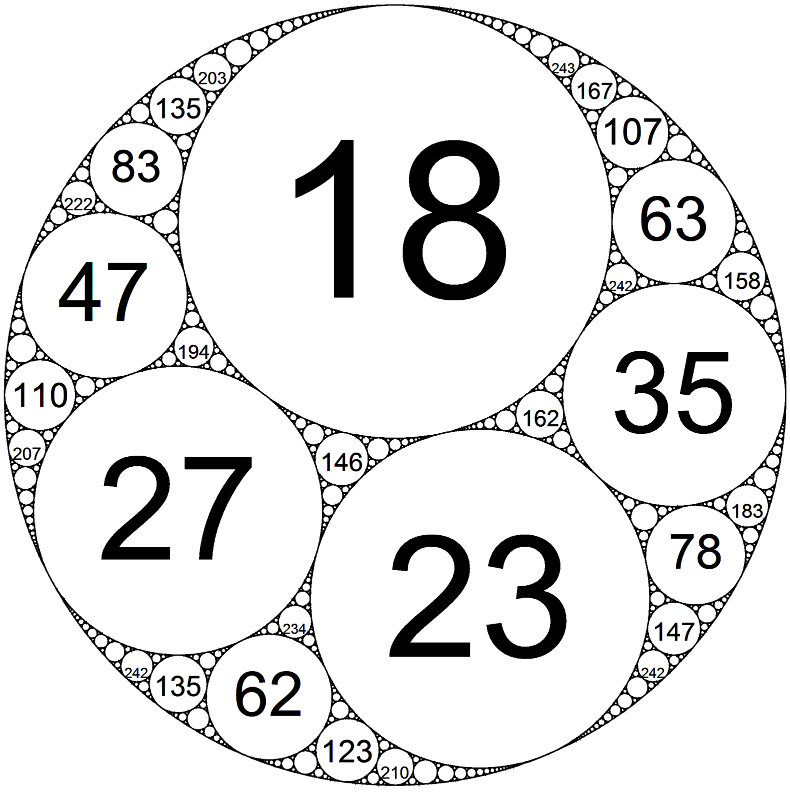
Најбољи мастер рад у области математике
и механике за 2016./2017. годину по избору
Математичког института Српске академије
наука и уметности

Универзитет у Београду

Математички факултет

Аритметика целобројних Аполонијевих конфигурација кругова

(Мастер рад)



Ментор: др Горан Ђанковић
Студент: Драган Ђокић
Смер: Теоријска математика и примене
Број индекса: 1026/2015

Београд, септембар 2016.

САДРЖАЈ

ПРЕДГОВОР

The Kiss Precise

by Frederick Soddy[1]

For pairs of lips to kiss maybe
Involves no trigonometry.
This not so when four circles kiss
Each one the other three.
To bring this off the four must be
As three in one or one in three.
If one in three, beyond a doubt
Each gets three kisses from without.
If three in one, then is that one
Thrice kissed internally.

Four circles to the kissing come.
The smaller are the benter.
The bend is just the inverse of
The distance from the center.
Though their intrigue left Euclid dumb
There's now no need for rule of thumb.
Since zero bend's a dead straight line
And concave bends have minus sign,
The sum of the squares of all four bends
Is half the square of their sum.
...

Од Аполонијевог[2] времена (трећи век пре нове ере) па до данас Аполонијеве конфигурације привлаче велику пажњу математичара, али и обичних људи, нарочито уметника. О томе сведочи и овај одломак из песме ,,*Прецизни пољубац*“ нобеловца Содија (која, нажалост, још увек није препевана на српски језик).

У теорији бројева се изучавају кривине кругова у Аполонијевој конфигурацији, са посебним акцентом на целобројним кривинама. Потребан и довољан услов да све кривине у једној Аполонијевој конфигурацији буду целобројне је, испоставиће се, да почетна четири круга који генеришу читаву конфигурацију имају целобројне кривине.

---

[1] Frederick Soddy (1877. – 1956.), енглески хемичар и песник

[2] *Απολλωνιος ο Περγαιος* (262. п.н.е. – 190. п.н.е.), грчки математичар и астроном

Постоји пуно различитих проблема везаних за кривине у Аполонијевој конфигурацији, познатих под заједничким именом *аритметика целобројних Аполонијевих конфигурација кругова.* За ову прилику смо изабрали један од њих. Дефинишемо функције $N^{\mathcal{P}}(T)$ – број кругова у Аполонијевој конфигурацији $\mathcal{P}$ кривине мање од T, $N_2^{\mathcal{P}}(T)$ – број парова тангентних кругова у $\mathcal{P}$ кривине мање од T, $\pi^{\mathcal{P}}(T)$ – број кругова у $\mathcal{P}$ чије су кривине прости бројеви мањи од T и $\pi_2^{\mathcal{P}}(T)$ – број парова тангентних кругова у $\mathcal{P}$ чије су кривине прости бројеви мањи од T. Основни циљ овог рада биће проучавање асимптотског понашања ових функција кад $T \to +\infty$.

Формулација овог проблема (као и било ког другог из теорије бројева) је елементарна и разумљива свима. Међутим, решење је далеко од елементарног. Решавање једног оваквог проблема захтева комбиновање техника из скоро свих области математике.

Аполонијеве конфигурације ћемо посматрати као орбите дејства Аполонијеве групе на хиперболички простор. Аполонијева група је дискретна подгрупа групе изометрија хиперболичког простора. Изучавање дејства дискретне подгрупе изометрија на хиперболички простор заузима важно место у модерној теорији бројева. На примеру Аполонијеве групе ћемо приказати неке технике и резултате који важе и општије, за дејство дискретне подгрупе изометрија. Истим методама се проучавају и разни други проблеми, који наизглед немају никакве везе са Аполонијевим конфигурацијама, као што су нпр. непрекидни разломци или Питагорине[3] тројке (детаљније у [16], [17]).

Рад је подељен на осам глава:

Прва глава је уводног типа. У њој су изложени основни појмови и везе између њих. Поред тога, наведено је и пар занимљивости везаних за Аполонијеве конфигурације.

Друга глава приказује Аполонијеву групу као дискретну подгрупу групе изометрија хиперболичког простора. Ту су изложене различите реализације Аполонијеве групе и групе изометрија, као и изоморфизми између тих реализација.

У трећој глави су изложена основна (геометријска) својства Аполонијеве групе која ће бити значајна у даљој причи.

У четвртој глави уводимо функције $N^{\mathcal{P}}(T)$, $N_2^{\mathcal{P}}(T)$, $\pi^{\mathcal{P}}(T)$ и $\pi_2^{\mathcal{P}}(T)$ и започињемо изучавање њиховог асимптотског понашања.

У петој и шестој глави је изложен алат неопходан за процену претходних функција.

---

[3] $\Pi\upsilon\theta\alpha\gamma o\rho\alpha\varsigma$ o $\Sigma\alpha\mu\iota o\varsigma$ (око 570. п.н.е. – око 500. п.н.е.), грчки математичар, филозоф и музичар

Седма глава је суштински наставак четврте. У њој, помоћу алата из претходне две главе, долазимо до оцене за $N^{\mathcal{P}}$ и $N_2^{\mathcal{P}}$.

Последња, осма глава се бави простим бројевима у Аполонијевој конфигурацији. У њој, помоћу решета долазимо до горње границе за $\pi^{\mathcal{P}}$ и $\pi_2^{\mathcal{P}}$. Занимљиво је да ћемо добити процене аналогне проценама броја простих бројева и простих бројева близанаца мањих од T.

Желео бих да се захвалим свом ментору, др Горану Ђанковићу, на предложеној теми, помоћи приликом израде овог рада и изузетно корисним примедбама и сугестијама. Такође, захваљујем се на помоћи и осталим члановима комисије, др Мирослави Антић и проф. др Милошу Арсеновићу.

ГЛАВА 1

ГЕОМЕТРИЈА АПОЛОНИЈЕВИХ КОНФИГУРАЦИЈА КРУГОВА

На столу леже три новчића који се међусобно додирују. Поставља се питање да ли можемо поставити још један (мали) новчић тако да додирује сва три? И да ли можемо одредити његов полупречник ако знамо полупречнике ова три новчића?

Слика 1: *Три навчића који се додирују*

Овим проблемом се први бавио Аполоније из Пергама, познатији под надимком Велики геометар. Оригинална формулација је гласила овако: у равни су дата три круга, треба конструисати круг који их додирује. Овде допуштамо и тзв. граничне случајеве круга: тачку (када је $r = 0$) и праву ($r = \infty$). У делу „*О тангентности*“ (грч. $E\pi\alpha\varphi\alpha\iota$) Аполоније је показао да овај проблем има тачно два решења и дао поступак за конструкцију тих кругова.

1.1 Аполонијева теорема

Аполонијев проблем ћемо посматрати у проширеној комплексној равни $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Надаље ћемо се ограничити само на кругове позитивног полупречника, тј. кругове и праве. У $\overline{\mathbb{C}}$ праве можемо видети као кругове који пролазе кроз тачку ∞.

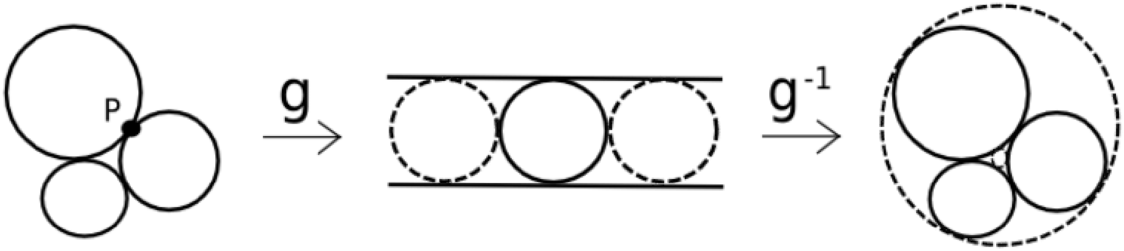
Користићемо групу Мебијусових[4] трансформација равни $\overline{\mathbb{C}}$

$$M\ddot{o}b(\mathbb{C}) = \left\{ x \longmapsto \frac{ax+b}{cx+d} \;\middle|\; a,b,c,d \in \mathbb{C},\ ad-bc \neq 0 \right\},$$

као и проширену Мебијусову групу $M\ddot{o}b^*(\mathbb{C}) = \langle M\ddot{o}b(\mathbb{C}) \cup \{x \mapsto \overline{x}\}\rangle$. Елементе $M\ddot{o}b^*(\mathbb{C})$ ћемо звати уопштене Мебијусове трансформације. Уопштене Мебијусове трансформације сликају кругове у кругове. Помоћу њих ћемо извести (модеран) доказ Аполонијеве теореме.

Теорема 1. (Аполоније) *Дата су три међусобно тангентна круга C_1, C_2 и C_3. Постоје тачно два круга тангентна на сва три.*

Доказ. Нека је P заједничка тачка кругова C_1 и C_2. Постоји уопштена Мебијусова трансформација g која слика тачку P у ∞. Геометријски гледано, то је инверзија у односу на круг са центром у P ако је $P \in \mathbb{C}$, или идентитет ако је $P = \infty$.



