow U^*$ које ћемо звати *транспоновано пресликавање* пресликавања L и означавати са L^T. Као што смо већ рекли оно је дато са

$$L^T : V^* \longrightarrow U^*, \qquad L^T\Psi = \Psi \circ L, \text{ за све } \Psi \in V^*.$$

Напомињемо да овде простори U и V „мењају места“ (U је био домен почетног пресликавања L, а U^* кодомен транспонованог пресликавања L^T).

Назив транспоновано пресликавање (који подсећа на транспоновану матрицу) није случајан. Знамо да се линеарна пресликавања коначно димензионалних простора могу поистоветити са матрицама, а транспоновано пресликавање ће одговарати транспоновању матрица.

Теорема 10.12. *Нека су e и f базе векторских простора U и V, редом, и нека је $L : U \longrightarrow V$ линеарно пресликавање. Тада је $\left[L^T\right]_{f^*,e^*} = [L]_{e,f}^T$.*

Задатак 10.13. *Дато је линеарно пресликавање*

$$L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2[x], \qquad L(a,b,c) = (a+b+c) + (3a-b)x,$$

Одредити матрицу транспонованог пресликавања $L^T : \left(\mathbb{R}^2[x]\right)^* \longrightarrow \left(\mathbb{R}^3\right)^*$ у односу на пар база $\Phi = \{\Phi_1, \Phi_2\}$ и $\Psi = \{\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3\}$ векторских простора $\left(\mathbb{R}^2[x]\right)^*$ и $\left(\mathbb{R}^3\right)^*$, редом, где је

$$\Phi_1 p = p(1), \quad \Phi_2 p = p(2),$$

$$\Psi_1(a,b,c) = a+b, \quad \Psi_2(a,b,c) = a+c, \quad \textit{и} \quad \Psi_3(a,b,c) = b+c.$$

Решење. Транспоновано пресликавање L^T ће бити

$$L^T : \left(\mathbb{R}^2[x]\right)^* \longrightarrow \left(\mathbb{R}^3\right)^*,$$

$$\left(L^T\Omega\right)(a,b,c) = (\Omega \circ L)(a,b,c) = \Omega\left((a+b+c) + (3a-b)x\right),$$

за све $\Omega \in \left(\mathbb{R}^2[x]\right)^*$.

Један начин да одредимо тражену матрицу је директно по дефиницији матрице пресликавања. То би значило да прво пресликамо линеарне функционале Φ_1 и Φ_2 (пресликавањем L^T), а затим одредимо координате слика у бази Ψ. Имали бисмо да је

$$\begin{aligned}
\left(L^T\Phi_1\right)(a,b,c) &= \Phi_1\left((a+b+c) + (3a-b)x\right) = (a+b+c) + (3a-b)\\
&= 4a + c = \frac{3}{2}(a+b) + \frac{5}{2}(a+c) - \frac{3}{2}(b+c)\\
&= \frac{3}{2}\Psi_1(a,b,c) + \frac{5}{2}\Psi_2(a,b,c) - \frac{3}{2}\Psi_3(a,b,c)
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}\left(L^T\Phi_2\right)(a,b,c) &= \Phi_2\left((a+b+c)+(3a-b)x\right) = (a+b+c)+2(3a-b)\\ &= 7a-b+c = \frac{5}{2}(a+b)+\frac{9}{2}(a+c)-\frac{7}{2}(b+c)\\ &= \frac{5}{2}\Psi_1(a,b,c)+\frac{9}{2}\Psi_2(a,b,c)-\frac{7}{2}\Psi_3(a,b,c),\end{aligned}$$

за све $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$. Тиме смо добили координате $\left[L^T\Phi_1\right]_\Psi = \begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\ \frac{5}{2}\\ -\frac{3}{2}\end{pmatrix}$ и $\left[L^T\Phi_2\right]_\Psi = \begin{pmatrix}\frac{5}{2}\\ \frac{9}{2}\\ -\frac{7}{2}\end{pmatrix}$, па је $\left[L^T\right]_{\Phi,\Psi} = \begin{pmatrix}\frac{3}{2} & \frac{5}{2}\\ \frac{5}{2} & \frac{9}{2}\\ -\frac{3}{2} & -\frac{7}{2}\end{pmatrix}$.

Други начин јесте да прво одредимо базе e и f векторских простора $\mathbb{R}^3$ и $\mathbb{R}^2[x]$, редом, такве да је $\Psi = e^*$ и $\Phi = f^*$, па да потом искористимо Теорему 10.12. Слично, као у Задатку 10.7 можемо добити да векторе

$$e_1 = \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right),\qquad e_2 = \left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\qquad e_3 = \left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),$$

$$f_1(x) = 2-x \qquad \text{и} \qquad f_2(x) = -1+x,$$

такве да је $\Psi_i = e_i^*$ и $\Phi_i = f_i^*$, за све i. Из

$$Le_1 = \frac{1}{2}+x = \frac{3}{2}f_1+\frac{5}{2}f_2,\qquad Le_2 = \frac{1}{2}+2x = \frac{5}{2}f_1+\frac{9}{2}f_2$$

$$\text{и}\qquad Le_3 = \frac{1}{2}-x = -\frac{3}{2}f_1-\frac{7}{2}f_2$$

следи да је $[L]_{e,f} = \begin{pmatrix}\frac{3}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2}\\ \frac{5}{2} & \frac{9}{2} & -\frac{7}{2}\end{pmatrix}$, а тиме и

$$\left[L^T\right]_{\Phi,\Psi} = \left[L^T\right]_{f^*,e^*} = [L]_{e,f}^T = \begin{pmatrix}\frac{3}{2} & \frac{5}{2}\\ \frac{5}{2} & \frac{9}{2}\\ -\frac{3}{2} & -\frac{7}{2}\end{pmatrix}.$$

□

Теорема 10.14. *Нека је $L : U \longrightarrow V$ линеарно пресликавање коначно димензионалних простора U и V. Тада важи*

$$\operatorname{Ker} L^T = (\operatorname{Im} L)^\perp \qquad \text{и} \qquad \operatorname{Im} L^T = (\operatorname{Ker} L)^\perp.$$

Из претходног тврђења, Теореме 10.12 и Теореме о рангу и дефекту следи $\rho L^T = \rho L$ и $\delta L^T = \delta L$.

Задатак 10.15. *Нека је*

$$L:\mathbb{R}^3[x]\longrightarrow\mathbb{R}^3[x],\qquad Lp=p(1)f-3p,$$

где је $f(x)=1+x+x^2$*, линеарни оператор из Задатка 5.12. Одредити језгро и слику транспонованог оператора* L^T*.*

Решење. Најпре ћемо израчунати језгро и слику оператора L^T по дефиницији. Транспоновани оператор је дат са

$$L:\left(\mathbb{R}^3[x]\right)^*\longrightarrow\left(\mathbb{R}^3[x]\right)^*,$$

$$\left(L^T\Phi\right)p=(\Phi\circ L)p=\Phi(p(1)f-3p),\qquad \text{за све } \Phi\in\left(\mathbb{R}^3[x]\right)^*.$$

Нека је $\Phi=\alpha 1^*+\beta x^*+\gamma\left(x^2\right)^*$ произвољан функционал из језгра $\operatorname{Ker}L^T$. Тада за све полиноме $p(x)=a+bx+cx^2\in\mathbb{R}^3[x]$ треба да важи

$$\begin{aligned}
&\left(L^T\Phi\right)p\\
&=\left(\alpha 1^*+\beta x^*+\gamma\left(x^2\right)^*\right)\left((a+b+c)\left(1+x+x^2\right)-3\left(a+bx+cx^2\right)\right)\\
&=\left(\alpha 1^*+\beta x^*+\gamma\left(x^2\right)^*\right)\left((-2a+b+c)+(a-2b+c)x+(a+b-2c)x^2\right)\\
&=\alpha(-2a+b+c)+\beta(a-2b+c)+\gamma(a+b-2c)\\
&=(-2\alpha+\beta+\gamma)a+(\alpha-2\beta+\gamma)b+(\alpha+\beta-2\gamma)c=0,
\end{aligned}$$

за све $a,b,c\in\mathbb{R}$. Следи, $-2\alpha+\beta+\gamma=\alpha-2\beta+\gamma=\alpha+\beta-2\gamma=0$, односно $\alpha=\beta=\gamma$, па је

$$\operatorname{Ker}L^T=\left\{\alpha 1^*+\alpha x^*+\alpha\left(x^2\right)^*\;\middle|\;\alpha\in\mathbb{R}\right\}=\mathscr{L}\left(1^*+x^*+\left(x^2\right)^*\right).$$

Слично, за произвољно $\Phi=\alpha 1^*+\beta x^*+\gamma\left(x^2\right)^*\in\left(\mathbb{R}^3\right)^*$ и $p(x)=a+bx+cx^2\in\mathbb{R}^3[x]$, према претходном важи

$$\begin{aligned}
&\left(L^T\Phi\right)p\\
&=(-2\alpha+\beta+\gamma)a+(\alpha-2\beta+\gamma)b+(\alpha+\beta-2\gamma)c\\
&=(-2\alpha+\beta+\gamma)1^*p+(\alpha-2\beta+\gamma)x^*p+(\alpha+\beta-2\gamma)\left(x^2\right)^*p\\
&=\Big(\alpha\left(-2\cdot 1^*+x^*+\left(x^2\right)^*\right)+\beta\left(1^*-2x^*+\left(x^2\right)^*\right)\\
&\quad+\gamma\left(1^*+x^*-2\left(x^2\right)^*\right)\Big)p,
\end{aligned}$$

те је

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im}L^T&=\left\{L^T\Phi\;\middle|\;\Phi\in\left(\mathbb{R}^3\right)^*\right\}\\
&=\mathscr{L}\left(-2\cdot 1^*+x^*+\left(x^2\right)^*,1^*-2x^*+\left(x^2\right)^*,1^*+x^*-2\left(x^2\right)^*\right)\\
&=\mathscr{L}\left(1^*-2x^*+\left(x^2\right)^*,1^*+x^*-2\left(x^2\right)^*\right).
\end{aligned}\tag{10.16}$$

Други начин да ово урадимо јесте да прво одредимо језгро и слику почетног оператора L (што смо већ урадили у Задатку 5.12), па да потом језгро и слику транспонованог оператора L^T тражимо преко анихилатора. Из

$$\operatorname{Ker} L^T = (\operatorname{Im} L)^\perp = \left(\mathscr{L}\left(-2+x+x^2, 1-2x+x^2\right)\right)^\perp.$$

следи да се језгро $\operatorname{Ker} L^T$ састоји од линеарних функционала $\alpha 1^* + \beta x^* + \gamma \left(x^2\right)^*$ за које је

$$\left(\alpha 1^* + \beta x^* + \gamma \left(x^2\right)^*\right)\left(-2+x+x^2\right) = -2\alpha + \beta + \gamma = 0,$$
$$\left(\alpha 1^* + \beta x^* + \gamma \left(x^2\right)^*\right)\left(1-2x+x^2\right) = \alpha - 2\beta + \gamma = 0,$$

односно, $\alpha = \beta = \gamma$. Дакле,

$$\operatorname{Ker} L^T = \mathscr{L}\left(1^* + x^* + \left(x^2\right)^*\right).$$

Слично,

$$\operatorname{Im} L^T = (\operatorname{Ker} L)^\perp = (\mathscr{L}(f))^\perp = \mathscr{L}\left(1^* - x^*, 1^* - \left(x^2\right)^*\right),$$

што је управо (10.16) записано преко друге базе. □

Можда у претходном примеру делује да постоји нека веза између $\operatorname{Ker} L$ и $\operatorname{Ker} L^T$ (односно, између $\operatorname{Im} L$ и $\operatorname{Im} L^T$), али то је чиста случајност. О томе сведочи и пресликавање L из Задатка 10.13 за које је $\operatorname{Ker} L = \mathscr{L}(1,3,-4)$ и $\operatorname{Im} L = \mathbb{R}^2[x]$. Зато за дуално пресликавање L^T важи $\operatorname{Ker} L^T = \left(\mathbb{R}^2[x]\right)^\perp = \{\mathbb{O}\}$ и $\operatorname{Im} L^T = (\mathscr{L}(1,3,-4))^\perp = \mathscr{L}\left(e_1^* - 3e_2^*, e_1^* + 4e_3^*\right)$.

Глава 11

Еуклидски и унитарни векторски простори

11.1 Билинеарне и квадратне форме

Дефиниција 11.1. *Нека је V векторски простор над пољем F. Кажемо да је пресликавање $\Psi : V \times V \longrightarrow F$ билинеарна форма на V ако важи*

$$\Psi(\alpha u + \beta v, w) = \alpha\Psi(u, w) + \beta\Psi(v, w),$$
$$\Psi(u, \alpha v + \beta w) = \alpha\Psi(u, v) + \beta\Psi(u, w)$$

за све $\alpha, \beta \in F$ и $u, v, w \in V$, тј. Ψ је линеарно и по првом и по другом аргументу. Додатно, кажемо да је билинеарна форма Ψ симетрична уколико важи $\Psi(u, v) = \Psi(v, u)$, за све $u, v \in V$.

Као и код линеарних пресликавања услов линеарности по првом аргументу можемо заменити са два услова

$$\Psi(u + v, w) = \Psi(u, w) + \Psi(v, w) \qquad \text{и} \qquad \Psi(\alpha u, v) = \alpha\Psi(u, v),$$

и слично за линеарност по другом аргументу.

Ако је $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ база векторског простора V, билинеарна форма Ψ се у координатама може записати као

$$\Psi\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, \sum_{j=1}^{n} \beta_j e_j\right) = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i \beta_j \Psi\left(e_i, e_j\right).$$

То даље значи да се свака билинеарна форма може матрично представити као $\Psi(u, v) = [u]_e^T A [v]_e$, где је

$$A=\begin{pmatrix} \Psi(e_1,e_1) & \Psi(e_1,e_2) & \Psi(e_1,e_3) & \dots & \Psi(e_1,e_n) \\ \Psi(e_2,e_1) & \Psi(e_2,e_2) & \Psi(e_2,e_3) & \dots & \Psi(e_2,e_n) \\ \Psi(e_3,e_1) & \Psi(e_3,e_2) & \Psi(e_3,e_3) & \dots & \Psi(e_3,e_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Psi(e_n,e_1) & \Psi(e_n,e_2) & \Psi(e_n,e_3) & \dots & \Psi(e_n,e_n) \end{pmatrix}.$$

Матрицу A ћемо звати *матрица билинеарне форме* Ψ у бази e и означавати са $[\Psi]_e$. Ако је f друга база истог простора из

$$\Psi(u,v)=[u]_e^T[\Psi]_e[v]_e=\left(P_{e,f}[u]_f\right)^T[\Psi]_eP_{e,f}[v]_f=[u]_f^TP_{e,f}^T[\Psi]_eP_{e,f}[v]_f$$

следи да је $[\Psi]_f=P_{e,f}^T[\Psi]_eP_{e,f}$.

Задатак 11.2. *Показати да је*

$$\Psi:\mathbb{R}^3[x]\times\mathbb{R}^3[x]\longrightarrow\mathbb{R},\qquad \Psi(p,q)=p(0)q(0)+p'(1)q'(1)-p(1)q(-1)$$

билинеарна форма на вектроском простору $\mathbb{R}^3[x]$ *која није симетрична. Одредити матрицу ове форме у односу на*

а) канонску базу $\mathbb{R}^3[x]$,

б) базу $f=\left\{1+2x,3+x^2,-x+x^2\right\}$.

Решење. Лако се проверава да је

$$\begin{aligned}\Psi(p+q,r)=&(p+q)(0)r(0)+(p+q)'(1)r'(1)-(p+q)(1)r(-1)\\=&p(0)r(0)+p'(1)r'(1)-p(1)r(-1)\\&+q(0)r(0)+q'(1)r'(1)-q(1)r(-1)\\=&\Psi(p,r)+\Psi(q,r),\\ \Psi(\alpha p,q)=&(\alpha p)(0)q(0)+(\alpha p)'(1)q'(1)-(\alpha p)(1)q(-1)\\=&\alpha(p(0)q(0)+p'(1)q'(1)-p(1)q(-1))\\=&\alpha\Psi(p,q),\\ \Psi(p,q+r)=&p(0)(q+r)(0)+p'(1)(q+r)'(1)-p(1)(q+r)(-1)\\=&p(0)q(0)+p'(1)q'(1)-p(1)q(-1)\\&+p(0)r(0)+p'(1)r'(1)-p(1)r(-1)\\=&\Psi(p,q)+\Psi(p,r),\\ \Psi(p,\alpha q)=&p(0)(\alpha q)(0)+p'(1)(\alpha q)'(1)-p(1)(\alpha q)(-1)\\=&\alpha(p(0)q(0)+p'(1)q'(1)-p(1)q(-1))\\=&\alpha\Psi(p,q),\end{aligned}$$

за све $\alpha\in\mathbb{R}$ и $p,q,r\in\mathbb{R}^3[x]$, па је Ψ билинеарна форма. Ова форма није симетрична јер је нпр. $\Psi(1,x)=1$, а $\Psi(x,1)=-1$.

а) Матрица билинеарне форме Ψ у канонској бази e је

$$[\Psi]_e = \begin{pmatrix} \Psi(1,1) & \Psi(1,x) & \Psi\left(1,x^2\right) \\ \Psi(x,1) & \Psi(x,x) & \Psi\left(x,x^2\right) \\ \Psi\left(x^2,1\right) & \Psi\left(x^2,x\right) & \Psi\left(x^2,x^2\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Овде се лако може проверити да је

$$\begin{aligned} &\left[a+bx+cx^2\right]_e^T [\Psi]_e \left[d+ex+fx^2\right] \\ &= \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} \\ &= (-b-c)d + (a+2b+3c)e + (-a+b+3c)f \end{aligned}$$

једнако

$$\Psi\left(a+bx+cx^2, d+ex+fx^2\right) = ad + (b+2c)(e+2f) - (a+b+c)(d-e+f).$$

б) Слично можемо добити и матрицу

$$\begin{aligned} [\Psi]_f &= \begin{pmatrix} \Psi(1+2x,1+2x) & \Psi\left(1+2x,3+x^2\right) & \Psi\left(1+2x,-x+x^2\right) \\ \Psi\left(3+x^2,1+2x\right) & \Psi\left(3+x^2,3+x^2\right) & \Psi\left(3+x^2,-x+x^2\right) \\ \Psi\left(-x+x^2,1+2x\right) & \Psi\left(-x+x^2,3+x^2\right) & \Psi\left(-x+x^2,-x+x^2\right) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 8 & -5 & -4 \\ 11 & -3 & -6 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Исти резулатат бисмо добили и множењем

$$\begin{aligned} [\Psi]_f = P_{e,f}^T [\Psi]_e P_{e,f} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 8 & -5 & -4 \\ 11 & -3 & -6 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

Дефиниција 11.3. *Пресликавање* $q : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *зовемо реална квадратна форма ако се може записати као линеарна комбинација функција* $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_i x_j$*, за* $1 \leqslant i, j \leqslant n$.

Другим речима, свака квадратна форма је облика

$$q\left(x_1, \ldots, x_n\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2 + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_{ij} x_i x_j,$$

за неке скаларе $a_{ij} \in \mathbb{R}$ или матрично записано $q(x) = x^T Ax$, где је

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad A = \begin{pmatrix} a_1 & \frac{a_{12}}{2} & \frac{a_{13}}{2} & \dots & \frac{a_{1n}}{2} \\ \frac{a_{12}}{2} & a_2 & \frac{a_{23}}{2} & \dots & \frac{a_{2n}}{2} \\ \frac{a_{13}}{2} & \frac{a_{23}}{2} & a_3 & \dots & \frac{a_{3n}}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{a_{1n}}{2} & \frac{a_{2n}}{2} & \frac{a_{3n}}{2} & \dots & a_n \end{pmatrix}.$$

Напомињемо да матрица A није јединствено одређена, нпр. и за горње троугаону матрицу $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_2 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_3 & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}$ би исто важило $q(x) = x^T Ax$.

Занимљиво је да су квадратне форме на $\mathbb{R}^n$ у бијекцији са симетричним билинеарним формама на истом простору. Наиме, за сваку симетричну билинеарну форму Ψ имаћемо квадратну форму $q(x) = \Psi(x, x)$. И обрнуто, за сваку квадратну форму пресликавање $\Psi(u, v) = \frac{q(u+v)-q(u)-q(v)}{2}$ је једна симетрична билинеарна форма.

Квадратне форме на произвољном коначно димензионалном векторском простору V (над пољем F, са базом f) се дефинишу на сличан начин – само се вектор $x \in \mathbb{R}^n$ замени координатама $[v]_f \in F^n$ вектора $v \in V$.

Лагранжев[1] поступак нам омогућава да квадратну форму запишемо у тзв. дијагоналном облику. Основна идеја је допуна до потпуног квадрата. Најпре, изабремо једну променљиву x_i за коју је $a_i \neq 0$, нпр. нека је то x_1. Тада је

$$\begin{aligned} q(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2 + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_{ij} x_i x_j \\ &= a_1 \left(x_1 + \sum_{i=2}^{n} \frac{a_{1i}}{2a_1} x_i \right)^2 + \underbrace{\sum_{i=2}^{n} \left(a_i - \frac{a_{1i}^2}{4a_1^2} \right) x_i^2 + \sum_{2 \leqslant i < j \leqslant n} a_{ij} x_i x_j}_{q_1(x_2, \dots, x_n)} . \end{aligned}$$

Затим поновимо исти поступак на квадратну форму q_1 која има једну променљиву мање у односу на форму q, итд. На крају поступка добијамо квадратну форму у облику

$$q(y_1, \dots, y_n) = \sum_{i=1}^{n} d_i y_i^2,$$

[1] *Joseph-Louis Lagrange* (или *Giuseppe Luigi Lagrangia*) (1736. - 1813.), француско-италијански математичар и астроном

за неке $d_i \in \mathbb{R}$. Последњи израз зовемо *дијагонални облик* квадратне форме q.

Додатним скалирањем y_i-ова можемо постићи да су сви d_i-ови једнаки 1, -1 или 0 тако што $d_i y_i^2$ запишемо као $(\operatorname{sgn} d_i)\left(\sqrt{|d_i|}y_i\right)^2$. Тројку (n_+, n_-, n_0) зовемо *сигнатура* квадратне форме q, где је n_+ број d_i-ова једнаких 1, n_- број d_i-ова једнаких -1 и n_0 број d_i-ова једнаких 0. Пиметимо да је овде $n = n_+ + n_- + n_0$.

Напомињемо да дијагонални облик није јединствен. На пример, јасно је да нећемо добити исти резултат уколико у првом кораку изаберемо променљиву x_1 или x_2. Међутим, сигнатура квадратне форме не зависи од избора дијагоналног облика те форме. Последње тврђење је познато као Силвестеров[2] закон инерције.

Задатак 11.4. *Свести квадратну форму*

$$q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad q(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$$

на дијагонални облик и одредити њену сигнатуру.

Решење. Лагранжев поступак дијагонализације даје

$$\begin{aligned}
q(x_1, x_2, x_3) =& -x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3 \\
=& -\left(x_1^2 - 2x_1(2x_2 + 2x_3) + (2x_2 + 2x_3)^2\right) \\
&+ 2x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_2x_3 + (2x_2 + 2x_3)^2 \\
=& -(x_1 - (2x_2 + 2x_3))^2 + 6x_2^2 + 7x_3^2 + 12x_2x_3 \\
=& -(x_1 - 2x_2 - 2x_3)^2 + 6\left(x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2\right) + 7x_3^2 - 6x_3^2 \\
=& -(x_1 - 2x_2 - 2x_3)^2 + 6(x_2 + x_3)^2 + x_3^2.
\end{aligned}$$

Сменом $y_1 = x_1 - 2x_2 - 2x_3$, $y_2 = x_2 + x_3$, $y_3 = x_3$, долазимо до дијагоналног облика $q(y_1, y_2, y_3) = -y_1^2 + 6y_2^2 + y_3^2$. Сада је јасно да је сигнатура наше форме q једнака $(2, 1, 0)$.

Наглашавамо да решење није јединствено, могли смо кренути и од неке друге променљиве:

$$\begin{aligned}
q(x_1, x_2, x_3) =& -x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3 \\
=& 2\left(x_2^2 + 2x_2(x_1 + x_3) + (x_1 + x_3)^2\right) \\
&- x_1^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_3 - 2(x_1 + x_3)^2 \\
=& 2(x_2 + x_1 + 2x_3)^2 - 3x_1^2 + x_3^2,
\end{aligned}$$

па последњи корак неће бити потребан. Одавде се још једном види да је сигнатура $(2, 1, 0)$. □

[2] *James Joseph Sylvester* (1814. - 1897.), енглески математичар

Задатак 11.5. *Свести квадратну форму*

$$q : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + 3x_2^2 + x_4^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + 2x_2x_4$$

на дијагонални облик и одредити њену сигнатуру.

Решење. Лагранжев поступак даје

$$\begin{aligned}
&q(x_1, x_2, x_3, x_4)\\
&= x_1^2 + 3x_2^2 + x_4^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + 2x_2x_4\\
&= x_1^2 + 2x_1(2x_2 + 2x_3 + x_4) + (2x_2 + 2x_3 + x_4)^2\\
&\quad + 3x_2^2 + x_4^2 + 2x_2x_3 + 2x_2x_4 - (2x_2 + 2x_3 + x_4)^2\\
&= (x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4)^2 - x_2^2 - 4x_3^2 - 6x_2x_3 - 2x_2x_4 - 4x_3x_4\\
&= (x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4)^2 - \left(x_2^2 + 2x_2(3x_3 + x_4) + (3x_3 + x_4)^2\right)\\
&\quad - 4x_3^2 - 4x_3x_4 + (3x_3 + x_4)^2\\
&= (x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4)^2 - (x_2 - (3x_3 + x_4))^2 + 5x_3^2 + x_4^4 + 2x_3x_4\\
&= (x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4)^2 - (x_2 - 3x_3 - x_4)^2 + (x_4 + x_3)^2 + 4x_3^2.
\end{aligned}$$

Сигнатура квадратне форме q је $(3, 1, 0)$. □

11.2 Скаларни и унитарни производ

Дефиниција 11.6. *Нека је V векторски простор над пољем реалних бројева. Пресликавање $\circ : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ које задовољава*

(1) адитивност: $(\forall u, v, w \in V)\ (u + v) \circ w = u \circ w + v \circ w,$

(2) хомогеност: $(\forall \alpha \in \mathbb{R})(\forall u, v \in V)\ (\alpha u) \circ v = \alpha u \circ v,$

(3) симетричност (комутативност): $(\forall u, v \in V)\ u \circ v = v \circ u,$

(4) позитивну дефинитност: $(\forall v \in V)\ v \circ v \geqslant 0$ *и* $v \circ v = 0 \Leftrightarrow v = \mathbb{O}$

зовемо скаларни (или унутрашњи) производ на векторском простору V. Пар $(V, \circ)$ тј. векторски простор са скаларним производом зовемо еуклидски векторски простор.

Напомињемо да у запису $\alpha u \circ v$ приоритет има операција $\circ$, као и да импликација $\Leftarrow$ у услову (4) следи из преосталих услова тако да овде можемо захтевати и само $\Rightarrow$. Услови (1) и (2) се могу заменити условом линеарности:

(5) $(\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R})(\forall u,v,w\in V)\ (\alpha u+\beta v)\circ w=\alpha u\circ w+\beta v\circ w.$

Одатле и из услова (3) добијамо и линеарност по другом аргументу

(6) $(\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R})(\forall u,v,w\in V)\ u\circ(\alpha v+\beta w)=\alpha u\circ v+\beta u\circ w.$

То значи да је скаларни производ симетрична билинеарна форма на реалном векторском простору V која додатно задовољава услов (4). Поменути услов на коначно димензионалном простору (4) заправо каже да је сигнатура придружене квадратне форме једнака $(\dim V,0,0)$.

Основни пример (а уједно и мотивација за претходну општу дефиницију) је геометријски дефинисан скаларни производ у $\mathbb{R}^3$ (и $\mathbb{R}^2$): $u\circ v=\|u\|\|v\|\cos\sphericalangle(u,v)$, где $\|\cdot\|$ означава дужину вектора, а $\sphericalangle(\cdot,\cdot)$ угао између два вектора. Записан у координатама овај скаларни производ постаје $(x,y,z)\circ(x',y'z')=xx'+yy'+zz'$. Природно уопштење овога је стандардни скаларни производ на $\mathbb{R}^n$ дефинисан са

$$(x_1,x_2,\ldots,x_n)\circ(y_1,y_2,\ldots,y_n)=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i. \tag{11.7}$$

Лако се проверава да ово пресликавање задовољава услове (1) - (4). У наредним задацима видећемо још неке примере скаларних производа, а прва два примера показују да на једном векторском простору може постојати више различитих скаларних производа што оправдава захтев да Еуклидски векторски простор увек означавамо као пар $(V,\circ)$.

Задатак 11.8. *Показати да је*

$$\circ:\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R},\qquad (x,y,z)\circ(x',y',z')=3xx'+2yy'+yz'+zy'+zz'$$

скаларни производ на векторском простору $\mathbb{R}^3$.

Решење. Проверимо сва четири услова:

(1) $\left(\forall(x,y,z),(x',y',z'),(x'',y'',z'')\in\mathbb{R}^3\right)$

$$\begin{aligned}&((x,y,z)+(x',y',z'))\circ(x'',y'',z'')\\&=(x+x',y+y',z+z')\circ(x'',y'',z'')\\&=3(x+x')x''+2(y+y')y''+(y+y')z''+(z+z')y''+(z+z')z''\\&=3xx''+2yy''+yz''+zy''+zz''+3x'x''+2y'y''+y'z''+z'y''+z'z''\\&=(x,y,z)\circ(x'',y'',z'')+(x',y',z')\circ(x'',y'',z''),\end{aligned}$$

(2) $(\forall\alpha\in\mathbb{R})\left(\forall(x,y,z),(x',y',z')\in\mathbb{R}^3\right)$

$$\begin{aligned}(\alpha(x,y,z))\circ(x',y',z')&=(\alpha x,\alpha y,\alpha z)\circ(x',y',z')\\&=3\alpha xx'+2\alpha yy'+\alpha yz'+\alpha zy'+\alpha zz'\\&=\alpha\left(3xx'+2yy'+yz'+zy'+zz'\right)\\&=\alpha(x,y,z)\circ(x',y',z'),\end{aligned}$$

(3) $\big(\forall (x,y,z),(x',y',z') \in \mathbb{R}^3\big)$

$$\begin{aligned}(x,y,z)\circ(x',y',z') &= 3xx' + 2yy' + yz' + zy' + zz'\\ &= 3x'x + 2y'y + y'z + z'y + z'z\\ &= (x',y',z')\circ(x,y,z),\end{aligned}$$

(4) $\big(\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\big)$

$$(x,y,z)\circ(x,y,z) = 3x^2 + 2y^2 + 2yz + z^2 = 3x^2 + y^2 + (y+z)^2 \geqslant 0,$$

при чему је $(x,y,z)\circ(x,y,z) = 0$ ако и само ако је $x = y = y + z = 0$, тј. $(x,y,z) = (0,0,0)$.

Дакле, $\circ$ јесте један скаларни производ на векторском простору $\mathbb{R}^3$. $\square$

Задатак 11.9. *Дато је пресликавање*

$$\circ : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad (x,y)\circ(x',y') = 4xx' - 2xy' - 2yx' + \lambda yy'.$$

Одредити све параметре $\lambda \in \mathbb{R}$ за које је $\circ$ скаларни производ на векторском простору $\mathbb{R}^2$.

Решење. Прва три услова важе за све $\lambda \in \mathbb{R}$:

(1) $\big(\forall (x,y),(x',y'),(x'',y'') \in \mathbb{R}^2\big)$

$$\begin{aligned}&((x,y) + (x',y'))\circ(x'',y'')\\ &= (x + x', y + y')\circ(x'',y'')\\ &= 4\,(x + x')\,x'' - 2\,(x + x')\,y'' - 2\,(y + y')\,x'' + \lambda\,(y + y')\,y''\\ &= 4xx'' - 2xy'' - 2yx'' + \lambda yy'' + 4x'x'' - 2x'y'' - 2y'x'' + \lambda y'y''\\ &= (x,y)\circ(x'',y'') + (x',y')\circ(x'',y''),\end{aligned}$$

(2) $(\forall \alpha \in \mathbb{R})\,\big(\forall (x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2\big)$

$$\begin{aligned}(\alpha(x,y))\circ(x',y') &= (\alpha x, \alpha y)\circ(x',y') = 4\alpha xx' - 2\alpha xy' - 2\alpha yx' + \lambda\alpha yy'\\ &= \alpha\,(4xx' - 2xy' - 2yx' + \lambda yy') = \alpha(x,y)\circ(x',y'),\end{aligned}$$

(3) $\big(\forall (x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2\big)$

$$\begin{aligned}(x,y)\circ(x',y') &= 4xx' - 2xy' - 2yx' + \lambda yy'\\ &= 4x'x - 2x'y - 2y'x + \lambda y'y = (x',y')\circ(x,y).\end{aligned}$$

Позитивна дефинитност каже да је

$$(x,y)\circ(x,y) = 4x^2 - 4xy + \lambda y^2 = 2(2x - y)^2 + (\lambda - 1)y^2 \geqslant 0,$$

за све $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, што је испуњено само за $\lambda \geqslant 1$ (за $\lambda < 1$ је нпр. $(1,2)\circ(1,2) = 4(\lambda-1) < 0$). За $\lambda > 1$ из $(x,y)\circ(x,y) = 2(2x-y)^2 + (\lambda-1)y^2 = 0$ следи $2x - y = y = 0$ тј. $(x,y) = (0,0)$. За $\lambda = 1$ овај услов није успуњен јер је нпр. $(1,2)\circ(1,2) = 0$. Дакле, $\circ$ је скаларни производ на $\mathbb{R}^3$ ако и само ако је $\lambda = 1$. $\square$

Задатак 11.10. *Показати да је* $\circ : \mathbb{R}^3[x] \times \mathbb{R}^3[x] \longrightarrow \mathbb{R}$ *скаларни производ на векторском простору* $\mathbb{R}^3[x]$ *ако је*

а) $p \circ q = p(0)q(0) + p'(0)q'(0) + \frac{p''(0)q''(0)}{4}$,

б) $p \circ q = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(-1)q(-1)$,

в) $p \circ q = p(1)q(1) + 2p(1)'q(1)' + 2p(2)q(2) - p'(1)q(2) - p(2)q'(1)$.