Слика 2: *Графички приказ доказа Аполонијеве теореме*

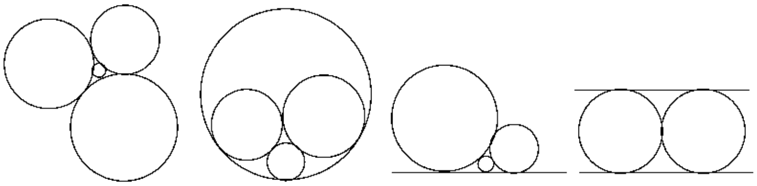
Пошто је $g(P) = \infty$, $g(C_1)$ и $g(C_2)$ ће бити праве, а $g(C_3)$ круг. Очигледно је да постоје тачно два круга D_1 и D_2 који додирују $g(C_1)$, $g(C_2)$, и $g(C_3)$. Зато су њихове инверзне слике $g^{-1}(D_1)$ и $g^{-1}(D_2)$ једина два решења Аполонијевог проблема. $\square$

---

[4] August Ferdinand Möbius (1790. – 1868.), немачки математичар

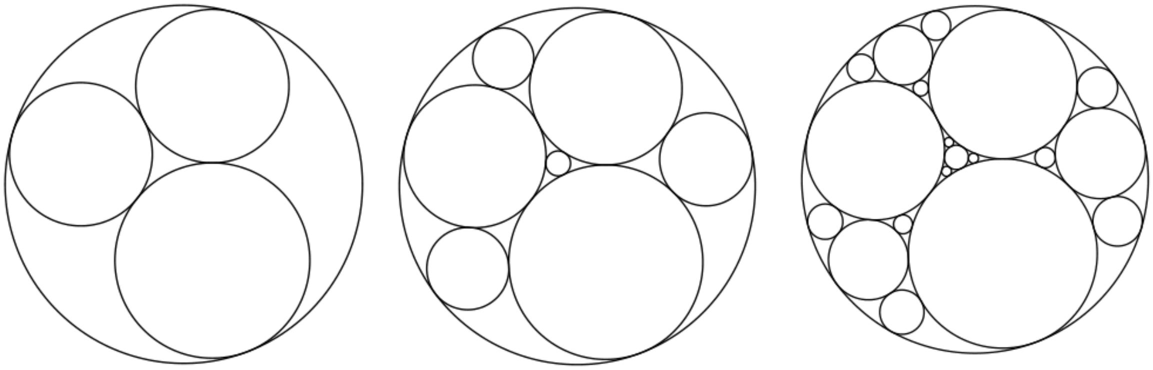
1.2 Конструкција Аполонијеве конфигурације

Нека су дата четири међусобно тангентна круга у равни. Ова конструкција је позната под називом *Декартова*[5] *конфигурација кругова.*



Слика 3: *Све могуће Декартове конфигурације*

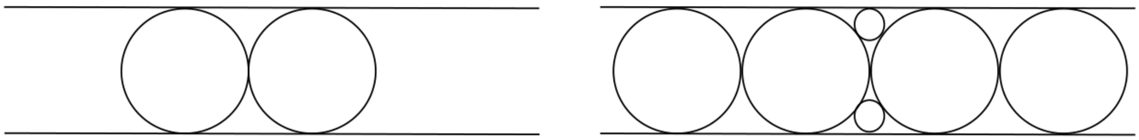
Према Аполонију за свака три круга можемо конструисати још један који их додирује и који је различит од четвртог круга из почетне конфигурације. Занимљиво је да сваки круг заједно са три круга од којих је добијен чини нову Декартову конфигурацију, тако да можемо да применимо претходни поступак на ову четворку кругова. Понављајући овај поступак бесконачно много пута добијамо *Аполонијеву конфигурацију кругова (Аполонијево паковање).*



Слика 4: *Кругови у 0., 1. и 2. генерацији*

---

[5] Rene Descartes (1596. – 1650.), француски математичар и филозоф



Слика 5: *Кругови у 0. и 1. генерацији у случају када су два круга праве*

1.3 Дуални кругови и скривене инверзије

Нека је $C = (C_1, C_2, C_3, C_4)$ једна Декартова конфигурација, и нека је $\check{C}_4$ круг тангентан на C_1, C_2 и C_3, различит од C_4. Обележимо са A_{ij} пресечну тачку кругова C_i и C_j. За круг $\widetilde{C}_4$ који садржи тачке A_{12}, A_{13} и A_{23} кажемо да је *дуални круг* круга C_4. И аналогно се дефинишу дуални кругови $\widetilde{C}_1$, $\widetilde{C}_2$ и $\widetilde{C}_3$.

Дефиниција 2. *Конфигурацију $\widetilde{C} = (\widetilde{C}_1, \widetilde{C}_2, \widetilde{C}_3, \widetilde{C}_4)$ зовемо дуална Декартова конфигурација конфигурације C.*

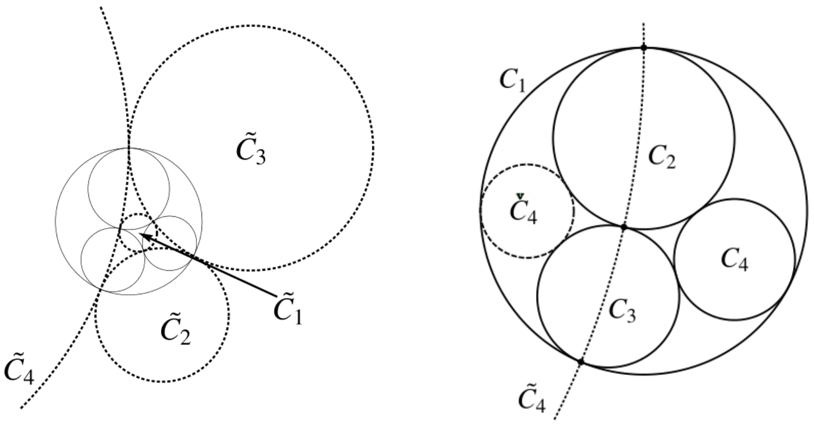
Четворка $\widetilde{C}$ је заиста Декартова конфигурација јер је $\widetilde{C}_i \cap \widetilde{C}_j = \{A_{pq}\}$ где је $\{p, q\} = \{1, 2, 3, 4\} - \{i, j\}$. Занимљиве су инверзије у односу дуалне кругове $\widetilde{C}_i$ (под инверзијом у односу на праву подразумевамо симетрију).

Теорема 3. *Инверзија $\mathfrak{s}_i$ у односу на дуални круг $\widetilde{C}_i$ слика C_i у $\check{C}_i$ и обрнуто.*

Доказ. Нпр. нека је $i = 4$. Користићемо инверзију g из доказа Аполонијеве теореме. Слике $g(C_1)$ и $g(C_2)$ су паралелне праве, а $g(C_3)$ и $g(C_4)$ кругови између њих. Затим, $g(\widetilde{C}_4)$ је права (кроз $g(A_{12})$, $g(A_{13})$ и $g(A_{23})$) и, очигледно, симетрија f у односу на ту праву слика $g(C_4)$ у $g(\check{C}_4)$. Зато $g^{-1}fg$ слика C_4 у $\check{C}_4$, а $g^{-1}fg$ је заправо инверзија у односу на $g^{-1}(g(\widetilde{C}_4)) = \widetilde{C}_4$. □

Последица 4. *Инверзија $\mathfrak{s}_i$ у односу на дуални круг $\widetilde{C}_4$ слика конфигурацију (C_1, C_2, C_3, C_4) у $(C_1, C_2, C_3, \check{C}_4)$.*

Додатно, $\mathfrak{s}_4(\check{C}_j)$ ће бити дуални круг круга $\mathfrak{s}_4(C_j)$. Наравно, исто важи и за све остале инверзије $\mathfrak{s}_i$. У нултој генерацији смо имали конфигурацију C, у првој добијамо $\mathfrak{s}_i(C)$ за $1 \leqslant i \leqslant 4$. У другој генерацији ћемо нове конфигурације добијати као слике $\mathfrak{s}_i(C)$ при инверзији у односу на дуални круг $\mathfrak{s}_i(\check{C}_j)$. Како је инверзија у односу на $\mathfrak{s}_i(\check{C}_j)$ једнака композицији $\mathfrak{s}_i\mathfrak{s}_j\mathfrak{s}_i^{-1}$, нова конфигурација ће бити $\mathfrak{s}_i\mathfrak{s}_j\mathfrak{s}_i^{-1}\mathfrak{s}_i(C) = \mathfrak{s}_i\mathfrak{s}_j(C)$. И слично, све Декартове конфигурације се добијају из почетне (коначном) применом трансформација $\mathfrak{s}_i \in M\ddot{o}b^*(\mathbb{C})$.



Слика 6: *Дуална конфигурација и инверзија у односу на дуални круг*

Дефиниција 5. *Групу* $\mathfrak{a} := \langle \mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2, \mathfrak{s}_3, \mathfrak{s}_4 \rangle \leqslant M\ddot{o}b^*(\mathbb{C})$ *зовемо (геометријска) Аполонијева група.*

Скуп свих Декартових конфигурација ће бити $\{\mathfrak{s}(C) \mid \mathfrak{s} \in \mathfrak{a}\}$.

Приметимо да се инверзијом у односу на одговарајући дуални круг прва конфигурација са слике 3 слика у другу, и обрнуто. Зато се од њих добијају исте Аполонијеве конфигурације.

Постоје две суштински различите конфигурације. Једна се добија из прве (друге) конфигурације са слике 3 – она има један велики круг унутар ког се налазе остали. Друга се добија из четврте конфигурације – то су две паралелне праве између којих се налазе остали кругови. Основна разлика је што је једна конфигурација ограничена, а друга није. Тачније, постоји још једна могућност (трећа са слике 3) али она нема лепа својства попут ове две те је нећемо ни разматрати.

1.4 Целобројне кривине и Декартова квадратна форма

Кривина круга C полупречника r је $\kappa(C) = \pm\frac{1}{r}$. На почетку смо се ограничили само на кругове позитивног полупречника како би кривине биле коначне. Други разлог је геометријски – да смо дозволили и тачке, у Декартовој конфигурацији бисмо имали три, а не четири круга. Користићемо ознаке κ_i за $\kappa(C_i)$ и $\check{\kappa}_i$ за $\kappa(\check{C}_i)$.

Једна кружна линија је граница два круга у $\hat{\mathbb{C}}$. Кривина унутрашњости се узима са знаком +, а кривина спољашњости (тј. круга који садржи тачку ∞) са знаком $-$. Како бисмо имали једнозначност код Аполонијеве конфигурације захтеваћемо да су сви кругови који у њој учествују међусобно дисјунктни. Приметимо да због захтева дисјунктности највише један круг може садржати ∞, тј. Аполонијева конфигурација садржи највише један круг негативне кривине.

Проучимо прве две од могуће четири конфигурације. Требаће нам следеће формуле:

Лема 6. *Дат је круг E полупречника k. Ако је g инверзија у односу на круг E:*

(1) Круг C полупречника r такав да су центри E и C на растојању $d > r + k$ се слика у круг полупречника $R = \frac{k^2 r}{d^2 - r^2}$.

(2) Права l која се налази на растојању $b > 0$ од центра круга E се слика у круг полупречника $R = \frac{k^2}{2b}$.