Решење. Пошто је поступак потпуно исти, решење ћемо илустровати само на делу а). Пресликавање $\circ$ јесте скаларни производ јер

(1) $\big(\forall p,q,r \in \mathbb{R}^3[x]\big)$

$$\begin{aligned}
&(p+q)\circ r\\
&= (p+q)(0)r(0) + (p+q)'(0)r'(0) + \frac{(p+q)''(0)r''(0)}{4}\\
&= (p+q)(0)r(0) + (p'+q')(0)r'(0) + \frac{(p''+q'')(0)r''(0)}{4}\\
&= p(0)r(0) + p'(0)r'(0) + \frac{p''(0)r''(0)}{4} + q(0)r(0) + q'(0)r'(0)\\
&\quad + \frac{q''(0)r''(0)}{4}\\
&= p\circ r + q\circ r,
\end{aligned}$$

(2) $(\forall \alpha \in \mathbb{R})\big(\forall p,q \in \mathbb{R}^3[x]\big)$

$$\begin{aligned}
(\alpha p)\circ q &= (\alpha p)(0)q(0) + (\alpha p)'(0)q'(0) + \frac{(\alpha p)''(0)q''(0)}{4}\\
&= \alpha p(0)q(0) + \alpha p'(0)q'(0) + \frac{\alpha p''(0)q''(0)}{4}\\
&= \alpha\left(p(0)q(0) + p'(0)q'(0) + \frac{p''(0)q''(0)}{4}\right) = \alpha p\circ q,
\end{aligned}$$

(3) $\big(\forall p,q \in \mathbb{R}^3[x]\big)$

$$\begin{aligned}
p\circ q &= p(0)q(0) + p'(0)q'(0) + \frac{p''(0)q''(0)}{4}\\
&= q(0)p(0) + q'(0)p'(0) + \frac{q''(0)p''(0)}{4} = q\circ p,
\end{aligned}$$

(4) $\big(\forall p \in \mathbb{R}^3[x]\big)$
$$p \circ p = p(0)^2 + p'(0)^2 + \frac{p''(0)^2}{4} \geqslant 0,$$
при чему је $p \circ p = 0$ ако и само ако је $p(0) = p'(0) = p''(0) = 0$, односно ако је 0 трострука нула p. Како је p полином степена највише 2 ово последње је еквивалентно са $p = \mathbb{O}$. $\square$

И слично, на $\mathbb{R}^n[x]$ имамо скаларни производ
$$p \circ q = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{p^{(i)}(0)q^{(i)}(0)}{(i!)^2}. \tag{11.11}$$
или (неки други скаларни производ) $p \circ q = \sum\limits_{i=0}^{n-1} p^{(i)}(0)q^{(i)}(0)$ на $\mathbb{R}^n[x]$.

Задатак 11.12. *Нека је $\mathcal{C}[-1,1]$ скуп свих непрекидних функција из $[-1,1]$ у $\mathbb{R}$. Показати да је $\circ : \mathcal{C}[-1,1] \times \mathcal{C}[-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ скаларни производ на векторском простору $\mathcal{C}[-1,1]$ ако је*

а) $f \circ g = \int\limits_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt$

б) $f \circ g = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-1}^{1} e^t f(t)g(t)\,dt.$

Решење. а) Пресликавање $\circ$ јесте скаларни производ јер је

(1) $(\forall f, g, h \in \mathcal{C}[-1,1])$
$$\begin{aligned}(f+g) \circ h &= \int_{-1}^{1} (f+g)(t)h(t)\,dt = \int_{-1}^{1} (f(t)+g(t))h(t)\,dt \\ &= \int_{-1}^{1} f(t)h(t)\,dt + \int_{-1}^{1} g(t)h(t)\,dt = f \circ h + g \circ h,\end{aligned}$$

(2) $(\forall \alpha \in \mathbb{R})(\forall f, g \in \mathcal{C}[-1,1])$
$$(\alpha f) \circ g = \int_{-1}^{1} (\alpha f)(t)g(t)\,dt = \int_{-1}^{1} \alpha f(t)g(t)\,dt = \alpha \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt = \alpha f \circ g,$$

(3) $(\forall f, g \in \mathcal{C}[-1,1])$
$$f \circ g = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt = \int_{-1}^{1} g(t)f(t)\,dt = g \circ f,$$

(4) $(\forall \alpha \in \mathbb{R})(\forall f, g \in \mathcal{C}[-1,1])$ $f \circ f = \int\limits_{-1}^{1} f(t)^2\,dt \geqslant 0$ као интеграл позитивне функције. Додатно, знамо да $f \circ f = 0$ повлачи $f(t)^2 = 0$, за све $t \in [-1,1]$, тј. $f = \mathbb{O}$.

б) И ово би ишло потпуно аналогно, само бисмо на крају из $f \circ f = 0$ закључили да је $e^t f(t)^2 = 0$, за све $t \in [-1,1]$, што повлчи $f = \mathbb{O}$, јер је $e^t \neq 0$, за све $t \in [-1,1]$. □

Напомињемо да у претходном задатку уместо e^t може да стоји било која строго позитивна функција. Такође уместо интервала $[-1,1]$ може да буде било који затворени интервал, а може и цео $\mathbb{R}$ али онда уместо скупа свих функција треба узети скуп интеграбилних функција, итд. Све су то примери скаларних производа.

Идеја да скаларни производ задамо преко интеграла можда делује чудно али долази потпуно природно. Стандардни скаларни производ (11.7) у коначно димензионалном векторском простору $\mathbb{R}^n$ је био задат као сума производа координата. Аналог тога на бесконачно димензионалном простору функција би била бесконачна сума производа функција по свим тачкама, што је управо дефиниција интеграла који смо имали у првом делу претходног задатка.

Задатак 11.13. *Показати да је* $\circ : M_2(\mathbb{R}) \times M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ *скаларни производ на векторском простору* $M_2(\mathbb{R})$ *ако је*

а) $A \circ B = \operatorname{Tr}\left(AB^T\right)$,

б) $A \circ B = \operatorname{Tr}\left(A^T \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} B\right)$.

Решење. а) Из особина трага следи

(1) $(\forall A, B, C \in M_2(\mathbb{R}))$

$$\begin{aligned}(A+B) \circ C &= \operatorname{Tr}\left((A+B)C^T\right) = \operatorname{Tr}\left(AC^T + BC^T\right) \\ &= \operatorname{Tr}\left(AC^T\right) + \operatorname{Tr}\left(BC^T\right) = A \circ C + B \circ C,\end{aligned}$$

(2) $(\forall \alpha \in \mathbb{R})\,(\forall A, B \in M_2(\mathbb{R}))$

$$(\alpha A) \circ B = \operatorname{Tr}\left(\alpha AB^T\right) = \alpha \operatorname{Tr}\left(AB^T\right) = \alpha A \circ B,$$

(3) $(\forall A, B \in M_2(\mathbb{R}))$

$$A \circ B = \operatorname{Tr}\left(AB^T\right) = \operatorname{Tr}\left(\left(AB^T\right)^T\right) = \operatorname{Tr}\left(B^{TT}A^T\right) = \operatorname{Tr}\left(BA^T\right) = B \circ A,$$

(4) $\left(\forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})\right)$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= \operatorname{Tr}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\right) \\ &= \operatorname{Tr}\begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix} \\ &= a^2+b^2+c^2+d^2 \geqslant 0, \end{aligned}$$

и очигледно је $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 0$ ако и само ако је $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

б) Нека је $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Тада имамо

(1) $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})\,(\forall A, B, C \in M_2(\mathbb{R}))$

$$\begin{aligned} (\alpha A + \beta B) \circ C &= \operatorname{Tr}\left((\alpha A + \beta B)^T MC\right) = \operatorname{Tr}\left(\left(\alpha A^T + \beta B^T\right) MC\right) \\ &= \operatorname{Tr}\left(\alpha A^T MC + \beta B^T MC\right) \\ &= \alpha \operatorname{Tr}\left(A^T MC\right) + \beta \operatorname{Tr}\left(B^T MC\right) = \alpha A \circ C + \beta B \circ C, \end{aligned}$$

(2) $(\forall A, B \in M_2(\mathbb{R}))$

$$\begin{aligned} A \circ B &= \operatorname{Tr}\left(A^T MB\right) = \operatorname{Tr}\left(\left(A^T MB\right)^T\right) \\ &= \operatorname{Tr}\left(B^T M^T A^{TT}\right) = \operatorname{Tr}\left(B^T MA\right) = B \circ A, \end{aligned}$$

(3) $\left(\forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})\right)$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= \operatorname{Tr}\left(\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) \\ &= \operatorname{Tr}\begin{pmatrix} a^2+2ac+4c^2 & \dots \\ \dots & b^2+2ab+4d^2 \end{pmatrix} \\ &= (a+c)^2+3c^2+(b+d)^2+3d^2 \geqslant 0, \end{aligned}$$

и очигледно је $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 0$ ако и само ако је $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Следи, $\circ$ је скаларни производ на $M_2(\mathbb{R})$. $\square$

Скаларни производ из дела а) претходног задатка је стандардни скаларни производ на $M_2(\mathbb{R})$. Општије, иста формула задаје и скаларни производ на $M_{mn}(\mathbb{R})$, за све $m, n \in \mathbb{N}$ (јер је AB^T увек квадратна матрица па траг има смисла). Заправо, то је скаларни производ који одговара стандардном скаларном производу на $\mathbb{R}^{mn}$ приликом канонског изоморфизма $M_{mn}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{mn}$. Слично, скаларни производ (11.11) одговара стандардном скаларном производу из $\mathbb{R}^n$ приликом изоморфизма $\mathbb{R}^n[x] \cong \mathbb{R}$. Уколико кажемо само векторски простор и не нагласимо о ком се скаларном производу ради подразумеваћемо да је у питању стандардни.

Задатак 11.14. *Нека је* $V \leqslant \mathbb{R}^{\mathbb{N}\cup\{0\}}$ *скуп решења линеарне диференцне једначине* $a_{n+3} - 2a_{n+2} - a_{n+1} + 2a_n = 0$. *Показати да је*

$$a \circ b = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2,$$

за све $a, b \in V$, *скаларни производ на векторском простору* V.

Решење. Лако се проверава да је

(1) $(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R})\,(\forall a, b, c \in V)$

$$\begin{aligned}(\alpha a + \beta b) \circ c &= (\alpha a + \beta b)_0c_0 + (\alpha a + \beta b)_1c_1 + (\alpha a + \beta b)_2c_2\\ &= \alpha a_0c_0 + \beta b_0c_0 + \alpha a_1c_1 + \beta b_1c_1 + \alpha a_2c_2 + \beta b_2c_2\\ &= \alpha a \circ c + \beta b \circ c,\end{aligned}$$

(2) $(\forall a, b \in V)$

$$a \circ b = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 = b \circ a,$$

(3) $(\forall a \in V)$

$$a \circ a = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 \geqslant 0.$$

Једино спорно је да ли из $a \circ a$ следи да је a нула-низ. Из (3) следи само $a_0 = a_1 = a_2 = 0$. Али одатле индукцијом можемо показати да је $a_n = 0$, за све $n \in \mathbb{N}$. Базу индукције $a_0 = a_1 = a_2 = 0$ већ имамо. Ако претпоставимо да тврђење важи за n, $n+1$ и $n+2$ тј. $a_n = a_{n+1} = a_{n+2} = 0$, онда је $a_{n+3} = 2a_{n+2} + a_{n+1} - 2a_n = 0$.

Други начин да се ово последње уради јесте да прво решимо диференцну једначину. Према Теореми 8.50 векторски простор V се састоји од низова $a_n = \alpha + \beta(-1)^n + \gamma \cdot 2^n$, за све $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Ако претпоставимо да је $a \circ a = 0$ добићемо

$$\begin{array}{ccccccccc} a_0 & = & \alpha & + & \beta & + & \gamma & = & 0\\ a_1 & = & \alpha & - & \beta & + & 2\gamma & = & 0\\ a_2 & = & \alpha & + & \beta & + & 4\gamma & = & 0\end{array}$$

Следи $\alpha = \beta = \gamma = 0$, а тиме и $a = \mathbb{O}$. □

Аналог скаларном производу у комплексном случају је ермитски[3] производ. И ту се прича завршава, скаларни производ се не може уопштити на векторски простор над произвољним пољем.

Дефиниција 11.15. *Нека је V векторски простор над пољем комплексних бројева. Пресликавање $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ које задовољава*

(1) адитивност: $(\forall u,v,w \in V)\ \langle u+v,w\rangle = \langle u,w\rangle + \langle v,w\rangle$,

(2) хомогеност: $(\forall \alpha \in \mathbb{C})(\forall u,v \in V)\ \langle \alpha u,v\rangle = \alpha\langle u,v\rangle$,

(3) антисиметричност (кососиметричност): $(\forall u,v \in V)\ \langle u,v\rangle = \overline{\langle v,u\rangle}$,

(4) позитивну дефинитност: $(\forall v \in V)\ \langle v,v\rangle \geqslant 0$ *и* $\langle v,v\rangle = 0 \Leftrightarrow v = \mathbb{O}$

зовемо ермитски производ на векторском простору V. Пар $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ тј. векторски простор са ермитским производом зовемо унитарни (ермитски) векторски простор.

Овде захтев $\langle v,v\rangle \geqslant 0$ укључује и да је $\langle v,v\rangle$ реално. За разлику од скаларног производа ермитски је линеаран само по првом аргументу, не и по другом. Тачније, по другом аргументу је адитиван, али није хомоген.

Стандардни ермитски производ на $\mathbb{C}^n$ је дефинисан са

$$\langle (x_1,x_2,\ldots,x_n),(y_1,y_2,\ldots,y_n)\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i\overline{y_i}.$$

Задатак 11.16. *Показати да је пресликавње*

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C},$$

$$\langle (x_1,x_2),(y_1,y_2)\rangle = x_1\overline{y_1} + (1+i)x_1\overline{y_2} + (1-i)x_2\overline{y_1} + 3x_2\overline{y_2}$$

ермитски производ на векторском простору $\mathbb{C}^2$.

Решење. Проверимо све услове:

(1) $\left(\forall (x_1,x_2),(y_1,y_2),(z_1,z_2) \in \mathbb{C}^2\right)$

$$\begin{aligned}
&\langle (x_1,x_2)+(y_1,y_2),(z_1,z_2)\rangle = \langle (x_1+y_1,x_2+y_2),(z_1,z_2)\rangle \\
&= (x_1+y_1)\overline{z_1} + (1+i)(x_1+y_1)\overline{z_2} + (1-i)(x_2+y_2)\overline{z_1} + 3(x_2+y_2)\overline{z_2} \\
&= x_1\overline{z_1} + (1+i)x_1\overline{z_2} + (1-i)x_2\overline{z_1} + 3x_2\overline{z_2} + y_1\overline{z_1} + (1+i)y_1\overline{z_2} \\
&\quad + (1-i)y_2\overline{z_1} + 3y_2\overline{z_2} \\
&= \langle (x_1,x_2),(z_1,z_2)\rangle + \langle (y_1,y_2),(z_1,z_2)\rangle,
\end{aligned}$$

[3] *Charles Hermite* (1822. - 1901.), француски математичар

(2) $(\forall\alpha\in\mathbb{C})\left(\forall\left(x_1,x_2\right),\left(y_1,y_2\right)\in\mathbb{C}^2\right)$

$$\begin{aligned}\langle\alpha\left(x_1,x_2\right),\left(y_1,y_2\right)\rangle&=\langle\left(\alpha x_1,\alpha x_2\right),\left(y_1,y_2\right)\rangle\\&=\alpha x_1\overline{y_1}+(1+i)\alpha x_1\overline{y_2}+(1-i)\alpha x_2\overline{y_1}+3\alpha x_2\overline{y_2}\\&=\alpha\left(x_1\overline{y_1}+(1+i)x_1\overline{y_2}+(1-i)x_2\overline{y_1}+3x_2\overline{y_2}\right)\\&=\alpha\langle\left(x_1,x_2\right),\left(y_1,y_2\right)\rangle,\end{aligned}$$

(3) $\left(\forall\left(x_1,x_2\right),\left(y_1,y_2\right)\in\mathbb{C}^2\right)$

$$\begin{aligned}\overline{\langle\left(y_1,y_2\right),\left(x_1,x_2\right)\rangle}&=\overline{y_1\overline{x_1}+(1+i)y_1\overline{x_2}+(1-i)y_2\overline{x_1}+3y_2\overline{x_2}}\\&=x_1\overline{y_1}+(1+i)x_1\overline{y_2}+(1-i)x_2\overline{y_1}+3x_2\overline{y_2}\\&=\langle\left(x_1,x_2\right),\left(y_1,y_2\right)\rangle,\end{aligned}$$

(4) $\left(\forall\left(x_1,x_2\right)\in\mathbb{C}^2\right)$

$$\begin{aligned}\langle\left(x_1,x_2\right),\left(x_1,x_2\right)\rangle&=x_1\overline{x_1}+(1+i)x_1\overline{x_2}+(1-i)x_2\overline{x_1}+3x_2\overline{x_2}\\&=\left(x_1+(1-i)x_2\right)\left(\overline{x_1}+(1+i)\overline{x_2}\right)+x_2\overline{x_2}\\&=\left|x_1+(1-i)x_2\right|^2+\left|x_2\right|^2\geqslant 0,\end{aligned}$$

при чему је $\langle\left(x_1,x_2\right),\left(x_1,x_2\right)\rangle=0$ ако и само ако је $x_1+(1-i)x_2=0$ и $x_2=0$ тј. $(x_1,x_2)=(0,0)$.

$\square$

Слично као у Задацима 11.10, 11.12 и 11.13 имамо стандардне ермитске производе:

- $p\circ q=\sum\limits_{j=0}^{n-1}\frac{p^{(j)}(0)\overline{q^{(j)}(0)}}{(j!)^2}$ на $\mathbb{C}^n[x]$,
- $A\circ B=\operatorname{Tr}\left(A\overline{B}^T\right)$ на $M_{mn}(\mathbb{C})$,
- $f\circ g=\int\limits_{-1}^{1}f(t)\overline{g(t)}\,dt$ на скупу свих непрекидних функција из интервала $[-1,1]$ у $\mathbb{C}$.

11.3 Норма и угао

Скаларни производ у $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$ је дефинисан геометријски као $u\circ v=\|u\|\|v\|\cos\sphericalangle(u,v)$, где $\sphericalangle(u,v)$ означава угао између вектора u и v (тј. мањи од два угла који заклапају ова два вектора). Специјално, $v\circ v=\|v\|^2$.

На произвољном реалном векторском простору не знамо (за сада) шта су норма и угао, али уколико имамо скаларни производ можемо дефинисати норму и угао тако да важе претходне релације.

Дефиниција 11.17. *Нека је* $(V, \circ)$ *еуклидски векторски простор. Норма (дужина) вектора* $v \in V$ *је* $\|v\| := \sqrt{v \circ v}$*, а угао између вектора* $u, v \in V \setminus \{\mathbb{O}\}$ *је* $\sphericalangle(u, v) := \arccos \frac{u \circ v}{\|u\|\|v\|}$.

Дефиниција норме је добра јер је $v \circ v \geqslant 0$ (по дефиницији скаларног производа). А може се аналогно дефинисати и у унитарним просторима тако што се само скаларним производ замени ермитским. Да бисмо били сигурни да је дефиниција угла добра, поред $\|v\| \neq 0$ за $v \neq \mathbb{O}$ требаће нам и наредно тврђење.

Теорема 11.18 (Неједнакост Коши–Шварц[4]–Буњаковског[5])**.** *Нека је* $(V, \circ)$ *еуклидски или унитарни простор, и нека су* $u, v \in V$ *два произвољна вектора. Тада важи* $|u \circ v| \leqslant \|u\|\|v\|$.

За разлику од норме, угао нема смисла у унитарним просторима јер вредност под аркускосинусом (у том случају) може да буде и комплексна. У случају еуклидских простора угао ће бити из интервала $[0, \pi]$, јер је то кодомен аркускосинуса.

Задатак 11.19. *Израчунати норме вектора* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ *и* $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$*, као и угао између ових вектора ако је скаларни производ на* $M_2(\mathbb{R})$ *задат са* $M \circ N = \operatorname{Tr}\left(M^T N\right)$.

Решење. По дефиницији је

$$\begin{aligned}
\|A\| = \sqrt{A \circ A} &= \sqrt{\operatorname{Tr}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)} \\
&= \sqrt{\operatorname{Tr}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}} = \sqrt{4} = 2, \\
\|B\| = \sqrt{B \circ B} &= \sqrt{\operatorname{Tr}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)} \\
&= \sqrt{\operatorname{Tr}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}} = 2, \\
A \circ B = \operatorname{Tr}&\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = \operatorname{Tr}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 2, \\
\sphericalangle(u, v) = \arccos &\frac{A \circ B}{\|A\|\|B\|} = \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}.
\end{aligned}$$

□

[4] *Karl Hermann Amandus Schwarz* (1843. - 1921.), немачки математичар

[5] *Виктор Яковлевич Буняковский* (1804. - 1889.), руски математичар, физичар и економиста

Задатак 11.20. *Израчунати угао између синуса и косинуса ако је скаларни производ на* $\mathcal{C}\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ *задат са* $f \circ g = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)g(t)\,dt$.

Решење. Имамо да је

$$\begin{aligned}
\|\cos\| &= \sqrt{\cos\circ\cos} = \sqrt{\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt} = \sqrt{\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}dt} \\
&= \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}dt} = \frac{1}{2}, \\
\|\sin\| &= \sqrt{\sin\circ\sin} = \sqrt{\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,dt} = \sqrt{\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2t}{2}dt} = \frac{1}{2} \\
\cos\circ\sin &= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\sin t\,dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2t}{2}dt = \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{\pi}\sin t\,dt \\
&= \frac{1}{4\pi}(-\cos t)\Big|_{t=0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2\pi}, \\
\sphericalangle(\cos,\sin) &= \arccos\frac{\cos\circ\sin}{\|\cos\|\|\sin\|} = \arccos\frac{2}{\pi}.
\end{aligned}$$

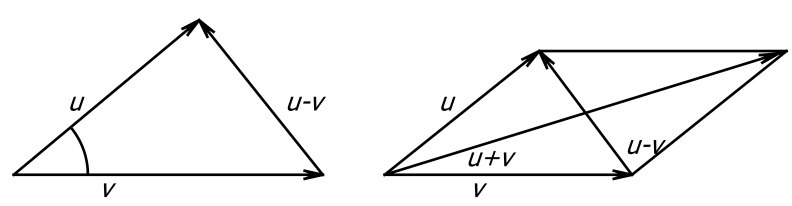
□

Задатак 11.21. *Показати да у произвољном еуклидском векторском простору* $(V,\circ)$, *за све ненула векторе* $u, v \in V$ *важи*

а) Косинусна теорема: $\|u-v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\|\|v\|\cos\sphericalangle(u,v)$,

б) Једнакост паралелограма: $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right)$,

в) $u \circ v = \frac{\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2}{4}$.



Слика 11.22. Илустрација Косинусне теореме и Једнакости паралелограма

Решење. а) Из особина скаларног производа следи

$$\begin{aligned}\|u-v\|^2 &= (u-v)\circ(u-v) = u\circ(u-v) - v\circ(u-v)\\ &= (u-v)\circ u - (u-v)\circ v = u\circ u - v\circ u - u\circ v + v\circ v\\ &= \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2u\circ v = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\|\|v\|\cos\sphericalangle(u,v). \quad (11.23)\end{aligned}$$

б) Ако применимо (11.23) на векторе u и v, а затим и на u и $-v$ добијамо

$$\begin{aligned}\|u-v\|^2 + \|u+v\|^2 &= \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2u\circ v + \|u\|^2 + \|-v\|^2 - 2u\circ(-v)\\ &= 2\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right).\end{aligned}$$

в) Слично

$$\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2u\circ v - \left(\|u\|^2 + \|v\|^2 - 2u\circ v\right) = 4u\circ v.$$

$\square$

Специјално, ако је $\sphericalangle(u,v) = \frac{\pi}{2}$ Косинусна постаје Питагорина[6] теорема: $\|u-v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.

Подсећамо да је норма дефинисана преко скаларног производа. Последњи део претходног задатка тври да важи и обрнуто, ако бисмо на неком векторском простору имали (некако аксиоматски дефинисану) норму, постојао би тачно један начин да уведемо скаларни производ.

11.4 Ортонормираност и Грам–Шмитов поступак

Сада када знамо шта је угао у произвољном еуклидском простору можемо рећи да су два вектора *ортогонална* ако је угао између њих прав. Приметимо да је $\sphericalangle(u,v) = \arccos\frac{u\circ v}{\|u\|\|v\|} = \frac{\pi}{2}$ ако и само ако је $u\circ v = 0$. Последњи захтев има смисла и уколико скаларни производ заменимо ермитским (иако у унитарним просторима нема смисла причати о угловима!). Зато ортогоналност дефинишемо на следећи начин.

Дефиниција 11.24. *Нека је V реални или комплексни векторски простор са скаларним или ермитским производом $\circ$. Кажемо да су вектори $u, v \in V$ ортогонални (нормални, управни) и пишемо $u\perp v$ ако је $u\circ v = 0$.*

Напомињемо да је по овој дефиницији нула-вектор ортогоналан на све векторе (укључујући и себе).

[6] $\Pi\upsilon\theta\alpha\gamma o\rho\alpha\varsigma$ (6. век п.н.е.), антички математичар, филозоф, композитор и политичар

Дефиниција 11.25. *Нека је $(V, \circ)$ еуклидски или унитарни векторски простор. Кажемо да је вектор $v \in V$ нормиран (јединични) ако је $\|v\| = 1$.*

Дефиниција 11.26. *Нека је $(V, \circ)$ еуклидски или унитарни векторски простор. Кажемо да је скуп вектора $S \subseteq V$*

(1) *нормиран ако је $(\forall v \in V)\ \|v\| = 1$,*

(2) *ортогоналан ако је $(\forall u, v \in V)\ u \perp v$,*

(3) *ортонормиран ако је ортогоналан и нормиран тј. ако је $(\forall u, v \in V)\ u \circ v = \begin{cases} 1, & \text{ако је } u = v, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$*

Нека је $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ ортогонална база векторског простора V. Тада лако можемо одредити коефицијенте произвољног вектора $v = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$. Из

$$v \circ e_i = \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j \right) \circ e_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j \circ e_i = \alpha_i \|e_i\|^2 \tag{11.27}$$

следи да је $\alpha_i = \frac{v \circ e_i}{\|e_i\|^2}$, за све $1 \leqslant i \leqslant n$. Специјално, ако је база e ортонормирана имаћемо $\alpha_i = v \circ e_i$. Претходни коефицијенти су познати под називом Фуријеови[7] коефицијенти.

Примери ортонормираних база су:

- канонска база $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{C}^n$ са стандардним скаларним производом,
- канонска база $M_{mn}(\mathbb{R})$ са стандардним скаларним производом $A \circ B = \operatorname{Tr}\left(AB^T\right)$. Нпр. за $m = n = 2$ (због једноставнијег записа) имамо
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{Tr} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1,$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{Tr} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0,$$
итд.
- канонска база $\left\{1, \ldots, x^{n-1}\right\}$ векторског простора $\mathbb{R}^n[x]$ са стандардним скаларним производом $p \circ q = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \frac{p^{(i)}(0) q^{(i)}(0)}{(i!)^2}$. Ово објашњава зашто делимо са $(i!)^2$ јер ако бисмо на $\mathbb{R}^3[x]$ посматрали скаларни производ $p \circ q = \sum\limits_{i=0}^{n-1} p^{(i)}(0) q^{(i)}(0)$ канонска база би била ортогонална али не и нормирана.

[7] *Jean-Baptiste Joseph Fourier* (1768. - 1830.), француски математичар и физичар

Задатак 11.28. *Показати да је скуп*

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos(mx), \sin(nx) \;\middle|\; m, n \in \mathbb{N} \right\}$$

ортонормиран ако је скаларни производ на $\mathcal{C}[-\pi, \pi]$ *дат са*

$$f \circ g = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) g(t)\, dt.$$

Решење. Директном провером, за све $m, m' \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $n, n' \in \mathbb{N}$, имамо

$$\begin{aligned}
\cos(mx) \circ \sin(nx) &= \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos(mt) \sin(nt)\, dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(\sin((m+n)t) + \sin((m-n)t)\right)\, dt = 0, \\
\sin(nx) \circ \sin(n'x) &= \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin(nt) \sin(n't)\, dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(\cos((n-n')t) - \cos((n+n')t)\right)\, dt \\
&= \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} dt = 1, & \text{за } n = n', \\ 0, & \text{за } n \neq n', \end{cases} \\
\cos(mx) \circ \cos(m'x) &= \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos(mt) \cos(m't)\, dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(\cos((m+m')t) + \cos((m-m')t)\right)\, dt \\
&= \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} 2\, dt = 2, & \text{за } m = m' = 0, \\ \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} dt = 1, & \text{за } m = m' \neq 0, \\ 0, & \text{за } m \neq m'. \end{cases}
\end{aligned}$$

Овде вектор $\frac{1}{\sqrt{2}}$ видимо као $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(0 \cdot x)$, што значи да је $\frac{1}{\sqrt{2}} \circ \frac{1}{\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 (\cos(0 \cdot x) \circ \cos(0 \cdot x)) = 1$ и $\frac{1}{\sqrt{2}} \circ f = \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos(0 \cdot x) \circ f) = 0$, за све $f \in \{\cos(mx), \sin(nx) \mid m, n \in \mathbb{N}\}$. $\square$

Дакле, имамо ортонормиран скуп у векторском простору $\mathcal{C}[-\pi, \pi]$ који је састављен од синуса и косинуса. Може се показати да је овај скуп густ у $f \in \mathcal{C}[-\pi, \pi]$, тј. да се свака функција $f \in \mathcal{C}[-\pi, \pi]$ може изразити као

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right),$$

где је $a_n = f \circ \cos(nx)$ и $b_n = f \circ \sin(nx)$, за све n. Ово је *Фуријеов развој* функције и поред ортонормираности укључује и питање конвергенције претходног реда (чиме се овде нећемо бавити).

Задатак 11.29 (Чебишовљеви[8] полиноми)**.** *а) Показати да је*

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \qquad \textit{за све } n \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

полином по x степена n.

б) Показати да је скуп $\left\{\frac{T_0}{\sqrt{2}}, T_1, T_2, T_3, \dots\right\}$ ортонормиран у односу на скаларни производ

$$f \circ g = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} f(t) g(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

на векторском простору $\mathcal{C}[-1, 1]$.

Решење. а) Први начин је индукцијом по n, за $n = 0$ и $n = 1$ тврђење тривијално важи јер је $T_0(x) = \cos 0 = 1$ и $T_1(x) = \cos(\arccos x) = x$. Претпоставимо да су T_n и T_{n-1} полиноми степена n и $n-1$, тада је

$$\begin{aligned} T_{n+1}(x) &= \cos((n+1)\arccos x) \\ &= \cos(\arccos x)\cos(n \arccos x) - \sin(\arccos x)\sin(n \arccos x) \\ &= xT_n(x) - \sin(\arccos x)\sin(n \arccos x). \end{aligned}$$

Пошто не видимо да је $\sin(\arccos x)\sin(n \arccos x)$ полином применићемо следећи трик. На исти начин можемо добити и

$$T_{n-1}(x) = xT_n(x) + \sin(\arccos x)\sin(n \arccos x),$$

што повлачи $T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x)$ и онда је јасно да је

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

полином степена $n+1$.

[8] *Пафнутий Львович Чебышёв* (1821. - 1894.), руски математичар

Други начин је да помоћу Моаврове и Биномне формуле добијемо

$$\begin{aligned}
T_n(x) &= \Re(\cos(n\arccos x) + i\sin(n\arccos x)) \\
&= \Re(\cos(\arccos x) + i\sin(\arccos x))^n = \Re\left(x + i\sin(\arccos x)\right)^n \\
&= \Re\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(i\sin(\arccos x))^j x^{n-j} = \sum_{\substack{j=0\\2|j}}^{n}\binom{n}{j}(i\sin(\arccos x))^j x^{n-j} \\
&= \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\binom{n}{2k}\left(-(\sin(\arccos x))^2\right)^k x^{n-2k} \\
&= \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\binom{n}{2k}\left((\cos(\arccos x))^2 - 1\right)^k x^{n-2k} = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\binom{n}{2k}\left(x^2-1\right)^k x^{n-2k} \\
&= \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\binom{n}{2k}\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}(-1)^l\left(x^2\right)^{k-l} x^{n-2k} \\
&= \sum_{l=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\left((-1)^l\sum_{k=l}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\binom{n}{2k}\binom{k}{l}\right) x^{n-2l}.
\end{aligned}$$

Највиши степен x који се појављује у T_n је x^n, а коефицијент који стоји уз њега је $\sum\limits_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\binom{n}{2k} \neq 0$.

б) Скаларни производ два Чебишовљева полинома је

$$\begin{aligned}
T_m \circ T_n &= \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\cos(m\arccos t)\cos(n\arccos t)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos(mx)\cos(nx)dx = \begin{cases} 2, & \text{за } m = n = 0, \\ 1, & \text{за } m = n \neq 0, \\ 0, & \text{за } m \neq n, \end{cases}
\end{aligned}$$

при чему смо последњи интеграл рачунали на исти начин као у претходном задатку. □

Чебишовљеви полиноми се користе у нумеричкој и примењеној математици за апроксимацију функције f полиномом $\sum\limits_{k=1}^{n}\left(f \circ \widetilde{T}_k\right)\widetilde{T}_k$ степена n, где је $\widetilde{T}_k = \begin{cases} \frac{T_0}{\sqrt{2}}, & \text{за } k = 0 \\ T_k, & \text{за } k \geqslant 1 \end{cases}$. Грешка приликом апроксимације је ортогонална на $\mathscr{L}\left\{\widetilde{T}_0, \ldots, \widetilde{T}_n\right\}$ и њена норма се смањује са повећањем n.

Природно се намеће питање како одредити ортонормирану базу неког векторског простора, а одговор на то питање даје Грам[9]–Шмитов[10] поступак. Нека је $f = \{f_1, \ldots, f_n\}$ произвољна база еуклидског или унитарног векторског простора $(V, \circ)$. У првом кораку од f правимо ортогоналну базу $\widehat{e} = \{\widehat{e}_1, \ldots, \widehat{e}_n\}$ где је

$$\widehat{e}_i := f_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{f_i \circ \widehat{e}_j}{\|\widehat{e}_j\|^2} \widehat{e}_j. \tag{11.30}$$

Идеја је прилично интуитивна, за $\widehat{e}_1$ можемо узети f_1. Затим бирамо $\widehat{e}_2$ тако да $\mathscr{L}\{\widehat{e}_1, \widehat{e}_2\}$ буде једнако $\mathscr{L}\{f_1, f_2\} = \mathscr{L}\{\widehat{e}_1, f_2\}$. То значи да је $\widehat{e}_2 = \alpha\widehat{e}_1 + \beta f_2$, за неке скаларе α и β. Додатно, $\beta \neq 0$ због $\mathscr{L}\{\widehat{e}_1, \widehat{e}_2\} = \mathscr{L}\{f_1, f_2\}$, па ћемо претпоставити да је $\beta = 1$ (што је само скалирање базног вектора $\widehat{e}_2$, али за сада о томе не бринемо). Пошто захтевамо $\widehat{e}_1 \perp \widehat{e}_2$ имаћемо

$$0 = \widehat{e}_2 \circ \widehat{e}_1 = (\alpha\widehat{e}_1 + f_2) \circ \widehat{e}_1 = \alpha \|\widehat{e}_1\|^2 + f_2 \circ \widehat{e}_1,$$

што повлачи $\alpha = -\frac{f_2 \circ \widehat{e}_1}{\|\widehat{e}_1\|^2}$. Понављањем овог поступка добијамо горе наведену формулу.

У другом кораку само нормирамо векторе $\widehat{e}_i$ и добијамо ортонормирану базу $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$, где је $e_i = \frac{1}{\|\widehat{e}_i\|}\widehat{e}_i$.

Задатак 11.31. *Одредити бар једну ортонормирану базу векторског простора $V = \mathscr{L}(f_1, f_2, f_3)$ са стандардним скаларним производом из $\mathbb{R}^4$, где је $f_1 = (1,1,1,1)$, $f_2 = (1,0,1,0)$ и $f_3 = (-1,2,0,1)$.*

Решење. Према Грам–Шмитовом поступку ортогонална база векторског простора V је $\widehat{e} = \{\widehat{e}_1, \widehat{e}_2, \widehat{e}_3\}$, где је

$$\begin{aligned}
\widehat{e}_1 =& f_1 = (1,1,1,1),\\
\widehat{e}_2 =& f_2 - \frac{f_2 \circ \widehat{e}_1}{\|\widehat{e}_1\|^2}\widehat{e}_1 = (1,0,1,0) - \frac{(1,0,1,0) \circ (1,1,1,1)}{\|(1,1,1,1)\|^2}(1,1,1,1)\\
=&(1,0,1,0) - \frac{2}{4}(1,1,1,1) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right),\\
\widehat{e}_3 =& f_3 - \frac{f_3 \circ \widehat{e}_1}{\|\widehat{e}_1\|^2}\widehat{e}_1 - \frac{f_3 \circ \widehat{e}_2}{\|\widehat{e}_2\|^2}\widehat{e}_2\\
=&(-1,2,0,1) - \frac{(-1,2,0,1) \circ (1,1,1,1)}{\|(1,1,1,1)\|^2}(1,1,1,1)\\
&- \frac{(-1,2,0,1) \circ \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)}{\left\|\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)\right\|^2}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)\\
=&(-1,2,0,1) - \frac{2}{4}(1,1,1,1) - \frac{-2}{1}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right),
\end{aligned}$$

[9] *Jørgen Pedersen Gram* (1850. - 1916.), дански математичар и економиста
[10] *Erhard Schmidt* (1876. - 1959.), немачки математичар

а ортонормирана база је $e = \{e_1, e_2, e_3\}$, где је

$$\begin{aligned}
e_1 &= \frac{1}{\|\widehat{e}_1\|}\widehat{e}_1 = \frac{1}{\|(1,1,1,1)\|}(1,1,1,1) = \frac{1}{2}(1,1,1,1) = \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\\
e_2 &= \frac{1}{\|\widehat{e}_2\|}\widehat{e}_2 = \frac{1}{\left\|\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)\right\|}\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right),\\
e_3 &= \frac{1}{\|\widehat{e}_3\|}\widehat{e}_3 = \frac{1}{\left\|\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)\right\|}\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right).
\end{aligned}$$

□

Задатак 11.32. *Одредити бар једну ортонормирану базу векторског простора $\mathbb{R}^3[x]$ са скаларним производом*

$$p \circ q = p(0)q(0) + p'(0)q'(0) + p(1)q(1).$$

Решење. Идеја је иста као у претходном задатку, само што ће сад бити више рачуна пошто је скаларни производ мало чуднији. Грам–Шмитов поступак примењен на канонску базу простора $\mathbb{R}^3[x]$ даје ортогоналну базу $\widetilde{e} = \{\widehat{e}_1, \widehat{e}_2, \widehat{e}_3\}$, где је

$$\begin{aligned}
\widehat{e}_1(x) =& 1,\\
\widehat{e}_2(x) =& x - \frac{x \circ 1}{\|1\|^2}1 = x - \frac{0\cdot 1 + 1\cdot 0 + 1\cdot 1}{1^2+0^2+1^2}1 = x - \frac{1}{2},\\
\widehat{e}_3(x) =& x^2 - \frac{x^2 \circ 1}{\|1\|^2}1 - \frac{x^2 \circ \left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left\|\left(x-\frac{1}{2}\right)\right\|^2}\left(x - \frac{1}{2}\right)\\
=& x^2 - \frac{0\cdot 1 + 0\cdot 0 + 1\cdot 1}{1^2+0^2+1^2}1 - \frac{0\left(-\frac{1}{2}\right) + 0\cdot 1 + 1\cdot\frac{1}{2}}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}\left(x - \frac{1}{2}\right)\\
=& x^2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right) = x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{3},
\end{aligned}$$

и ортонормирану базу $e = \{e_1, e_2, e_3\}$, где је

$$\begin{aligned}
e_1(x) &= \frac{1}{\|1\|}1 = \frac{1}{\sqrt{1^2+0^2+1^2}}1 = \frac{\sqrt{2}}{2},\\
e_2(x) &= \frac{1}{\left\|x-\frac{1}{2}\right\|}\left(x-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}}\left(x - \frac{1}{2}\right)\\
&= \sqrt{\frac{2}{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}}{3}x - \frac{\sqrt{6}}{6},\\
e_3(x) &= \frac{1}{\left\|x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\right\|}\left(x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2}}\left(x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\right) = \sqrt{3}\,x^2 - \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{\sqrt{3}}{3}.
\end{aligned}$$

Наравно, ово није једино решење. Нпр. могли смо узети и $\widehat{e}_1(x) = x^2$, $\widehat{e}_2(x) = x - \frac{x \circ x^2}{\|x^2\|^2} x^2$, итд. А могли смо и применити Грам–Шмитов поступак на неку другу базу и добити другачије решење. □

Задатак 11.33. *Одредити бар једну ортонормирану базу векторског простора* $V = \{ M \in M_2(\mathbb{C}) \mid \operatorname{Tr} M = 0\}$ *са ермитским производом*

$$\left\langle \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & -a' \end{pmatrix} \right\rangle = a\overline{a'} + b\overline{b'} + 3c\overline{c'} + ia\overline{c'} - ic\overline{a'} + ib\overline{c'} - ic\overline{b'}.$$

Решење. И још једном ћемо применити Грам–Шмитов поступак, овог пута на базу

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Тиме добијамо ортогоналну базу $\widehat{e} = \{\widehat{e}_1, \widehat{e}_2, \widehat{e}_3\}$, где је

$$\begin{aligned}
\widehat{e}_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
\widehat{e}_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \frac{-i}{1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\
\widehat{e}_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\quad - \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \frac{0}{1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{i}{2} & -1 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

и ортонормирану базу $e = \{e_1, e_2, e_3\}$, где је

$$e_1 = \frac{1}{\left\| \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\|} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$e_2 = \frac{1}{\left\|\begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\|}\begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{i\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix},$$

$$e_3 = \frac{1}{\left\|\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{i}{2} & -1 \end{pmatrix}\right\|}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{i}{2} & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{i\sqrt{2}}{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

$\square$

Напомињемо да ермитски производ није симетричан, па смо у претходном задатку морали водити рачуна о редоследу вектора приликом примене формуле (11.30) јер код ермитског производа (за разлику од скаларног) $\langle \widehat{e}_j, f_i \rangle$ није исто што и $\langle f_i, \widehat{e}_j \rangle$.

11.5 Ортогонална допуна

Дефиниција 11.34. *Нека је $(V, \circ)$ еуклидски или унитарни векторски простор и $S \subseteq V$ његов подскуп. Скуп*

$$S^{\perp} := \{v \in V \mid (\forall u \in S)\, v \perp u\}$$

зовемо ортогонална допуна (ортокомплемент) скупа S.

Ортогонална допуна има следеће особине:

(1) скуп $S^{\perp}$ је векторски потпростор V (чак и уколико S није потпростор),

(2) $S^{\perp} = (\mathscr{L}(S))^{\perp}$,

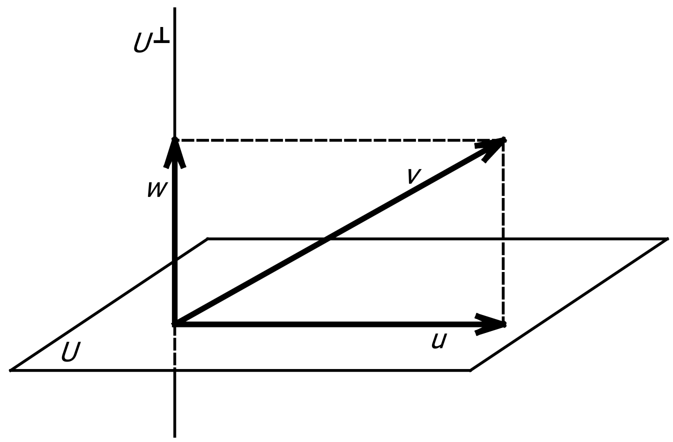
(3) $S^{\perp\perp} = \mathscr{L}(S)$, специјално за $U \leqslant V$ имамо $U^{\perp\perp} = U$,

(4) за сваки $U \leqslant V$ важи $V = U \oplus U^{\perp}$,

(5) специјално, уколико је векорски простор V коначне димензије важи $\dim V = \dim U + \dim \left(U^{\perp}\right)$,

(6) ако је e база (или само генераторни скуп) векторског потпростора U, тада је
$$U^{\perp} = \{v \in V \mid (\forall u \in e)\, v \perp u\}.$$

Нека је U векторски потпростор простора V. На основу (4) произвољан вектор $v \in V$ на јединствен начин можемо записати као $v = u + w$, где је $u \in U$ и $w \in U^{\perp}$.



Слика 11.35. Геометријски смисао ортогоналне пројекције и ортогоналне допуне вектора

Вектор u ћемо звати *ортогонална пројекција* вектора v на потпростор U и означавати са $\pi_U v$, а w *ортогонална пројекција* вектора v на потпростор $U^{\perp}$ (*ортогонална допуна* вектора v у односу на потпростор U) и означавати са $\pi_{U^{\perp}} v$.

Задатак 11.36. *Нека је* $U = \mathscr{L}(1,2,3,4) \subseteq \mathbb{R}^4$. *Одредити бар једну базу и димензију векторског простора* $U^{\perp}$.

Решење. Ортогонална допуна $U^{\perp}$ је скуп свих вектора $v = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$ за које је

$$(x,y,z,t) \circ (1,2,3,4) = x + 2y + 3z + 4t = 0,$$

тј.

$$\begin{aligned} U^{\perp} &= \{(-2y-3z-4t, y, z, t) \mid y, z, t \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathscr{L}((-2,1,0,0), (-3,0,1,0), (-4,0,0,1)). \end{aligned}$$

База ортогоналне допуне $U^{\perp}$ је $\{(-2,1,0,0), (-3,0,1,0), (-4,0,0,1)\}$, а димензија 3. $\square$

Задатак 11.37. *Нека је*

$$U = \mathscr{L}\left(1 - 2x + 3x^2 + x^3, 3 - 5x + 6x^2\right) \subseteq \mathbb{R}^4[x],$$

где је скаларни производ на $\mathbb{R}^4[x]$ *задат са*

$$p \circ q = p(0)q(0) + p'(0)q'(0) + \frac{1}{6}\int_0^1 p''(t)q''(t)\,dt.$$

Одредити бар једну базу и димензију векторског простора $U^{\perp}$.

Решење. Ортогонална допуна $U^\perp$ је скуп свих полинома $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \in \mathbb{R}^4[x]$ за које је

$$\begin{aligned}
&\big(a + bx + cx^2 + dx^3\big) \circ \big(1 - 2x + 3x^2 + x^3\big)\\
&= a - 2b + \frac{1}{6}\int\limits_0^1 (2c + 6dt)(6 + 6t)\,dt = a - 2b + 3c + 5d = 0,\\
&\big(a + bx + cx^2 + dx^3\big) \circ \big(3 - 5x + 6x^2\big)\\
&= 3a - 5b + \frac{1}{6}\int\limits_0^1 (2c + 6dt)\cdot 12\,dt = 3a - 5b + 4c + 6d = 0.
\end{aligned}$$

Решење овог система је $a = 7c + 13d$ и $b = 5c + 9d$. Следи

$$\begin{aligned}
U^\perp &= \big\{\,(7c + 13d) + (5c + 9d)x + cx^2 + dx^3 \;\big|\; c, d \in \mathbb{R}\big\}\\
&= \mathscr{L}\left(7 + 5x + x^2, 13 + 9x + x^3\right).
\end{aligned}$$

$\square$

Задатак 11.38. *а) Одредити по једну базу векторских простора U и $U^\perp$, ако је $U \leqslant \mathbb{R}^4$ скуп решења система*

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
2x &+& y &+& z &+& 3t &=& 0\\
3x &+& 2y &+& 2z &+& t &=& 0\\
x &+& 2y &+& 2z &-& 9t &=& 0
\end{array}$$

б) Одредити ортогоналну пројекцију и ортогоналну допуну вектора $v = (7, -4, -1, 2)$ у односу на потпростор U.

Решење. Из

$$\begin{array}{rcrcrcrcrl}
2x &+& y &+& z &+& 3t &=& 0 & /(-2)\\
3x &+& 2y &+& 2z &+& t &=& 0 & \\
x &+& 2y &+& 2z &-& 9t &=& 0 & \\
\hline
2x &+& y &+& z &+& 3t &=& 0 & \\
-x && && &-& 5t &=& 0 & \\
\cancel{-3x} && && &\cancel{-}& \cancel{15t} &\cancel{=}& \cancel{0} & \\
\hline
\end{array}$$

следи $x = -5t$ и $y + z - 7t = 0$, што значи да је

$$U = \{(-5t, y, -y + 7t, t) \,|\, y, t \in \mathbb{R}\} = \mathscr{L}\left(e_1, e_2\right),$$

где је $e_1 = (0, -1, 1, 0)$ и $e_2 = (-5, 7, 0, 1)$.

Базу $U^\perp$ можемо тражити као у претходна два задатка, а можемо се и послужити једним триком како бисмо избегли тај рачун. Систем с почетка ћемо записати као

$$\begin{array}{rcrcl}
(x, y, z, t) &\circ& (2, 1, 1, 3) &=& 0\\
(x, y, z, t) &\circ& (3, 2, 2, 1) &=& 0\\
(x, y, z, t) &\circ& (1, 2, 2, -9) &=& 0
\end{array}$$

То значи да је

$$U = \left\{ w \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, w \perp e_3,\, w \perp e_4,\, w \perp e_5 \right\} = \{e_3, e_4, e_5\}^{\perp},$$

где је $e_3 = (2,1,1,3)$, $e_4 = (3,2,2,1)$ и $e_5 = (1,2,2,-9)$. Следи

$$U^{\perp} = \{e_3, e_4, e_5\}^{\perp\perp} = \mathscr{L}(e_3, e_4, e_5) = \mathscr{L}(e_3, e_4),$$

јер је $e_5 = 3e_3 - 4e_4$.

б) Пројекција $\pi_U v$ припада простору U па је можемо записати преко базних вектора као $\pi_U v = \alpha e_1 + \beta e_2$, за неке $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тада је

$$v = \pi_U v + \pi_{U^\perp} v = \alpha e_1 + \beta e_2 + \pi_{U^\perp} v.$$

Искористићемо чињеницу да је ортогонална допуна $\pi_{U^\perp} v \in U^\perp$ ортогонална на $e_1, e_2 \in U$, добијамо

$$\begin{array}{ccccccc} v \circ e_1 & = & \alpha (e_1 \circ e_1) & + & \beta (e_2 \circ e_1) & + & \underbrace{\pi_{U^\perp} v \circ e_1}_{=0} \\ v \circ e_2 & = & \alpha (e_1 \circ e_2) & + & \beta (e_2 \circ e_2) & + & \underbrace{\pi_{U^\perp} v \circ e_2}_{=0} \end{array}$$

Након што израчунамо све преостале скаларне производе, долазимо до система по променљивим α и β:

$$\begin{array}{rcrcr} 3 & = & 2\alpha & + & -7\beta \\ -61 & = & -7\alpha & + & 75\beta \end{array}$$

Решења овог система су

$$\alpha = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -7 \\ -61 & 75 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -7 \\ -7 & 75 \end{vmatrix}} = \frac{-202}{101} = -2,$$

$$\beta = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -7 & -61 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -7 \\ -7 & 75 \end{vmatrix}} = \frac{-101}{101} = -1,$$

па је $\pi_U v = -2e_1 - e_2 = (5, -5, -2, -1)$.

Ортогоналну допуну $\pi_{U^\perp} v$ можемо тражити на исти начин као пројекцију $\pi_U v$, а можемо и само искористити једнакост

$$\pi_{U^\perp} v = v - \pi_U v = (2, 1, 1, 3).$$

$\square$

Сетимо се првог корака у Грам–Шмитовом поступку. Сада кад знамо шта је пројекција можемо дати и геометријско објашњење (11.30). Најпре смо вектор $\widehat{e}_2$ добили као пројекцију вектора f_2 на потпростор $\mathscr{L}(\widehat{e}_1)^{\perp}$. Да будемо прецизнији, ако запишемо пројекције као $\pi_{\mathscr{L}(\widehat{e}_1)} f_2 = \alpha\widehat{e}_1$ и $\pi_{\mathscr{L}(\widehat{e}_1)^{\perp}} f_2 = f_2 - \pi_{\mathscr{L}(\widehat{e}_1)} f_2 = f_2 - \alpha\widehat{e}_1$, онда из $\widehat{e}_1 \perp \pi_{\mathscr{L}(\widehat{e}_1)^{\perp}} f_2$ следи да је $\alpha = \frac{f_2 \circ \widehat{e}_1}{\|\widehat{e}_1\|^2}$, те добијамо поменуту пројекцију.

Слично, за свако $i \leqslant j-1$ вектор $\frac{f_j \circ \widehat{e}_i}{\|\widehat{e}_i\|^2}\widehat{e}_i$ је пројекција вектора f_j на $\mathscr{L}(\widehat{e}_i)$. Наравно, кад саберемо све те пројекције добићемо пројекцију f_j на $\mathscr{L}(\widehat{e}_1, \widehat{e}_2, \ldots, \widehat{e}_{j-1})$. Коначно, долазимо до закључка да $\widehat{e}_j$ је пројекција f_j на $\mathscr{L}(\widehat{e}_1, \widehat{e}_2, \ldots, \widehat{e}_{j-1})^{\perp}$.

11.6 Угао и растојање између вектора и потпростора

Као и код свих геометријских појмова до сада мотивација долази из векторског простора $\mathbb{R}^3$. Нека је $(V, \circ)$ еуклидски векторски простор. *Растојање између* вектора $u, v \in V$ се дефинише као

$$d(u, v) := \|u - v\|.$$

Теорема 11.39. *Нека је $(V, \circ)$ еуклидски векторски простор, U његов потпростор и нека је $v \in V \setminus \{\mathbb{O}\}$ произвољан вектор. Вектор из U који је најближи вектору v је $\pi_U v$, тј.*

$$\exists \min_{u \in U} d(v, u) = d(v, \pi_U v).$$

Дефиниција 11.40. *Нека је $(V, \circ)$ еуклидски векторски простор, U његов потпростор V и нека је $v \in V \setminus \{\mathbb{O}\}$ произвољан вектор. Растојање вектора v од потпростора U је*

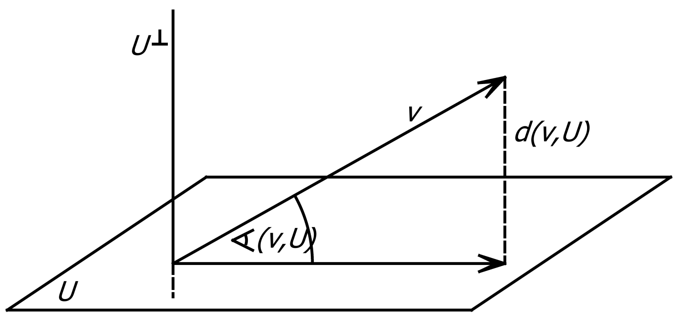
$$d(v, U) := \min_{u \in U} d(v, u) = d(v, \pi_U v) = \|v - \pi_U v\| = \|\pi_{U^{\perp}} v\|,$$

а угао између вектора v и потпростора U је

$$\sphericalangle(v, U) := \begin{cases} \sphericalangle(v, \pi_U v), & \text{ако } v \notin U^{\perp}, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{ако } v \in U^{\perp}. \end{cases}$$

Наравно, иста дефиниција растојања (али само растојања, не и угла) има смисла и у унитарним просторима.

Слично као у случају норме, и за угао важи $\exists \min_{u \in U} \sphericalangle(v, u) = \sphericalangle(v, U)$.



Слика 11.41. Геометријска илустрација угла и растојања између вектора и потпростора

Задатак 11.42. *Нека је $(V, \circ)$ еуклидски векторски простор, U векторски потпростор V и $v \in V$ произвољан вектор. Показати да важи*

а) $\|v\|^2 = d(v,U)^2 + d\left(v, U^\perp\right)^2$,

б) $\sphericalangle(v,U) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

в) $\sphericalangle(v,U) + \sphericalangle\left(v, U^\perp\right) = \frac{\pi}{2}$.

Решење. Овде наравно не можемо да кажемо је јасно са слике јер није у питању само $\mathbb{R}^3$, већ произвољан еуклидски простор.

а) По Питагориној теореми (Задатак 11.21.а)) за ортогоналне векторе $\pi_U v$ и $\pi_{U^\perp} v$ важи

$$\|v\|^2 = \|\pi_U v + \pi_{U^\perp} v\|^2 = \|\pi_U v\|^2 + \|\pi_{U^\perp} v\|^2 = d\left(v, U^\perp\right)^2 + d(v,U)^2.$$

б) Можемо претпоставити да $v \notin U^\perp$ јер у супротном тврђење тривијално важи. Како $\sphericalangle(v,U) \in [0,\pi]$ по дефиницији довољно је показати да је $\cos\sphericalangle(v,U) \geqslant 0$. Пошто су вектори $\pi_U v \in U$ и $\pi_{U^\perp} v \in U^\perp$ ортогонални имамо

$$\begin{aligned}\cos\sphericalangle(v,U) = \cos\sphericalangle\left(v, \pi_U v\right) &= \frac{v \circ \pi_U v}{\|v\|\,\|\pi_U v\|} = \frac{(\pi_U v + \pi_{U^\perp}) \circ \pi_U v}{\|v\|\,\|\pi_U v\|} \\ &= \frac{\pi_U v \circ \pi_U v}{\|v\|\,\|\pi_U v\|} = \frac{\|\pi_U v\|}{\|v\|} \geqslant 0.\end{aligned}$$

Приметимо да управо изведена релација $\cos\sphericalangle(v,U) = \frac{\|\pi_U v\|}{\|v\|}$ важи и у случају $v \in U^\perp$ јер је тада $\sphericalangle(v,U) = \frac{\pi}{2}$ и $\pi_U v = \mathbb{O}$.

в) Према делу б) је $\sphericalangle(v,U), \sphericalangle\left(v, U^\perp\right) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos\sphericalangle(v,U) = \frac{\|\pi_U v\|}{\|v\|}$ и $\cos\sphericalangle\left(v, U^\perp\right) = \frac{\left\|\pi_{U^\perp} v\right\|}{\|v\|}$. Следи,

$$\begin{aligned}
&\cos\left(\sphericalangle(v,U)+\sphericalangle\left(v,U^{\perp}\right)\right)\\
&=\cos\sphericalangle(v,U)\cos\sphericalangle\left(v,U^{\perp}\right)-\sin\sphericalangle(v,U)\sin\sphericalangle\left(v,U^{\perp}\right)\\
&=\frac{\|\pi_U v\|}{\|v\|}\frac{\|\pi_{U^\perp}v\|}{\|v\|}-\sqrt{1-\frac{\|\pi_U v\|^2}{\|v\|^2}}\sqrt{1-\frac{\|\pi_{U^\perp}v\|^2}{\|v\|^2}}\\
&=\frac{\|\pi_U v\|\,\|\pi_{U^\perp}v\|-\sqrt{\left(\|v\|^2-\|\pi_U v\|^2\right)\left(\|v\|^2-\|\pi_{U^\perp}v\|^2\right)}}{\|v\|^2}=0,
\end{aligned}$$

јер је $\|v\|^2=\|\pi_U v\|^2+\|\pi_{U^\perp}v\|^2$ по Питагориној теореми. Дакле, $\sphericalangle(v,U)+\sphericalangle\left(v,U^{\perp}\right)=\frac{\pi}{2}$. □

У делу б) претходног задатка смо показали да се угао између вектора v и потпростора U може изразити и у облику

$$\sphericalangle(v,U)=\arccos\frac{\|\pi_U v\|}{\|v\|}.$$

Задатак 11.43. *Нека је*

$$V=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \,\middle|\, 4x+2y-4z+2t=5x+y-3z+3t=0\right\}$$

потпростор $\mathbb{R}^4$ *и* $v=(2,6,-2,6)\in\mathbb{R}^4$. *Одредити растојање вектора* v *од потпростора* V*, као и угао између* v *и* V.

Решење. Нека је $e_1=(4,2,-4,2)$ и $e_2=(5,1,-3,3)$. Тада је $V=\left\{v\in\mathbb{R}^4 \,\middle|\, v\perp e_1,\, v\perp e_2\right\}=\{e_1,e_2\}^{\perp}$ и $V^{\perp}=\{e_1,e_2\}^{\perp\perp}=\mathscr{L}\{e_1,e_2\}$. Запишимо v као $v=\pi_V v+\pi_{V^\perp}v=\pi_V v+\alpha e_1+\beta e_2$. Тада је

$$\begin{array}{rclcccc}
v\circ e_1 & = & \underbrace{\pi_V v\circ e_1}_{=0} & + & \alpha\,(e_1\circ e_1) & + & \beta\,(e_2\circ e_1)\\
v\circ e_2 & = & \underbrace{\pi_V v\circ e_2}_{=0} & + & \alpha\,(e_1\circ e_2) & + & \beta\,(e_2\circ e_2)\\
\hline
40 & = & & & 40\alpha & + & 40\beta\\
40 & = & & & 40\alpha & + & 44\beta\\
\hline
\end{array}$$

Следи, $\beta=0$, $\alpha=1$, $\pi_{V^\perp}v=e_1=(4,2,-4,2)$ и $\pi_V v=v-\pi_{V^\perp}v=(-2,4,2,4)$.

Сада кад имамо ове пројекције можемо да кажемо да је

$$d(v,V)=d\left(v,\pi_V v\right)=\|\pi_{V^\perp}v\|=2\sqrt{10}$$

и

$$\begin{aligned}
\sphericalangle(v,V)=\sphericalangle\left(v,\pi_V v\right)&=\arccos\frac{v\circ\pi_V v}{\|v\|\,\|\pi_V v\|}\\
&=\arccos\frac{40}{4\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{10}}=\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

□

Други начин да се уради претходни задатак јесте да се најпре ортонормира база векторског простора V Грам–Шмитовим поступком, а затим примени поступак изложен у задатку. Тиме бисмо имали један корак више али би зато систем по α и β имао облик $1\cdot\alpha+0\cdot\beta = \dots$, $0\cdot\alpha+1\cdot\beta = \dots$, тј. добили бисмо одмах решење.

Задатак 11.44. *На векторском простору $\mathbb{R}^4[x]$ скаларни производ је дефинисан са*

$$f \circ g = p(0)q(0) + p'(0)q'(0) + p''(0)q''(0) + p(1)q(1).$$

Да ли полином $p(x) = 2 - x - x^2$ заклапа већи угао са потпростором

$$V = \left\{ q \in \mathbb{R}^4[x] \;\middle|\; q(1) + q(-1) = 0 \right\}$$

или са потпростором $V^\perp$?

Решење. Одредимо најпре пројекцију $\pi_V p$. За произвољан полином $q(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \in V$ услов $q(1) + q(-1) = 2a + 2c = 0$ повлачи $c = -a$ и

$$V = \left\{ a\left(1 - x^2\right) + bx + dx^3 \;\middle|\; a, b, d \in \mathbb{R} \right\} = \mathscr{L}\left(x, x^3, 1 - x^2\right).$$

Следи, $p(x) = (\pi_V p)(x) + (\pi_{V^\perp} p)(x) = \alpha x + \beta x^3 + \gamma\left(1 - x^2\right) + (\pi_{V^\perp} p)(x)$. Сада применимо стари трик:

$$\begin{array}{rclclclcl}
p \circ x & = & \alpha x \circ x & + & \beta\left(x^3\right) \circ x & + & \gamma\left(1 - x^2\right) \circ x & + & \underbrace{(\pi_{V^\perp} p) \circ x}_{=0} \\
p \circ \left(x^3\right) & = & \alpha x \circ \left(x^3\right) & + & \beta\left(x^3\right) \circ \left(x^3\right) & + & \gamma\left(1 - x^2\right) \circ \left(x^3\right) & + & \underbrace{(\pi_{V^\perp} p) \circ \left(x^3\right)}_{=0} \\
p \circ \left(1 - x^2\right) & = & \alpha x \circ \left(1 - x^2\right) & + & \beta\left(x^3\right) \circ \left(1 - x^2\right) & + & \gamma\left(1 - x^2\right) \circ \left(1 - x^2\right) & + & \underbrace{(\pi_{V^\perp} p) \circ \left(1 - x^2\right)}_{=0} \\
\hline
-1 & = & 2\alpha & + & \beta & + & & & \\
0 & = & \alpha & + & \beta & & & & \\
6 & = & & & & & 5\gamma & & \\
\hline
\end{array}$$

Решења овог система су $\gamma = \frac{6}{5}$, $\alpha = -1$ и $\beta = 1$. Следи, $(\pi_V p)(x) = \frac{6}{5} - x - \frac{6}{5}x^2 + x^3$.

То значи да је

$$\sphericalangle(p, V) = \sphericalangle(p, \pi_V p) = \arccos \frac{p \circ (\pi_V p)}{\|p\| \, \|\pi_V p\|} \arccos \frac{\frac{41}{5}}{3 \cdot \frac{\sqrt{205}}{5}} = \arccos \frac{\sqrt{205}}{15}.$$

Сада можемо на исти начин да одредимо и угао $\sphericalangle\left(p, V^\perp\right)$ и упоредимо га са углом $\sphericalangle(p, V)$, а можемо и да избегнемо тај рачун. Знамо да је $\sphericalangle\left(p, V^\perp\right) < \sphericalangle(p, V)$ еквивалентно са $\sphericalangle\left(p, V^\perp\right) < \frac{\pi}{4}$ (јер је $\sphericalangle\left(p, V^\perp\right) + \sphericalangle(p, V) = \frac{\pi}{2}$), а то је еквивалентно са $\cos \sphericalangle\left(p, V^\perp\right) > \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (јер косинус опада на $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$). Ово последње је очигледно тачно јер је $\frac{\sqrt{205}}{15} = \sqrt{\frac{205}{225}} > \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Други начин да се ово уради јесте да уместо са потпростором V урадимо све исто са $V^{\perp}$, јер је мање димензије па би рачунски било једноставније. Сада ћемо приказати и једну малу модификацију те идеје, која се може применити у једнодимензионалним просторима. Прво, искористимо да је вектор $\pi_{V^{\perp}}p$ ортогоналан на базне векторе простора V. Нека је $\pi_{V^{\perp}}p = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3$, за неке $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, тада је

$$\begin{array}{rcllcl}
(\pi_{V^{\perp}}p) \circ x & = & \beta + (\alpha + \beta + \gamma + \delta) & = & 0 \\
(\pi_{V^{\perp}}p) \circ \left(x^3\right) & = & \alpha + \beta + \gamma + \delta & = & 0 \\
(\pi_{V^{\perp}}p) \circ \left(1 - x^2\right) & = & \alpha - 4\gamma & = & 0
\end{array}$$

Следи, $\beta = 0$, $\alpha = 4\gamma$ и $\delta = -5\gamma$. То значи да је $(\pi_{V^{\perp}}p)(x) = \gamma\left(4 + x^2 - 5x^3\right)$ и $(\pi_V p)(x) = 2 - x - x^2 - \gamma\left(4 + x^2 - 5x^3\right)$. Коефицијент γ ћемо наћи из услова $\pi_V p \in V$ тј.

$$(\pi_V p)(1) + (\pi_{V^{\perp}}p)(-1) = 2 - 10\gamma = 0.$$

Дакле, $\gamma = \frac{1}{5}$ и $(\pi_V p)(x) = \frac{6}{5} - x - \frac{6}{5}x^2 + x^3$. И онда углове рачунамо на исти начин. $\square$

Задатак 11.45. *а) Показати да за све $p \in \mathbb{R}^3[x]$ важи*

$$\left(\int_0^1 t^2 p(t)\, dt\right)^2 \leqslant \frac{1}{5}\int_0^1 p(t)^2 dt.$$

б) Показати да постоји и израчунати

$$\min_{\substack{p\in\mathbb{R}^3[x]\\ p(0)=0}} \int_0^1 (6 + 12t - p(t))^2 dt.$$

Решење. а) Овде је најтежи део препознати да се ради о скаларном производу. За почетак, сетимо се да је $f \circ g = \int_0^1 f(t)g(t)\, dt$ скаларни производ на векторском простору $\mathbb{R}^3[x]$.