Доказ. (1) Нека је x растојање између центара кругова E и $g(C)$. Применимо формуле инверзије на тачке P и Q (са слике 7), имамо

$$(d-r)(k-x-R) = k^2, \quad (d+r)(k-x+R) = k^2,$$

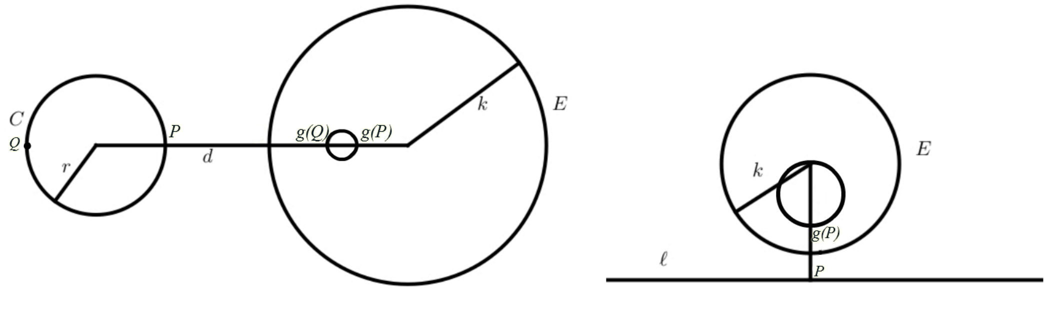
$$k - x - R = \frac{k^2}{d-r}, \quad k - x + R = \frac{k^2}{d+r},$$

$$R = \frac{1}{2}\left(\frac{k^2}{d+r} - \frac{k^2}{d-r}\right) = \frac{k^2 r}{d^2 - r^2}.$$

(2) Применимо формуле инверзије на тачку P (са слике 7), знамо да се тачка ∞ слика у центар круга E, имамо

$$b \cdot 2R = k^2, \quad R = \frac{k^2}{2b}.$$

□



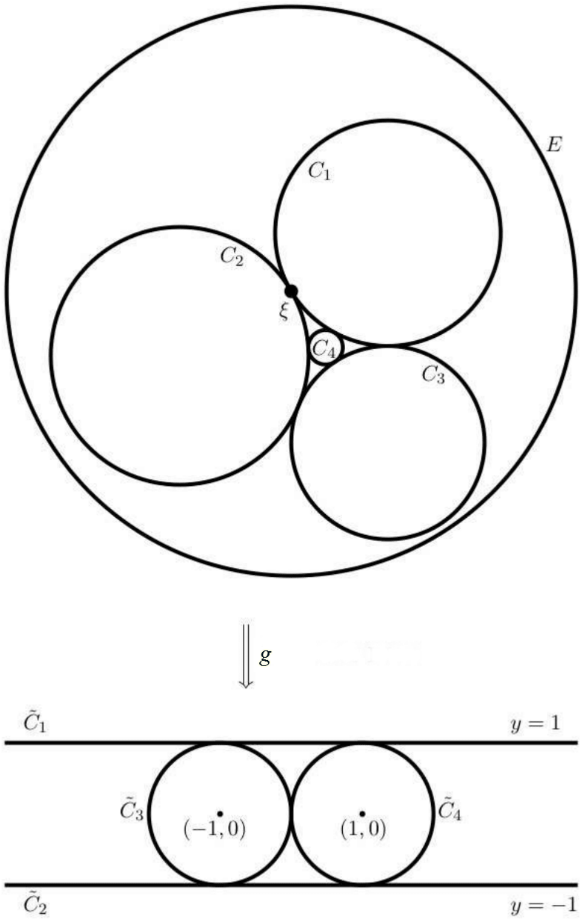
Слика 7: *Слике круга C и праве l при инверзији g*

Теорема 7. (Декарт) *Нека је* (C_1, C_1, C_3, C_4) *Декартова конфигурација. За одговарајуће кривине важи*

$$Q(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4) = 0,$$

где је Q *тзв. Декартова квадратна форма*

$$Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) - (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2.$$



Слика 8: *Инверзија* g *пресликава Декартову конфигурацију*

Доказ. Користимо већ познати трик, узећемо тачку $\xi = (x_0, y_0) \in C_1 \cap C_2$ и круг E са центром у ξ довољно великог полупречника k (да сви C_i буду у унутрашњости E). Инверзијом g у односу на круг E ћемо пресликати ову конфигурацију. Уз евентуалну хомотетију, транслацију и ротацију (и у домену и у кодомену) можемо постићи ситуацију као на слици 8. Транслација и ротација чувају дужине, док их хомотетија скалира. Везе из претходне леме су инваријантне у односу на поменуте три трансформације тако да их можемо занемарити. Из претходне леме (примењене на g^{-1}) следи

$$r(C_1) = \frac{k^2}{2|y_0 + 1|},$$

$$r(C_2) = \frac{k^2}{2|y_0 - 1|},$$

$$r(C_3) = \frac{k^2 \cdot 1}{(x_0 - 1)^2 + y_0^2 - 1^2} = \frac{k^2}{x_0^2 - 2x_0 + y_0^2},$$

$$r(C_4) = \frac{k^2}{x_0^2 + 2x_0 + y_0^2}.$$

Геометријски гледано, C_1 и C_2 се сликају у праве $y = 1$ и $y = -1$ које леже ван круга E. Додатно круг E се налази између тих правих. Због

$\xi = (x_0, y_0) \in E$ имамо $-1 < y_0 < 1$ одакле следи да је $|y_0 + 1| = y_0 + 1$ и $|y_0 - 1| = -y_0 + 1$. Како је $\kappa_i = \frac{1}{r(C_i)}$ имамо:

$$Q(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4) = \frac{1}{k^4}[2(4(y_0+1)^2 + 4(-y_0+1)^2 + (x_0^2 - 2x_0 + y_0^2)^2 + (x_0^2 + 2x_0 + y_0^2)^2) -$$

$$-(2(y_0+1) + 2(-y_0+1) + (x_0^2 - 2x_0 + y_0^2) + (x_0^2 + 2x_0 + y_0^2))^2] =$$

$$= \frac{1}{k^4}[(4x_0^4 + 4y_0^4 + 8x_0^2y_0^2 + 16x_0^2 + 16y_0^2 + 16) - (2x_0^2 + 2y_0^2 + 4)^2] = 0.$$

□

Исти закључак важи и у четвртом случају са слике 3. Из $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$ и $\kappa_3 = \kappa_4$ следи $Q(0, 0, \kappa_3, \kappa_3) = 2(\kappa_3^2 + \kappa_3^2) - (\kappa_3 + \kappa_3)^2 = 4\kappa_3^2 - 4\kappa_3^2 = 0$. Трећи случај – када је тачно један круг права је специфичан. Претходно неће важити (проблем је што ова конфигурација није ограничена) и тај случај нећемо разматрати.

Важи и обрнут смер у Декартовој теореми: за сваку четворку κ која поништава Декартову форму (и која се често назива Декартова четворка) постоји Декартова конфигурација. Лако се конструишу три круга који се додирују и имају кривине κ_1, κ_2 и κ_3, а четврти кривине κ_4 је могуће конструисати зато што је у питању Декартова четворка.

Када имамо задату неку Декартову четворку $(\kappa_1, \kappa_1, \kappa_3, \kappa_4)$ кривина из Декартове форме можемо одредити нпр. кривину $\check{\kappa}_4$ круга $\check{C}_4$. Она је нула полинома (по x)

$$Q(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, x) = x^2 - 2(\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3)x + (\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + \kappa_3^2 - 2\kappa_1\kappa_2 - 2\kappa_1\kappa_3 - 2\kappa_2\kappa_3)$$

различита од κ_4. Одавде се $\check{\kappa}_4$ може одредити као корен квадратне једначине, или још лакше из Вијетових[6] правила: $\kappa_4 + \check{\kappa}_4 = 2(\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3)$, тј. $\check{\kappa}_4 = 2\kappa_1 + 2\kappa_2 + 2\kappa_3 - \kappa_4$.

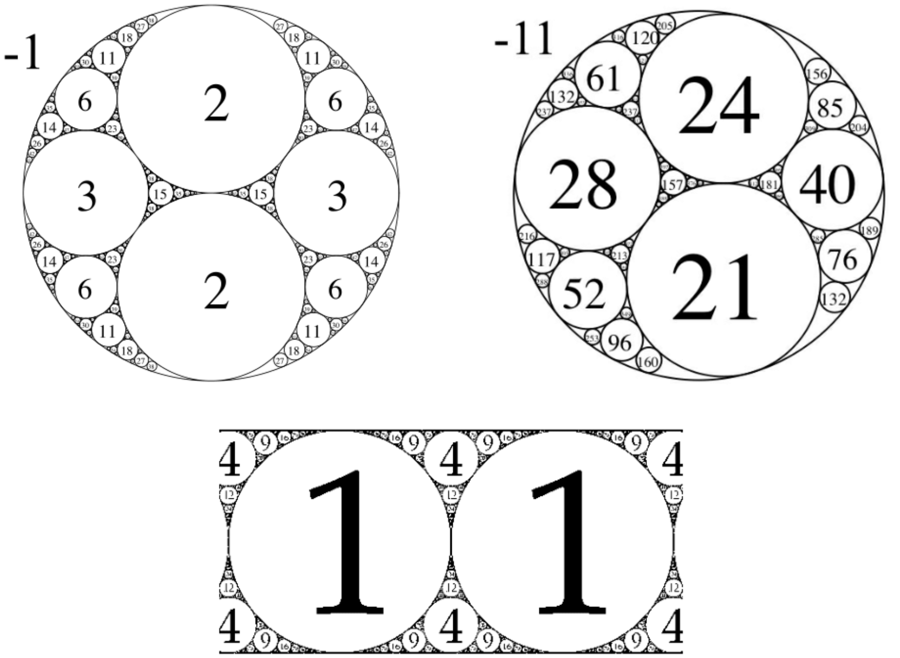
Последица 8. *Ако кругови у почетној Декартовој конфигурацији имају целобројне кривине, онда и сви кругови који се јављају у одговарајућој Аполонијевој конфигурацији имају целобројне кривине.*

Дефиниција 9. *Целобројна Аполонијева конфигурација је Аполонијева конфигурација у којој сви кругови имају целобројне кривине.*

Целобројна Аполонијева конфигурација се графички представља тако што се унутар сваког круга упише његова кривина. Уколико се другачије не нагласи надаље ћемо подразумевати да је свака Аполонијева конфигурација целобројна.

---

[6] François Viète (1540. – 1603.), француски математичар



Слика 9: *Аполонијеве конфигурације кругова за почетне Декартове четворке* $(-1, 2, 2, 3)$, $(-11, 21, 24, 28)$ *и* $(0, 0, 1, 1)$, *редом*

1.5 Орбита дејства Аполонијеве групе

Присетимо се конструкције Аполонијевог паковања. Геометријски гледано Аполонијеву конфигурацију чине сви кругови који се могу добити од почетна четири инверзијама у односу на дуалне кругове.

Погледајмо како то утиче на кривине. Уколико се кривина $\check{\kappa}_4$ добија из Декартове четворке $(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4)$, показали смо да важи $\check{\kappa}_4 = 2\kappa_1 + 2\kappa_2 + 2\kappa_3 - \kappa_4$, или у матричном облику:

$$\begin{pmatrix} \kappa_1 & \kappa_2 & \kappa_3 & \check{\kappa}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa_1 & \kappa_2 & \kappa_3 & \kappa_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

И слично се добијају кривине $\check{\kappa}_1$, $\check{\kappa}_2$ и $\check{\kappa}_3$. Дакле, инверзијама одговарају матрична множења здесна следећим матрицама:

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Дефиниција 10. *Групу* $\mathcal{A} := \langle A_1, A_2, A_3, A_4 \rangle$ *зовемо (матрична) Аполонијева група.*

Наравно, ова група $\mathcal{A}$ је изоморфна са оном геометријском $\mathfrak{a}$, одакле следи $A_i^2 = E$ за све i. Очигледно је $\det A_i = -1$ за све i, што даље повлачи $\mathcal{A} \leqslant GL_4(\mathbb{Z})$.

Ако је $(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4)$ почетна Декартова четворка, све Декартове четворке се добијају матричним множењем ове четворке елементима Аполонијеве групе $\mathcal{A}$. Дакле, скуп тих четворки је $(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4)\mathcal{A}$. Другим речима, скуп Декартових четворки се може видети као орбита елемента $(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4)$ при дејству Аполонијеве $\mathcal{A}$ групе на скуп $\mathbb{Z}^4$.

1.6 Корене четворке и теорија редукције

Једна Аполонијева конфигурација кругова $\mathcal{P}$ садржи бесконачно много Декартових. Додатно, коју год од њих да смо узели као почетну добили бисмо исту конфигурацију $\mathcal{P}$. Исто важи и за одговарајуће Декартове четворке. Природно је поставити питање како изабрати једну од њих? И како постићи да тај избор буде јединствен?

Дефиниција 11. *Декартову четворку* $\kappa = (\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4)$ *зовемо корена ако је* $\kappa_1 \leqslant 0 \leqslant \kappa_2 \leqslant \kappa_3 \leqslant \kappa_4$ *и* $\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 \geqslant \kappa_4$.

Појаснимо мало претходну дефиницију. Услов $\kappa_1 \leqslant 0 \leq \kappa_2 \leq \kappa_3 \leq \kappa_4$ нам поред уређења гарантује и да је први круг негативне кривине, тј. да је то спољашњи круг или права. Због $\check{\kappa}_4 = 2(\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3) - \kappa_4$, други услов је еквивалентан са $\check{\kappa}_4 \geqslant \kappa_4$.