Нека је $q(t) = t^2$. Тада је по Неједнакости Коши–Шварц–Буњаковског

$$|q \circ p| \leqslant \|q\|\|p\|.$$

Сада закључак следи квадрирањем последњег израза и расписивањем

$$q \circ p = \int_0^1 t^2 p(t)\, dt, \qquad \|p\| = \sqrt{\int_0^1 p(t)^2 dt} \qquad \text{и} \qquad \|q\| = \sqrt{\int_0^1 t^4 dt} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

б) Овде наравно нећемо користити изводе и остали аналитички алат (поготово што је $\dim\left\{p \in \mathbb{R}^3[x] \,\middle|\, p(0) = 0\right\} = 2$, па је ово суштински функција две променљиве). Као и у претходном делу, приметимо да је $f \circ g = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$ скаларни производ на векторском простору $\mathbb{R}^3[x]$. То значи да је

$$\int_0^1 (6+12t-p(t))^2 dt = \|q-p\|^2 = d(q,p)^2,$$

где је $q(x) = 6 + 12x$. Нека је $V = \left\{ p \in \mathbb{R}^3[x] \;\middle|\; p(0) = 0 \right\}$. Како је растојање ненегативно биће

$$\min_{\substack{p\in\mathbb{R}^3[x]\\ p(0)=0}} \int_0^1 (6+12t-p(t))^2 dt = \left(\min_{p\in V} d(q,p)\right)^2 = d(q,V)^2 = d\left(q, \pi_V q\right)^2,$$

по Теореми 11.39. Иста теорема гарантује и постојање $\min\limits_{p\in V} d(q,p)$, одакле ће следити да постоји и минимум који се тражи у задатку. Додатно, ови минимуми се достижу за полином $p = \pi_V q \in V$. Нека је $p(x) = \alpha x + \beta x^2$ (произвољан вектор из простора V). Тада је $q(x) = (\pi_V q)(x) + (\pi_{V^\perp} q)(x) = \alpha x + \beta x^2 + (\pi_{V^\perp} q)(x)$ и

$$\begin{array}{rcrcrcr} q \circ x & = & \alpha x \circ x & + & \beta\left(x^2\right) \circ x & + & \underbrace{(\pi_{V^\perp} q) \circ x}_{=0} \\ q \circ \left(x^2\right) & = & \alpha x \circ \left(x^2\right) & + & \beta\left(x^2\right) \circ \left(x^2\right) & + & \underbrace{(\pi_{V^\perp} q) \circ \left(x^2\right)}_{=0} \end{array}$$

Ове скаларне производе рачунамо помоћу интеграла $\int_0^1 t^k\,dt = \frac{1}{k+1}$, за $k \geqslant 0$. Добијамо систем

$$\begin{array}{rcrcr} 7 & = & \frac{\alpha}{3} & + & \frac{\beta}{4} \\ 5 & = & \frac{\alpha}{4} & + & \frac{\beta}{5} \end{array}$$

чије је решење $\alpha = \dfrac{\begin{vmatrix} 7 & \frac14 \\ 5 & \frac15 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac13 & \frac14 \\ \frac14 & \frac15 \end{vmatrix}} = 36$ и $\beta = \dfrac{\begin{vmatrix} \frac13 & 7 \\ \frac14 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac13 & \frac14 \\ \frac14 & \frac15 \end{vmatrix}} = -20$. Коначно, $p(x) = 36x - 20x^2$, а наш минимум износи

$$\min_{\substack{p\in\mathbb{R}^3[x]\\ p(0)=0}} \int_0^1 (6+12t-p(t))^2 dt = \int_0^1 \left(6 - 24t + 20t^2\right)^2 dt = \cdots = 4.$$

$\square$

11.7 Беселова неједнакост

Нека је V коначно-димензионални еуклидски (ермитски) векторски простор са ортонормираном базом $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$. Тада на основу (11.27) за сваки вектор $v \in V$ важи

$$v = \sum_{i=1}^{n} (v \circ e_i)\, e_i.$$

Следећа теорема даје једну занимљиву везу норме вектора v са његовим координатама $v \circ e_i$.

Теорема 11.46. *(1) Беселова*[11] *неједнакост: Нека је $(V, \circ)$ еуклидски или унитарни векторски простор и нека је $S \subseteq V$ његов ортонормирани подскуп. Тада за сваки вектор $v \in V$ важи*

$$\|v\|^2 \geqslant \sum_{s \in S} |v \circ s|^2.$$

(2) Парсевалова[12] *једнакост: Уколико је скуп S додатно и база у претходној неједнакости важи једнакост.*

Уколико је скуп S у претходној теореми бесконачан, то посебно значи и да (бесконачна) сума која се појављује конвергира. Захтев да је S база се може ослабити и тражити само да је скуп S густ.

У случају коначно-димензионалног векторског простора V претходна теорема следи индукцијом из Питагорине теореме (Задатак 11.21.а)). Ако је $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$. ортонормирана база простора и $v \in V$ произвољан вектор, тада су вектори $(v \circ e_i)\, e_i$, за $1 \leqslant i \leqslant n$, међусобно ортогонални, па важи

$$\|v\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|(v \circ e_i)\, e_i\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |v \circ e_i|^2 \, \|e_i\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |v \circ e_i|^2 .$$

Задатак 11.47. *Показати да за сваки полином $p \in \mathbb{R}^3[x]$ важи*

$$p(0)^2 + p'(0)^2 + p(1)^2 \geqslant \frac{3}{2} p'\left(\frac{1}{6}\right)^2 + \frac{p''(0)^2}{12}.$$

Решење. За почетак приметимо да је лева страна тражене неједнакости норма која долази из скаларног производа

$$p \circ q = p(0)q(0) + p'(0)q'(0) + p(1)q(1)$$

[11] *Friedrich Wilhelm Bessel* (1784. – 1846.), немачки математичар, физичар и астроном

[12] *Marc-Antoine Parseval* (1755. – 1836.), француски математичар

на $\mathbb{R}^3[x]$. Ортонормирана база у односу на овај скаларни производ је

$$e = \left\{ e_1(x) = \frac{\sqrt{2}}{2},\, e_2(x) = -\frac{\sqrt{6}}{6} + \frac{\sqrt{6}}{3}x,\, e_3(x) = -\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{3}\,x^2 \right\},$$

што смо видели у Задатку 11.32.

Уколико применимо Беселову неједнакост на произвољан полином $p(x) = a + bx + cx^2 \in \mathbb{R}^3[x]$ добијамо

$$\|p\|^2 \geqslant \sum_{i \in I} |p \circ e_i|^2\,,$$

где је I подскуп од $\{1, 2, 3\}$ који ћемо накнадно изабрати. Имамо скаларне производе

$$\begin{aligned}
p \circ e_1 =& a\frac{\sqrt{2}}{2} + (a+b+c)\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}a + \frac{\sqrt{2}}{2}b + \frac{\sqrt{2}}{2}c,\\
p \circ e_2 =& -a\frac{\sqrt{6}}{6} + b\frac{\sqrt{6}}{3} + (a+b+c)\frac{\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{2}b + \frac{\sqrt{6}}{6}c = \frac{\sqrt{6}}{2}p'\left(\frac{1}{6}\right),\\
p \circ e_3 =& -a\frac{\sqrt{3}}{3} - b\frac{\sqrt{3}}{3} + (a+b+c)\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}c = \frac{\sqrt{3}}{6}p''(0).
\end{aligned}$$

Сада је јасно да треба применити Беселову неједнакост на векторе e_2 и e_3, добијамо

$$p(0)^2 + p'(0)^2 + p(1)^2 = \|p\|^2 \geqslant |p \circ e_2|^2 + |p \circ e_3|^2 = \frac{3}{2}p'\left(\frac{1}{6}\right)^2 + \frac{p''(0)^2}{12}.$$

□

Сада ћемо показати једну занимљиву примену Парсевалове једнакости. Циљ је израчунати ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Кренућемо од функције $f(x) = x$. Ова функција (тј. њена рестрикција) припада еуклидском векторском простору $\mathcal{C}[-\pi, \pi]$ са скаларним производом $f \circ g = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)\,dt$. У Задатку 11.28 смо видели да је скуп

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos(mx), \sin(nx) \;\middle|\; m, n \in \mathbb{N} \right\}$$

ортонормиран и рекли смо да је тај скуп густ у $\mathcal{C}[-\pi, \pi]$.

Парсевалова једнакост даје

$$\|x\|^2 = \left| x \circ \frac{\sqrt{2}}{2} \right|^2 + \sum_{m=1}^{\infty} |x \circ \cos(mx)|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |x \circ \cos(nx)|^2, \tag{11.48}$$

где је

$$x \circ \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{t\sqrt{2}}{2} dt = 0$$

и

$$x \circ \cos(mx) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \cos(mt)\, dt = 0$$

као интеграли непарне функције на симетричном интервалу, а парцијалном интеграцијом добијамо

$$\begin{aligned} x \circ \sin(nx) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \sin(nt)\, dt = -\frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t\, d(\cos(nt)) \\ &= -\frac{t\cos(nt)}{n\pi}\bigg|_{t=-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt)\, dt = -\frac{2\cos(n\pi)}{n} = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}. \end{aligned}$$

Овим Парсевалова једнакост (11.48) постаје

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \right|^2 = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

те је

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4}\|x\|^2 = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt = \frac{t^3}{12\pi}\bigg|_{t=-\pi}^{\pi} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Аналогно, уколико применимо Парсевалову једнакост на функцију $f(x) = x^2$ можемо добити

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Глава 12

Дуални простор еуклидског и унитарног векторског простора

О дуалним просторима смо већ причали. Међутим, уколико је векторски простор V еуклидски (унитарни) ситуација постаје знатно једноставнија. За сваки фиксиран вектор $v \in V$ имамо по један линеарни фукнционал $L \in V^*$ задат са $Lu = u \circ v$, за све $u \in V$. Пресликавање L ћемо означити са v^* и рећи да је линеарни функционал v^* *дуални вектор* вектора v. Напомињемо да овде имамо дуални вектор сваког вектора, за разлику од произвољног (нееуклидског) простора где смо имали само дуалну базу базе (Дефиниција 10.3). Наредна теорема каже да су ово уједно и сви линеарни функционали на V.

Теорема 12.1. *Нека је $(V, \circ)$ еуклидски или унитарни векторски простор. Тада је пресликавање $V \longrightarrow V^*$, $v \mapsto v^*$, за све $v \in V$, изоморфизам векторских простора V и V^*.*

Уколико је $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ ортонормирана база векторског простора V, тада је $e_i^* e_j = e_j \circ e_i = \begin{cases} 1, & \text{за } i = j, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$ што значи да ће тада $e^* = \{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$ бити дуална база базе e (у смислу Дефиниције 10.3). Наглашавамо да ово важи само за ортонормирану базу.

Задатак 12.2. *Нека је $L(x, y, z) = 3x + 4y - 3z$ линеарни функционал векторског простора $\mathbb{R}^3$. Одредити вектор $v \in \mathbb{R}^3$ за који је $L = v^*$.*

Решење. Ако је $v = (\alpha, \beta, \gamma)$, за неке $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, функционал v^* је дат са

$$v^*(x, y, z) = (x, y, z) \circ v = (x, y, z) \circ (\alpha, \beta, \gamma) = \alpha x + \beta y + \gamma z.$$

Тражимо да ово буде једнако $L(x, y, z) = 3x + 4y - 3z$, за све $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Јасно је да мора бити $\alpha = 3$, $\beta = 4$ и $\gamma = -3$, тј. $v = (3, 4, -3)$. $\square$

Задатак 12.3. *Одредити матрицу* $A \in M_2(\mathbb{C})$ *за коју је* $\mathrm{Tr} = A^*$.

Решење. Ако је $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, за неке $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$, функционал A^* је дат са

$$\begin{aligned} A^* \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} &= \left\langle \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \right\rangle = \mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\alpha} & \overline{\gamma} \\ \overline{\beta} & \overline{\delta} \end{pmatrix} \right) \\ &= \overline{\alpha} x + \overline{\beta} y + \overline{\gamma} z + \overline{\delta} t. \end{aligned}$$

Тражимо да ово буде једнако $\mathrm{Tr} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = x + t$, за све $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Јасно је да мора бити $\alpha = \delta = 1$, $\beta = \gamma = 0$, тј. $A = E$.

Штавише, овде смо и без рачуна могли да приметимо да је $\mathrm{Tr}\, X = \mathrm{Tr}\left(X \overline{E}^T \right) = \langle X, E \rangle = E^* X$, за све $X \in M_2(\mathbb{R})$. $\square$

Задатак 12.4. *Скаларни производ на* $\mathbb{R}^3[x]$ *је задат са* $f \circ g = \int\limits_{-1}^{1} f(t) g(t)\, dt$. *Одредити полином* $p \in \mathbb{R}^3[x]$ *за који је* $L = p^*$, *ако је*

а) $Lq = \int\limits_{-1}^{1} q(t)\, dt$,

б) $Lq = q(0)$,

в) $Lq = q'(0)$,

г) $Lq = \int\limits_{0}^{1} q(t)\, dt$.

Решење. а) Овде је очигледно да је $Lq = q \circ 1$, за све $q \in \mathbb{R}^3[x]$ тј. $L = 1^*$.

б) Тражимо полином $p(x) = a + bx + cx^2$ такав да је

$$\begin{aligned} p^* \left(\alpha + \beta x + \gamma x^2 \right) &= \left(\alpha + \beta x + \gamma x^2 \right) \circ \left(a + bx + cx^2 \right) \\ &= \int\limits_{-1}^{1} \left(\alpha + \beta t + \gamma t^2 \right) \left(a + bt + ct^2 \right)\, dt \\ &= \left(2a + \frac{2}{3} c \right) \alpha + \frac{2}{3} b \beta + \left(\frac{2}{3} a + \frac{2}{5} c \right) \gamma \end{aligned}$$

једнако $L\left(\alpha + \beta x + \gamma x^2 \right) = \alpha$, за све $\alpha + \beta x + \gamma x^2 \in \mathbb{R}^3[x]$, тј. за све $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. То нас доводи до система

$$\begin{array}{ccccccc} 2a & & & + & \frac{2}{3}c & = & 1 \\ & & \frac{2}{3}b & & & = & 0 \\ \frac{2}{3}a & & & + & \frac{2}{5}c & = & 0 \end{array}$$

чија су решења $b=0$, $a=\frac{9}{8}$ и $c=-\frac{15}{8}$. Тражени полином је $p(x)=\frac{9}{8}-\frac{15}{8}x^2$.

в) На исти начин као у б) добијамо да је $L=\left(\frac{3}{2}x\right)^*$.

г) Интеграл $\int\limits_0^1$ није скаларни производ (тј. јесте неки скаларни производ али није онај са којим у овом примеру радимо) и не можемо применити трик из дела а), већ ћемо радити као у б). Пошто је $L\left(\alpha+\beta x+\gamma x^2\right)=\alpha+\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{3}$ овде ћемо добити систем

$$\begin{array}{cccccc} 2a & & + & \frac{2}{3}c & = & 1 \\ & \frac{2}{3}b & & & = & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3}a & & + & \frac{2}{5}c & = & \frac{1}{3} \end{array}$$

чије је решење $b=\frac{3}{4}$, $a=\frac{1}{2}$ и $c=0$. Следи, $L=\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}x\right)^*$. $\square$

Задатак 12.5. *Нека је V еуклидски векторски простор из Задатка 11.14. За линеарни функционал $\Phi\in V^*$, $\Phi(a)=a_0$ одредити низ $x\in V$ за који је $\Phi=x^*$.*

Решење. Пошто тражимо да важи $a\circ x=a_0x_0+a_1x_1+a_2x_2=a_0$, за све $a\in U$, јасно је да мора бити $x_0=1$, $x_1=0$ и $x_2=0$ (јер прва три члана низа из V могу бити произвољни). Сада треба одредити вектор $x\in V$ који задовољава поменуте почетне услове. Можемо га записати у облику $\alpha+\beta(-1)^n+\gamma 2^n$, за неке $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ (што смо видели у Задатку 11.14). То нас доводи до система

$$\begin{array}{ccccccccc} x_0 & = & \alpha & + & \beta & + & \gamma & = & 1 \\ x_1 & = & \alpha & - & \beta & + & 2\gamma & = & 0 \\ x_2 & = & \alpha & + & \beta & + & 4\gamma & = & 0 \end{array}$$

чије је решење $\gamma=-\frac{1}{3}$, $\alpha=1$ и $\beta=\frac{1}{3}$. Дакле, $x_n=1+\frac{(-1)^n-2^n}{3}$, за све $n\in\mathbb{N}$. $\square$

Анихилатор векторског потпростора $U\leqslant V$ смо дефинисали као скуп свих линеарних функционала $L\in V^*$ чија је рестрикција на потпростор U једнака нула-функционалу. Али уколико је V еуклидски или унитарни простор сваки функционал $L\in V^*$ се може видети као $L=v^*$ за неки вектор $v\in V$, па анихилатор од U постаје

$$\begin{aligned} \{L\in V^*\mid (\forall u\in U)\,Lu=0\} &= \{v^*\mid v\in V,\,(\forall u\in U)\,v^*u=0\} \\ &= \{v^*\mid v\in V\,(\forall u\in U)\,u\circ v=0\} \\ &= \{v^*\mid v\in V(\forall u\in U)\,u\perp v\}=\left\{v^*\mid v\in U^\perp\right\}, \end{aligned}$$

где у последњем реду $U^\perp$ означава ортогоналну допуну од U. Дакле, анихилатор је дуални скуп ортогоналне допуне (другим речима изоморфни су), па не чуди иста ознака $U^\perp$.

На пример, у Задатку 11.36 смо видели да је ортогонална допуна векторског потпростора $U = \mathscr{L}(1,2,3,4) \leqslant \mathbb{R}^4$ једнака

$$U^\perp = \mathscr{L}((-2,1,0,0),(-3,0,1,0),(-4,0,0,1)).$$

То значи да је анихилатор

$$U^\perp = \mathscr{L}\left((-2,1,0,0)^*,(-3,0,1,0)^*,(-4,0,0,1)^*\right).$$

(Лако се може проверити да линеарно независни функционали $(-2,1,0,0)^*(a,b,c,d) = -2a+b$, $(-3,0,1,0)^*(a,b,c,d) = -3a+c$ и $(-4,0,0,1)^*(a,b,c,d) = -4a+d$ сликају потпростор U у нулу, и њихов број је једнак $\dim\mathbb{R}^4 - \dim U = 3$, што је димензија анихилатора.)

Слично, према Задатку 11.37 ортогонална допуна векторског потпростора $U = \mathscr{L}\left(1-2x+3x^2+x^3, 3-5x+6x^2\right) \subseteq \mathbb{R}^4[x]$ је

$$U^\perp = \mathscr{L}\left(7+5x+x^2, 13+9x+x^3\right).$$

Зато ће анихилатор бити

$$U^\perp = \mathscr{L}\left(\left(7+5x+x^2\right)^*, \left(13+9x+x^3\right)^*\right),$$

где је

$$\begin{aligned}
\left(7+5x+x^2\right)^*\left(a+bx+cx^2+dx^3\right) &= 7a+5b+\frac{1}{6}\int_0^1 (2c+6dt)\cdot 2\,dt \\
&= 7a+5b+\frac{2c}{3}+d, \\
\left(13+9x+x^3\right)^*\left(a+bx+cx^2+dx^3\right) &= 13a+9b+\frac{1}{6}\int_0^1 (2c+6d)\cdot 6t\,dt \\
&= 13a+9b+c+2d.
\end{aligned}$$

12.1 Адјунговани оператори и адјунговане матрице

Теорема 12.6. *Нека је $(V,\circ)$ еуклидски или унитарни векторски простор и $L : V \longrightarrow V$ линеарни оператор. Постоји јединствени линеарни оператор $G : V \longrightarrow V$ такав да важи $(Lu)\circ v = u\circ(Gv)$, за све $u, v \in V$.*

Дефиниција 12.7. *Линеарни оператор G из претходне теореме зовемо адјунговани оператор оператора L и означавамо са L^*.*

Адјунговани оператор је суштински исто што и транспоновани оператор. Једина разлика је што је адјунговани оператор L^* дефинисан на самом простору V, а транспоновани оператор L^T на дуалном простору V^*. Али простори V и V^* су изоморфни, и приликом тог изоморфизма адјунговани оператор ,,прелази" у транспоновани. Прецизније, из

$$u \circ (L^* v) = (Lu) \circ v = v^*(Lu) = \left(L^T v^*\right) u,$$

за све $u \in V$, следи да је вектор $L^T v^* \in V^*$ дуални вектор вектора $L^* v \in V$.

Дефиниција 12.8. *Нека је A реална или комплексна матрица. Матрицу $\overline{A}^T = \overline{A^T}$ зовемо адјунгована матрица матрице A и означавамо је са A^*.*

Специјално, за реалну матрицу A је $A^* = A^T$. У овим ознакама стандардни скаларни (ермитски) производ на скупу реалних (комплексних) матрица постаје $A \circ B = \mathrm{Tr}\,(AB^*)$. Ову матрицу не треба мешати са матрицом $\mathrm{adj}(A)$ коју смо исто звали адјунгована. Везу адјунгованог оператора и адјунговане матрице даје следећа теорема.

Теорема 12.9. *Нека је $(V, \circ)$ еуклидски или унитарни векторски простор са ортонормираном базом e и нека је $L : V \longrightarrow V$ линеарни оператор. Тада је $[L^*]_e = [L]_e{}^*$.*

С обзиром да смо знали да је $\left[L^T\right]_e = [L]_e^T$ претходно тврђење је потпуно очекивано. Забуну можда једино уноси комплексно конјуговање у случају унитарних простора. Оно долази из чињенице да смо дуални вектор v^* поистовећивали са ермитским производом $\langle \cdot, v\rangle$ који је антисиметричан.

Задатак 12.10. *Одредити адјунговани оператор линеарног оператора*

а) $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $L(x, y, z) = (2x - 2y + z, y - z, x + 2y)$,

б) $L : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3$, $L(x, y, z) = (ix + 2y + z, x + 4iy, y + (-1 + i)z)$, при чему $\mathbb{C}^3$ посматрамо као комплексни векторски простор,

в) $L : \mathbb{R}^3[x] \longrightarrow \mathbb{R}^3[x]$, $Lp = p + p'$, ако је скаларни производ на $\mathbb{R}^3[x]$ задат са $p \circ q = p(0)q(0) + p'(0)q'(0) + p(1)q(1)$.

Решење. а) За адјунговани оператор L^* треба да важи $(L(a, b, c)) \circ (x, y, z) = (a, b, c) \circ (L^*(x, y, z))$, за све $(a, b, c), (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Када распишемо овај скаларни производ имаћемо

$$\begin{aligned}(L(a, b, c)) \circ (x, y, z) &= (2a - 2b + c, b - c, a + 2b) \circ (x, y, z)\\ &= (2a - 2b + c)x + (b - c)y + (a + 2b)z\\ &= a(2x + z) + b(-2x + y + 2z) + c(x - y)\\ &= (a, b, c) \circ (2x + z, -2x + y + 2z, x - y).\end{aligned}$$

Одавде и из Теореме 12.6 лако закључујемо да је

$$L^*(x, y, z) = (2x + z, -2x + y + 2z, x - y).$$

Други начин би био да гледамо матрице оператора L и L^* у канонској бази e векторског простора $\mathbb{R}^3$. Видимо да је $[L]_e = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. То значи да је матрица адјунгованог оператора

$$[L^*]_e = [L]_e{}^* = [L]_e{}^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Одатле можемо прочитати да је $L^*(x,y,z) = (2x+z, -2x+y+2z, x-y)$.

б) За адјунговани оператор L^* треба да важи $\langle L(a,b,c),(x,y,z)\rangle = \langle (a,b,c), L^*(x,y,z)\rangle$, за све $(a,b,c),(x,y,z) \in \mathbb{C}^3$. Када распишемо овај ермитски производ имаћемо

$$\begin{aligned}
\langle L(a,b,c)),(x,y,z)\rangle &= \langle (ia+2b+c, a+4ib, b+(-1+i)c),(x,y,z)\rangle \\
&= (ia+2b+c)\overline{x} + (a+4ib)\overline{y} + (b+(-1+i)c)\overline{z} \\
&= a\,(i\overline{x}+\overline{y}) + b\,(2\overline{x}+4i\overline{y}+\overline{z}) + c\,(\overline{x}+(-1+i)\overline{z}) \\
&= a\overline{(-ix+y)} + b\overline{(2x-4iy+z)} + c\overline{(x+(-1-i)z)} \\
&= \langle (a,b,c),(-ix+y, 2x-4iy+z, x+(-1-i)z)\rangle.
\end{aligned}$$

Одавде закључујемо да је $L^*(x,y,z) = (-ix+y, 2x-4iy+z, x+(-1-i)z)$.

Други начин би био да гледамо матрице оператора L и L^* у канонској бази e векторског простора $\mathbb{C}^3$. Видимо да је $[L]_e = \begin{pmatrix} i & 2 & 1 \\ 1 & 4i & 0 \\ 0 & 1 & -1+i \end{pmatrix}$. То значи да је матрица адјунгованог оператора

$$[L^*]_e = [L]_e{}^* = \overline{[L]_e}^T = \begin{pmatrix} -i & 1 & 0 \\ 2 & -4i & 1 \\ 1 & 0 & -1-i \end{pmatrix}.$$

Следи, $L^*(x,y,z) = (-ix+y, 2x-4iy+z, x+(-1-i)z)$.

в) И још једном ћемо поновити исти поступак, али са мало чуднијим скаларним производом који ће закомпликовати рачун. Биће једноставније да скаларни производ запишемо као

$$\left(\alpha+\beta x+\gamma x^2\right)\circ\left(a+bx+cx^2\right) = \alpha a + \beta b + (\alpha+\beta+\gamma)(a+b+c).$$

За адјунговани оператор L^* треба да важи

$$\left(L\left(\alpha+\beta x+\gamma x^2\right)\right)\circ\left(a+bx+cx^2\right) = \left(\alpha+\beta x+\gamma x^2\right)\circ\left(L^*\left(a+bx+cx^2\right)\right),$$

за све $\alpha+\beta x+\gamma x^2, a+bx+cx^2 \in \mathbb{R}^3[x]$. Када распишемо овај скаларни производ добијамо

$$\begin{aligned}&\left(L\left(\alpha+\beta x+\gamma x^2\right)\right)\circ\left(a+bx+cx^2\right)\\&=\left((\alpha+\beta)+(\beta+2\gamma)x+\gamma x^2\right)\circ\left(a+bx+cx^2\right)\\&=(\alpha+\beta)a+(\beta+2\gamma)b+(\alpha+2\beta+3\gamma)(a+b+c).\end{aligned}$$

Преостаје да последњи израз на наместимо на $\left(\alpha+\beta x+\gamma x^2\right)\circ\ldots$. То ћемо урадити на следећи начин:

$$\begin{aligned}&\left(L\left(\alpha+\beta x+\gamma x^2\right)\right)\circ\left(a+bx+cx^2\right)\\&=\alpha(2a+b+c)+\beta(3a+3b+2c)+\gamma(3a+5b+3c)\\&=\alpha(-a-4b-2c)+\beta(-2b-c)+(\alpha+\beta+\gamma)(3a+5b+3c)\\&=\alpha(-a-4b-2c)+\beta(-2b-c)\\&\quad+(\alpha+\beta+\gamma)((-a-4b-2c)+(-2b-c)+(4a+11b+6c))\\&=\left(\alpha+\beta x+\gamma x^2\right)\circ\left((-a-4b-2c)+(-2b-c)x+(4a+11b+6c)x^2\right).\end{aligned}$$

Одавде закључујемо да је

$$L^*\left(a+bx+cx^2\right)=(-a-4b-2c)+(-2b-c)x+(4a+11b+6c)x^2.$$

Други начин би био да гледамо матрице оператора L и L^*. Канонска база векторског простора $\mathbb{R}^3[x]$ није ортонормирана у односу на овај скаларни производ, па је морамо прво ортонормирати (Грам-Шмитовим поступком) да бисмо могли да применимо Теорему 12.9. То смо већ урадили у Задатку 11.32 и добили смо ортонормирану базу

$$e=\left\{e_1(x)=\frac{\sqrt{2}}{2},\, e_2(x)=-\frac{\sqrt{6}}{6}+\frac{\sqrt{6}}{3}x,\, e_3(x)=-\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}x+\sqrt{3}\,x^2\right\}.$$

Оператор L слика базне векторе у

$$\begin{aligned}Le_1&=e_1+e_1'=e_1,\\\left(Le_2\right)(x)&=e_2(x)+\frac{\sqrt{6}}{3}=e_2(x)+\frac{2\sqrt{3}}{3}e_1(x),\\\left(Le_3\right)(x)&=e_3(x)-\frac{\sqrt{3}}{3}+2\sqrt{3}\,x=e_3(x)+3\sqrt{2}\,e_2(x)+\frac{2\sqrt{3}}{3}\\&=e_3(x)+3\sqrt{2}\,e_2(x)+\frac{2\sqrt{6}}{3}e_1(x).\end{aligned}$$

То значи да је $[L]_e=\begin{pmatrix}1&\frac{2\sqrt{3}}{3}&\frac{2\sqrt{6}}{3}\\0&1&3\sqrt{2}\\0&0&1\end{pmatrix}$ што даље повлачи $\left[L^*\right]_e=[L]_e{}^*=[L]_e{}^T=\begin{pmatrix}1&0&0\\\frac{2\sqrt{3}}{3}&1&0\\\frac{2\sqrt{6}}{3}&3\sqrt{2}&1\end{pmatrix}$. Из матрице можемо прочитати да је

$$
\begin{aligned}
&L^*\left(a+bx+cx^2\right)\\
&= L^*\left(\left(a+\frac{c}{3}\right)+\left(b+\frac{c}{3}\right)x+\frac{\sqrt{3}}{3}ce_3(x)\right)\\
&= L^*\left(\left(a+\frac{b}{2}+\frac{c}{2}\right)+\left(\frac{\sqrt{6}}{2}b+\frac{\sqrt{6}}{6}c\right)e_2(x)+\frac{\sqrt{3}}{3}ce_3(x)\right)\\
&= L^*\left(\left(\sqrt{2}\,a+\frac{\sqrt{2}}{2}b+\frac{\sqrt{2}}{2}c\right)e_1(x)+\left(\frac{\sqrt{6}}{2}b+\frac{\sqrt{6}}{6}c\right)e_2(x)+\frac{\sqrt{3}}{3}ce_3(x)\right)\\
&= \left(\sqrt{2}\,a+\frac{\sqrt{2}}{2}b+\frac{\sqrt{2}}{2}c\right)(L^*e_1)(x)+\left(\frac{\sqrt{6}}{2}b+\frac{\sqrt{6}}{6}c\right)(L^*e_2)(x)\\
&\quad+\frac{\sqrt{3}}{3}c\,(L^*e_3)(x)\\
&= \left(\sqrt{2}\,a+\frac{\sqrt{2}}{2}b+\frac{\sqrt{2}}{2}c\right)\left(e_1(x)+\frac{2\sqrt{3}}{3}e_2(x)+\frac{2\sqrt{6}}{3}e_3(x)\right)\\
&\quad+\left(\frac{\sqrt{6}}{2}b+\frac{\sqrt{6}}{6}c\right)\left(e_2(x)+3\sqrt{2}e_3(x)\right)+\frac{\sqrt{3}}{3}ce_3(x)\\
&= \left(\sqrt{2}\,a+\frac{\sqrt{2}}{2}b+\frac{\sqrt{2}}{2}c\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+2\sqrt{2}\,x^2\right)\\
&\quad+\left(\frac{\sqrt{6}}{2}b+\frac{\sqrt{6}}{6}c\right)\left(-\frac{7\sqrt{6}}{6}-\frac{2\sqrt{6}}{3}x+3\sqrt{6}\,x^2\right)\\
&\quad+\frac{\sqrt{3}}{3}c\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}x+\sqrt{3}\,x^2\right)\\
&= (-a-4b-2c)+(-2b-c)x+(4a+11b+6c).
\end{aligned}
$$

□

12.2 Нормални оператори и нормалне матрице

Дефиниција 12.11. *Кажемо да је (реална или комплексна) матрица A нормална ако комутира са адјунгованом матрицом A^*, тј. ако важи $AA^* = A^*A$.*

Примери нормалних матрица су:

(1) *симетричне* матрице – то су матрице $A \in M_n(\mathbb{R})$ за које је $A^* = A$,

(2) *ермитске* (*самоадјунговане*) матрице – то су матрице $A \in M_n(\mathbb{C})$ за које је $A^* = A$,

(3) *ортогоналне матрице* – то су инвертибилне матрице $A \in M_n(\mathbb{R})$ за које је $A^* = A^{-1}$,

(4) *унитарне матрице* – то су инвертибилне матрице $A \in M_n(\mathbb{C})$ за које је $A^* = A^{-1}$.