Нека је $L(\kappa) = \kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 + \kappa_4$. Приметимо да је $L(\kappa) > 0$, а разлог је геометријски: највише једна кривина је негативног полупречника, а одговарајући круг има највећи полупречник, односно најмању кривину (по апсолутној вредности). Приметимо да је $\kappa_4 \leqslant \check{\kappa}_4$ еквивалентно са $L(\kappa) \leqslant L(\kappa A_4)$.

Редукциони алгоритам: Дата је Декартова четворка κ.

(1) Ако је $L(\kappa A_i) \leqslant L(\kappa)$ за неко $1 \leqslant i \leqslant 4$ заменимо κ са κA_i и поновимо овај корак.

(2) Ако ниједно A_i не смањује $L(\kappa)$ уредимо $(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4)$ растуће.

Лема 12. *Редукциони алгоритам увек смањује највећи број из четворке* κ. *Специјално, алгоритам се зауставља ако наиђе на корену четворку.*

Доказ. Нека је нпр. $\kappa_1 \leqslant \kappa_2 \leqslant \kappa_3 \leqslant \kappa_4$. Знамо да је $L(\kappa A_4) = \kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 + \check{\kappa}_4 = \kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 + (2\kappa_1 + 2\kappa_2 + 2\kappa_3 - \kappa_4) = 3L(\kappa) - 4\kappa_4$. И слично је $L(\kappa A_i) = 3L(\kappa) - 4\kappa_i$.

Зато ако за неко $1 \leqslant i \leqslant 4$ важи $L(\kappa) > L(\kappa A_i)$, онда је и $L(\kappa) > L(\kappa A_4)$. Још треба показати да из $L(\kappa) > L(\kappa A_4)$ следи $L(\kappa) \leqslant L(\kappa A_i)$ за $1 \leqslant i \leqslant 3$. $L(\kappa) > L(\kappa A_4)$ повлачи $\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 < \kappa_4$. Следи $\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_4 > 2\kappa_1 + 2\kappa_2 + \kappa_3 > \kappa_3$, односно $L(\kappa) < L(\kappa A_3)$. И аналогно се изводи закључак у осталим случајевима. □

Лема 13. *Нека је* $0 < \kappa_1 \leqslant \kappa_2 \leqslant \kappa_3 \leqslant \kappa_4$, *тада је* $\check{\kappa}_4 < \kappa_3$.

Доказ. Кривине κ_4 и $\check{\kappa}_4$ су корени квадратне једначине $Q(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, x) = 0$. Зато је $\{\kappa_4, \check{\kappa}_4\} = \{\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 \pm 2\Delta\}$ где је $\Delta = \sqrt{\kappa_1\kappa_2 + \kappa_1\kappa_3 + \kappa_2\kappa_3}$.

Приметимо да је

$$2\Delta = 2\sqrt{\kappa_1\kappa_2 + \kappa_1\kappa_3 + \kappa_2\kappa_3} > 2\sqrt{\kappa_1\kappa_3 + \kappa_2\kappa_3} = \sqrt{2(\kappa_1 + \kappa_2)(\kappa_3 + \kappa_3)} \geqslant$$

$$\geqslant \sqrt{2(\kappa_1 + \kappa_2)^2} \geqslant \sqrt{(\kappa_1 + \kappa_2)^2} = |\kappa_1 + \kappa_2| = \kappa_1 + \kappa_2.$$

Следи, $\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 - 2\Delta < \kappa_3 \leqslant \kappa_4$, па је $\check{\kappa}_4 = \kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 - 2\Delta < \kappa_3$. □

Последица 14. *За корену четворку* κ, $L(\kappa)$ *је минимално тј. важи* $L(\kappa) < L(\kappa\sigma)$, *за све* $\sigma \in \mathcal{A} - \{\mathbb{1}_{\mathbb{Z}^4}\}$.

Доказ. Треба показати $L(\kappa) < L(\kappa\sigma)$ за свако $\sigma = A_{i_n} A_{i_{n-1}} \dots A_{i_1} \in \mathcal{A}$. Радићемо индукцијом по броју n, а лема 13 нам даје базу.

Нека тврђење важи за $\sigma' = A_{i_{n-1}} A_{i_{n-2}} \dots A_{i_1}$, треба показати и за $\sigma = \sigma' A_{i_n}$. Можемо претпоставити да $\kappa\sigma'$ није корена четворка јер би у супротном било $\kappa\sigma' = \kappa\sigma$. Разликоваћемо два случаја:

Ако $(\kappa\sigma')_{i_n}$ није највећи број у $\kappa\sigma'$, према леми 13 је $L(\kappa\sigma') \leqslant L(\kappa\sigma)$, одакле следи $L(\kappa) < L(\kappa\sigma') \leqslant L(\kappa\sigma)$.

Ако је $(\kappa\sigma')_{i_n}$ највећи број у $\kappa\sigma'$, нека је нпр. $(\kappa\sigma')_1 \leqslant (\kappa\sigma')_2 \leqslant (\kappa\sigma')_3 \leqslant (\kappa\sigma')_4 = (\kappa\sigma')_{i_n}$. Приметимо да је $L(\kappa\sigma') \leqslant L(\kappa\sigma)$ (следи из чињенице да $\kappa\sigma'$ није корена четворка у случају да је $(\kappa\sigma') \geqslant 0$ или из претходне леме ако је $(\kappa\sigma') > 0$). И опет је $L(\kappa) < L(\kappa\sigma') \leqslant L(\kappa\sigma)$. □

Теорема 15. *Нека је* κ *произвољна Декартова четворка.*

(1) Редукциони алгоритам примењен на κ *се завршава у коначно много корака.*

(2) Редукциони алгоритам даје корену четворку.

(3) Свака Аполонијева конфигурација има јединствену корену четворку.

Доказ. (1) Сваком применом првог корака смањује се цео број $L(\kappa)$ (и та разлика је целобројна). Са друге стране знамо да је $L(\kappa) > 0$. Зато ће се алгоритам завршити у највише $L(\kappa)$ корака (мисли се на ово почетно κ).

(2) Треба проверити $\kappa_1 \leqslant 0$ и $\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 \geqslant \kappa_4$ (или еквивалентно $\kappa_4 \leqslant \check{\kappa}_4$). Друго следи из $L(\kappa) \leqslant L(\kappa A_4) = L(\check{\kappa})$. Ако претпоставимо супротно да је $\kappa_1 > 0$, из претходне леме следи да је $\check{\kappa}_4 < \kappa_3 \leqslant \kappa_4$ што је у контрадикцији са претходним.

(3) Егистенција следи из 2. Претпоставимо супротно, да постоје различите корене четворке κ и λ. Тада постоји неко $\sigma \in \mathcal{A}$такво да је $\lambda = \sigma\kappa$. Према претходној последици је $L(\kappa) < L(\kappa\sigma) = L(\lambda)$ и $L(\lambda) < L(\lambda\sigma^{-1}) = L(\kappa)$, што није могуће. Зато је корена четворка јединствена.

□

Корена четворка је јединствена, али се може догодити да има више Декартових конфигурација којима одговара та четворка. Нпр. на слици 9 постоји бесконачно много Декартових конфигурација које одговарају четворци $(0, 0, 1, 1)$ и које се понављају периодично.

Декартове четворке са узајамно простим координатама зовемо *примитивним.* Корена четворка κ је примитивна акко су све Декартове четворке у тој конфигурацији примитивне јер се све четворке добијају из корене дејством Аполонијеве групе које чува највећи заједнички делилац.

Произвољна корена четворка се може добити из примитивне корене четворке хомотетијом равни са целобројним коефицијентом. Зато ћемо надаље (где год то олакшава посао) подразумевати да је свака корена четворка примитивна.

Специјално, у случају ограничене конфигурације, то значи да је корена четворка баш једнака $(0, 0, 1, 1)$. У овом случају ситуацију можемо додатно поједноставити претпоставком да је Декартова конфигурација из које се добија Аполонијева конфигурација $\mathcal{P}$ састављена од правих $x_2 = \pm 1$ и кругова полупречника 1 са центром у $(\pm 1, 0)$. Ову конфигурацијом ћемо означавати са $\mathcal{P}_0$. Свака друга Аполонијева конфигурација са кореном четворком $(0, 0, 1, 1)$ се добија из $\mathcal{P}_0$ транслацијом и ротацијом које занемарујемо јер не мењају кривине.

1.7 Остаци Декартових четворки

Корену четворку смо изабрали тако да има најмање могуће координате. Геометријски, то значи да кривине четири највећа круга чине корену четворку. Са друге стране, кругови који се добијају у наредним генерацијама имаће све мање и мање кривине. Видећемо касније и формални доказ ове потпуно очекиване особине.

Означимо са $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}(\mathcal{P}) \subseteq \mathbb{Z}$ скуп кривина свих кругова који се јављају у конфигурацији $\mathcal{P}$. Према претходном, идући ка вишим генерацијама, скуп $\mathfrak{K}$ се попуњава од мањих ка већим кривинама. Природно је очекивати да се у том процесу неке кривине понове, као и да се неки бројеви ,,прескоче“.

Иако вероватно скуп $\mathfrak{K}$ није једнак целом $\mathbb{Z}$, занимљиво је да ће $\mathfrak{K}$ садржати представнике свих остатака по модулу m, за неке целе бројеве m. Да бисмо показали ово тврђење требаће нам пар помоћних лема.

Лема 16. *За све $n \in \mathbb{N}$ важи*

$$(A_1A_2)^n = \begin{pmatrix} -2n+1 & -2n & 0 & 0 \\ 2n & 2n+1 & 0 & 0 \\ 4n^2-2n & 4n^2+2n & 1 & 0 \\ 4n^2-2n & 4n^2+2n & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Доказ. Доказ изводимо индукцијом, за $n = 1$ имамо

$$A_1A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Прелазимо на индукцијски корак. Претпоставимо да тврђење важи за n, проверимо за $n+1$:

$$(A_1A_2)^{n+1} = (A_1A_2)^n A_1A_2 = \begin{pmatrix} -2n+1 & -2n & 0 & 0 \\ 2n & 2n+1 & 0 & 0 \\ 4n^2-2n & 4n^2+2n & 1 & 0 \\ 4n^2-2n & 4n^2+2n & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2(n+1)+1 & -2(n+1) & 0 & 0 \\ 2(n+1) & 2(n+1)+1 & 0 & 0 \\ 4(n+1)^2-2(n+1) & 4(n+1)^2+2(n+1) & 1 & 0 \\ 4(n+1)^2-2(n+1) & 4(n+1)^2+2(n+1) & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

Наравно, претходна лема важи и у случају било која друга два генератора уз одговарајуће пермутовање колона.

За прост број p, са $\mathbb{F}_p$ означавамо коначно поље са p елемената (изоморфно са $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$).

Лема 17. *За сваки прост број* $p > 5$ *и сваки природан број* n *постоји остатак* $a \in \mathbb{F}_{p^n} - \{0, p^n - 1\}$ *такав да су и* a *и* $a + 1$ *квадрати у* $\mathbb{F}_{p^n}$.

Доказ. Скуп $\mathbb{F}_{p^n} - \{0\}$ има $p^n - 1$ елемената, од чега $\frac{p^n-1}{2}$ квадрата. Међу квадратима су свакако 1 и 4. Уколико је бар један од остатака 2 или 3 квадрат у $\mathbb{F}_{p^n}$, тврђење тривијално важи.

Ако ни 2, ни 3 нису квадрати између 5 и $p^n - 1$ има $p^n - 5$ остатака, од чега $\frac{p^n-1}{2} - 2 = \frac{p^n-5}{2}$ квадрата. Претпоставимо супротно, да не постоје два узастопна квадрата. Следи, квадрати између 5 и $p^n - 1$ су сви парни бројеви.

То даље полвачи $p^n \leqslant 9$, јер би у супротном 9 био квадрат у $\mathbb{F}_{p^n}$. Следи, $p = 7$ и $n = 1$. Тада су 1 и $2 \equiv_7 3^2$ квадрати у $\mathbb{F}_7$, што је у супротности са нашом претпоставком. □

Лема 18. *Нека је* $\mathcal{P}$ *Аполонијева конфигурација са кореном четворком* ξ *и нека је* m *природан број такав да је* НЗД$(m, 6) = 1$. *Тада постоји кривина* $\kappa = (\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4) \in \xi\mathcal{A}$ *за коју је* НЗД$(\kappa_1 + \kappa_2, m) = 1$.