Тривијално, свака симетрична матрица је и ермитска, а свака ортогонална матрица је и унитарна.

Аналогно се дефинишу и нормални оператори, симетрични оператори, итд. на еуклидском (унитарном) простору. Јасно је да је линеарни оператор нормалан (симетричан, ермитски, итд.) ако и само је његова матрица у произвољној ортонормираној бази нормална (симетрична, ермитска, итд.).

За произвољан вектор $v \in V$ и нормалан оператор $L : V \longrightarrow V$ на еуклидском (унитарном) простору V важи

$$\begin{aligned}\|L^*v\| &= \sqrt{(L^*v) \circ (L^*v)} = \sqrt{v \circ ((L^{**}L^*)\, v)} = \sqrt{v \circ ((LL^*)\, v)} \\ &= \sqrt{v \circ ((L^*L)\, v)} = \sqrt{(Lv) \circ (Lv)} = \|Lv\|,\end{aligned}$$

тј. вектори L^*v и Lv имају исту норму. Наравно, аналогно важи и за нормалне матрице. Наредна теорема даје још неке занимљиве особине неких нормалних матрица.

Теорема 12.12. *Матрица $A \in M_n(\mathbb{R})$ ($A \in M_n(\mathbb{C})$) је ортогонална (унитарна) ако и само ако колоне матрице A чине ортонормиран скуп ако и само ако врсте матрице A чине ортонормиран скуп. Додатно, ако је матрица A ортогонална (унитарна), тада важи*

(1) $|\det A| = 1$,

(2) $\|Av\| = \|v\|$, *за све* $v \in \mathbb{R}^n$ ($v \in \mathbb{C}^n$), *тј. множење матрицом A је изометрија,*

(3) Све сопствене вредности матрице A су модула 1. Специјално, све сопствене вредности ортогоналне матрице ± 1.

Задатак 12.13. *Која од следећих матрица је ермитска (унитарна)?*

а) $A = \begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ 1-i & 1+i \end{pmatrix}$,

б) $B = \begin{pmatrix} 0 & 2+i & 1 \\ 2-i & i & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, *в)* $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{6}}{6}(-1+i) & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3}(1-i) \\ \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$.

Решење. а) Матрица A није ермитска јер $A^* = \begin{pmatrix} 1-i & 1+i \\ 1+i & 1-i \end{pmatrix} \neq A$. Ова матрица није ни унитарна јер је

$$\|A_{1\downarrow}\| = \left\| \begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{|1+i|^2 + |1-i|^2} = 2 \neq 1.$$

Друго образложење би било: није унитарна јер је $AA^* = 4E$.

Овде је занимљиво да је матрица A симетрична (у смислу $A^T = A$), али није ермитска.

б) Матрица B није ермитска јер $B^* = \begin{pmatrix} 0 & 2+i & 1 \\ 2-i & -i & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq B$, а није ни унитарна јер је $\|B_{1\downarrow}\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 2-i \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{|0|^2 + |2-i|^2 + |1|^2} = \sqrt{6} \neq 1$.

в) Матрица C очигледно није ермитска, проверимо да ли њене колоне чине ортонормиран скуп:

$$\begin{aligned}
\|C_{1\downarrow}\| &= \sqrt{|0|^2 + \left|\frac{\sqrt{6}}{6}(-1+i)\right|^2 + \left|\frac{\sqrt{6}}{3}\right|^2} = 1, \\
\|C_{2\downarrow}\| &= \sqrt{|1|^2 + |0|^2 + |0|^2} = 1, \\
\|C_{3\downarrow}\| &= \sqrt{|0|^2 + \left|\frac{\sqrt{3}}{3}(1-i)\right|^2 + \left|\frac{\sqrt{3}}{3}\right|^2} = 1, \\
\langle C_{1\downarrow}, C_{2\downarrow}\rangle &= 0 \cdot 1 + \frac{\sqrt{6}}{6}(-1+i) \cdot 0 + \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot 0 = 0, \\
\langle C_{1\downarrow}, C_{3\downarrow}\rangle &= 0 \cdot 0 + \frac{\sqrt{6}}{6}(-1+i) \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}(1+i) + \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 0, \\
\langle C_{2\downarrow}, C_{3\downarrow}\rangle &= 1 \cdot 0 + 0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}(1+i) + 0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 0.
\end{aligned}$$

Дакле, матрица C је унитарна. $\square$

Задатак 12.14. *У зависности од реалних параметара α и β испитати да ли је матрица* $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta & \sin\alpha\cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ -\cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$ *симетрична (ортогонална)?*

Решење. Матрица A је симетрична ако и само ако је $A = A^T$ тј. $-\sin\alpha = \sin\alpha\cos\beta$, $-\cos\alpha\sin\beta = \sin\beta$ и $-\sin\alpha\sin\beta = 0$. Другим речима, матрица A је симетрична ако и само ако је

(1) $\alpha \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}$ и β произвољно или

(2) $\beta \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}$ и α произвољно или

(3) $\alpha, \beta \in 2\pi\mathbb{Z}$.

Са друге стране, матрица A ће бити ортогонална за све $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ јер је

$$\begin{aligned}
\|A_{1\downarrow}\| &= \sqrt{(\cos\alpha\cos\beta)^2 + (-\sin\alpha)^2 + (-\cos\alpha\sin\beta)^2} \\
&= \sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = 1, \\
\|A_{2\downarrow}\| &= \sqrt{(\sin\alpha\cos\beta)^2 + \cos^2\alpha + (-\sin\alpha\sin\beta)^2} = \sqrt{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha} = 1, \\
\|A_{3\downarrow}\| &= \sqrt{\sin^2\beta + 0^2 + \cos^2\beta} = 1, \\
A_{1\downarrow} \circ A_{2\downarrow} &= \cos\alpha\sin\alpha\cos^2\beta - \cos\alpha\sin\alpha + \cos\alpha\sin\alpha\sin^2\beta \\
&= \cos\alpha\sin\alpha - \cos\alpha\sin\alpha = 0, \\
A_{1\downarrow} \circ A_{3\downarrow} &= \cos\alpha\cos\beta\sin\beta + 0 - \cos\alpha\cos\beta\sin\beta = 0, \\
A_{2\downarrow} \circ A_{3\downarrow} &= \sin\alpha\cos\beta\sin\beta + 0 - \sin\alpha\cos\beta\sin\beta = 0.
\end{aligned}$$

□

Задатак 12.15. *Нека је* $n \in \mathbb{N}$ *и* $\zeta = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$ *(тзв.* n*-ти корен из јединице). Показати да је матрица*

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\zeta}{\sqrt{n}} & \frac{\zeta^2}{\sqrt{n}} & \frac{\zeta^3}{\sqrt{n}} & \cdots & \frac{\zeta^n}{\sqrt{n}} \\ \frac{\zeta^2}{\sqrt{n}} & \frac{\zeta^4}{\sqrt{n}} & \frac{\zeta^6}{\sqrt{n}} & \cdots & \frac{\zeta^{2n}}{\sqrt{n}} \\ \frac{\zeta^3}{\sqrt{n}} & \frac{\zeta^6}{\sqrt{n}} & \frac{\zeta^9}{\sqrt{n}} & \cdots & \frac{\zeta^{3n}}{\sqrt{n}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\zeta^n}{\sqrt{n}} & \frac{\zeta^{2n}}{\sqrt{n}} & \frac{\zeta^{3n}}{\sqrt{n}} & \cdots & \frac{\zeta^{n^2}}{\sqrt{n}} \end{pmatrix}$$

унитарна.

Решење. Прво, приметимо да је $|\zeta| = \sqrt{\cos^2\frac{2\pi}{n} + \sin^2\frac{2\pi}{n}} = 1$, што повлачи $\overline{\zeta} = \frac{|\zeta|^2}{\zeta} = \frac{1}{\zeta}$. Норма k-те колоне је

$$\|A_{k\downarrow}\| = \left\| \begin{pmatrix} \frac{\zeta^k}{\sqrt{n}} \\ \frac{\zeta^{2k}}{\sqrt{n}} \\ \frac{\zeta^{3k}}{\sqrt{n}} \\ \vdots \\ \frac{\zeta^{nk}}{\sqrt{n}} \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\zeta^{jk}}{\sqrt{n}} \right|^2} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} |\zeta|^{2jk}} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} 1} = 1.$$

Слично, скаларни производ две различите колоне је

$$\langle A_{k\downarrow}, A_{l\downarrow}\rangle = \sum_{j=1}^{n} \frac{\zeta^{jk}}{\sqrt{n}} \frac{\overline{\zeta}^{jl}}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \zeta^{j(k-l)} = \frac{\zeta^{k-l}}{n}\frac{\zeta^{n(k-l)}-1}{\zeta^{k-l}-1},$$

где смо у последњем кораку користили формулу за суму геомтријског низа. Притом је $\zeta^n = \cos\left(n\cdot\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(n\cdot\frac{2\pi}{n}\right) = 1$, што повлачи $\langle A_{k\downarrow}, A_{l\downarrow}\rangle = 0$. $\square$

Задатак 12.16. *Одредити све ортогоналне* 4×4 *матрице чије су прве две колоне редом*

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad и \qquad \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{6} \\ -\frac{\sqrt{3}}{6} \\ -\frac{\sqrt{3}}{6} \end{pmatrix}.$$

Решење. Нека су $A_{1\downarrow} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ и $A_{2\downarrow} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{6} \\ -\frac{\sqrt{3}}{6} \\ -\frac{\sqrt{3}}{6} \end{pmatrix}$ две познате колоне и нека су $A_{3\downarrow} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ и $A_{4\downarrow} = \begin{pmatrix} e \\ f \\ g \\ h \end{pmatrix}$ две непознате колоне, за неке $a, b, c, d, e, f, g, h \in \mathbb{R}$.

Релације ортогоналности дају

$$A_{1\downarrow} \circ A_{3\downarrow} = \frac{a+b+c+d}{2} = 0,$$

$$A_{2\downarrow} \circ A_{3\downarrow} = \frac{\sqrt{3}}{6}(3a-b-c-d) = 0,$$

одакле можемо закључити да је $a = 0$ и $d = -b-c$. Затим, услов нормираности

$$\|A_{3\downarrow}\|^2 = 0^2 + b^2 + c^2 + (-b-c)^2 = 2b^2 + 2c^2 - 2bc = 1$$

можемо записати у облику $(2b-c)^2 + 3c^2 = 2$, односно

$$\left(\sqrt{2}b - \frac{\sqrt{2}}{2}c\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{2}c\right)^2 = 1.$$

То значи да је $\left|\sqrt{2}b - \frac{\sqrt{2}}{2}c\right|, \left|\frac{\sqrt{6}}{2}c\right| \leqslant 1$, па можемо увести смену $\sqrt{2}b - \frac{\sqrt{2}}{2}c = \sin\alpha$, $\frac{\sqrt{6}}{2}c = \cos\alpha$, за неко $\alpha \in [0, 2\pi)$. Тада је

$$c = \frac{\sqrt{6}}{3}\cos\alpha, \quad b = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha - \frac{\sqrt{6}}{6}\cos\alpha \quad и \quad d = -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha - \frac{\sqrt{6}}{6}\cos\alpha,$$

па трећа колона постаје $A_{3\downarrow} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha - \frac{\sqrt{6}}{6}\cos\alpha \\ \frac{\sqrt{6}}{3}\cos\alpha \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha - \frac{\sqrt{6}}{6}\cos\alpha \end{pmatrix}$. Слично, последња колона ће бити једанака $A_{4\downarrow} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\beta - \frac{\sqrt{6}}{6}\cos\beta \\ \frac{\sqrt{6}}{3}\cos\beta \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\beta - \frac{\sqrt{6}}{6}\cos\beta \end{pmatrix}$, за неко $\beta \in [0, 2\pi)$.

Једини преостали захтев је ортогоналност последње две колоне:

$$\begin{aligned}
&A_{3\downarrow} \circ A_{4\downarrow} \\
&= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha - \frac{\sqrt{6}}{6}\cos\alpha\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\beta - \frac{\sqrt{6}}{6}\cos\beta\right) + \frac{\sqrt{6}}{3}\cos\alpha \cdot \frac{\sqrt{6}}{3}\cos\beta \\
&\quad + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha - \frac{\sqrt{6}}{6}\cos\alpha\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\beta - \frac{\sqrt{6}}{6}\cos\beta\right) \\
&= \sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha - \beta) = 0.
\end{aligned}$$

Одатле закључујемо да је или $\beta - \alpha \in \left\{\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}\right\}$, односно $\sin\beta = \pm\cos\alpha$ и $\cos\beta = \mp\sin\alpha$.

Све заједно, тражене матрице су облика

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha - \frac{\sqrt{6}}{6}\cos\alpha & \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha \pm \frac{\sqrt{6}}{6}\sin\alpha \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{3}\cos\alpha & \mp\frac{\sqrt{6}}{3}\cos\alpha \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha - \frac{\sqrt{6}}{6}\cos\alpha & \mp\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha \pm \frac{\sqrt{6}}{6}\cos\alpha \end{pmatrix}, \tag{12.17}$$

где је $\alpha \in [0, 2\pi)$ произвољно.

Сада ћемо приказати још један начин за решавање овог задатка. Као што смо већ рекли, две тражене колоне морају припадати потпростору

$$U = \mathscr{L}\left(f_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right).$$

Грам–Шмитовим поступком можемо направити ортогоналну базу овог простора која се састоји од вектора

$$\widehat{e}_1 = f_1 \qquad \text{и} \qquad \widehat{e}_2 = f_2 - \frac{f_2 \circ \widehat{e}_1}{\|\widehat{e}_1\|^2}\widehat{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

као и ортонормирану базу састављену од вектора

$$e_1 = \frac{1}{\|\widehat{e}_1\|}\widehat{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \qquad \text{и} \qquad e_2 = \frac{1}{\|\widehat{e}_2\|}\widehat{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix}.$$

Сада ћемо две непознате колоне тражити преко координата у ортонормираној бази $e = \{e_1, e_2\}$:

$$A_{3\downarrow} = ae_1 + be_2 \qquad \text{и} \qquad A_{4\downarrow} = ce_1 + de_2,$$

за неке $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Из нормираности и Питагорине теореме (Задатак 11.21.а)) следи да је

$$\begin{aligned} \|A_{3\downarrow}\|^2 &= a^2\,\|e_1\|^2 + b^2\,\|e_1\|^2 = a^2 + b^2 = 1 \\ \|A_{4\downarrow}\|^2 &= c^2 + d^2 = 1, \end{aligned}$$

одакле опет закључујемо да је $a = \sin\alpha$, $b = \cos\alpha$, $c = \sin\beta$ и $d = \cos\beta$, за неке $\alpha, \beta \in [0, 2\pi)$. На крају, ортогоналност даје

$$\begin{aligned} A_{3\downarrow} \circ A_{4\downarrow} &= (\sin\alpha e_1 + \cos\alpha e_2)\,(\sin\beta e_1 + \cos\beta e_2) \\ &= \sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha - \beta) = 0, \end{aligned}$$

што ће опет дати $c = \sin\beta = \pm\cos\alpha = \pm a$ и $d = \cos\beta = \mp\sin\alpha = \mp b$, односно решење (12.17). $\square$

Претходни задатак има занимљиву геометријску интерпретацију будући да је потпростор U изоморфан са $\mathbb{R}^2$ (јер је димензије 2). Ако је $e = \{e_1, e_2\}$ једна ортонормирана база потпростора U овим смо показали да су све ортонормиране базе U дате са $\{g_1, g_2\}$ или $\{g_1, -g_2\}$, где је

$$g_1 = \sin\alpha e_1 + \cos\alpha e_2 \qquad \text{и} \qquad g_2 = \cos\alpha e_1 - \sin\alpha e_2.$$

Геометријски гледано, трансформација $(e_2, e_1) \mapsto (g_1, g_2)$ представља ротацију око координатног почетка за угао $-\alpha$ према Задатку 5.16.в). Евентуална промена знака на другој координати је симетрија око праве која садржи вектор g_1 (тј. праве кроз координатни почетак) по Задатку 5.16.б). Другим речима, произвољна ортонормирана база се добија од базе e или ротацијом или композицијом симетрије и ротације. Са друге стране, из елементарне геометрије је познато да је свака изометрија равни (која фиксира координатни почетак) једнака једној од поменутих трансформација.

Задатак 12.18. *Показати да је линеарни оператор*

$$L : \mathbb{R}^3[x] \longrightarrow \mathbb{R}^3[x], \qquad Lp = p(1)f - 3p,$$

где је $f(x) = 1 + x + x^2$, *симетричан. Да ли је овај оператор ортогоналан?*

Решење. Из

$$L\left(a + bx + cx^2\right) = (-2a + b + c) + (a - 2b + c)x + (a + b - 2c)x^2$$

и

$$\begin{aligned} &\left(L\left(a + bx + cx^2\right)\right) \circ \left(\alpha + \beta x + \gamma x^2\right) \\ &= (-2a + b + c)\alpha + (a - 2b + c)\beta + (a + b - 2c)\gamma \\ &= a(-2\alpha + \beta + \gamma) + b(\alpha - 2\beta + \gamma) + c(\alpha + \beta - 2\gamma) \\ &= \left(a + bx + cx^2\right) \circ \left((-2\alpha + \beta + \gamma) + (\alpha - 2\beta + \gamma)x + (\alpha + \beta - 2\gamma)x^2\right) \end{aligned}$$

(на $\mathbb{R}^3[x]$ подразумевамо стандардни скаларни производ) следи да је адјунговани оператор оператора L дат са

$$L^*\left(\alpha + \beta x + \gamma x^2\right) = (-2\alpha + \beta + \gamma) + (\alpha - 2\beta + \gamma)x + (\alpha + \beta - 2\gamma)x^2,$$

за све $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Сада видимо оператор су оператори L и L^* једнаки, што значи да је оператор L симетричан.

Са друге стране, оператор L неће бити ортогоналан јер композиција

$$\begin{aligned} &(L^* \circ L)\left(a + bx + cx^2\right) \\ &= L^*\left((-2a + b + c) + (a - 2b + c)x + (a + b - 2c)x^2\right) \\ &= (6a - 3b - 3c) + (-3a + 6b - 3c)x + (-3a - 3b + 6c)x^2 \end{aligned}$$

није идентитет.

Исти закључак смо могли извести и уколико приметимо да матрица $[L]_e = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ оператора L у канонској бази e (која је ортонормирана у односу на стандардни скаларни производ на $\mathbb{R}^3[x]$) јесте симетрична али није ортогонална. $\square$

Глава 13

Спектрална теорема

Теорема 13.1 (Спектрална теорема за реалне матрице)**.** *Нека је A симетрична матрица. Тада постоји дијагонална матрица D и ортогонална матрица P такве да је $A = PDP^T$.*

Специјално, ово значи да је свака симетрична матрица дијагоналног типа јер је $P^T = P^{-1}$. Другим речима, оваква ортогонална дијагонализација је специјални случај стандардне дијагонализације $A = PDP^{-1}$. Матрица P и даље није јединствено одређена.

Назив претходне теореме потиче од назива спектар који се користи за скуп свих сопствених вредности једне матрице (оператора).

Важи и обрнуто, свака матрица A облика $A = PDP^T$ (где је D дијагонална, а P ортогонална матрица) је симетрична јер је $A^T = \left(PDP^T\right)^T = P^{TT}D^TP^T = PDP^T = A$.

Спектрална теорема не даје одговор како одредити поменуте матрице D и P. У томе ће нам помоћи познати поступак дијагонализације, Грам–Шмитов поступак и наредно тврђење.

Теорема 13.2. *Сопствени потпростори симетричне матрице су међусобно ортогонални.*

Задатак 13.3. *Дата је матрица $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Одредити бар по једну ортогоналну матрицу P и дијагоналну матрицу D такве да важи $A = PDP^T$.*

Решење. Одредимо најпре сопствене потпросторе на уобичајени начин. Карактеристични полином матрице A је

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 & 3 \\ 3 & 2-\lambda & 3 \\ 3 & 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8-\lambda & 3 & 3 \\ 8-\lambda & 2-\lambda & 3 \\ 8-\lambda & 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} /(-1)$$

$$= \begin{vmatrix} 8-\lambda & 3 & 3 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-8)(\lambda+1)^2.$$

Сопствени вектори за сопствену вредност 8 су решења система

$$\begin{array}{rcrcrcll} -6x & + & 3y & + & 3z & = & 0 & /:3 \quad /(-1) \quad /\cdot 2 \\ 3x & - & 6y & + & 3z & = & 0 & /:3 \\ 3x & + & 3y & - & 6z & = & 0 & /:3 \\ \hline -2x & + & y & + & z & = & 0 & \\ 3x & - & 3y & & & = & 0 & \\ \cancel{-3x} & \cancel{+} & \cancel{3y} & & & \cancel{=} & \cancel{0} & \\ \hline \end{array}$$

Дакле, $y = x = z$, што даље значи да је $\operatorname{Ker}(A-8E) = \mathscr{L}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Изаберимо нормиран сопствени вектор $f_1 \in \operatorname{Ker}(A-8E)$, нпр. $e_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$.

Слично, сопствени вектори за сопствену вредност -1 су решења једначине $3x+3y+3z=0$, тј. $\operatorname{Ker}(A+E) = \mathscr{L}(f_2, f_3)$, где је $f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ и $f_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Сада треба изабрати два базна вектора $\operatorname{Ker}(A+E)$. Изабраћемо их тако да чине ортонормирану базу поменутог простора. Тачније, добићемо их Грам–Шмитовим поступком од базе $\{f_2, f_3\}$:

$$\hat{e}_2 = f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \hat{e}_3 = f_3 - \frac{f_3 \circ \hat{e}_2}{\|\hat{e}_2\|^2}\hat{e}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$e_2 = \frac{1}{\|\hat{e}_2\|}\hat{e}_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \qquad \text{и} \qquad e_3 = \frac{1}{\|\hat{e}_3\|}\hat{e}_3 = \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix}.$$

Тада је $A = PDP^{-1}$, где је

$$D = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{и} \qquad P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix}.$$

Додатно, према конструкцији је $\|e_i\| = 1$, за $i = 1, 2, 3$, и $e_2 \perp e_3$, а Теорема 13.2 гарантује да је $e_1 \perp e_2$ и $e_1 \perp e_3$. То значи да је матрица P ортогонална и онда из $P^{-1} = P^* = P^T$ следи да је $A = PDP^T$. $\square$

Сада одавде можемо лако израчунати $A^n = PD^nP^T$, $A^{-1} = PD^{-1}P^T$, итд.

Задатак 13.4. *Дата је матрица* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$. *Одредити бар по једну ортогоналну матрицу P и дијагоналну матрицу D такве да важи $A = PDP^T$.*

Решење. Карактеристични полином матрице A је

$$A = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 2 & 4-\lambda & 6 \\ 3 & 6 & 9-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2\lambda & 3\lambda \\ 2 & -\lambda & 0 \\ 3 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$/(-2)$

$/(-3)$

$$= \lambda^2 \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ /\cdot 2 \\ /\cdot 3 \end{matrix} = \lambda^2 \begin{vmatrix} 14-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda^2(\lambda - 14).$$

Сопствени потпростори су $\operatorname{Ker}(A - 14E) = \mathscr{L}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \mathscr{L}(e_1)$, где је

$e_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{14}}{14} \\ \frac{\sqrt{14}}{7} \\ \frac{3\sqrt{14}}{14} \end{pmatrix}$, и $\operatorname{Ker} A = \mathscr{L}(f_2, f_3)$, где је $f_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $f_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Базу $\operatorname{Ker} A$ ћемо ортонормирати Грам–Шмитовим поступком:

$$\hat{e_2} = f_2, \qquad e_2 = \frac{1}{\|\hat{e_2}\|}\hat{e_2} = \begin{pmatrix} -\frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{e_3} = f_3 - \frac{f_3 \circ \hat{e_2}}{\|\hat{e_2}\|^2}\hat{e_2} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ -\frac{6}{5} \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{и} \qquad e_3 = \frac{1}{\|\hat{e_3}\|}\hat{e_3} = \begin{pmatrix} -\frac{3\sqrt{70}}{70} \\ -\frac{3\sqrt{70}}{35} \\ \frac{\sqrt{70}}{14} \end{pmatrix}.$$

Следи, $A = PDP^{-1}$, где је

$$D = \begin{pmatrix} 14 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{и} \qquad P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{14}}{14} & -\frac{2\sqrt{5}}{5} & -\frac{3\sqrt{70}}{70} \\ \frac{\sqrt{14}}{7} & \frac{\sqrt{5}}{5} & -\frac{3\sqrt{70}}{35} \\ \frac{3\sqrt{14}}{14} & 0 & \frac{\sqrt{70}}{14} \end{pmatrix}.$$

Слично као у претходном задатку, према конструкцији је $\|e_i\| = 1$, за $i = 1, 2, 3$, и $e_2 \perp e_3$, а Теорема 13.2 каже да је $e_1 \perp e_2$ и $e_1 \perp e_3$. Дакле, матрица P је ортогонална и онда из $P^{-1} = P^* = P^T$ следи да је $A = PDP^T$. $\square$

Теорема 13.5 (Спектрална теорема за комплексне матрице)**.** *Нека је $A \in M_n(\mathbb{C})$ нормална матрица. Тада постоји дијагонална матрица D и унитарна матрица P такве да је $A = PDP^*$.*

Кључна разлика у односу на реални случај јесте да сада имамо спектралну теорему за све нормалне матрице (не само за ермитске). Са друге стране, поступак који смо користили у претходна два задатка се може пренети на комплексни случај само у случају ермитских матрица (само за њих важи аналог Теореме 13.2, тј. сопствени потпростори су им међусобно ортогонални).

Задатак 13.6. *Дата је матрица $A = \begin{pmatrix} 0 & 2+i \\ 2-i & 4 \end{pmatrix}$. Одредити бар по једну унитарну матрицу P и дијагоналну матрицу D такве да важи $A = PDP^*$.*

Решење. Карактеристични полином матрице A је

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 2+i \\ 2-i & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda - 5 = (\lambda - 5)(\lambda + 1).$$

Сопствени вектори за сопствену вредност 5 су решења система

$$\begin{array}{rcrcll} 5x & + & (2+i)y & = & 0 & /(-2-i) \\ (2-i)x & - & y & = & 0 & \hookleftarrow \\ \hline (2-i)x & - & y & = & 0 & \\ & & \cancel{0} & \cancel{=} & \cancel{0} & \\ \hline \end{array}$$

Дакле, $\mathrm{Ker}(A - 5E) = \mathscr{L}\begin{pmatrix} 1 \\ 2-i \end{pmatrix} = \mathscr{L}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{6}(2-i) \end{pmatrix}$. На исти начин добијамо и $\mathrm{Ker}(A + E) = \mathscr{L}\begin{pmatrix} -2-i \\ 1 \end{pmatrix} = \mathscr{L}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6}(-2-i) \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix}$.

Знамо да је $A = PDP^{-1}$, где је

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{и} \qquad P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6}(-2-i) \\ \frac{\sqrt{6}}{6}(2-i) & \frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix}.$$

Додатно, колоне матрице P су нормиране (према конструкцији) и ортогоналне (као сопствени вектори који одговарају различитим сопственим вредностима). То значи да је матрица P унитарна и онда из $P^{-1} = P^*$ следи да је $A = PDP^*$. $\square$

Матрица A из претходног задатка има реалне сопствене вредности. То није случајност, свака ермитска (комплексна) матрица мора имати све реалне сопствене вредности. Тачније, из $A = PDP^*$ (где је A ермитска, D дијагонална, а P унитарна матрица) следи $D = P^{-1}A\left(P^*\right)^{-1} = P^*AP$. Тада је

$$\overline{D} = D^* = \left(P^*AP\right)^* = P^*A^*P^{**} = P^*AP = D,$$

што значи да су сви коефицијенти матрице D (специјално, и све сопсвене вредности матрице A) реални. Такође, због $A^* = A$, матрица A има искључиво реалне коефицијенте на дијагонали.

13.1 Дијагонализација квадратних форми

Као што смо већ рекли, реалну квадратну форму

$$q\left(x_1, \ldots, x_n\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2 + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_{ij} x_i x_j,$$

можемо матрично представити као $q(x) = x^T A x$, где је

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \text{и} \qquad A = \begin{pmatrix} a_1 & \frac{a_{12}}{2} & \frac{a_{13}}{2} & \ldots & \frac{a_{1n}}{2} \\ \frac{a_{12}}{2} & a_2 & \frac{a_{23}}{2} & \ldots & \frac{a_{2n}}{2} \\ \frac{a_{13}}{2} & \frac{a_{23}}{2} & a_3 & \ldots & \frac{a_{3n}}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{a_{1n}}{2} & \frac{a_{2n}}{2} & \frac{a_{3n}}{2} & \ldots & a_n \end{pmatrix}.$$

Додатно, како је матрица A симетрична постојаће ортогонална матрица P и дијагонална матрица D такве да је $A = PDP^T$. Следи, $q(x) = x^T PDP^T x = \left(P^T x\right)^T D \left(P^T x\right)$. Након смене $y = P^T x$ наша квадратна форма q постаје $q(y) = y^T D y$, тј.

$$q\left(y_1, \ldots, y_n\right) = \sum_{i=1}^{n} d_i y_i^2, \tag{13.7}$$

где су $d_i \in \mathbb{R}$ коефицијенти са дијагонале матрице D тј. сопствене вредности матрице A. Израз (13.7) зовемо *канонски дијагонални* облик квадратне форме q.

Нека је e канонска база векторског простора $\mathbb{R}^n$ и f ортонормирана база истог простора састављена од колона матрице P. Тада је P матрица преласка са базе e на базу f, а $[x]_e = x$ и $[x]_f = P^{-1}[x]_e = P^T x = y$.

Израз (13.7), поред тога што представља дијагонални облик, има још један додатни квалитет – квадратна форма q је тим обликом представљена у ортонормираној бази. Префикс канонски користимо да бисмо разликовали тај дијагонални облик од осталих дијагоналних облика квадратне форме q, нпр. оних које смо добијали Лагранжевим поступком или дијагоналних облика

$$(4d_1)\left(\frac{y_1}{2}\right)^2 + \sum_{i=2}^{n} d_i y_i^2 \qquad \text{или} \qquad \sum_{i=1}^{n} (\operatorname{sgn} d_i)\left(\sqrt{|d_i|}y_i\right)^2.$$

Задатак 13.8. *Нека је*

$$q : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad q(x_1, x_2) = 8x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2.$$

Одредити канонски дијагонални облик квадратне форме q, као и бар једну ортонормирану базу $\mathbb{R}^2$ у којој q има тај облик и сигнатуру форме q.

Решење. Квадратну форму q можемо записати као $q(x) = x^T A x$, где је $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ и $A = \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$. Карактеристични полином матрице A је

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 8-\lambda & -2 \\ -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 13\lambda + 36 = (\lambda-4)(\lambda-9).$$

Сопствени потпростори су $\operatorname{Ker}(A-9E) = \left\{ \begin{pmatrix} -2\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha \in \mathbb{R} \right\} = \mathscr{L}(e_1)$ и $\operatorname{Ker}(A-4E) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ 2\alpha \end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha \in \mathbb{R} \right\} = \mathscr{L}(e_2)$, где је $e_1 = \frac{\sqrt{5}}{5}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ и $e_2 = \frac{\sqrt{5}}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. То даље значи да је $A = PDP^T$, где је $D = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ и $P = \frac{\sqrt{5}}{5}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Дакле, сменом $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = P^T x = \frac{\sqrt{5}}{5}\begin{pmatrix} -2x_1 + x_2 \\ x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}$ долазимо до дијагоналног облика квадратне форме $q(y_1, y_2) = 9y_1^2 + 4y_2^2$. База у којој форма q има овај облик је $\{e_1, e_2\}$.

Квадратна форма q се може записати и као $q(y_1, y_2) = (3y_1)^2 + (2y_2)^2$, што значи да је сигнатура ове квадратне форме једнака $(2, 0, 0)$. $\square$

Задатак 13.9. *Нека је*

$$q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + 9x_3^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 12x_2x_3.$$

Одредити канонски дијагонални облик квадратне форме q, као и бар једну ортонормирану базу $\mathbb{R}^3$ у којој q има тај облик и сигнатуру форме q.

Решење. Квадратну форму q можемо записати као $q(x) = x^T A x$, где је $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ и $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$. Овом матрицом смо се већ бавили у Задатку 13.4 и видели да је $A = PDP^T$, где је

$$D = \begin{pmatrix} 14 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{и} \qquad P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{14}}{14} & -\frac{2\sqrt{5}}{5} & -\frac{3\sqrt{70}}{70} \\ \frac{\sqrt{14}}{7} & \frac{\sqrt{5}}{5} & -\frac{3\sqrt{70}}{35} \\ \frac{3\sqrt{14}}{14} & 0 & \frac{\sqrt{70}}{14} \end{pmatrix}.$$

Сменом $y = P^T x$ долазимо до дијагоналног облика квадратне форме $q(y_1, y_2, y_3) = 14y_1^2$. База у којој q има овај облик је $\left\{ \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{14}}{14} \\ \frac{\sqrt{14}}{7} \\ \frac{3\sqrt{14}}{14} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{3\sqrt{70}}{70} \\ -\frac{3\sqrt{70}}{35} \\ \frac{\sqrt{70}}{14} \end{pmatrix} \right\}$. Сигнатура ове квадратне форме је $(1, 0, 2)$. □

13.2 Сингуларна декомпозиција

Као што смо већ рекли, декомпозиција матрице A на $A = PDP^*$ је могућа једино за нормалне матрице A (односно, симетричне матрице A у реалном случају). Следећа теорема даје једну слабију декомпозицију која ће бити примењиве на све матрице.

Теорема 13.10. *Нека је A реална (комплексна) квадратна матрица. Постоје дијагонална матрица D са свим ненегативним вредностима на дијагонали и ортогоналне (унитарне) матрице P и Q такве да је $A = PDQ^*$.*

У претходној теореми и надаље кад кажемо ненегативан број мислимо и реалан и ненегативан.

Задатак 13.11. *Нека је* $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. *Одредити бар по једну дијагоналну матрицу D и ортогоналне матрице P и Q такве да важи $A = PDQ^T$.*

Решење. Кључна идеја је применити ортогоналну декомпозицију (Спектралну теорему) на симетричну матрицу

$$B = AA^T = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Заправо, и без израчунавања бисмо требали да знамо да је матрица B симетрична јер је $B^T = \left(AA^T\right) = A^{TT}A^T = AA^T = B$. Уколико важи $A = PDQ^T$, јасно је да ће бити

$$B = AA^T = PDQ^T \left(PDQ^T\right)^T = PD \underbrace{Q^T Q^{TT}}_{=Q^TQ=E} \underbrace{D^T}_{=D} P^T = PD^2P^T. \quad (13.12)$$

Симетричну матрицу B можемо записати као $B = P'D'P'^T$, где је матрица D' дијагонална, а матрица P' ортогонална. То специјално значи да тражена матрица P може бити P', а да D можемо добити као решење једначине $D^2 = D'$.

Карактеристични полином матрице B је

$$\chi_B(\lambda) = -\lambda^3 + 13\lambda^2 - 36\lambda = -\lambda(\lambda-4)(\lambda-9).$$

Затим, сопствени потпростори ове матрице су

$$\mathrm{Ker}(B-9E) = \mathscr{L}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathscr{L}\begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{Ker}(B-4E) = \mathscr{L}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathscr{L}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} \\ -\frac{2\sqrt{5}}{5} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{Ker}\, B = \mathscr{L}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Следи, $P = P' = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} & 0 \\ \frac{\sqrt{5}}{5} & -\frac{2\sqrt{5}}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $D^2 = D' = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, односно $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Преостаје још да одредимо ортогоналну матрицу Q. Тражимо да важи

$A = PDQ^T$, што повлачи $DQ^T = P^{-1}A = P^TA$, односно кад транспонујемо

$$\begin{aligned} QD &= \left(D^TQ^T\right)^T = \left(DQ^T\right)^T = \left(P^TA\right)^T = A^TP^{TT} = A^TP \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} & 0 \\ \frac{\sqrt{5}}{5} & -\frac{2\sqrt{5}}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} & 0 \\ \sqrt{5} & 0 & 0 \\ -\frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{4\sqrt{5}}{5} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Уколико би матрица D била инвертибилна (али није) могли бисмо да одредимо Q као $Q = D^{-1}A^TP$. Уместо тога сетимо се како се множи дијагоналном матрицом са десне стране. Имали бисмо да је

$$QD = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a & 2b & 0 \\ 3d & 2e & 0 \\ 3g & 2h & 0 \end{pmatrix}.$$

Сада је јасно да је $Q = \begin{pmatrix} \frac{4\sqrt{5}}{15} & \frac{\sqrt{5}}{5} & c \\ \frac{\sqrt{5}}{3} & 0 & f \\ -\frac{2\sqrt{5}}{15} & \frac{2\sqrt{5}}{5} & i \end{pmatrix}$. Последњу колону можемо одредити из услова да је ортогонална на прве две и да је нормирана, односно

$$\begin{aligned} Q_{1\downarrow} \circ Q_{3\downarrow} &= \frac{4\sqrt{5}}{15}c + \frac{\sqrt{5}}{3}f - \frac{2\sqrt{5}}{15}i = 0, \\ Q_{2\downarrow} \circ Q_{3\downarrow} &= \frac{\sqrt{5}}{5}c + \frac{2\sqrt{5}}{5}i = 0, \\ \|Q_{3\downarrow}\| &= \sqrt{c^2+f^2+i^2} = 1. \end{aligned} \tag{13.13}$$

Након решавања система добићемо $Q_{3\downarrow} = \pm \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$. Можемо изабрати нпр. $Q = \begin{pmatrix} \frac{4\sqrt{5}}{15} & \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2}{3} \\ \frac{\sqrt{5}}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2\sqrt{5}}{15} & \frac{2\sqrt{5}}{5} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Лако се може проверити да је матрица Q заиста ортонормирана. Са друге стране, и претходно извођење то гарантује. Из $QD = A^TP$ следи да је

$$\begin{aligned} (QD)^TQD &= D^TQ^TQD \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \|Q_{1\downarrow}\|^2 & Q_{1\downarrow} \circ Q_{2\downarrow} & Q_{1\downarrow} \circ Q_{3\downarrow} \\ Q_{1\downarrow} \circ Q_{2\downarrow} & \|Q_{2\downarrow}\|^2 & Q_{2\downarrow} \circ Q_{3\downarrow} \\ Q_{1\downarrow} \circ Q_{3\downarrow} & Q_{2\downarrow} \circ Q_{3\downarrow} & \|Q_{3\downarrow}\|^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 9\|Q_{1\downarrow}\|^2 & 6Q_{1\downarrow} \circ Q_{2\downarrow} & 0 \\ 6Q_{1\downarrow} \circ Q_{2\downarrow} & 4\|Q_{2\downarrow}\|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

једнако

$$\begin{aligned}\left(A^TP\right)^T A^TP &= P^TAA^TP = P^TBP = P^TP'D'P'^TP\\ &= P^TPD^2P^TP = D^2 = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Одавде закључујемо да је $\|Q_{1\downarrow}\| = \|Q_{2\downarrow}\| = 1$ и $Q_{1\downarrow}\perp Q_{2\downarrow}$, што уз (13.13) управо значи да је матрица Q ортогонална. $\square$

Наравно, решење претходног задатка није јединствено. Поред тога што ортогонална декомпозиција матрице B није јединствена, могли смо и уместо са матрицом B урадити све исто (слично) са матрицом $C = A^TA$ која је такође симетрична. Једино што је јединствено је матрица D (до на пермутацију дијагоналних коефицијената) уколико претпоставимо да су сви њени коефицијенти ненегативни (као у Теореми 13.10). У супротном и матрица $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ би дала неко (друго) решење.

Дефиниција 13.14. *Нека је A реална (комплексна) квадратна матрица. За ненегативан број λ кажемо да је сингуларна вредност матрице A ако постоје нормирани вектори u и v такви да важи*

$$Av = \lambda u \qquad \text{и} \qquad A^*u = \lambda v.$$

Тада каземо да су u и v лево-сингуларни и десно-сингуларни вектор матрице A за сингуларну вредност λ.

Уколико имамо сингуларну декомпозицију $A = PDQ^*$, сингуларне вредности ће се налазити на дијагонали матрице D, а лево-сингуларни и десно-сингуларни вектори ће бити одговарајуће колоне матрица P и Q редом. На примеру претходног задатка имамо:

(1) сингуларну вредност $\lambda_1 = 3$, и њен лево-сингуларни вектор $u_1 = P_{1\downarrow} = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt5}{5}\\ \frac{\sqrt5}{5}\\ 0\end{pmatrix}$ и десно-сингуларни вектор $v_1 = Q_{1\downarrow} = \begin{pmatrix} \frac{4\sqrt5}{15}\\ \frac{\sqrt5}{3}\\ -\frac{2\sqrt5}{15}\end{pmatrix}$,

(2) сингуларну вредност $\lambda_2 = 2$, и њен лево-сингуларни вектор $u_2 = P_{2\downarrow} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt5}{5}\\ -\frac{2\sqrt5}{5}\\ 0\end{pmatrix}$ и десно-сингуларни вектор

$$v_2 = Q_{2\downarrow} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} \\ 0 \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix},$$

(3) сингуларну вредност $\lambda_3 = 0$, и њен лево-сингуларни вектор $u_3 = P_{3\downarrow} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ и десно-сингуларни вектор $v_3 = Q_{3\downarrow} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Није тешко проверити да за поменуте сингуларне векторе важи

$$Av_1 = 3u_1, \qquad A^T u_1 = 3v_1, \qquad Av_2 = 2u_2, \qquad A^T u_2 = 2v_2,$$
$$Av_3 = \mathbb{O} = 0 \cdot u_3, \qquad \text{и} \qquad A^T u_3 = \mathbb{O} = 0 \cdot v_3.$$

Сингуларне вредноси и лево-сингуларни и десно-сингуларни вектори објашњавају зашто је Теорема 13.10 формулисана баш на овај начин. Наиме, могли смо матрицу Q заменити матрицом $S = Q^*$ и рећи: За сваку реалну (комплексну) квадратну матрицу A постоје дијагонална матрица D са свим ненегативним вредностима на дијагонали и ортогоналне (унитарне) матрице P и S такве да је $A = PDS$. Ипак, определили смо се за формулацију која стоји у Теореми 13.10 јер се у матрицама P и Q лепо виде лево-сингуларни и десно-сингуларни вектори.

Приметимо да изложени поступак ради за произвољну матрицу A, не само за квадратну. Разлог је што је матрица AA^T увек квадратна, чак и када матрица A то није. Наредни пример даје сингуларну декомпозицију произвољне (неквадратне) матрице. Једина разлика је што тада не можемо тражити да је матрица D дијагонална, већ ће бити исте димензије као и почетна матрица A.

Задатак 13.15. *Нека је* $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. *Одредити бар по једну матрицу D која има нуле ван главне дијагонале и ортогоналне матрице P и Q такве да важи $A = PDQ^T$.*

Решење. Опет ћемо радити са симетричном матрицом

$$B = AA^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Њен карактеристични полином је $\chi_B(\lambda) = \lambda^2 - 10\lambda + 9 = (\lambda - 1)(\lambda - 9)$, а сопствени потпростори су $\mathrm{Ker}(B - 9E) = \mathscr{L}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathscr{L}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ и $\mathrm{Ker}(B - E) = \mathscr{L}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \mathscr{L}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$.

Тражене матрице ће бити

$$P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \qquad \text{и} \qquad D = \begin{pmatrix} \sqrt{9} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Овде је матрица D исте димензије као и почетна матрица A и има корене сопствених вредности матрице B на дијагонали. Поменуту матрицу D добијамо из услова да је $DD^T = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, као у (13.12), једино што сада D^T није исто што и D.

Преостаје још да одредимо ортогоналну матрицу Q. То ћемо урадити на исти начин као у претходном задатку, само што овде додатно треба пазити да је сада $D^T \neq D$. Из $A = PDQ^T$ следи $DQ^T = P^{-1}A = P^TA$, односно

$$\begin{aligned} QD^T &= \left(D^{TT}Q^T\right)^T = \left(DQ^T\right)^T = \left(P^TA\right)^T = A^TP^{TT} = A^TP \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -2\sqrt{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Да би множење било дефинисано матрица Q мора бити димезије 3×3. Ако је $Q = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ имаћемо

$$QD^T = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a & b \\ 3d & e \\ 3g & h \end{pmatrix}.$$

Следи, $Q = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \dots \\ -\frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 & \dots \\ \frac{\sqrt{2}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \dots \end{pmatrix}$. Последњу колону можемо одредити из услова да је ортогонална на прве две и да је нормирана, добићемо

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

□

Слично се дефинишу и сингуларне вредности и лево-сингуларни и десно-сингуларни вектори за произвољну матрицу. Једина разлика је што ако матрица A није квадратна лево-сингуларни и десно-сингуларни вектори неће бити исте димензије, и неће се налазити у свим колонама матрица P и Q, већ само у првих $\min\{m, n\}$ за матрицу A димензије $m \times n$. На пример, у претходном задатку имамо

(1) сингуларну вредност $\lambda_1 = 3$, и њен лево-сингуларни вектор $u_1 = P_{1\downarrow} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ и десно-сингуларни вектор $v_1 = Q_{1\downarrow} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{6} \\ -\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{6} \end{pmatrix}$,

(2) сингуларну вредност $\lambda_2 = 1$, и њен лево-сингуларни вектор $u_2 = P_{2\downarrow} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ и десно-сингуларни вектор $v_2 = Q_{2\downarrow} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$.

Наглашавамо да вектор $Q_{3\downarrow}$ није десно-сингуларни за матрицу A. Наиме, $AQ_{3\downarrow} = \mathbb{O}$ значи да је $Q_{3\downarrow}$ кандидат за десно-сингуларни вектор који одговара сопственој вредности 0, али лако се проверава да не постоји ненула вектор v такав да важи $A^T v = \mathbb{O} = 0 \cdot Q_{3\downarrow}$.

У претходном задатку смо уместо са матрицом $B = AA^T$ могли радити и са матрицом $C = A^T A$, која је такође симетрична али димензије 3×3. Поред компликованијег рачуна то би довело до још једног проблема. Сопствене вредности матрице C би биле 1 и 9 (што су сопствене вредности матрице B, односно сингуларне вредности матрице A), али бисмо имали и нулу као трећу сопствену вредност матрице C која неће бити сингуларна вредност за матрицу A.

Додатак А

Задаци са испита

У наставку су дати задаци са испита из Линеарне алгебре на Математичком факултету у Београду у периоду од 2017. до 2023. године. Задаци обележени звездицом излазе из оквира претходно изложеног градива.

А.1 Колоквијум 2017.

Задатак А.1. *На скупу полинома $\mathbb{R}^3[x]$ су дефинисане операције*

$$\begin{aligned}\left(a+bx+cx^2\right) \oplus \left(d+ex+fx^2\right) &= ad+bex+cfx^2,\\ \alpha \odot \left(a+bx+cx^2\right) &= \alpha a+bx+cx^2,\end{aligned}$$

за све $\alpha, a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$. Да ли је $\left(\mathbb{R}^3[x], \oplus, \odot\right)$ векторски простор над пољем $\mathbb{R}$?

Задатак А.2. *Дати су потпростори*

$$\begin{aligned}U &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix} \middle|\ a, b, c \in \mathbb{R} \right\},\\ V &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & 0 \\ f & 0 & 0 \end{pmatrix} \middle|\ a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R} \right\}\end{aligned}$$

векторског простора $M_3(\mathbb{R})$. Одредити бар једну базу и димензију потпростора $U+V$ и $U \cap V$. Да ли је сума $U+V$ директна?

Задатак А.3. *Одредити ранг, дефект и бар једну базу језгра и слике линеарног пресликавања*

$$L : \mathbb{R}^4 \longrightarrow M_{23}(\mathbb{R}), \qquad L(x,y,z,t) = \begin{pmatrix} y+2t & 0 & x-y \\ -x+y+t & 2t & x-4t \end{pmatrix}.$$

Задатак А.4. *Дато је линеарно пресликавање*

$$L : \mathbb{R}^4[x] \longrightarrow M_2(\mathbb{R}), \qquad L(p) = \begin{pmatrix} p(0) & p(1) \\ p'(0) & p'(1) \end{pmatrix}.$$

а) Показати да је пресликавање L инвертибилно.

б) Одредити матрице оператора L и L^{-1} у односу на пар канонских база простора $\mathbb{R}^4[x]$ и $M_2(\mathbb{R})$.

в) Колики је ранг матрица из дела под б)?

Задатак А.5. *Матрица линеарног оператора $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ у односу на базу $e_1 = (1,1,-1)$, $e_2 = (1,-1,1)$, $e_3 = (-1,1,1)$ је $\begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}$. Одредити матрицу овог оператора у односу на базу $f_1 = (4,0,2)$, $f_2 = (6,0,2)$, $f_3 = (1,1,3)$.*

Задатак А.6. *Нека су V_1, V_2 и V_3 потпростори векторског простора V, при чему је $V_1 \leqslant V_3$. Показати да важи*

$$V_1 + (V_2 \cap V_3) = (V_1 + V_2) \cap V_3.$$

А.2 Јун 2017.

Задатак А.7. *У зависности од реалног параметра α одредити бар једну базу и димензију векторског потпростора $V \leqslant \mathbb{R}[x]$ генерисаног полиномима*

$$\begin{aligned}
p_1(x) &= (\alpha+1) + \alpha x + \alpha x^2 + \alpha x^3 + \cdots + \alpha x^{n-1}, \\
p_2(x) &= \alpha + \left(\alpha + \frac{1}{2}\right) x + \alpha x^2 + \alpha x^3 + \cdots + \alpha x^{n-1}, \\
p_3(x) &= \alpha + \alpha x + \left(\alpha + \frac{1}{3}\right) x^2 + \alpha x^3 + \cdots + \alpha x^{n-1}, \\
&\vdots \\
p_n(x) &= \alpha + \alpha x + \alpha x^2 + \alpha x^3 + \cdots + \left(\alpha + \frac{1}{n}\right) x^{n-1}.
\end{aligned}$$

Задатак А.8. *Дато је линеарно пресликавање*

$$L : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^2[x], \qquad L\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a+2b+c+d) + (-b+c+d)x.$$

а) Одредити бар по једну базу језгра и слике, као и ранг и дефект пресликавања L.

б) Одредити матрицу пресликавања L *у односу на пар база*

$$e = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{и} \quad f = \{1-x, 1+x\}.$$

Задатак А.9. *Израчунати вредност детерминанте*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & 5 & \dots & n & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-1 & n & n & \dots & n & n & n \\ n & n & n & \dots & n & n & n \end{vmatrix}.$$

Задатак А.10. *а) Ако је* $A = \begin{pmatrix} 0 & -4 & -6 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$, *израчунати* A^{2017}.

б) Решити систем диференцних једначина

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= - 4y_n - 6z_n \\ y_{n+1} &= -x_n - 3z_n \\ z_{n+1} &= x_n + 2y_n + 5z_n \end{aligned}$$

са почетним условима $x_0 = 1$, $y_0 = 3$ *и* $z_0 = -5$.

Задатак А.11. *Дато је пресликавање*

$$\circ : \mathbb{R}^3[x] \times \mathbb{R}^3[x] \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad p \circ q = p(0)q(0) + p'(1)q'(1) + p''(2)q''(2).$$

а) Показати да је $\circ$ *скаларни производ на* $\mathbb{R}^3[x]$.

б) Одредити угао између полинома $p(x) = 1 + x + x^2$ *и потпростора* $U^\perp$, *где је* $U = \{ p \in \mathbb{R}^3[x] \mid p(0) + p'(1) + p''(2) = 0 \}$.

в) Наћи бар једну ортонормирану базу простора $\mathbb{R}^3[x]$ *у односу на овај скаларни производ.*

Задатак А.12. *а) Дата је матрица* $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. *Одредити бар по једну ортогоналну матрицу* P *и дијагоналну матрицу* D *такве да важи* $A = PDP^T$.

б) Дијагонализовати квадратну форму

$$q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \qquad q(x,y,z) = 3x^2 + 6y^2 + 3z^2 - 4xy + 8xz + 4yz.$$

А.3 Јул 2017.

Задатак А.13. *Дати су подскупови* $M_2(\mathbb{R})$*:*

$$\begin{aligned} V_1 &= \{\, A \in M_2(\mathbb{R}) \mid \det A = 0 \,\}\,, \\ V_2 &= \left\{\, A \in M_2(\mathbb{R}) \mid \operatorname{Tr} A = 0, A^T = A \,\right\}, \\ V_3 &= \left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix} \middle|\, a \in \mathbb{R} \right\}, \\ V_4 &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ a+2b & a+3 \end{pmatrix} \middle|\, a, b \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

а) Који од претходних подскупова су векторски потпростори $M_2(\mathbb{R})$*?*

б) Одредити бар једну базу и димензију простора $V_2 \cap V_3$ *и* $V_2 + V_3$*. Да ли је претходна сума директна?*

Задатак А.14. *Нека је* $Lp = (1+x+x^2)p'(-1) - x^2 p'(0)$ *линеарни оператор векторског простора* $\mathbb{R}^3[x]$*.*

а) Одредити бар по једну базу језгра и слике, као и ранг и дефект оператора L*.*

б) Одредити матрицу пресликавања L *у односу на базу* $\left\{1, 1+x, 2+2x+3x^2\right\}$ *простора* $\mathbb{R}^3[x]$*.*

в) Одредити адјунгован оператор оператора L *у односу на скаларни производ* $p \circ q = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)$ *на простору* $\mathbb{R}^3[x]$*.*

Задатак А.15. *У зависности од реалног параметра* x *израчунати вредност детерминанте*

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1! & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x \\ 1 & 2 & 2! & 0 & 0 & \dots & 0 & x^2 \\ 1 & 3 & 3\cdot 2 & 3! & 0 & \dots & 0 & x^3 \\ 1 & 4 & 4\cdot 3 & 4\cdot 3\cdot 2 & 4! & \dots & 0 & x^4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & n-1 & (n-1)(n-2) & (n-1)(n-2)(n-3) & (n-1)(n-2)(n-3)(n-4) & \dots & (n-1)! & x^{n-1} \\ 1 & n & n(n-1) & n(n-1)(n-2) & n(n-1)(n-2)(n-3) & \dots & n(n-1)\dots 2 & x^n \end{vmatrix}.$$

Задатак А.16. *а) Испитати да ли је матрица* $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}$ *дијагоналног типа. Уколико јесте, одредити инвертибилну матрицу* P *такву да је матрица* $P^{-1}AP$ *дијагонална.*

б) Израчунати A^{2017}*.*

Задатак А.17. *а) Показати да је са* $f \circ g = \int\limits_1^2 t f(t) g(t)\, dt$ *дефинисан један скаларни производ на векторском простору* $\mathcal{C}[1,2]$*.*

б) Показати да важи $\left(\int\limits_1^2 f(t)\,dt\right)^2 \leqslant \log 2 \int\limits_1^2 t(f(t))^2\,dt.$

в) Ако је $U = \left\{ p \in \mathbb{R}^3[x] \;\middle|\; p(0) = p''(0) \right\}$*, показати да постоји и израчунати* $\min\limits_{p\in U} \int\limits_1^2 t(p(t)-t)^2\,dt.$

Задатак А.18. *Одредити Жорданову нормалну форму матрице*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

А.4 Септембар 2017.

Задатак А.19. *Испитати да ли је* $(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$ *векторски простор над пољем* $\mathbb{R}$ *ако су операције* $\oplus$ *и* $\odot$ *задате са*

$$(x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2) = \left(\sqrt[7]{x_1^7 + y_1^7}, x_2 + y_2 + 7\right),$$
$$\alpha \odot (x_1, x_2) = \left(\sqrt[7]{\alpha} x_1, \alpha x_2 + 7(\alpha - 1)\right).$$

Задатак А.20. *Дато је линеарно пресликавање*

$$L : \mathbb{R}^4[x] \longrightarrow M_2(\mathbb{R}), \qquad L(p) = \begin{pmatrix} p(1) & p(0) - 2p(1) + p(2) \\ \int\limits_0^1 p''(x)dx & p''\left(\frac{1}{2}\right) \end{pmatrix}$$

а) Одредити бар по једну базу језгра и слике, као и ранг и дефект овог пресликавања.

б) Одредити матрицу пресликавања L *у односу на пар база*

$$e = \left\{3 + 2x, 3 - 2x, 3x^2 + 2x^3, 3x^2 - 2x^3\right\}$$

и

$$f = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Задатак А.21. *Израчунати вредност детерминанте*

$$\begin{vmatrix} \binom{n}{n} & \binom{n}{n-1} & \binom{n}{n-2} & \dots & \binom{n}{0} \\ \binom{n+1}{n} & \binom{n+1}{n-1} & \binom{n+1}{n-2} & \dots & \binom{n+1}{0} \\ \binom{n+2}{n} & \binom{n+2}{n-1} & \binom{n+2}{n-2} & \dots & \binom{n+2}{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{2n}{n} & \binom{2n}{n-1} & \binom{2n}{n-2} & \dots & \binom{2n}{0} \end{vmatrix}.$$

Задатак А.22. *Линеарни оператор* $L : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *у бази* $e = \{(1,2,3),(2,3,4),(3,4,5)\}$ *векторског простора* $\mathbb{R}^3$ *има матрицу* $\begin{pmatrix} -1 & -6 & -3 \\ 3 & 8 & 3 \\ -6 & -12 & -4 \end{pmatrix}$.

а) Наћи бар једну базу у којој овај оператор има дијагоналну матрицу.

б) Наћи матрицу оператора L^{2017}.

Задатак А.23. *Дато је пресликавање*

$$\circ : \mathbb{R}^3[x] \times \mathbb{R}^3[x] \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad p \circ q = p(0)q(0) + p(-1)q(-1) + p(-2)q(-2).$$

а) Показати да је $\circ$ *скаларни производ на* $\mathbb{R}^3[x]$.

б) Одредити бар једну ортонормирану базу потпростора

$$U = \left\{ p \in \mathbb{R}^3[x] \,\middle|\, p(2) - p(1) = p'(1) \right\}$$

у односу на овај скаларни производ.

в) Одредити растојање полинома $p(x) = 2 + 19x + 7x^2$ *од потпростора* $U^{\perp}$.

А.5 Октобар 2017.

Задатак А.24. *Да ли је подскуп* U *потпростор векторског простора* V, *ако је*

а) $V = \mathbb{R}^{[-1,3]}$, $U = \{ f \in V \,|(\forall x \in [-1,1])(1+x)(f(x)+f'(x)) = 2f(1-2x)\}$,

б) $V = \mathbb{R}[x]$, $U = \{p \in V \mid \deg p \neq 1\}$,

в) $V = M_2(\mathbb{R})$, $U = \{A \in V \mid \det A = \operatorname{Tr} A\}$.

Задатак А.25. *Дато је линеарно пресликавање*

$$L : \mathbb{R}^3[x] \longrightarrow \mathbb{R}^4[x], \quad L(p) = p(1)+p(-1)+\left(\int_{-1}^{1} p(t)\,dt\right)x + p'(0)x^2 + 3p''(1)x^3.$$

а) Одредити бар по једну базу језгра и слике, као и ранг и дефект пресликавања L.

б) Одредити матрицу пресликавања L *у односу на пар канонских база.*

в) Одредити потпростор V *векторског простора* $\mathbb{R}^4[x]$ *такав да важи* $\mathbb{R}^4[x] = \operatorname{Im} L \oplus V$.

Задатак А.26. *У зависности од реалног параметра x израчунати вредност детерминанте*

$$\begin{vmatrix} x+1 & x & x & \dots & x \\ x & x+\frac{1}{2} & x & \dots & x \\ x & x & x+\frac{1}{3} & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & x & \dots & x+\frac{1}{n} \end{vmatrix}.$$

Задатак А.27. *Нека је $e = \{a, b, c\}$ ортонормирана база у односу на неки скаларни производ $\circ$ векторског простора $\mathbb{R}^3$. Линеарни оператор $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ задат је са*

$$Lx = (a \circ x)\, a - (c \circ x)\, b - (b \circ x)\, c.$$

а) Показати да је $a - b + c$ сопствени вектор оператора L.

б) Наћи матрицу оператора L у односу на базу e.

в) Одредити матрицу оператора L^n, $n \in \mathbb{N}$, у односу на базу e.

Задатак А.28. *Дато је пресликавање*

$$\circ : M_2(\mathbb{R}) \times M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad A \circ B = \operatorname{Tr}\left(B^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} A \right).$$

а) Показати да је $\circ$ скаларни производ на $M_2(\mathbb{R})$.

б) Одредити бар једну ортонормирану базу потпростора

$$U = \{\, A \in M_2(\mathbb{R}) \mid \operatorname{Tr} A = 0\}$$

у односу на овај скаларни производ.

в) Да ли је матрица $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ближа потпростору U или $U^\perp$?

Задатак А.29. *Нека је $q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ квадратна форма дефинисана са*

$$q(x, y, z) = -2x^2 - 2y^2 - 2z^2 + 2xy + 2xz + 2yz.$$

Одредити канонски дијагонални облик квадратне форме q, као и бар једну ортонормирану базу у којој q има тај облик.

Задатак А.30. *Одредити Жорданову нормалну форму матрице*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & 9 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 7 & 8 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

А.6 Колоквијум 2018.

Задатак А.31. *Решити систем над пољем* $\mathbb{Z}_7$ *у зависности од параметра* $\alpha \in \mathbb{Z}_7$*:*

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 4y & + & z & = & 2 \\ 3x & + & 3y & + & z & = & \alpha \\ 2x & + & (\alpha+6)y & & & = & \alpha^2+2\alpha+5 \end{array}.$$

Задатак А.32. *Да ли је подскуп* U *потпростор векторског простора* V*, ако је:*

а) $V = M_2(\mathbb{R})$, $U = \{X \in V \mid AX = XA, \operatorname{Tr} X = \operatorname{Tr} A\}$, *где је* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$,

б) $V = \mathbb{R}^{12}[x]$, $U = \{p \in V \mid \deg p = 10\} \cup \{\mathbb{O}\}$, *где је* $\mathbb{O}$ *нула-полином,*

в) $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $U = \{f \in V \mid f(0) \neq f(1)\}$.

У случају да је U *векторски потпростор одредити његову базу и димензију.*

Задатак А.33. *Дати су потпростори*

$$U = \{\, p \in \mathbb{R}^3[x] \;\big|\; p'(0) = 0 \,\} \qquad и \qquad V = \{\, p \in \mathbb{R}^4[x] \;\big|\; p(1) = p(-1) \,\}$$

векторског простора $\mathbb{R}^4[x]$.

а) Одредити бар једну базу и димензију векторских простора $U+V$, $U \cap V$, $U^{\perp}$ *и* $V^{\perp}$*. Да ли је сума* $U+V$ *директна?*

б) Одредити бар једну базу и димензију векторских простора* $\mathbb{R}^4[x]/U$ *и* $\mathbb{R}^4[x]/V$.

Задатак А.34. *Дато је пресликавање*

$$L : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow M_2(\mathbb{R}), \qquad LX = X^T A - AX^T + (\operatorname{Tr} X)A,$$

где је $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

а) Показати да је L *линеарни оператор векторског простора* $M_2(\mathbb{R})$.

б) Одредити бар једну базу језгра и слике, као и ранг и дефект овог оператора.

в) Одредити матрицу преласка са базе

$$f = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \right\}$$

на канонску базу векторског простора $M_2(\mathbb{R})$.

г) Одредити матрицу оператора L *у односу на базу* f.

Задатак А.35. *Наћи пар база векторских простора* $\mathbb{R}^4$ *и* $\mathbb{R}^3[x]$ *у односу на које линеарно пресликавање*

$$L : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3[x],$$

$$L(a,b,c,d) = (a+2b-d) + (2a+5b-c+3d)x + (a+4b-2c+9d)x^2$$

има канонску матрицу.

Задатак А.36. *Дато је линеарно пресликавање*

$$L : \mathbb{R}^3[x] \longrightarrow M_2(\mathbb{R}), \qquad Lp = \begin{pmatrix} p(0) & p(1) \\ p'(0) & p'(1) \end{pmatrix}.$$

Одредити матрицу линеарног пресликавања L^T *у односу на пар база* $\pi = \{\pi_{11}, \pi_{12}, \pi_{21}, \mathrm{Tr}\}$, *и* $\phi = \{\phi_1, \phi_2, \phi_3\}$, *где је* $\pi_{ij}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{ij}$, *за* $1 \leqslant i, j \leqslant 2$, $\phi_1 p = p(0)$, $\phi_2 p = p'(0)$ *и* $\phi_3 p = p''(2)$.

А.7 Јун 2018.

Задатак А.37. *а) Да ли је сума*

$$U = \mathscr{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \left\{ M \in M_2(\mathbb{R}) \mid \mathrm{Tr}\, M = 0, M^T = -M \right\}$$

директна? Одредити бар једну базу e *и димензију векторског простора* U.

б) Одредити бар једну базу* f *дуалног простора* U^* *дуалну бази* e.

в) За сваки функционал Φ *из базе* f *одредити вектор* $M \in M_2(\mathbb{R})$ *такав да важи* $\Phi(X) = X \circ M$, *за све* $X \in M_2(\mathbb{R})$, *ако је скаларни производ на* $M_2(\mathbb{R})$ *задат са* $A \circ B = \mathrm{Tr}(AB^T)$.

Задатак А.38. *Дато је линеарно пресликавање*

$$L : \mathbb{R}^3[x] \longrightarrow \mathbb{R}^3, \qquad Lp = (p'(0), p(1), p(-1)).$$

а) Одредити бар по једну базу језгра и слике, као и ранг и дефект пресликавања L.

б) Одредити матрицу пресликавања L *у односу на пар база* $\left\{1-x, 1-x^2, 2-2x+x^2\right\}$ *и* $\{(1,1,3), (3,1,-1), (2,3,7)\}$.

Задатак А.39. *У зависности од реалног параметра* α *израчунати вредност детерминанте*

$$\begin{vmatrix} 2\alpha & \alpha-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & \alpha-1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha & \alpha-1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \alpha \end{vmatrix}.$$

Задатак А.40. *Одредити Жорданову форму матрице*

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 6\\ 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Задатак А.41. *а) Показати да је пресликавање*

$$\circ : \mathbb{R}^3[x]\times\mathbb{R}^3[x]\longrightarrow\mathbb{R},$$

$$p\circ q = p(0)q(0)+p(1)q(1)+2p'(1)q'(1)-p(1)q'(1)-p'(1)q(1)$$

један скаларни производ на векторском простору $\mathbb{R}^3[x]$.

б) Одредити бар једну ортонормирану базу простора $\mathbb{R}^3[x]$.

в) Одредити угао који полином x^2 *заклапа са потпростором* $(\mathscr{L}x)^{\perp}$.

Задатак А.42. *а) Дата је матрица* $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2\\ -2 & 4 & -4\\ 2 & -4 & 4\end{pmatrix}$. *Одредити бар по једну ортогоналну матрицу* P *и дијагоналну матрицу* D *такве да важи* $A=PDP^T$.