Доказ. Поред ξ, орбита $\xi\mathcal{A}$ мора садржати и

$$\xi(A_1A_2)^n = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) \begin{pmatrix} -2n+1 & -2n & 0 & 0 \\ 2n & 2n+1 & 0 & 0 \\ 4n^2-2n & 4n^2+2n & 1 & 0 \\ 4n^2-2n & 4n^2+2n & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \big((-2n+1)\xi_1 + 2n\xi_2 + (4n^2 - 2n)(\xi_3 + \xi_4),$$
$$-2n\xi_1 + (2n+1)\xi_2 + (4n^2 + 2n)(\xi_3 + \xi_4), \xi_3, \xi_4\big)\,,$$

за све $n \in \mathbb{N}$. Дефинишимо функцију $q : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ као збир прве две координате Декартове четворке $\xi(A_1A_2)^n$:

$$q(n) := 4n(\xi_2 - \xi_1) + \xi_1 + \xi_2 + 8n^2(\xi_3 + \xi_4).$$

Треба показати да функција q узима бар једну вредност узајамно просту са m. Нека је $m = \prod_p p^{n_p}$ факторизација броја m на степене простих бројева.

Покажимо најпре да за сваки прост делилац p постоји $r = r_p \in \mathbb{N}$ такво да су p и $q(r)$ узајамно прости. Претпоставимо супротно, тада p мора делити $q(r)$, за све $r \in \mathbb{N}$. Специјално,

$$q(1) = -3\xi_1 + 4\xi_3 + 8(\xi_3 + \xi_4) \equiv_p 0,$$

$$q(2) = -7\xi_1 + 9\xi_2 + 32(\xi_3 + \xi_4) \equiv_p 0.$$

$$q(3) = -11\xi_1 + 13\xi_2 + 72(\xi_3 + \xi_4) \equiv_p 0.$$

Ове конгруенције можемо видети као систем линеарних једначина по промењљивим ξ_1, ξ_2 и $\xi_3 + \xi_4$ над пољем $\mathbb{F}_p$. Детерминанта тог система је једнака $\begin{vmatrix} -3 & 4 & 8 \\ -7 & 9 & 32 \\ -11 & 13 & 72 \end{vmatrix} = -24 \not\equiv_p 0$. Крамерово[7] правило каже да овај систем има јединствено решење, а како је систем хомоген то решење мора бити тривијално. То значи да су бројеви ξ_1, ξ_2 и $\xi_3 + \xi_4$ дељиви са p. Са друге стране, из

$$0 = Q(\xi) \equiv_p 2(\xi_3^2 + \xi_4^2) - (\xi_3 + \xi_4)^2 = (\xi_3 - \xi_4)^2$$

следи да је и разлика $\xi_3 - \xi_4$ дељива са p. То даље значи да су све коордианте ξ дељиве са p, што није могуће будући да претпостављамо да је корена четворка примитивна.

Дакле, за сваки прост број $p|m$ постоји r_p такво да је $q(r) \not\equiv_p 0$. Приметимо да је $q(r_p + kp) \equiv_p q(r_p)$, за све $k \in \mathbb{Z}$ (за које је q дефинисано). Према кинеској теореми постоји $r \in \mathbb{N}$ такво да је $r \equiv_p r_p$, за све просте $p|m$. Тада је $q(r) \equiv_p q(r_p) \not\equiv_p 0$, што значи да је број $q(r)$ узајамно прост са m. ☐

Теорема 19. *Нека је $\mathcal{P}$ произвољна Аполонијева конфигурација, m природан број узајамно прост са 30 и $l \in \mathbb{F}_m$ произвољан остатак. Тада постоји кривина $\kappa \in \mathfrak{K}(\mathcal{P})$ таква да је $\kappa \equiv_m l$.*

Доказ. Означимо са $\mathcal{V}$ скуп свих врста матрица Аполонијеве групе. Према леми 16 Аполонијева група садржи матрицу

$$(A_1A_2)^{n_1}(A_3A_4)^{n_2} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2n_1+1 & -2n_1 & 0 & 0 \\ 2n_1 & 2n_1+1 & 0 & 0 \\ 4n_1^2-2n_1 & 4n_1^2+2n_1 & 1 & 0 \\ 4n_1^2-2n_1 & 4n_1^2+2n_1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4n_2^2-2n_2 & 4n_2^2+2n_2 \\ 0 & 1 & 4n_2^2-2n_2 & 4n_2^2+2n_2 \\ 0 & 0 & -2n_2+1 & -2n_2 \\ 0 & 0 & 2n_2 & 2n_2+1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} * & * & * & (-4n_1+1)(4n_2^2+2n_2) \\ * & * & * & (4n_1+1)(4n_2^2+2n_2) \\ * & * & * & 8n_1^2(4n_2^2+2n_2)-2n_2 \\ * & * & * & 8n_1^2(4n_2^2+2n_2)+2n_2+1 \end{pmatrix}.$$

Зато скуп $\mathcal{V}$ садржи врсту

$$v := \begin{pmatrix} (-4n_1+1)(4n_2^2+2n_2) \\ (4n_1+1)(4n_2^2+2n_2) \\ 8n_1^2(4n_2^2+2n_2)-2n_2 \\ 8n_1^2(4n_2^2+2n_2)+2n_2+1 \end{pmatrix}.$$

---

[7] Gabriel Cramer (1704. – 1752.), швајцарски математичар

Збир последње две координате v је

$$16n_1^2(4n_2^2+2n_2)+1=(2n_1)^2(16n_2^2+8n_2+1-1)+1=$$
$$=(2n_1)^2\left((4n_2+1)^2-1\right)+1=\left(2n_1(4n_2+1)\right)^2-(2n_1)^2+1.$$

Бројеве n_1 и n_2 ћемо изабрати тако да претходни збир буде дељив са m.

Нека је $m=\prod\limits_p p^{n_p}$ факторизација броја m на степене простих бројева. Према леми 17 постоје бројеви $a_p\in\mathbb{F}_{p^{n_p}}-\{0,p^{n_p}-1\}$ такви да је $a_p\equiv_{p^{n_p}}u_p^2$ и $a_p+1\equiv_{p^{n_p}}r_p^2$, за неке $u_p,r_p\in\mathbb{F}_{p^{n_p}}-\{0\}$. Према кинеској теореми постоје остаци $u,r\in\mathbb{F}_m^\times$ такви да је $u\equiv_{p^{n_p}}u_p$ и $r\equiv_{p^{n_p}}r_p$, за све просте бројеве $p|m$. (Са $R^\times$ означавамо скуп инвертибилних елемената прстена R.) Из $r^2-u^2\equiv_{p^{n_p}}r_p^2-u_p^2\equiv_{p^{n_p}}a_p+1-a_p=1$, за све p, и кинеске теореме следи $r^2-u^2\equiv_m 1$.

Изаберимо $n_1:=2^-r$ и $n_2:=4^-(r^-u-1)$, где $\cdot^-$ означава инверз у $\mathbb{F}_m^\times$. Елементи 2 и 4 су инвертибилни јер је m узајамно прост са 30, па самим тим и са 2 и 4, а r је инвертибилан према конструкцији. Тада је збир последње две координате v дељив са m. Следи, скуп $\mathcal{V}_m:=\{u_m\in\mathbb{F}_m\mid(\exists u\in\mathcal{V})u\equiv_m u_m\}$ садржи $v_m=(a,b,c,-c)^T$, за неке $a,b,c\in\mathbb{F}_m$. Зато $\mathcal{V}_m$ мора садржати и

$$(A_3A_4)^n v_m=\begin{pmatrix}1&0&4n^2-2n&4n^2+2n\\0&1&4n^2-2n&4n^2+2n\\0&0&-2n+1&-2n\\0&0&2n&2n+1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\\-c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a-4nc\\b-4nc\\c\\-c\end{pmatrix}.$$

Према леми 18 постоји четворка $\kappa=(\kappa_1,\kappa_2,\kappa_3,\kappa_4)\in\xi\mathcal{A}$ таква да је НЗД$(\kappa_1+\kappa_2,m)=1$. Следи, скуп $\mathfrak{K}_m:=\{u_m\in\mathbb{F}_m\mid(\exists u\in\mathfrak{K})u\equiv_m u_m\}\subseteq\mathbb{F}_m$ садржи

$$\kappa\begin{pmatrix}a-4nc\\b-4nc\\c\\-c\end{pmatrix}=a\kappa_1+b\kappa_2+c\kappa_3-c\kappa_4-4nc(\kappa_1+\kappa_2).$$

Приметимо да је НЗД$(4n(\kappa_1+\kappa_2),m)=1$, јер је НЗД$(4,m)=1$ по претпоставци, а НЗД$(\kappa_1+\kappa_2,m)=1$ према леми 18. Зато $4nc(\kappa_1+\kappa_2)$ (па самим тим и $a\kappa_1+b\kappa_2+c\kappa_3-c\kappa_4-4nc(\kappa_1+\kappa_2)$) узима све вредности $\mathbb{F}_m$ кад n пролази $\mathbb{F}_m$. Следи, $\mathfrak{K}_m=\mathbb{F}_m$. ☐

1.8 Веза са Лоренцовим четворкама

У теорији релативности се користи четвородимензиони простор Минковског[8]. Прве три координате y_1, y_2, и y_3 су просторне, а четврта

---

[8] Hermann Minkowski (1864. – 1909.), пољско – литвански математичар и физичар

координата y_4 описује време. Имамо *Лоренцову*[9] *квадратну форму*

$$L(y_1, y_2, y_3, y_4) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - y_4^2.$$

Ако је $L(y_1, y_2, y_3, y_4) = 0$ кажемо да је (y_1, y_2, y_3, y_4) Лоренцова четворка. Оне имају занимљиву физичку интерпретацију. Избором одговарајућих мерних јединица можемо постићи да се светлост креће јединичном брзином. Тада светлост за време y_4 пређе пут $y_4 = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}$, што је заправо растојање од координатног почетка до тачке (y_1, y_2, y_3). Ако се за y_4 узме време од настанка универзума, сфера $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = y_4^2$ ће бити граница видљивог универзума.

Занимљиво је да се Лоренцова форма може повезати са Декартовом

$$Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 - 2x_2x_4 - 2x_3x_4.$$

Њихове придружене матрице су редом:

$$M_L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad M_Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Директним рачуном се налази да је $M_Q = \frac{1}{2}\Phi M_L \Phi$ где је

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Теорема 20. *Пресликавање* $(y_1, y_2, y_3, y_4) = \frac{1}{2}(x_1, x_2, x_3, x_4)\Phi$ *је бијекција између реалних Декартових четворки и реалних Лоренцивих четворки. Додатно, његова рестрикција је бијекција између целобројних Декартових и целобројних Лоренцових четворки.*

Доказ. Нека је (x_1, x_2, x_3, x_4) реална Декартова четворка, тада је

$$\begin{aligned} L(y_1, y_2, y_3, y_4) &= (y_1, y_2, y_3, y_4) M_L (y_1, y_2, y_3, y_4)^T = \\ &= \left(\frac{1}{2}(x_1, x_2, x_3, x_4)\Phi\right) M_L \left(\frac{1}{2}(x_1, x_2, x_3, x_4)\Phi\right)^T = \\ &= \frac{1}{4}(x_1, x_2, x_3, x_4)\Phi M_L \Phi^T (x_1, x_2, x_3, x_4)^T = \\ &= \frac{1}{2}(x_1, x_2, x_3, x_4) M_Q (x_1, x_2, x_3, x_4)^T = \end{aligned}$$

---

[9] Hendrik Antoon Lorentz (1853. – 1928.), холандски физичар

$$= \frac{1}{2}Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0.$$

Следи, (y_1, y_2, y_3, y_4) је реална Лоренцова четворка. И аналогно се помоћу везе $M_L = 2\Phi^{-1}M_Q\Phi^{-1}$ показује да је за сваку Лоренцову четворку (y_1, y_2, y_3, y_4), четворка $2(y_1, y_2, y_3, y_4)\Phi^{-1}$ Декартова.