б) Дијагонализовати квадратну форму

$$q:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3,\qquad q(x,y,z)=x^2+4y^2+4z^2-4xy+4xz-8yz.$$

А.8 Јул 2018.

Задатак А.43. *У зависности од реалног параметра* λ *решити систем линеарних једначина*

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & \lambda z & = & \lambda^2\\ x & + & \lambda y & + & z & = & \lambda\\ \lambda x & + & y & + & z & = & 1 \end{array}$$

Задатак А.44. *Дато је линеарно пресликавање*

$$L: M_2(R)\longrightarrow\mathbb{R}^3[x],\qquad LM=\operatorname{Tr}M+\operatorname{Tr}(AM)\,x+\operatorname{Tr}(BM)\,x^2,$$

где је $A=\begin{pmatrix} 0 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ *и* $B=\begin{pmatrix} 1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

а) Одредити бар по једну базу језгра и слике, као и ранг и дефект пресликавања L.

б) Одредити матрицу пресликавања L у односу на пар база

$$e = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

и

$$f = \left\{1 + x^2, 1 + 3x + 3x^2, 1 + 2x + 2x^2\right\}.$$

в) Одредити базе e^* и f^*, дуалне базама e и f, редом.

г) Одредити матрицу транспонованог пресликавања L^T у односу на пар база f^* и e^*.

Задатак А.45. *Израчунати вредност детерминанте*

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 & \cdots & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & 3 & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 3 & n-1 & 3 & \cdots & 3 & 3 & 3 \\ n & 3 & 3 & \cdots & 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}.$$

Задатак А.46. *Дат је линеарни оператор*

$$L : \mathbb{R}^3[x] \longrightarrow \mathbb{R}^3[x],$$

$$Lp = \left(4 + 2x + x^2\right) p(0) + \left(1 + 5x + x^2\right) p'(0) + \left(-\frac{1}{2} - x + x^2\right) p''(1).$$

а) Одредити сопствене вредности и сопствене векторе оператора L.

б) Одредити матрицу оператора L^{2018} у канонској бази.

Задатак А.47. *Дата је матрица* $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

а) Показати да је пресликавање

$$\circ : M_2(\mathbb{R}) \times M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad X \circ Y = \mathrm{Tr}(X^T A Y)$$

један скаларни производ на векторском простору $M_2(\mathbb{R})$.

б) Ако је U скуп свих матрица које комутирају са матрицом A одредити бар једну ортонормирану базу $U^\perp$.

в) Одредити растојање матрице $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *од потпростора $U^\perp$.*

Задатак А.48. *Нека је дата квадратна форма q на $\mathbb{R}^3$ на следећи начин:*

$$q(x, y, z) = 2x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 4xy - 4xz - 8yz.$$

а) Одредити бар једну ортонормирану базу f простора $\mathbb{R}^3$ у којој форма q има дијагонални облик.

б) Изразити форму q преко координата у бази f и написати формуле трансформација координата.

А.9 Септембар 2018.

Задатак А.49. *Дати су подскупови* $M_2(\mathbb{R})$*:*

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R} \right\},$$
$$V_2 = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid \operatorname{Tr} A + \det A = 0\},$$
$$V_3 = \left\{ A \in M_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; A^T = 2A \right\}.$$

а) Који од подскупова V_i *су и потпростори векторског простора* $M_2(\mathbb{R})$.

б) За све оне V_i *који су потпростори одредити бар по једну базу и димензију векторских простора* $V_i^{\perp}$.

в) За све оне* V_i *који су потпростори одредити бар по једну базу и димензију векторских простора* $M_2(\mathbb{R})/V_i$.

Задатак А.50. *Дато је пресликавање*

$$L : \mathbb{R}^3[x] \longrightarrow \mathbb{R}^3, \qquad Lp = \left(p(2) - p(1), p'\left(\frac{3}{2}\right), \int_{-1}^{1} p(t)\, dt \right).$$

а) Показати да је пресликавање L *линеарно.*

б) Одредити бар по једну базу језгра и слике, као и ранг и дефект пресликавања L.

в) Одредити матрицу пресликавања L *у односу на пар база*

$$e = \left\{1 + x, 1 - x, 1 + 3x^2\right\} \qquad и \qquad f = \{(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)\}.$$

г) Одредити матрицу транспонованог пресликавања L^T *у односу на пар база* f^* *и* e^**, где су* e^* *и* f^* *дуалне базе база* e *и* f*, редом.*

Задатак А.51. *У зависности од реалног параметра* x *израчунати вредност детерминанте*

$$\begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & 1+x^2 & x & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & 1+x^2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+x^2 & x \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 1+x^2 \end{vmatrix}.$$

Задатак А.52. *а) Одредити Жорданову форму* J *матрице* $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$*, као и бар једну инвертибилну матрицу* P *такву да важи* $A = PJP^{-1}$.

б) Одредити матрицу A^n*, за све* $n \in \mathbb{N}$.

Задатак А.53. *а) Показати да је пресликавање*

$$\circ : \mathbb{R}^3[x] \times \mathbb{R}^3[x] \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad p \circ q = p(-1)q(-1) + p'(0)q'(0) + p'(1)q'(1)$$

један скаларни производ на векторском простору $\mathbb{R}^3[x]$.

б) Одредити бар једну ортонормирану базу потпростора $U = \left\{ p \in \mathbb{R}^3[x] \,\middle|\, p''(0) = 0 \right\}$.

в) Одредити растојање полинома $p(x) = x^2 + x + 2$ *од потпростора* $U^\perp$.

Задатак А.54. *а) Испитати да ли је матрица*

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta & \sin\alpha\cos\beta & \sin\beta \\ \sin\alpha & -\cos\alpha & 0 \\ -\cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$$

симетрична (ортогонална) у зависности од реалних параметара α *и* β.

б) За $\alpha = \frac{\pi}{4}$ *и* $\beta = 0$ *одредити ортогоналну матрицу* P *такву да матрица* $P^T AP$ *буде дијагонална.*

А.10 Октобар 2018.

Задатак А.55. *а) У зависности од реалног параметра* λ *одредити ранг матрице*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}.$$

б) За $\lambda = 2$ *одредити инвертибилне матрице* P *и* Q *такве да важи* $PAQ = A^0$*, где је* A^0 *канонска матрица матрице* A.

Задатак А.56. *а) Показати да је пресликавање*

$$L : \mathbb{R}^3[x] \longrightarrow \mathbb{R}^3[x], \qquad Lp = xp'(x+1) + p''(x)$$

један линеарни оператор векторског простора $\mathbb{R}^3[x]$.

б) Одредити бар по једну базу језгра и слике, као и ранг и дефект пресликавања L.

в) Одредити матрицу оператора L *у односу базу* $\left\{ x, x - x^2, 1 - x + x^2 \right\}$.

Задатак А.57. *Израчунати вредност детерминанте*

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Задатак А.58. *Одредити сопствене вредности и сопствене векторе линеарног пресликавања*

$$L : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow M_2(\mathbb{R}), \qquad LX = AX + XB,$$

где је $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ *и* $B = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$.

Задатак А.59. *а) Показати да је пресликавање*

$$\circ : M_2(\mathbb{R}) \times M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad A \circ B = \operatorname{Tr}\left(A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} B^T \right)$$

један скаларни производ на векторском простору $M_2(\mathbb{R})$.

б) Одредити бар по једну ортонормирану базу векторског потпростора свих симетричних матрица $S = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \,|\, A^T = A\}$ *и његове ортогоналне допуне.*

в) Одредити угао који матрица $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *заклапа са потпростором* $S^\perp$.

Задатак А.60. *Одредити бар једну ортонормирану базу векторског простора* $\mathbb{R}^3$ *у којој квадратна форма*

$$q(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz + yz$$

има дијагонални облик. Изразити форму q *у тој бази.*

А.11 Колоквијум 2019.

Задатак А.61. *Решити систем над пољем* $\mathbb{Z}_{11}$:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 4x & + & 3y & + & 5z & = & 2 \\ 3x & + & 4y & + & 2z & = & 7 \\ 8x & + & 10y & + & 6z & = & 4 \end{array}$$

Задатак А.62. *Испитати да ли је* $(M_2(\mathbb{R}), \maltese, \bullet)$ *векторски простор над пољем* $\mathbb{R}$ *ако су операције дефинисане са*

$$X \maltese Y = X + Y + E \qquad и \qquad \alpha \bullet X = \alpha X + (\alpha - 1)E.$$

Задатак А.63. *Нека је* A_n *квадратна* $n \times n$ *матрица чији су сви коефицијенти једнаки* 1.

а) Одредити природне бројеве m *и* n *такве да су множења* XA_m *и* A_nX *дефинисана за све матрице* $X \in M_{23}(\mathbb{R})$.

б) За m *и* n *из дела под а) показати да је* $U = \{ X \in M_{23}(\mathbb{R}) \,|\, XA_m = A_nX\}$ *потпростор векторског простора* $M_{23}(\mathbb{R})$.

в) Одредити бар једну базу и димензију векторског простора U.

Задатак А.64. *Дати су векторски простори*

$$\begin{aligned} U &= \left\{ p \in \mathbb{R}^4[x] \,\middle|\, p'(1) = p''(-1) \right\}, \\ V &= \mathscr{L}\left(x - x^2, x^2 - x^3, x^3 - x\right), \\ W &= \left\{ p \in \mathbb{R}^3[x] \,\middle|\, 2p(1) = p(2) \right\}. \end{aligned}$$

а) Одредити бар једну базу и димензију векторског простора $(U \cap V) + W$.

б) Одредити димензију векторског простора $U \cap V \cap W$.

Задатак А.65. *У зависности од реалног параметра* λ *одредити ранг матрице*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda^2 & \lambda^3 \\ 1 & \lambda^2 & \lambda^3 & \lambda^4 \end{pmatrix}.$$

Задатак А.66. *Одредити инверз матрице*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

А.12 Јун 2019.

Задатак А.67. *Нека је* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *скуп свих реалних низова и нека је*

$$\begin{aligned} U &= \left\{ x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,\middle|\, x \text{ је аритметички} \right\}, \\ V &= \left\{ x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}_{\mathbb{N}} \,\middle|\, x_{n+3} = 5x_{n+2} - 8x_{n+1} + 4x_n,\ \forall n \in \mathbb{N} \right\}. \end{aligned}$$

а) Показати да су U *и* V *векторски потпростори* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

б) Одредити бар по једну базу и димензију U *и* V.

в) Одредити бар по једну базу и димензију $U+V$ *и* $U \cap V$. *Да ли је претходна сума директна?*

Задатак А.68. *а) У зависности од реалног параметра* λ *одредити ранг матрице*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda+2 & -1 & \lambda+1 \\ \lambda+1 & 6 & -2 & 4 \\ -1 & -3 & \lambda & \lambda-3 \end{pmatrix}.$$

б) За $\lambda = -5$ *одредити канонску матрицу* A^0, *као и инвертибилне матрице* P *и* Q *такве да важи* $A^0 = PAQ$.

Задатак А.69. *Линерно пресликавање* $L : \mathbb{R}^3[x] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *има матрицу* $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 4 & -5 & -19 \end{pmatrix}$ *у односу на пар база* $e = \left\{1+x, 1-x, 1+2x^2\right\}$ *и* $f = \{(1,0,1),(1,1,0),(0,1,1)\}$.

а) Одредити матрицу пресликавања L *у односу на пар канонских база векторских простора* $\mathbb{R}^3[x]$ *и* $\mathbb{R}^3$.

б) Одредити бар по једну базу језгра и слике, као и ранг и дефект пресликавања L.

Задатак А.70. *Израчунати вредност детерминанте*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 8 & 27 & \cdots & n^3 \\ 1 & 32 & 243 & \cdots & n^5 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2^{2n-1} & 3^{2n-1} & \cdots & n^{2n-1} \end{vmatrix}.$$

Задатак А.71. *Показати да постоји и израчунати*

$$\min_{\substack{p\in\mathbb{R}^3[x] \\ p(0)=p''(0)}} \int_{-1}^{1} |x|(p(x)-14)^2 dx.$$

Задатак А.72. *Нека је* $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix}$.

а) Одредити бар по једну дијагоналну матрицу D *и ортогоналну матрицу* P *такве да важи* $A = PDP^T$.

б) Израчунати A^{2019}.

в) Свести квадратну форму $q(x,y,z) = x^2+4y^2+4z^2-4xy+4xz-8yz$ *на дијагонални облик.*

А.13 Јул 2019.

Задатак А.73. *а) У зависности од реалног параметра* α *одредити скуп решења* U *система једначина*

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} \alpha x & + & 2y & + & z & - & (1+\alpha)t & = & 0 \\ -\alpha x & + & 2y & + & 3z & & & = & 0 \\ (1+\alpha)x & + & 2y & & & - & (1+2\alpha)t & = & 0 \\ 4x & + & 2y & - & 2z & - & (3+2\alpha)t & = & 0 \end{array}$$

б) Одредити бар једну базу и димензију ортогоналне допуне $U^{\perp}$*, ако је скаларни производ на* $\mathbb{R}^4$ *задат са*

$$(a,b,c,d)\circ(a',b',c',d') = aa' + 2bb' + cc' + dd'.$$

в) Одредити бар по једну базу и димензију простора $U+V$ *и* $U\cap V$*, где је* $V=\mathscr{L}((1,-1,1,0),(1,0,1,-1),(0,-1,0,1))$*. Да ли је претходна сума директна?*

Задатак А.74. *Испитати да ли је подскуп* U *потпростор векторског простора* V *и ако јесте одредити базу и димензију* U*, ако је*

а) $V=M_2(\mathbb{R})$, $U=\{\, M\in V \mid \operatorname{Tr} M = \det M\}$,

б) $V=M_2(\mathbb{R})$, $U=\left\{M\in V \;\middle|\; \operatorname{Tr} M = \operatorname{Tr}\left(A^T M A\right)\right\}$, *за* $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$,

в) $V=\mathbb{R}^6[x]$, $U=\left\{\, p\in V \;\middle|\; \deg p + \deg\left(p(1)x^3\right) < 6\,\right\}$.

Задатак А.75. *а) Показати да је пресликавање*

$$L:\mathbb{R}^3[x]\longrightarrow M_2(\mathbb{R}),\qquad Lp=\begin{pmatrix} p(0) & 3\int\limits_0^1 p(t)\,dt - \frac{3}{2}p'(0)\\ p(1)+p(-1) & \frac{p''(3)}{2}\end{pmatrix}$$

линеарно.

б) Одредити бар по једну базу језгра и слике, као и ранг и дефект пресликавања L.

в) Одредити матрицу пресликавања L *у односу на пар база* $\left\{1+x+x^2,\ 1-2x+x^2,\ -1+x+2x^2\right\}$ *и* $\left\{\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}\right\}$.

Задатак А.76. *Нека је*

$$\Delta_n=\begin{vmatrix} 5&3&0&0&\cdots&0&0\\ 2&5&3&0&\cdots&0&0\\ 0&2&5&3&\cdots&0&0\\ 0&0&2&5&\cdots&0&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\ 0&0&0&0&\cdots&5&3\\ 0&0&0&0&\cdots&2&5\end{vmatrix}$$

детерминанта реда n.

а) Показати да важи $\Delta_{n+2}=5\Delta_{n+1}-6\Delta_n$*, за све* $n\in\mathbb{N}$.

б) Израчунати Δ_n.

Задатак А.77. *Нека је*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

а) Одредити Жорданову форму J матрице A и бар једну инвертибилну матрицу P такву да важи $A = PJP^{-1}$.

б) Израчунати A^n, за све $n \in \mathbb{N}$.

Задатак А.78. *а) Показати да је пресликавање*

$$\circ : \mathbb{R}^3[x] \times \mathbb{R}^3[x] \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad p \circ q = p(0)q(0) + p(1)q(1) + \frac{p''(0)q''(0)}{4}$$

скаларни производ на простору $\mathbb{R}^3[x]$.

б) Одредити бар једну ортонормирану базу простора $\mathbb{R}^3[x]$.

в) Израчунати растојање полинома $1 + x + x^2$ од потпростора $\mathbb{R}^2[x]$.

г) Израчунати угао између полинома $1 + x + x^2$ и ортогоналне допуне $\mathbb{R}^2[x]^{\perp}$.

А.14 Септембар 2019.

Задатак А.79. *а) Показати да је скуп $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b > 0 \right\}$ са операцијама*

$$A \oplus B = A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} B \qquad \text{и} \qquad \alpha \odot \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{\alpha} & 0 \\ 0 & 2^{\alpha-1} b^{\alpha} \end{pmatrix}$$

један векторски простор над пољем реалних бројева.

б) Испитати да ли су подскупови

$$U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a+1 \end{pmatrix} \,\middle|\, a > 0 \right\} \qquad \text{и} \qquad U_2 = \left\{ M \in V \,\middle|\, \det M = \frac{1}{2} \right\}$$

потпростори векторског простора $(V, \oplus, \odot)$.

Задатак А.80. *Одредити инверз матрице*

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Задатак А.81. *Дате су матрице* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ *и* $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ *и полиноми* $p(x) = 1 + 2x$, $q(x) = x - x^2$ *и* $r(x) = 1 - 3x + 2x^2$.

а) Показати да је пресликавање

$$L : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3[x], \qquad LM = (M \circ A)p + (M \circ B)q + (C \circ M)(q + r)$$

линеарно ако је скаларни производ на $M_2(\mathbb{R})$ *задат са* $A \circ B = \operatorname{Tr}\left(AB^T\right)$.

б) Одредити бар по једну базу језгра и слике, као и ранг и дефект пресликавања L.

в) Одредити матрицу пресликавања L *у односу на пар канонских база, као и у односу на пар база* $\{A, B, C, D\}$ *и* $\{p, q, r\}$.

Задатак А.82. *У зависности од реалног параметра* α *израчунати вредност детерминанте реда* n*:*

$$\begin{vmatrix} \alpha & \alpha & \cdots & \alpha & \alpha & \frac{1}{n} \\ \alpha & \alpha & \cdots & \alpha & \frac{1}{n-1} & \alpha \\ \alpha & \alpha & \cdots & \frac{1}{n-2} & \alpha & \alpha \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha & \frac{1}{2} & \cdots & \alpha & \alpha & \alpha \\ 1 & \alpha & \cdots & \alpha & \alpha & \alpha \end{vmatrix}.$$

Задатак А.83. *а) Одредити Жорданову нормалну форму* J *матрице*

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

б) Израчунати J^{100}.

Задатак А.84. *а) Показати да је пресликавање*

$$\circ : \mathbb{R}[x] \times \mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad p \circ q = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{p(t)q(t)}{\sqrt{1 - t^2}}\, dt$$

скаларни производ на векторском простору $\mathbb{R}[x]$.

б) Одредити бар једну ортонормирану базу векторског потпростора $\mathbb{R}^3[x]$.

в) Израчунати угао који полином x^2 *заклапа са потпростором* $\mathbb{R}^2[x]$.

А.15 Октобар 2019.

Задатак А.85. *Нека је* $U = \left\{ p \in \mathbb{R}^4[x] \,\middle|\, p(1) = p'(1), p(0) = p(-1) \right\}$ *и* $V = \mathscr{L}(p_1, p_2, p_3, p_4)$, *где је* $p_1(x) = 3 + x^2 + x^3$, $p_2(x) = 2 - 2x - x^2 + x^3$, $p_3(x) = 4 + 2x + 3x^2 + x^3$ *и* $p_4(x) = 1 + 2x + 2x^2$.

а) Одредити по једну базу и димензију векторских потпростора $U + V$ *и* $U \cap V$. *Да ли је претходна сума директна?*

б) Одредити све скаларе $\lambda \in \mathbb{R}$ *за које полином* $2 + x + \lambda x^2 + x^3$ *припада* $U + V$.

Задатак А.86. *Одредити све матрице* A *за које је*

$$\operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -6 & 9 & -1 \\ 8 & -12 & 2 \end{pmatrix}.$$

Задатак А.87. *Нека је*

$$L : \mathbb{R}^3[x] \longrightarrow \mathbb{R}^3[x], \qquad (Lp)(x) = p''(0)x^3 - p'(x)\left(x^2 - x + 1\right) + p(-1).$$

а) Показати да је L *добро дефинисан линеарни оператор на векторском простору* $\mathbb{R}^3[x]$.

б) Одредити бар по једну базу језгра и слике, као и ранг и дефект оператора L.

в) Одредити сопствене вредности и сопствене векторе оператора L.

Задатак А.88. *Израчунати вредност детерминанте*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \binom{n}{3} & \cdots & \binom{n}{n-1} \end{vmatrix}.$$

Задатак А.89. *Нека је* A *квадратна* 3×3 *матрица детерминанте* -4 *и трага* 1 *чија је једна сопствена вредност* 1.

а) Одредити све сопствене вредности матрице A.

б) Одредити димензију векторског простора $\mathscr{L}\left(E, A, A^2, A^3, \ldots, A^{100}\right)$.

в) Показати да је $\mathscr{L}\left(E, A, A^2, A^3, \ldots, A^{100}\right) = \mathscr{L}\left(E, A^2, A^4, A^6, \ldots, A^{100}\right)$.

Задатак А.90. *а) Одредити* 3×3 *матрицу* A *такву да пресликавање* $v \mapsto Av$ *представља пројекцију на раван* $\pi : x - 2y - 2z = 0$ *у векторском простору* $\mathbb{R}^3$ *(са стандардним скаларним производом).*

б) Израчунати угао који вектор $(1, 1, 1)$ *заклапа са равни* π.

А.16 Колоквијум 2020.

Задатак А.91. *Решити систем једначина над пољем* $\mathbb{Z}_{11}$*:*

$$\begin{array}{rcrcrcr} 4x & + & y & + & 9z & = & 10 \\ 3x & + & 4y & + & 2z & = & 5 \\ 8x & + & 10y & + & 6z & = & 3 \end{array}$$

Задатак А.92. *Нека је*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

квадратна $n \times n$ *матрица, где је* n *непаран природан број. Израчунати* A^n*.*

Задатак А.93. *а) Израчунати инверз матрице* $A = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 2 \\ 5 & 3 & \alpha \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$ *за све вредности реалног параметра* α *за које тај инверз постоји.*

б) Показати да постоји тачно једно α *за које је ранг матрице* A *једнак 2. За ту вредност* α *наћи бар један пар инвертибилних матрица* P *и* Q *такав да је* $PAQ = A^0$*.*

Задатак А.94. *Израчунати вредност детерминанте*

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 & 10 & \cdots & 3n-5 & 3n-2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 3 & \cdots & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n-1 & n-1 & n-1 & n-1 & \cdots & 1 & n-1 \\ n & n & n & n & \cdots & n & 1 \end{vmatrix}.$$

Задатак А.95. *Испитати да ли је* $(V, ✠, \bullet)$ *векторски простор над пољем* $\mathbb{R}$ *ако је* $V = \{ p \in \mathbb{R}^3[x] \mid p(0) > 0 \}$*, а операције су задате са*

$$\begin{aligned} (p ✠ q)(x) &= p(x) + q(x) + (p(0)-1)(q(0)-1) - 1, \\ (\alpha \bullet p)(x) &= \alpha p(x) + p(0)^\alpha - \alpha p(0). \end{aligned}$$

Задатак А.96. *За сваки од наредних подскупова* $M_2(\mathbb{R})$ *испитати да ли је векторски потпростор векторског простора* $M_2(\mathbb{R})$ *и уколико јесте одредити његову базу и димензију:*

а) $\left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \,\middle|\, x + 2y = 3z + 4t = 0 \right\},$

б) $\big\{ X \in M_2(\mathbb{R}) \mid X^2 = 0 \big\}$

в) $\{ X \in M_2(\mathbb{R}) \mid XA = (\operatorname{Tr} X)A \}$, *где је* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

А.17 Јун 2020.

Задатак А.97. *Решити систем у зависности од реалног параметра* α:

$$\begin{array}{rcrcrcl} (\alpha+3)x & + & y & + & 2z & = & \alpha \\ \alpha x & + & (\alpha-1)y & + & z & = & 2\alpha \\ 3(\alpha+1)x & + & \alpha y & + & (\alpha+3)z & = & 5 \end{array}$$

Задатак А.98. *Израчунати детерминанту*

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 & 8 & \cdots & 2(n-1) & 2n \\ 2 & 2 & 6 & 8 & \cdots & 2(n-1) & 2n \\ 2 & 4 & 3 & 8 & \cdots & 2(n-1) & 2n \\ 2 & 4 & 6 & 4 & \cdots & 2(n-1) & 2n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2 & 4 & 6 & 8 & \cdots & n-1 & 2n \\ 2 & 4 & 6 & 8 & \cdots & 2(n-1) & n \end{vmatrix}.$$

Задатак А.99. *Дати су потпростори* $U = \mathscr{L}\left(\sin^2 \frac{x}{2}, \cos^2 \frac{x}{2}, \sin^2 x, \cos^2 x\right)$ *и* $V = \mathscr{L}(\cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x)$ *векторског простора* $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

а) Допунити скуп $\{\cos x, \cos 2x\}$ *до базе за* U *и одредити базу за* V.

б) Доказати да је са $(Lf)(x) = f'(x) - f''(x) + f(0)\sin x$ *добро дефинисано линеарно пресликавање* $L : U \to V$. *Да ли је пресликавање* L *инвертибилно?*

в) Одредити матрицу пресликавања L *у односу на пар база из дела а).*

г) Одредити слику, језгро, ранг и дефект пресликавања L.

Задатак А.100. *Дат је векторски простор* $\mathbb{R}^4[x]$ *и пресликавање*

$$\circ : \mathbb{R}^4[x] \times \mathbb{R}^4[x] \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad p \circ q = p(0)q(0) + p(1)q(1) + \frac{3}{4}\int_0^1 p''(x)q''(x)dx.$$

а) Доказати да је $\circ$ *скаларни производ на датом простору.*

б) Одредити једну ортонормирану базу векторског потпростора $U = \mathscr{L}\left(1+x, 1+x^2, 1+x^3\right)$.

в) Одредити растојање вектора 1 *од потпростора* U *и угао који овај вектор заклапа са тим потпростором.*

Задатак A.101. *Одредити канонски дијагонални облик следеће квадартне форме и неку ортонормирану базу у којој квадартна форма има тај облик:*

$$x^2 + y^2 + 3z^2 + 4xy + 2xz + 2yz.$$

Задатак A.102. *На векторском простору низова* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}\cup\{0\}} = \{a = (a_n)_{n=0}^{\infty}\}$ *дато је линеарно пресликавање*

$$L : \mathbb{R}^{\mathbb{N}\cup\{0\}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}\cup\{0\}}, \qquad (La)_n = a_{n+3} - 2a_{n+2} - a_{n+1} + 2a_n.$$

а) Одредити језгро U *линеарног пресликавања* L.

б) Показати да је $a \circ b = a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2$ *скаларни производ на векторском простору* U.

в) За линеарни функционал $\Phi \in U^*$, $\Phi(a) = a_0$ *одредити низ* $x \in U$ *за који је* $\Phi = x^*$, *тј.* $\Phi(a) = a \circ x$, *за све* $a \in U$.

A.18 Јул 2020.

Задатак A.103. *а) Нека је* $A = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. *Одредити канонску матрицу* A^0 *матрице* A, *као и пар инвертибилних матрица* P *и* Q *таквих да важи* $A^0 = PAQ$.

б) Ако је $L : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *линеарно пресликавање чија је матрица у односу на пар канонских база* $\mathbb{R}^4$ *и* $\mathbb{R}^3$ *једнака* A, *одредити бар један пар база* $\mathbb{R}^4$ *и* $\mathbb{R}^3$ *у ком је матрица* L *једнака* A^0.

Задатак A.104. *Нека је*

$$U = \mathscr{L}((1,2,3,1),(2,4,0,2),(3,2,3,1),(1,2,-3,1),(5,6,3,3))$$

потпростор $\mathbb{R}^4$, *и нека је* V *скуп решења система линеарних једначина*

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x & - & y & + & z & - & 3t & = & 0 \\ 3x & - & 2y & & & + & t & = & 0 \\ 7x & - & 4y & + & \alpha z & + & (1-3\alpha)t & = & 0 \end{array}$$

Одредити параметар $\alpha \in \mathbb{R}$ *за који је векторски простор* V *димензије* 2. *За ту вредност параметра* α *одредити базу и димензију* $U + V$ *и* $U \cap V$.

Задатак A.105. *Нека је*

$$L : M_2(\mathbb{Z}_5) \longrightarrow M_2(\mathbb{Z}_5), \qquad LX = CXC^T + 4X^T,$$

где је $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

а) Доказати да је L линеарни оператор.

б) Одредити матрицу овог оператора у односу на канонску базу $M_2(\mathbb{Z}_5)$.

в) Одредити карактеристични и минимални полином оператора L. Да ли је овај оператор дијагоналног типа?

г) Одредити језгро, слику, дефект и ранг овог оператора. Колико вектора садржи језгро?

Задатак А.106.* *Доказати или навести контрапример:*

а) Ако матрица $A \in M_n(\mathbb{C})$ није дијагоналног типа у $M_n(\mathbb{C})$ и $\det A \neq 0$, онда ниједан степен матрице A није дијагоналног типа у $M_n(\mathbb{C})$.

б) Ако матрица $A \in M_n(\mathbb{C})$ није дијагоналног типа у $M_n(\mathbb{C})$ и $\det A = 0$, онда ниједан степен матрице A није дијагоналног типа у $M_n(\mathbb{C})$.

в) Ако матрица $A \in M_n(\mathbb{R})$ није дијагоналног типа у $M_n(\mathbb{R})$ и $\det A \neq 0$, онда ниједан степен матрице A није дијагоналног типа у $M_n(\mathbb{R})$.

Задатак А.107. *Дато је пресликавање*

$$\circ : \mathbb{R}^4[x] \times \mathbb{R}^4[x] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad p \circ q = p(0)q(0) + p'(0)q'(0) + p''(0)q''(0) + p'''(0)q'''(0).$$

а) Доказати да је ово пресликавање скаларни производ на $\mathbb{R}^4[x]$.

б) Одредити растојање вектора $p(x) = 1 + x + x^2$ од потпростора $U = \mathscr{L}\left(1 + x, 1 + x^3\right)$, као и угао који p заклапа са потпростором $U^\perp$.

в) Одредити вектор $f \in \mathbb{R}^4[x]$ такав да важи $p \circ f = p(3)$, за све $p \in \mathbb{R}^4[x]$.

Задатак А.108. *Одредити све ортогоналне 4×4 матрице чије су прве две колоне редом*

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{6} \\ -\frac{\sqrt{3}}{6} \\ -\frac{\sqrt{3}}{6} \end{pmatrix}.$$

А.19 Септембар 2020.

Задатак А.109. *а) Нека је $V = \left\{ x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; (\forall n \in \mathbb{N})\, x_n > 0 \right\}$ скуп реалних позитивних низова са операцијама*

$$(x \maltese y)_n = \frac{x_n y_n}{2^n} \qquad \text{и} \qquad (\alpha \bullet x)_n = 2^{n(1-\alpha)} x_n^\alpha.$$

Показати да је $(V, \maltese, \bullet)$ векторски простор над пољем реалних бројева.

б) Нека је $U = \left\{ x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in V \mid (\exists q > 0)(\forall n \in \mathbb{N})\, x_n = x_1 q^{n-1} \right\}$ *свих геометријских низова из* V*. Испитати да ли је* U *векторски потпростор од* $(V, \maltese, \bullet)$ *и уколико јесте одредити базу и димензију потпростора* U*.*

Задатак А.110. *Израчунати детерминанту*

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ x_1 & -x_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & -x_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -x_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x_{n-1} & -x_n \end{vmatrix}.$$

Задатак А.111. *Нека је* $\mathbb{Z}_3^4[x]$ *векторски простор полинома степена мањег од* 4 *са коефицијентима у пољу остатака* $\mathbb{Z}_3$*.*

а) Показати да је

$$L : \mathbb{Z}_3^4[x] \longrightarrow \mathbb{Z}_3^4[x], \qquad (Lp)(x) = p'(x) + 2(p''(1) + p''(2))(x+1)$$

линеарни оператор векторског простора $\mathbb{Z}_3^4[x]$*.*

б) Одредити матрицу овог оператора у односу на базу $\left\{x^3 + x, x^3 + 2x, x^2 + x + 1, 2x + 1\right\}$*.*

в) Одредити језгро, ранг и дефект оператора L*. Да ли је овај оператор инвертибилан?*

Задатак А.112. *Одредити Жорданову форму матрице*

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Задатак А.113. *Дато је пресликавање*

$$\circ : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad x \circ y = 3x_1y_1 + 5x_2y_2 + x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_3 + 2x_3y_2.$$

а) Доказати да је $\circ$ *скаларни производ на* $\mathbb{R}^3$*.*

б) Одредити једну ортонормирану базу $\mathbb{R}^3$ *у односу на* $\circ$*.*

в) Одредити растојање вектора $(0,0,1)$ *од равни* $\{(a,b,0) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$*.*

Задатак А.114. *Одредити све линеарне операторе* $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *чија је матрица у односу на канонску базу* $\mathbb{R}^3$ *ортогонална и који праву* $y = z = 0$ *и раван* $z = 0$ *сликају редом у праву* $\mathscr{L}((1,1,1))$ *и раван* $\mathscr{L}((1,1,1),(1,1,-1))$*.*

А.20 Октобар 2020.

Задатак А.115. *а) У зависности од реалног параметра* λ *одредити ранг матрице* $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & \lambda \\ 2 & 2 & \lambda & 2 \\ 2 & \lambda & 2 & 2 \\ \lambda & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

б) За $\lambda = -6$ *одредити канонску матрицу* A^0 *матрице* A, *као и инвертибилне матрице* P *и* Q *такве да важи* $A^0 = PAQ$.

Задатак А.116. *Нека су* U_1, U_2 *и* W *потпростори векторског простора* V *такви да је* $V = U_1 \oplus U_2$.

а) Показати (примером) да не мора да важи $W = (U_1 \cap W) \oplus (U_2 \cap W)$.