Важи

$$(y_1, y_2, y_3, y_4) = \frac{1}{2}(x_1, x_2, x_3, x_4)\Phi =$$

$$= \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4, x_1 + x_2 - x_3 - x_4, x_1 - x_2 + x_3 - x_4, x_1 - x_2 - x_3 + x_4).$$

Притом је

$$x_1 \pm x_2 \pm x_3 \pm x_4 \equiv_2 x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \equiv_2 (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 = 2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) \equiv_2 0,$$

одакле следи да је четворка (y_1, y_2, y_3, y_4) целобројна.

Приметимо да је $\Phi^2 = 4E$, одакле следи

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{2}(y_1, y_2, y_3, y_4)\Phi =$$

$$= \frac{1}{2}(y_1 + y_2 + y_3 + y_4, y_1 + y_2 - y_3 - y_4, y_1 - y_2 + y_3 - y_4, y_1 - y_2 - y_3 + y_4).$$

Притом је

$$y_1 \pm y_2 \pm y_3 \pm y_4 \equiv_2 y_1 + y_2 + y_3 - y_4 \equiv_2 y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - y_4^2 = 0,$$

одакле следи да је четворка (x_1, x_2, x_3, x_4) целобројна. □

ГЛАВА 2

РАЗЛИЧИТЕ РЕАЛИЗАЦИЈЕ АПОЛОНИЈЕВЕ ГРУПЕ И ЊЕНЕ АМБИЈЕНТНЕ ГРУПЕ

До сада смо закључили да се Аполонијева група може видети као подгрупа $M\ddot{o}b^*(\mathbb{C})$ или $GL_4(\mathbb{Z}) \leqslant GL_4(\mathbb{R})$. Наравно, Аполонијеву групу можемо видети и као подгрупу групе $M\ddot{o}b^*(\mathbb{C})$, коју чине они елементи који фиксирају задату Аполонијеву конфигурацију. У овој глави ћемо приметити да се Аполонијева група може видети и као подгрупа групе $Isom(\mathbb{H}^3)$ изометрија хиперболичког полупростора. Затим ћемо показати да то није случајност, већ да су групе $M\ddot{o}b^*(\mathbb{C})$ и $Isom(\mathbb{H}^3)$ изоморфне, као и да је $GL_4(\mathbb{R})$ нешто већа, али да садржи изоморфну копију претходних група. Додатно, видећемо и неке нове реализације Аполонијеве групе и одговарајуће амбијентне групе.

2.1 Граница хиперболичког полупростора

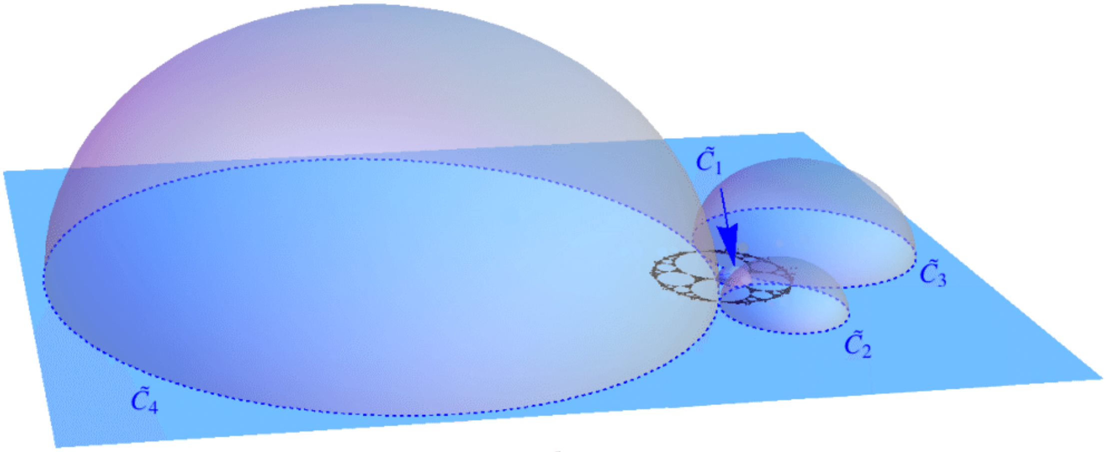
Посматраћемо тродимензиони хиперболички полупростор

$$\mathbb{H}^3 = \{(x_1, x_2, y) \mid x_1, x_2, y \in \mathbb{R},\ y > 0\} \cong \{(x, y) \mid x \in \mathbb{C},\ y > 0\}$$

у коме важе аксиоме геометрије Лобачевског[10]. Граница тог простора је раван $\overline{\mathbb{C}}$.

Аполонијева група је генерисана инверзијама $\mathfrak{s}_i$ у односу на дуалне кругове $\widetilde{C}_i$. Ове кругове можемо видети као границе полусфера из $\mathbb{H}^3$ са центрима у $\overline{\mathbb{C}}$. Уколико се догоди да је неки од дуалних кругова права њега можемо видети као границу полуравни ортогоналне на $\overline{\mathbb{C}}$. У сваком случају $\widetilde{C}_i$ су границе хиперболичких равни у $\mathbb{H}^3$.

Дакле, у $\overline{\mathbb{H}^3} = \mathbb{H}^3 \cup \overline{\mathbb{C}}$ дуалне кругове можемо проширити до (хиперболичких) равни, а инверзије у односу на кругове до симетрија у односу на те равни. Полусфере које се добијају продужењем дуалних кругова ћемо звати дуалне полусфере и обележавати са $\widetilde{S}_i$, $1 \leqslant i \leqslant 4$. Инверзије у односу на те сфере (које су заправо продужења $\mathfrak{s}_i$) ћемо означавати са $\mathfrak{S}_i$.



Слика 10: *Дуални кругови* $\widetilde{C}_i$ *се проширују до равни простора* $\overline{\mathbb{H}^3}$

Зато Аполонијеву групу можемо (до на изоморфизам) видети као подгрупу групе $Isom(\mathbb{H}^3)$ изометрија хиперболичког полупростора. Дакле, постоје три изоморфне Аполонијеве групе које су подгрупе група $GL_4(\mathbb{Z})$, $M\ddot{o}b^*(\mathbb{C})$ и $Isom(\mathbb{H}^3)$. Нећемо их разликовати, све три ћемо обележавати са $\mathcal{A}$, а из контекста ће бити јасно о којој групи се ради. Генераторе ове групе ћемо означавати се A_i када мислимо на инвертибилне 4×4 матрице, са $\mathfrak{s}_i$ када мислимо на уопштене Мебијусове трансформације (инверзије или симетрије) или са $\mathfrak{S}_i$ ако мислимо на изометрије (симетрије) $\mathbb{H}^3$.

Основна идеја је изучити ову групу јер помоћу ње и корене четворке можемо одредити који се све бројеви јављају као кривине, колико су густо распоређени, колико међу њима има простих, колико има простих бројева близанаца...

---

[10] Николай Иванович Лобачевский (1793. – 1856.), руски математичар

2.2 Пројектвина специјална група

Уочимо подгрупе $M\ddot{o}b(\mathbb{C})$ и $C = \{\mathbb{1}_{\mathbb{C}}, c\}$ групе $M\ddot{o}b^*(\mathbb{C})$, где је $c : x \mapsto \overline{x}$ комплексно конјуговање. Приметимо да је $c^{-1}\circ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \circ c(x) = \overline{\left(\frac{a\overline{x}+b}{c\overline{x}+d}\right)} = \frac{\overline{a}x+\overline{b}}{\overline{c}x+\overline{d}} = \begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{b} \\ \overline{c} & \overline{d} \end{pmatrix}(x)$, што повлачи $M\ddot{o}b(\mathbb{C}) \lhd M\ddot{o}b^*(\mathbb{C})$. Додатно, $M\ddot{o}b(\mathbb{C}) \cap C = \{\mathbb{1}_{\mathbb{C}}\}$ и $M\ddot{o}b^*(\mathbb{C}) = M\ddot{o}b(\mathbb{C})C$, одакле следи да се $M\ddot{o}b^*(\mathbb{C})$ може разложити као полудиректни производ $M\ddot{o}b(\mathbb{C}) \rtimes C \cong M\ddot{o}b(\mathbb{C}) \rtimes \mathbb{F}_2$.

Мебијусове транформације се могу видети као дејство матричне групе $GL_2(\mathbb{C})$ (или $SL_2(\mathbb{C})$) на скуп $\mathbb{C}$. Центар $Z(GL_2(\mathbb{C}))$ групе $GL_2(\mathbb{C})$ је једнак $\{aE \mid a \in \mathbb{C} - \{0\}\}$. Инклузија $\supseteq$ је очигледна, а $\subseteq$ следи из услова да елементи центра комутирају са $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Количничку групу $GL_2(\mathbb{C})/Z(GL_2(\mathbb{C}))$ зовемо *пројективна специјална група* реда 2 над пољем $\mathbb{C}$ и обележавамо је са $PSL_2(\mathbb{C})$.

Лема 21. *Групе $M\ddot{o}b(\mathbb{C})$ и $PSL_2(\mathbb{C})$ су изоморфне.*

Доказ. Уочимо пресликавање

$$\Phi : GL_2(\mathbb{C}) \longrightarrow M\ddot{o}b(\mathbb{C}), \quad \Phi\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}(z) = \frac{az+b}{cz+d}.$$

Приметимо да је

$$\Phi\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \circ \Phi\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}(z) = \Phi\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\left(\frac{a'z+b'}{c'z+d'}\right) =$$

$$= \frac{a\frac{a'z+b'}{c'z+d'}+b}{c\frac{a'z+b'}{c'z+d'}+d} = \frac{(aa'+bc')z+(ab'+bd')}{(ca'+dc')z+(cb'+dd')} =$$

$$= \Phi\begin{pmatrix} aa'+bc' & ab'+bd' \\ ca'+dc' & cb'+dd' \end{pmatrix}(z) = \Phi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\right)(z).$$

Пошто је Φ хомоморфизам, прва теорема о изоморфизмима даје $GL_2(\mathbb{R})/\operatorname{Ker}\Phi \cong \operatorname{Im}\Phi$. Очигледно је Φ ,,на“. Одредимо све матрице $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ које се сликају у идентитет. Треба да важи $cz^2 + (d-a)z - b = 0$ за све $z \in \mathbb{C}$, што је еквивалентно са $b = c = 0$ и $d = a$. Дакле, $M\ddot{o}b(\mathbb{C}) \cong GL_2(\mathbb{C})/Z(GL_2(\mathbb{C})) = PSL_2(\mathbb{C})$. $\square$

Групу $GL_2(\mathbb{C})$ можемо посматрати утопљену у векторски простор свих матрица $M_n(\mathbb{C})$ са дефинисаним скаларним производом $\langle A, B\rangle = \operatorname{Tr}\left(A\overline{B}^T\right)$.

Овај скаларни производ индукује метричку топологију на $GL_2(\mathbb{C})$, која даје количничку топологију на $PSL_2(\mathbb{C})$. Помоћу изоморфизма из леме 21 можемо дефинисати топологију и на $M\ddot{o}b(\mathbb{C})$.

Могли смо уместо $GL_2(\mathbb{C})$ узети и $SL_2(\mathbb{C})$ и њен центар $Z(SL_2(\mathbb{C})) = \{\pm E\}$. Наиме, приметимо да је $SL_2(\mathbb{C}) \leqslant GL_2(\mathbb{C})$, $Z(GL_2(\mathbb{C})) \lhd GL_2(\mathbb{C})$, $SL_2(\mathbb{C}) \cdot Z(GL_2(\mathbb{C})) = GL_2(\mathbb{C})$, као и $Z(GL_2(\mathbb{C})) \cap SL_2(\mathbb{C}) = Z(SL_2(\mathbb{C}))$. Из друге теореме о изоморфизмима за групе следи

$$PSL_2(\mathbb{C}) = GL_2(\mathbb{C})/Z(GL_2(\mathbb{C})) = (SL_2(\mathbb{C}) \cdot Z(GL_2(\mathbb{C})))/Z(GL_2(\mathbb{C})) \cong$$

$$\cong SL_2(\mathbb{C})/(Z(GL_2(\mathbb{C})) \cap SL_2(\mathbb{C})) = SL_2(\mathbb{C})/Z(SL_2(\mathbb{C})).$$

У овом случају бисмо на $M\ddot{o}b(\mathbb{C})$ имали поред топологије и норму $\left\| \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2}$. Разлика је што овде не идентификујемо скаларне матрице (које би утицале на ову норму).

Групу $M\ddot{o}b^*(\mathbb{C})$ можемо видети као $M\ddot{o}b(\mathbb{C}) \rtimes \mathbb{F}_2$. Додатно, сваки елемент $M\ddot{o}b^*(\mathbb{C})$ се на јединствен начин може представити као mh, где је $m \in M\ddot{o}b(\mathbb{C})$ и $h \in \{\mathbb{1}_{\mathbb{C}}, c\}$. Претпоставимо да је $mh = m'h'$, тада је $mm'^{-1} = h'h^{-1}$. Следи да је $h'h^{-1}$ директна изометрија, што је могуће једино ако су обе директне или обе индиректне. Група $\{\mathbb{1}_{\mathbb{C}}, c\}$ садржи по једну директну и једну индиректну изометрију, па је претходно еквивалентно са $h = h'$. Следи, $m = m'$ па су скупови $M\ddot{o}b^*(\mathbb{C})$ и $M\ddot{o}b(\mathbb{C}) \times \mathbb{F}_2$ у бијекцији (која није изоморфизам). Зато можемо сматрати да $M\ddot{o}b^*(\mathbb{C})$ има Тихоновљеву[11] топологију директног производа (при чему на двочланом скупу подразумевамо дискретну топологију). Нас ће посебно интересовати дискретне подгрупе (у овој топологији) групе $M\ddot{o}b^*(\mathbb{C})$.

2.3 Продужење уопштених Мебијусових транформација до изометрија хиперболичког полупростора

Већ смо приметили да се елементи Аполонијеве групе (композиције инверзија у односу на дуалне кругове) могу продужити до изометрија хиперболичког полупростора. Сада ћемо видети да исто својство имају све уопштене Мебијусове трансформације.

Са $Isom_+(\mathbb{H}^3)$ означавамо подгрупу директних изометрија хиперболичког полупростора.

---

[11] Андрей Николаевич Тихонов (1906. – 1993.), руски математичар и физичар

Теорема 22. *Рестрикција* $\big|_{\overline{\mathbb{C}}} : Isom_+(\mathbb{H}^3) \longrightarrow M\ddot{o}b(\mathbb{C})$ *је изоморфизам група. Њен инверз слика Мебијусову трансформацију* $f : x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ *у*

$$\widetilde{f} : (x,y) \mapsto \left(\frac{(ax+b)(\overline{cx}+\overline{d}) + a\overline{c}y^2}{|cx+d|^2+|c|^2y^2}, \frac{y}{|cx+d|^2+|c|^2y^2} \right).$$

Доказ. Свака директна изометрија $\mathbb{H}^3$ је композиција парног броја инверзија у односу на сфере са центром на граници. Зато ће њена рестрикција на границу бити композиција парног броја инверзија тј. Мебијусова трансформација равни $\mathbb{C}$. Следи, рестрикција $\big|_{\overline{\mathbb{C}}} : Isom_+(\mathbb{H}^3) \longrightarrow M\ddot{o}b(\mathbb{C})$ је добро дефинисана, а биће и хомоморфизам група јер се слаже са композицијом.

Да би рестрикција била изоморфизам довољно је још показати да има инверз. Група $M\ddot{o}b(\mathbb{C})$ је генерисана транслацијама $\tau_\lambda : x \mapsto x+\lambda$, $\lambda \in \mathbb{C}$, композицијама хомотетија и ротација (око нуле) $\chi_\lambda : x \mapsto \lambda x$, $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ и композицијом инверзије (у односу на јединични круг) и рефлексије $\psi : x \mapsto \frac{1}{x} = \frac{\overline{x}}{|x|^2}$. Оне се могу продужити до транслација $\widetilde{\tau_\lambda} : (x,y) \mapsto (x+\lambda, y)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, композиција хомотетија и ротација (око y–осе) $\widetilde{\chi_\lambda} : (x,y) \mapsto (\lambda x, |\lambda| y)$, $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ и композиције инверзије (у односу на једичну сферу) и рефлексије $\widetilde{\psi} : (x,y) \mapsto \left(\frac{\overline{x}}{|x|^2+y^2}, \frac{y}{|x|^2+y^2} \right)$ (што ће уједно бити и генератори $Isom_+(\mathbb{H}^3)$).

Нека је $f : x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ произвољна Мебијусова трансформација. У случају да је $c=0$, $f(x) = \frac{a}{d}x + \frac{b}{d} = \tau_{\frac{a}{d}} \circ \chi_{\frac{b}{d}}(x)$ се може продужити до

$$\widetilde{\tau_{\frac{a}{d}}} \circ \widetilde{\chi_{\frac{b}{d}}}(x,y) = \left(\frac{a}{d}x + \frac{b}{d}, \left|\frac{a}{d}\right| y \right) = \left(\frac{(ax+b)\overline{d}}{|d|^2}, \frac{y}{|d|^2} \right)$$

јер је $ad = 1$. У случају да је $c \neq 0$, $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{\frac{a}{c}(cx+d)+(b-\frac{ad}{c})}{cx+d} = \frac{a}{c} + \left(-\frac{1}{c^2}\right)\frac{1}{x+\frac{d}{c}} = \tau_{\frac{a}{c}} \circ \chi_{-\frac{1}{c^2}} \circ \psi \circ \tau_{\frac{d}{c}}(x)$ се може продужити до

$$\widetilde{\tau_{\frac{a}{c}}} \circ \widetilde{\chi_{-\frac{1}{c^2}}} \circ \widetilde{\psi} \circ \widetilde{\tau_{\frac{d}{c}}}(x,y) = \left(\left(-\frac{1}{c^2}\right) \frac{\overline{x+\frac{d}{c}}}{\left|x+\frac{d}{c}\right|^2+y^2} + \frac{a}{c}, \left|-\frac{1}{c^2}\right| \frac{y}{\left|x+\frac{d}{c}\right|^2+y^2} \right) =$$

$$= \left(\frac{-\frac{1}{c}\overline{(cx+d)} + \frac{a}{c}(|cx+d|^2+|c|^2y^2)}{|cx+d|^2+|c|^2y^2}, \frac{y}{|cx+d|^2+|c|^2y^2} \right) =$$

$$= \left(\frac{-\frac{ad-bc}{c}\overline{(cx+d)} + (ax+\frac{ad}{c})\overline{(cx+d)} + a\overline{c}y^2)}{|cx+d|^2+|c|^2y^2}, \frac{y}{|cx+d|^2+|c|^2y^2} \right) =$$

$$= \left(\frac{(ax+b)(\overline{cx}+\overline{d}) + a\overline{c}y^2}{|cx+d|^2+|c|^2y^2}, \frac{y}{|cx+d|^2+|c|^2y^2} \right).$$

Очигледно је $\widetilde{\cdot}$ инверз елемента $\big|_{\overline{\mathbb{C}}}$ у групи $\overline{\mathbb{C}}^{\overline{\mathbb{C}}}$, где A^B означава скуп свих пресликавања из B у A. □

Последица 23. *Постоји изоморфизам* $M\ddot{o}b^*(\mathbb{C}) \cong Isom(\mathbb{H}^3)$.

Доказ. Следи из $M\ddot{o}b^*(\mathbb{C}) \cong M\ddot{o}b(\mathbb{C}) \rtimes \mathbb{F}_2 \cong Isom_+(\mathbb{H}^3) \rtimes \mathbb{F}_2 \cong Isom(\mathbb{H}^3)$. □

Нетривијални елемент у $\mathbb{F}_2$ у оба случаја представља компексно конјуговање. Као и у теореми 22 конјуговање у $\overline{\mathbb{C}}$ можемо видети као рестрикцију конјуговања у x-равни у $\mathbb{H}^3$.

Изоморфизам из претходне последице дефинише топологију и на $Isom(\mathbb{H}^3)$.

2.4 Класификација Мебијусових трансформација

Фиксне тачке Мебијусове трансформације $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ (у $\overline{\mathbb{C}}$) су решења једначине $cx^2 + (d-a)x - b = 0$. Зато нетривијалне Мебијусове трансформације имају бар једну и не више од две фиксне тачке.

Уколико (нетривијалну) Мебијусову трансформацију f посматрамо као матрицу, можемо је свести на њену Жордановy[12] нормалну форму. Дакле, постоје инвертибилна матрица P и Жорданова матрица $J \neq \pm E$, такве да је $f = PJP^{-1}$.

То значи да је Мебијусова трансформација f конјугат Мебијусове трансформације J. Овде имплицитно подразумевамо прелазак на класе матрица у $PSL_2(\mathbb{C})$. Матрица J је димензије 2×2, а када пређемо на класе можемо подразумевати и да је $J \in PSL_2(\mathbb{C})$. Разликујемо два случаја:

(1) Ако је J дијагонална, због $\det J = 1$, она мора бити облика $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}$, $a \neq 0$. Или као Мебијусова трансформација $J : x \mapsto a^2x$. Због претпоставке $f \not\equiv \mathbb{1}_{\mathbb{C}}$, мора бити $a \neq \pm1$.

(2) Ако J није дијагонална она има 1 изнад дијагонале и исте коефицијенте на дијагонали. Одатле и из $\det J = 1$ следи $J = \begin{pmatrix} \pm1 & 1 \\ 0 & \pm1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \pm1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Или као Мебијусова трансформација $J : x \mapsto x \pm 1$.

Конјуговање чува број фиксних тачака, па ће f имати исти број фиксних тачака као и J. Што се тиче J, ситуација је јасна. Ако је $J = a^2x$, (композиција хомотетије и ротације), она има две фиксне тачке: 0 и ∞.

---

[12] Marie Ennemond Camile Jordan (1838. – 1922.), француски математичар

А ако је транслација она има јединствену фиксну тачку ∞. Уколико је $J = a^2x$, она има концентричне инваријантне кругове акко је ротација акко је $|a^2| = 1$ акко је $|a| = 1$. Наравно, тада исте особине има и f.

Дефиниција 24. *Кажемо да је нетривијална Мебијусова трансформација* f

(1) *параболичка уколико има јединствену фиксну тачку у* $\overline{\mathbb{C}}$.

(2) *елиптичка уколико има две фиксне тачке у* $\overline{\mathbb{C}}$ *и концентричне инваријантне кругове.*

(3) *локсодромичка уколико има две фиксне тачке у* $\overline{\mathbb{C}}$, *али нема концентричне инваријантне кругове.*

Претходна дискусија нам омогућава да класификујемо Мебуијусове трансформације. Проблем је што тај поступак захтева доста посла. Зато нам треба неки директнији критеријум.

Све Жорданове матрице су облика $J = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}$, за $a \neq 0$ и $b \in \{0, 1\}$. Из претходне дискусије следи да је $a = \pm 1$ акко $b \neq 0$. То значи да J можемо класификовати само помоћу коефицијанта a. Приметимо да је $\operatorname{Tr} f = \operatorname{Tr}(PJP^{-1}) = \operatorname{Tr}(JP^{-1}P) = \operatorname{Tr} J = a + \frac{1}{a}$. Напомињено да је траг Мебијусове трансформације одређен до на знак, па је можда правилније рећи $\operatorname{Tr} f = \pm\left(a + \frac{1}{a}\right)$.

Тврђење 25. *Нетривијална Мебијусова трансформација је*

(1) *параболичка ако је* $\operatorname{Tr} f = \pm 2$.

(2) *елиптичка ако је* $\operatorname{Tr} f \in (-2, 2)$.

(3) *локсодромичка ако* $\operatorname{Tr} f \notin [-2, 2]$.