б) Показати да из $U_1 \subseteq W$ *или* $U_2 \subseteq W$ *следи* $W = (U_1 \cap W) \oplus (U_2 \cap W)$.

в) Да ли важи обрнут смер: из $W = (U_1 \cap W) \oplus (U_2 \cap W)$ *следи* $U_1 \subseteq W$ *или* $U_2 \subseteq W$*?*

Задатак А.117. *Нека је* V *векторски простор реалних аритметичких низова.*

а) Показати да је

$$L : V \longrightarrow V, \qquad (La)_n = 2a_{n+3} + 3a_{n+2}$$

добро дефинисан линеарни оператор векторског простора V.

б) Испитати да ли је оператор L *инвертибилан?*

в) Одредити матрицу овог оператора у односу на базу $\{a, b\}$, *где је* $a_n = n$ *и* $b_n = 1 - 2n$, *за све* $n \in \mathbb{N}$.

Задатак А.118. *Нека је* $A \in M_3(\mathbb{R})$ *чија је детерминанта* 8, *траг* 7, *а једна сопствена вредност* 1.

а) Одредити све сопствене вредности матрице A.

б) Показати да је $\mathcal{B} = \{E, A, A^2\}$ *једна база векторског простора* $V = \mathscr{L}\left(E, A, A^2, A^3, \dots\right)$ *и одредити координате матрице* A^{2020} *у бази* $\mathcal{B}$.

в) Показати да је матрица A *инвертибилна, као и да* A^{-1} *припада векторском простору* V. *Одредити координате матрице* A^{-1} *у бази* $\mathcal{B}$.

Задатак А.119. *Нека је* $\mathcal{C}^1[0,1]$ *скуп свих функција* $[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *које имају непрекидан први извод. И нека је*

$$\circ : \mathcal{C}^1[0,1] \times \mathcal{C}^1[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f \circ g = f(0)g(0) + \int\limits_0^1 f'(t)g'(t)e^{-t}\, dt.$$

а) Доказати да је $\circ$ скаларни производ на $\mathcal{C}^1[0,1]$.

б) Одредити једну ортонормирану базу векторског потпростора $U = \mathscr{L}(1, x, e^x) \leqslant \mathcal{C}^1[0,1]$.

в) Одредити пројекцију вектора e^{2x} на векторски потпростор $U^\perp$.

Задатак A.120. *Одредити адјунгован оператор линеарног оператора*

$$L : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow M_2(\mathbb{R}), \qquad LX = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X^T.$$

На векторском простору $M_2(\mathbb{R})$ подразумевамо стандардни скаларни производ $A \circ B = \operatorname{Tr}\left(AB^T\right)$.

A.21 Октобар 2 2020.

Задатак A.121. *а) Показати да је $U = \left\{ p \in \mathbb{R}^4[x] \,\middle|\, (x+1)p''' = p'' \right\}$ векторски потпростор векторског простора $\mathbb{R}^4[x]$.*

б) Одредити базу и димензију векторских простора $U + V$ и $U \cap V$, где је $V = \mathscr{L}\left(x + 2x^2, x^2 + 3x^3, x^3 + 4x\right)$. Да ли је претходна сума директна?

в) Ако је скаларни производ на $\mathbb{R}^4[x]$ дат са $\int\limits_{-1}^{1} t^2 p(t) q(t)\, dt$ одредити базу дуалног простора U^* векторског простора U.

Задатак A.122. *Израчунати детерминанту*

$$\begin{vmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \dots & a_1b_{n-1} & a_1b_n \\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_2b_3 & \dots & a_2b_{n-1} & a_2b_n \\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & \dots & a_3b_{n-1} & a_3b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1b_{n-1} & a_2b_{n-1} & a_3b_{n-1} & \dots & a_{n-1}b_{n-1} & a_{n-1}b_n \\ a_1b_n & a_2b_n & a_3b_n & \dots & a_{n-1}b_n & a_nb_n \end{vmatrix}$$

(коефицијент на месту (i,j) је једнак $a_{\min\{i,j\}} b_{\max\{i,j\}}$).

Задатак A.123. *Дате су матрице $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ и $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ из $M_2(\mathbb{Z}_5)$ и пресликавање*

$$L : M_2(\mathbb{Z}_5) \longrightarrow M_2(\mathbb{Z}_5), \qquad LX = AXB + 3(\operatorname{Tr} X)C.$$

а) Показати да је L линеарни оператор векторског простора $M_2(\mathbb{Z}_5)$.

б) Одредити матрицу овог оператора у односу на базу $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$.

в) Да ли је оператор L инвертибилан?

Задатак А.124. *Решити систем диференцних једначина*

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_{n+1} & = & 3x_n & + & y_n & - & z_n \\ y_{n+1} & = & & & 2y_n & & \\ z_{n+1} & = & x_n & + & y_n & + & z_n \end{array}$$

са почетним условима $x_1 = 1$, $y_1 = 2$ и $z_1 = -2$.

Задатак А.125. *Нека је*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \qquad \textit{и} \qquad V = \left\{ X \in M_2(\mathbb{R}) \mid X = X^T,\, \operatorname{Tr} X = 0 \right\}.$$

Показати да постоји и израчунати

$$\min_{X \in V} \operatorname{Tr}\left((A - X)A\left(A^T - X^T\right)\right).$$

Задатак А.126. *Одредити канонски дијагонални облик квадратне форме*

$$q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad q(x, y, z) = 2x^2 - y^2 + 2z^2 + 4xy - 2xz + 4yz,$$

као и бар једну ортонормирану базу у којој дата форма има тај дијагонални облик.

А.22 Октобар 3 2020.

Задатак А.127. *Испитати да ли је подскуп U потпростор векторског простора V и у случају да јесте одредити базу и димензију U ако је*

а) $V = \mathbb{R}^{10}[x]$, $U = \{p \in V \mid \deg p$ непаран$\} \cup \{\mathbb{O}\}$, где је $\mathbb{O}$ нула-полином,

б) $V = M_2(\mathbb{R})$, $U = \left\{M \in V \;\middle|\; M + M^T = 2(\operatorname{Tr} M)E\right\}$,

в) $V = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $U = \left\{x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in V \mid x_{12}^3 \geqslant x_{45}\right\}$.

Задатак А.128. *У зависности од реалног параметра α решити систем једначина*

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & 5 \\ 6x & + & 2y & - & \alpha z & = & 11 \\ (\alpha - 2)x & + & y & - & 4z & = & 4 \end{array}$$

Задатак А.129. *а) Показати да је пресликавање*

$$L : \mathbb{R}^4[x] \longrightarrow M_2(\mathbb{R}) \qquad Lp = \begin{pmatrix} p(1) & p'''(0) \\ \int\limits_{-1}^{1} p(t)\,dt & p(2) + p(-2) \end{pmatrix}$$

линеарно.

б) Одредити језгро, слику, ранг и дефект пресликавања L.

в) Одредити матрицу овог пресликавања у односу на пар база

$$\left\{1, 1+2x, 4-x^2, x+x^3\right\}$$

и

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

Задатак А.130. *а) Одредити све сопствене вредности и сопствене потпросторе матрице* $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 6 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

б) Испитати да ли је матрица A дијагоналног типа и уколико јесте одредити бар по једну дијагоналну матрицу D и инвертибилну матрицу P такве да је $A = PDP^{-1}$.

в) Одредити бар једну матрицу X такву да је $X^3 = A$.

Задатак А.131. *а) Показати да је пресликавање*

$$\circ : \mathbb{R}^3[x] \times \mathbb{R}^3[x] \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad p \circ q = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p'(1)q'(1)$$

скаларни производ на $\mathbb{R}^3[x]$.

б) Одредити једну ортонормирану базу $\mathbb{R}^3[x]$ у односу на $\circ$.

в) Одредити растојање полинома $1 - x + x^2$ од потпростора $\left\{1+x, x^2\right\}^{\perp}$.

Задатак А.132. *Нека је $\mathbb{R}^3[x]$ еуклидски векторски простор са скаларним производом из претходног задатка.*

а) Дат је линеарни функционал $\Phi : \mathbb{R}^3[x] \longrightarrow \mathbb{R}$, $\Phi p = p(2)$. Одредити полином $f \in \mathbb{R}^3[x]$ за који је $\Phi = f^*$.

б) Одредити адјунговани оператор L^* линеарног оператора

$$L : \mathbb{R}^3[x] \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad Lp = p + p' - p''.$$

A.23 Јун 2021.

Задатак A.133. *а) Ако је* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ *показати да је пресликавање*

$$L : \mathbb{R}^3[x] \longrightarrow M_2(\mathbb{R}) \qquad Lp = p(A)$$

линеарно.

б) Одредити језгро, слику, ранг и дефект пресликавања L.

в) Одредити матрицу овог линеарног пресликавања у односу на пар база $\{1 - x, x - x^2, 1 + x^2\}$ *и* $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$.

Задатак A.134. *а) Одредити скуп* U *свих решења диференцне једначине*

$$a_{n+3} - 7a_{n+2} + 15a_{n+1} - 9a_n = 0.$$

б) Ако је V *скуп свих аритметичких низова из* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *одредити по једну базу векторских простора* $U + V$ *и* $U \cap V$. *Да ли је претходна сума директна?*

Задатак A.135. *а) Одредити Жорданову нормалну форму матрице*
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

б) Одредити све уопштене сопствене потпросторе матрице A.

в) Одредити минимални полином матрице A.

г) Одредити базу и димензију векторског простора $\mathscr{L}\left(E, A, A^2, A^3, \dots\right)$

Задатак A.136. *Дат је линеарни оператор*

$$L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \qquad L(a, b, c) = (a + c, -a + 2b + c, 3a - 2b + c)$$

Одредити језгро и слику транспонованог оператора L^T.

Задатак A.137. *а) Показати да је пресликавање*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{C}^3[x] \times \mathbb{C}^3[x] \longrightarrow \mathbb{C},$$

$$\left\langle a + bx + cx^2, e + fx + gx^2 \right\rangle = a\overline{e} + b\overline{f} + 3c\overline{g} + ia\overline{g} - ic\overline{e} + ib\overline{g} - ic\overline{f}$$

ермитски производ на $\mathbb{C}^3[x]$.

б) Одредити једну ортонормирану базу $\mathbb{C}^3[x]$ *у односу на овај ермитски производ.*

в) Одредити растојање између полинома $1 + 2x + 3x^2$ *и* $3 + 2x + x^2$.

А.24 Јул 2021.

Задатак А.138. *а) Показати да је* $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \maltese, \bullet)$ *векторски простор ако су операције задате са*

$$(x \maltese y)_n = x_n + y_n - n \qquad и \qquad (\alpha \bullet x)_n = \alpha x_n + (1-\alpha)n,$$

за све $x, y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *и све* $\alpha \in \mathbb{R}$.

б) Да ли је скуп свих аритметичких низова из $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *векторски потпростор простора* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$*?*

Задатак А.139. *Одредити матрицу* A *такву да је* $\det A > 0$ *и* $\operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Задатак А.140. *а) Одредити Жорданову нормалну форму* J *матрице* $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$*, као и бар једну инвертибилну матрицу* P *такву да важи* $A = PJP^{-1}$.

б) Израчунати A^{2021}.

в) Одредити бар једну матрицу B *такву да важи* $A = B^2$.

Задатак А.141. *Дат је линеарни оператор*

$$L : \mathbb{R}^3[x] \longrightarrow \mathbb{R}^3[x], \qquad (Lp)(x) = 2p(2x) - p'(x) - x(p(0) + p(x) - p(-x)).$$

а) Одредити језгро оператора L*. Да ли је овај оператор инвертибилан?*

б) Да ли је оператор L *симетричан? (На* $\mathbb{R}^3[x]$ *подразумевамо стандардни скаларни производ* $p \circ q = p(0)q(0) + p'(0)q'(0) + \frac{p''(0)q''(0)}{4}$*.)*

Задатак А.142. *а) Ако је* $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ *показати да је пресликавање*

$$\circ : M_2(\mathbb{R}) \times M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad A \circ B = \operatorname{Tr}\left(B^T M A\right).$$

скаларни производ на векторском простору $M_2(\mathbb{R})$.

б) Одредити ортонормирану базу потпростора $U = \left\{ A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A^T = A \right\}$ *симетричних матрица.*

в) Да ли матрица $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ *заклапа већи угао са потпростором* U *или са потпростором* $U^\perp$*?*

А.25 Септембар 2021.

Задатак А.143. *Нека су $L_1, L_2 : V \longrightarrow V$ линеарни оператори векторског простора V такви да важи $L_1 \circ L_2 = L_1$ и $L_2 \circ L_1 = L_2$. Показати да је*

а) $\operatorname{Ker} L_1 = \operatorname{Ker} L_2$,

б) $V = \operatorname{Ker} L_1 \oplus \operatorname{Im} L_2$.

Задатак А.144. *Израчунати вредност детерминанте*

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & \dots & 3 & 3 & 3 & 1 \\ 6 & 6 & \dots & 6 & 6 & 2 & 6 \\ 9 & 9 & \dots & 9 & 3 & 9 & 9 \\ 12 & 12 & \dots & 4 & 12 & 12 & 12 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 3n-3 & n-1 & \dots & 3n-3 & 3n-3 & 3n-3 & 3n-3 \\ n & 3n & \dots & 3n & 3n & 3n & 3n \end{vmatrix}.$$

Задатак А.145. *а) Одредити Жорданову нормалну форму J линеарног оператора*

$$L : \mathbb{R}^3[x] \longrightarrow \mathbb{R}^3[x], \qquad Lp = 2p + (p'(0) - 2p(0))q,$$

где је $q(x) = 1 + 2x + x^2$, као и бар једну базу f векторског простора $\mathbb{R}^3[x]$ такву да важи $[L]_f = J$.

б) Одредити линеарни оператор L^n, за све $n \in \mathbb{N}$, и његову матрицу у односу на базу $\{1, x, x^2\}$.

Задатак А.146. *а) Показати да је пресликавање*

$$\circ : M_2(\mathbb{R}) \times M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad A \circ B = \operatorname{Tr}\left(A^T B\right) + (\operatorname{Tr} A)(\operatorname{Tr} B)$$

скаларни производ на векторском простору $M_2(\mathbb{R})$.

б) Одредити растојање матрице $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ од потпростора $V = \left\{ A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A^T = A \right\}$ симетричних матрица, као и угао који заклапају матрица M и потпростор $V^\perp$.

в) Одредити матрицу $X \in M_2(\mathbb{R})$ за коју је $X^* = \operatorname{Tr}$.

Задатак А.147. *Одредити све ортогоналне матрице облика*

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix}.$$

A.26 Октобар 2021.

Задатак A.148. *а) У зависности од реалног параметра α одредити ранг матрице*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 2 \\ 3 & 17 & 7 & 1 \\ 1 & 10 & 4 & \alpha \\ 4 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

б) За $\alpha = 2$ одредити канонску матрицу A^0 матрице A, као и инвертибилне матрице P и Q такве да важи $A^0 = PAQ$.

Задатак A.149. *Нека је $\mathbb{Z}_3^3[x]$ векторски простор полинома степена мањег од 3 над пољем остатака $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$.*

а) Показати да је пресликавање

$$L : \mathbb{Z}_3^3[x] \longrightarrow \mathbb{Z}_3^3, \qquad Lp = \big(p(2), p'(1), p(0)^3\big)$$

линеарно.

б) Одредити језгро, слику, ранг и дефект линеарног пресликавања L.

в) Одредити матрицу линеарног пресликавања L у односу на пар база $\big\{1 + x, 1 + 2x^2, 2 + x + x^2\big\}$ и $\{(0, 2, 0), (1, 1, 1), (0, 1, 2)\}$.

Задатак A.150. *а) Дата је матрица $A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ 2 & -7 & 4 \\ -2 & 4 & -7 \end{pmatrix}$. Одредити бар по једну дијагоналну матрицу D и ортогоналну матрицу P такву да важи $A = PDP^T$.*

б) Одредити канонски дијагонални облик квадратне форме

$$q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad q\left(x_1, x_2, x_3\right) = -4x_1^2 - 7x_2^2 - 7x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 8x_2x_3,$$

као и бар једну ортонормирану базу векторског простора $\mathbb{R}^3$ у којој форма q има тај облик.

Задатак A.151. *Показати да постоји и израчунати*

$$\min_{M \in V} \operatorname{Tr}\left(M^2 + AM + MA^T\right),$$

где је $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ и $V = \big\{\, M \in M_2(\mathbb{R}) \mid M = M^T \big\}$.

Задатак A.152. *а) Показати да је*

$$\circ : \mathbb{R}^3[x] \times \mathbb{R}^3[x] \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad p \circ q = p(0)q(0) + p'(0)q'(0) + p(1)q(1)$$

скаларни производ на векторском простору $\mathbb{R}^3[x]$.

б) Одредити адјунговани оператор линеарног оператора $L : \mathbb{R}^3[x] \longrightarrow \mathbb{R}^3[x]$, $Lp = p + p'$.

в) Да ли је линеарни оператор L ортогоналан?

А.27 Октобар 2 2021.

Задатак А.153. *а) Показати да су $V_1 = \{ M \in M_2(\mathbb{R}) \mid \operatorname{Tr} M = 0 \}$ и $V_2 = \{ M \in M_2(\mathbb{R}) \mid AM = MA \}$ потпростори векторског простора $M_2(\mathbb{R})$, где је $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.*

б) Показати да $V_3 = \left\{ M \in M_2(\mathbb{R}) \mid (\operatorname{Tr} M)^2 = \det M \right\}$ није потпростор векторског простора $M_2(\mathbb{R})$.

в) Одредити бар једну базу и димензију векторских простора $V_1 + V_2$ и $V_1 \cap V_2$.

г) Одредити бар један векторски потпростор $V_4 \leqslant M_2(\mathbb{R})$ такав да важи $V_1 \oplus V_4 = M_2(\mathbb{R})$.

Задатак А.154. *У зависности од реалних параметара α и β израчунати вредност детерминанте*

$$\begin{vmatrix} \alpha-\beta & \alpha\beta & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}.$$

Задатак А.155. *а) Показати да је пресликавање*

$$L : \mathbb{R}^3[x] \longrightarrow M_2(\mathbb{R}), \qquad Lp = \begin{pmatrix} p(1) & p(1) + p(-1) + 4p(0) \\ p'\left(\frac{1}{3}\right) & \int\limits_{-1}^{1} p(t)\,dt \end{pmatrix}$$

линеарно.

б) Одредити по једну базу језгра и слике, као и ранг и дефект линеарног пресликавања L.

в) Одредити по једну базу језгра и слике транспонованог пресликавања L^T.

Задатак А.156. *а) Одредити карактеристични и минимални полином матрице*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

б) Одредити нормалну Жорданову форму J матрице A и бар једну инвертибилну матрицу P такву да важи $A = PJP^{-1}$.

в) Одредити матрицу B такву да важи $A = B^3$.

Задатак А.157. *Нека је $V = \mathscr{L}(\sin, \cos, \mathrm{tg})$ реални векторски простор функција.*

а) Показати да је

$$\circ : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f \circ g = f(0)g(0) + f\left(\frac{\pi}{4}\right) g\left(\frac{\pi}{4}\right) + f\left(\frac{3\pi}{4}\right) g\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

скаларни производ на векторском простору V.

б) Одредити једну ортонормирану базу векторског простора V.

А.28 Јануар 2022.

Задатак А.158. *Испитати да ли је $\left(\mathbb{R}^2, \dagger, \bullet\right)$ векторски простор над пољем комплексних бројева ако су операције задате са*

$$\begin{aligned}(x_1, y_1) \dagger (x_2, y_2) &= (x_1 + x_2 + 1, y_1 + y_2 - 1)\,,\\ \alpha \bullet (x, y) &= (x\Re\alpha - y\Im\alpha + \Re\alpha + \Im\alpha - 1, x\Im\alpha + y\Re\alpha + \Im\alpha - \Re\alpha + 1).\end{aligned}$$

Задатак А.159. *а) Показати да је*

$$L : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \qquad (La)_n = a_{n+3} - 6a_{n+2} + 12a_{n+1} - 8a_n$$

линеарни оператор векторског простора низова $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

б) Одредити језгро линеарног оператора L.

Задатак А.160. *а) Одредити матрицу линеарног пресликавања*

$$L : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3, \qquad L\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (3a-b+5c+2d, a+b+3c-2d, 2a-4b+8d)$$

односу на пар база

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$$

и

$$\{(0, 2, -5), (2, 1, 4), (1, 3, -6)\}.$$

б) Нека је $M \circ N = \mathrm{Tr}\left(M \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} N^T\right)$ скаларни производ на векторском простору $M_2(\mathbb{R})$. Одредити матрице $A, B, C \in M_2(\mathbb{R})$ такве да важи $LM = (A^*M, B^*M, C^*M)$, за све $M \in M_2(\mathbb{R})$, где $*$ означава дуални вектор.

Задатак А.161. *а) Показати да је*

$$\circ : \mathbb{R}^4[x] \times \mathbb{R}^4[x] \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f \circ g = p(0)q(0) + p'(0)q'(0) + p''(0)q''(0) + p(1)q(1)$$

скаларни производ на векторском простору $\mathbb{R}^4[x]$.

б) Да ли полином $p(x) = 2 - x - x^2$ *заклапа већи угао са потпростором*

$$V = \left\{ q \in \mathbb{R}^4[x] \,\middle|\, q(1) + q(-1) = 0 \right\}$$

или са потпростором $V^{\perp}$*?*

Задатак А.162. *Одредити канонски дијагонални облик квадратне форме*

$$q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad q(x,y,z) = 5x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 8xy - 4xz + 4yz,$$

као и бар једну ортонормирану базу у којој дата форма има тај дијагонални облик.

А.29 Јун 2022.

Задатак А.163. *а) Показати да су*

$$\begin{aligned} U &= \left\{ a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid a_1 = 4a_2 = -2a_3 \right\}, \\ V &= \left\{ a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid a \text{ је аритметички низ} \right\}, \\ W &= \left\{ a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (\forall n \in \mathbb{N})\, a_{n+4} = a_n \right\} \end{aligned}$$

потпростори векторског простора $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *свих реалних низова.*

б) Одредити бар једну базу и димензију векторског потпростора $(U \cap V) + W$*. Да ли је претходна сума директна?*

в) Одредити бар једну базу и димензију анихилатора $U^{\perp}$.

Задатак А.164. *а) Показати да је пресликавање*

$$L : \mathbb{R}^3[x] \longrightarrow \mathbb{R}^3, \qquad Lp = (p(-1), p(3), p'(2) - p''(1))$$

линеарно.

б) Одредити бар по једну базу језгра и слике, као и ранг и дефект линеарног пресликавања L.

в) Одредити матрицу линеарног пресликавања L *у односу на пар база*

$$\left\{ 2 - x, 1 + 2x - x^2, -2 - 3x + x^2 \right\} \qquad \text{и} \qquad \{(1,3,1), (1,-2,-1), (5,6,1)\}.$$

Задатак А.165. *а) Одредити Жорданову форму J матрице $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, као и бар једну инвертибилну матрицу P такву да важи $A = PJP^{-1}$.*

б) Одредити бар једну матрицу B такву да важи $B^2 = A$.

Задатак А.166. *а) Показати да је*

$$\circ : M_2(\mathbb{R}) \times M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad A \circ B = \operatorname{Tr}\left(AB + BA + 3AB^T\right)$$

скаларни производ на векторском простору $M_2(\mathbb{R})$.

б) Одредити бар по једну ортонормирану базу векторског потпростора $V = \{\, A \in M_2(\mathbb{R}) \mid \operatorname{Tr} A = 0\}$ и његове ортогоналне допуне $V^\perp$.

в) Показати да за све матрице $A \in M_2(\mathbb{R})$ важи

$$(\operatorname{Tr} A)^2 \leqslant \frac{2}{5} \operatorname{Tr}\left(2A^2 + 3AA^T\right).$$

Задатак А.167. *Нека је $M_2(\mathbb{R})$ еуклидски векторски простор са скаларним производом из претходног задатка.*

а) Дат је линеарни функционал

$$\Phi : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \Phi \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a + 2b + 3c + 5d.$$

Одредити матрицу $M \in M_2(\mathbb{R})$ такву да важи $\Phi A = A \circ M$, за све $A \in M_2(\mathbb{R})$.

б) Да ли је линеарни оператор

$$L : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow M_2(\mathbb{R}), \qquad LA = A - (\operatorname{Tr} A)E.$$

симетричан?

А.30 Јул 2022.

Задатак А.168. *а) Одредити матрицу преласка са базе $e = \{(2,3,0), (5,-1,-1), (-1,3,2)\}$ на базу $e' = \{(-1,12,6), (8,8,1), (11,4,0)\}$ векторског простора $\mathbb{R}^3$, као и матрицу преласка са базе $f = \left\{1 + 2x - x^2,\ -1 + 3x + x^2,\ 2 + 4x + x^2\right\}$ на базу $f' = \left\{5 + 5x - 2x^2, 5x + 6x^2, 1 + 2x + 2x^2\right\}$ векторског простора $\mathbb{R}^3[x]$.*

б) Нека је $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3[x]$ линеарно пресликавање такво да важи $[L]_{e,f} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -5 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$. Одредити матрицу $[L]_{e',f'}$.

Задатак А.169. *а) Одредити Жорданову форму линеарног оператора*

$$L : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow M_2(\mathbb{R}), \qquad LX = A(AX)^T, \qquad \text{где је} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

б) Одредити све уопштене сопствене потпросторе линеарног оператора L.

в) Одредити бар једну базу и димензију векторског простора $\mathscr{L}\left(\mathbb{1}, L, L^2, \ldots, L^{2022}\right)$, где је $\mathbb{1} : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$ идентички оператор.

Задатак А.170. *а) Показати да је*

$$\circ : \mathbb{R}^3[x] \times \mathbb{R}^3[x] \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad p \circ q = \int\limits_0^1 p(\sqrt{t})q(\sqrt{t})\,dt$$

скаларни производ на векторском простору $\mathbb{R}^3[x]$.

б) Одредити растојање од полинома x^2 до векторског потпростора $\left(\mathbb{R}^2[x]\right)^\perp$.

в) Да ли полином x^2 захвата већи угао са потпростором $\mathbb{R}^2[x]$ или са потпростором $\left(\mathbb{R}^2[x]\right)^\perp$?

Задатак А.171. *Показати да је за све реалне параметре α и β матрица*

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\cos\beta \\ -\frac{\sin\alpha}{2} & \frac{\cos\alpha\sin\beta+\sqrt{3}\cos\beta}{2} & \frac{-\cos\alpha\cos\beta+\sqrt{3}\sin\beta}{2} \\ \frac{\sqrt{3}\sin\alpha}{2} & \frac{-\sqrt{3}\cos\alpha\sin\beta+\cos\beta}{2} & \frac{\sqrt{3}\cos\alpha\cos\beta+\sin\beta}{2} \end{pmatrix}$$

ортогонална.

А.31 Септембар 2022.

Задатак А.172. *Нека је $V = \left\{a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,\middle|\, a_1 > 0\right\}$ скуп свих реалних низова чији је први члан строго позитиван. Испитати да ли је $(V, \boxplus, \boxdot)$ векторски простор ако су операције задате са*

$$(a \boxplus b)_1 = a_1 b_1 \qquad \text{и} \qquad (a \boxplus b)_n = a_n b_1 + a_1 b_n, \qquad \text{за све} \qquad n \geqslant 2$$

и

$$(\alpha \boxdot a)_1 = a_1^\alpha \qquad \text{и} \qquad (\alpha \boxdot a)_n = \alpha a_n a_1^{\alpha-1}, \qquad \text{за све} \qquad n \geqslant 2.$$

Задатак А.173. *Израчунати вредност детерминанте*

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 2^n & 2^{n-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 3^n & 3^n & 3^{n-1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 4^n & 4^n & 4^n & 4^{n-1} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (n-1)^n & (n-1)^n & (n-1)^n & (n-1)^n & \dots & (n-1)^{n-1} & 0 \\ n^n & n^n & n^n & n^n & \dots & n^n & n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Задатак А.174. *а) Показати да је*

$$L : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow M_2(\mathbb{R}), \qquad LX = AX + X^T, \qquad \text{где је} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

линеарни оператор векторског простора $M_2(\mathbb{R})$.

б) Одредити језгро, слику, ранг и дефект оператора L.

в) Одредити матрицу оператора L у односу на базу $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

г) Одредити $L^T\,\mathrm{Tr}$.

Задатак А.175. *Нека је $V = \mathscr{L}(\cos, \sin, 1)$ потпростор функција.*

а) Показати да је

$$\circ : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f \circ g = f(0)g(0) + f'(0)g'(0) + f\left(\frac{\pi}{2}\right) g\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

скаларни производ на векторском простору V.

б) Одредити бар једну ортонормирану базу векторског простора V.

в) Одредити угао који вектор 1 заклапа са потпростором $\mathscr{L}(\cos, \sin)$.

Задатак А.176. *Нека је $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Одредити бар по једну матрицу D облика $\begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 \end{pmatrix}$ и ортогоналне матрице P и Q такве да важи $A = PDQ^T$.*

А.32 Октобар 2022.

Задатак А.177. *а) У зависности од реалног параметра λ одредити ранг матрице* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & \lambda+5 & 1 \\ \lambda & 3 & 3\lambda+1 & 2\lambda-3 \end{pmatrix}$.

б) За $\lambda = 5$ одредити канонску матрицу A^0 матрице A, и бар по једну инвертибилну матрицу P и Q такве да важи $A^0 = PAQ$.

в) Нека је $\lambda = 5$ и $L : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ линеарно пресликавање такво да је $[L]_{e,f} = A$, где су e и f канонске базе векторских простора $\mathbb{R}^4$ и $\mathbb{R}^3$, редом. Одредити бар један пар база e' и f' векторских простора $\mathbb{R}^4$ и $\mathbb{R}^3$, редом, такав да важи $[L]_{e',f'} = A^0$.

Задатак А.178. *а) Показати да је*

$$L : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \qquad (La)_n = a_{n+3} - 5a_{n+2} + 8a_{n+1} - 4a_n, \qquad \text{за све} \qquad n \in \mathbb{N},$$

линеарни оператор векторског простора $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

б) Одредити језгро U линеарног оператора L.

в) Ако је V скуп свих аритметичких низова из $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ одредити по једну базу $U \cap V$ и $U + V$. Да ли је претходна сума директна?

Задатак А.179. *Дат је линеарни оператор*

$$L : \mathbb{R}^3[x] \longrightarrow \mathbb{R}^3[x], \qquad Lp = (p(1) - 2p(0))q + \frac{p'(0)}{4}(q'' + 2q'),$$

где је $q(x) = 1 - x + x^2$.Испитати да ли је оператор L

а) нилпотентан,

б) нормалан (у односу на стандардни скаларни производ на $\mathbb{R}^3[x]$).

Задатак А.180. *Дато је пресликавање*

$$\circ : M_2(\mathbb{R}) \times M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad M \circ N = \operatorname{Tr}\left(MAN^T + M^TAN\right),$$

где је $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

а) Показати да $\circ$ није скаларни производ на $M_2(\mathbb{R})$.

б) Нека је $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & c \end{pmatrix} \middle| \, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$. Показати да је пресликавање $\circ$ (тј. његова рестрикција на V) скаларни производ на векторском простору V.

в) Одредити угао који вектор $v = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \in V$ заклапа са потпростором $U = \{M \in V \mid \operatorname{Tr} M = 0\} \leqslant V$.

Задатак А.181. *Нека је $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.*

а) Одредити бар по једну ортогоналну матрицу P и дијагоналну матрицу D такве да важи $A = PDP^T$.

б) Израчунати A^n*, за све* $n \in \mathbb{N}$*.*

в) Одредити канонски дијагонални облик и сигнатуру квадратне форме

$$q(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 4xz + 4yz.$$

А.33 Јануар 2023.

Задатак А.182. *а) Показати да је* $\left(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \boxplus, \boxdot\right)$ *векторски простор ако су операције задате са*

$$(f \boxplus g)(x) = f(x) + g(x) - x, \qquad (\alpha \boxdot f)(x) = \alpha f(x) - \alpha x + x.$$

б) Показати да је $V = \left\{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \,\middle|\, f(1) = 1 \right\}$ *векторски потпростор простора* $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$*.*

Задатак А.183. *а) Показати да је*

$$L : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2, \qquad L(a,b) = \left(2a + (1+i)b, (1-i)a - \overline{b}\right).$$

$\mathbb{R}$*-линеарни оператор, али није* $\mathbb{C}$*-линеарни оператор.*

б) Одредити језгро, слику, ранг и дефект $\mathbb{R}$*-линеарног оператора* L*.*

в) Одредити по једну базу векторских простора $\operatorname{Ker} L \cap \operatorname{Im} L$ *и* $\operatorname{Ker} L + \operatorname{Im} L$*.*

Задатак А.184. *Израчунати вредност детерминанте*

$$\begin{vmatrix} 6 & 9 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 9 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 9 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 6 \end{vmatrix}.$$

Задатак А.185. *а) Одредити Жорданову форму* J *матрице*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & -9 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

б) Израчунати J^{2023}*.*

Задатак А.186. *а) Показати да је*

$$\circ : \mathbb{R}^3[x] \times \mathbb{R}^3[x] \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad p \circ q = p(1)q(1) + 3\int\limits_0^1 p'(t)q'(t)\,dt.$$

скаларни производ на векторском простору $\mathbb{R}^3[x]$.

б) Одредити бар једну ортонормирану базу векторског простора $\mathbb{R}^3[x]$.

в) Одредити ортогоналну допуну векторског потпростора $\mathscr{L}\left(1+x, x^2\right)$.

Задатак А.187. *Показати да је линеарни оператор*

$$L : \mathbb{R}^3[x] \longrightarrow \mathbb{R}^3[x], \qquad L\left(a + bx + cx^2\right) = -b - ax + (a+b+c)x^2$$

симетричан, при чему на $\mathbb{R}^3[x]$ *подразумевамо скаларни производ из претходног задатка.*