Доказ. (1) Из $\operatorname{Tr} f = \pm\left(a + \frac{1}{a}\right)$ следи $(a-1)^2 = a(\pm \operatorname{Tr} f - 2)$. Зато је $\operatorname{Tr} f = \pm 2$ еквивалентно са $a = 1$.

(2) Ако је тачка елиптичка онда је $|a| = 1$ и $a \neq \pm 1$. Тада је $\operatorname{Tr} f = \pm\left(a + \frac{1}{a}\right) = \pm(a + \overline{a}) = \pm 2 \operatorname{Re} a \in (-2, 2)$. Обрнуто, нека је $\operatorname{Tr} f \in (-2, 2)$. Како је $\operatorname{Tr} = \pm\left(a + \frac{1}{a}\right)$ реалан, мора бити $\frac{1}{a} = \overline{a}$. Тада је $|a| = 1$, па је трансформација f елиптичка.

(3) Следи из (1) и (2).

□

Дефиниција 26. *Нека је f параболичка (елиптичка, локсодромичка) изометрија и $x \in \overline{\mathbb{C}}$ њена фиксна тачка. Тада кажемо да је x параболичка (елиптичка, локсодромичка) фиксна тачка.*

За нас су посебно значајне параболичке фиксне тачке. Оне су конјуговане тачки ∞. Погледајмо шта је стабилизатор те тачке у некој подгрупи $H \leqslant PSL_2(\mathbb{C})$. Једнакост $\infty = \frac{a\infty+b}{c\infty+d}$ је еквивалентна са $c = 0$ (што повлачи $a, d \neq 0$ и $d = \frac{1}{a}$). Стабилизатор H_∞ се састоји од линеарних пресликавања, па је торзионо слободна Абелова[13] група. Зато има смисла причати о његовом рангу. Исто важи и за све конјугате, тј. параболичке фиксне тачке x. Ранг стабилизатора H_x зовемо *ранг параболичке фиксне тачке x*. Наравно, ранг зависи од избора подгрупе H. Из претходног следи да је ранг параболичке фиксне тачке највише 2.

2.5 Ивасавина декомпозиција и хомогене координате

Хоћемо да урадимо декомпозицију $PSL_2(\mathbb{C}) \cong SL_2(\mathbb{C})/\{\pm E\}$. Наравно, биће лакше урадити прво декомпозицију $SL_2(\mathbb{C})$, а затим преласком на класе добити и декомпозицију $PSL_2(\mathbb{C})$.

Посматраћемо $SL_2(\mathbb{C})$ и њене подгрупе

$$N := \left\{ n_x := \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; x \in \mathbb{C} \right\},$$

$$A := \left\{ a_y := \begin{pmatrix} \sqrt{y} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{y}} \end{pmatrix} \;\middle|\; y > 0 \right\},$$

$$K := SU_2(\mathbb{C}) = \left\{ k \in SL_2(\mathbb{C}) \;\middle|\; k\overline{k}^T = E \right\},$$

$$M := \left\{ m_\theta := \begin{pmatrix} e^{i\frac{\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\theta}{2}} \end{pmatrix} \;\middle|\; \theta \in \mathbb{R} \right\}.$$

Дакле, N је група транслација, A група хомотетија, а M група ротација око y–осе. Специјална унитарна група $SU_2(\mathbb{C})$ садржи матрице $k = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ чије су врсте нормирани и међусобно ортогонални вектори. Одатле и из услова $\det k = 1$ следи $(a, b) = (\overline{d}, -\overline{c})$ и $|c|^2 + |d|^2 = 1$. Наравно, важи $M \subseteq K$.

---

[13] Niels Henrik Abel (1802. – 1829.), норвешки математичар

Теорема 27. (Ивасава[14]) *Свака матрица* $X \in SL_2(\mathbb{C})$ *се може на јединствен начин представити као* $X = n_x a_y k$, *где су* $n_x \in N$, $a_y \in A$ *и* $k \in K$. *Дакле,* $SL_2(\mathbb{C}) = NAK$.

Доказ. Нека је $X = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{C})$ произвољна матрица. Покушајмо да одредимо n_x, a_y и k. Приметимо да транслација не мења другу врсту тј. γ и δ не зависе од x. Треба да важи

$$\begin{pmatrix} * & * \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{y} & * \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{y}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ \frac{c}{\sqrt{y}} & \frac{d}{\sqrt{y}} \end{pmatrix}.$$

То даље повлачи $y = \frac{|c|^2+|d|^2}{|\gamma|^2+|\delta|^2} = \frac{1}{|\gamma|^2+|\delta|^2}$ и $c = \gamma\sqrt{y}$ и $d = \delta\sqrt{y}$. Овим смо одредили матрице a_y и k, остаје још да одредимо n_x:

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{y} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{y}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -c \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d\sqrt{y} + \frac{cx}{\sqrt{y}} & -c\sqrt{y} + \frac{dx}{\sqrt{y}} \\ \frac{c}{\sqrt{y}} & \frac{d}{\sqrt{y}} \end{pmatrix}.$$

Одавде експлицитно може да се изрази x. Додуше, x треба да задовољи две линеарне једначине али су оне линеарно зависне због $\det X = 1$.

Дакле, постоји оваква декомпозиција и јединствена је будући да смо у сваком кораку имали јединственост. Следи, $SL_2(\mathbb{C}) \subseteq NAK$, а обрнута инклузија важи тривијално. □

Додатно, $\{\pm E\} \leqslant N, A, K$. Зато $PSL_2(\mathbb{C})$ можемо разложити као производ класа (пројективизација) $N/\{\pm E\}$, $A/\{\pm E\}$ и $K/\{\pm E\}$. Ради поједностављивања, надаље ћемо те класе идентификовати са N, A и K.

Групу $PSL_2(\mathbb{C})$ смо идентификовали са Мебијусовим трансформацијама које се продужују до директних изометрија хиперболичког простора $\mathbb{H}^3$. Формуле из теореме 22 задају дејство групе $PSL_2(\mathbb{C})$ на скуп $\mathbb{H}^3$.

Тангентни простор у свакој тачки $\mathbb{H}^3$ је изоморфан са $\mathbb{R}^3$, па је тангентно раслојење $T\mathbb{H}^3$ изоморфно са $\mathbb{H}^3 \times \mathbb{R}^3$. Уколико се ограничимо само на јединичне тангентне векторе добијамо $T^1\mathbb{H}^3 := \mathbb{H}^3 \times \mathbb{S}^3$. Јединично тангентно раслојење $T^1(\mathbb{H})^3$ није векторски простор, али јесте многострукост. Као у $\mathbb{H}^3$, и у $\mathbb{R}^3$ ћемо прве две реалне координате идентификовати са једном комплексном. Дејство $PSL_2(\mathbb{C})$ на $\mathbb{H}^3$ се природно продужује до дејства на $T^1\mathbb{H}^3$.

Лема 28. *Приликом дејства* $PSL_2(\mathbb{C})$ *на* $\mathbb{H}^3$, *стабилизатор* $PSL_2(\mathbb{C})_{(0,1)}$ *је једнак* K, *а приликом дејства* $PSL_2(\mathbb{C})$ *на* $T^1\mathbb{H}^3$, *стабилизатор* $PSL_2(\mathbb{C})_{((0,1),(0,1))}$ *је једнак* M.

---

[14] Kenkichi Iwasawa (1917. – 1998.), јапански математичар

Доказ. Тражимо све матрице $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in PSL_2(\mathbb{C})$ за које је

$$(0,1) = \widetilde{X} \cdot (0,1) = \left(\frac{b\overline{d} + a\overline{c}}{|d|^2 + |c|^2}, \frac{1}{|d|^2 + |c|^2} \right).$$

Дакле, $X \in PSL_2(\mathbb{C})_{(0,1)}$ акко $|d|^2 + |c|^2 = 1$, $b\overline{d} + a\overline{c} = 0$ и $ad - bc = 1$ акко $X \in K$.

Погледајмо како матрица $g = nak \in PSL_2(\mathbb{C})$ дејствује на пар тачка – тангентни вектор $((0,1),(0,1)) \in T^1\mathbb{H}^3$. Према претходном, ортогонална трансформација k мења само тангентни вектор, а транслација n и хомототетија a мењају само тачку. Зато се стабилизатор $PSL_2(\mathbb{C})_{((0,1),(0,1))}$ састоји од матрица из K које фиксирају тангентни вектор $(0,1)$ (у тачки $(0,1)$).

Вектор $(0,1)$ је тангентан на криву $(0,e^t)$ (дефинисану у околини некој нуле) у тачки $(0,1)$. Она се са $k \in K$ слика у

$$\widetilde{k} \cdot \left(0, e^t\right) = \begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} \cdot \left(0, e^t\right) = \left(\frac{ab(1 - e^{2t})}{|a|^2 + |b|^2 e^{2t}}, \frac{e^t}{|a|^2 + |b|^2 e^{2t}} \right).$$

Њен тангентни вектор у тачки $(0,1)$ је

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \widetilde{k} \cdot \left(0, e^t\right) = \left(\frac{-2ab\left(|a|^2 + |b|^2\right)}{\left(|a|^2 + |b|^2\right)^2}, \frac{|a|^2 - |b|^2}{\left(|a|^2 + |b|^2\right)^2} \right) = \left(-2ab, |a|^2 - |b|^2\right).$$

Овај вектор треба да буде једнак $(0,1)$, што је могуће једино када је $b = 0$ што повлачи $|a| = 1$, тј. $k \in M$. Обрнуто, јасно је да ротације око y–осе фиксирају пар $((0,1),(0,1))$. ☐

Теорема 29. *Постоје изоморфизми* $\mathbb{H}^3 \cong PSL_2(\mathbb{C})/K$ *и* $T^1\mathbb{H}^3 \cong PSL_2(\mathbb{C})/M$.

Доказ. С обзиром на то како се Мебијусове трансфромације продужују до изометрија хиперболичког простора $\mathbb{H}^3$ (теорема 22), биће

$$n_x a_y(0,1) = n_x(0,y) = (x,y), \text{ за све } x \in \mathbb{C} \text{ и } y > 0.$$

Одавде и из претходне леме можемо извести природну идентификацију $\mathbb{H}^3 \cong NA \cong PSL_2(\mathbb{C})/K$.

Да би постојао други изоморфизам довољно је показати да за сваки јединични тангентни вектор $V = (X,Y)$ у тачки $(0,1)$ постоји матрица $k = k_V$ која слика $(0,1)$ у V. Претпоставимо прво да је $X \in \mathbb{R}$. Како је и $Y \in \mathbb{R}$ и важи $X^2 + Y^2 = 1$ можемо сматрати да је $X = \sin\theta$ и $Y = \cos\theta$. Вектор $(0,1)$ је тангентан на криву $(0,e^t)$ у $(0,1)$. У доказу претходне леме смо видели да се ова крива матрицом $\begin{pmatrix} \cos\left(-\frac{\theta}{2}\right) & \sin\left(-\frac{\theta}{2}\right) \\ -\sin\left(-\frac{\theta}{2}\right) & \cos\left(-\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix} \in K$ слика у криву која има тангентни вектор

$$\left(-2\cos\left(-\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(-\frac{\theta}{2}\right), \cos^2\left(-\frac{\theta}{2}\right) - \sin^2\left(-\frac{\theta}{2}\right) \right) = (\sin\theta, \cos\theta) = (X,Y).$$

Општи случај се своди на претходни јер је $(X, Y) = \left(\frac{X}{|X|}|X|, Y\right) = m_\omega(|X|, Y)$, где је ω аргумент комплексног броја $\frac{X}{|X|}$ (односно X).

Зато за сваку тачку $((x, y), V) \in T^1\mathbb{H}^3$ важи

$$n_x a_y k_V((0,1),(0,1)) = n_x a_y((0,1), V) = ((x,y),V),$$

па тражени изоморфизам следи из $PSL_2(\mathbb{C})_{((0,1),(0,1))} = M$. $\square$

Дакле, и количничка група $PSL_2(\mathbb{C})/K$ је један модел геометрије Лобачевског, а претходне координате су познате под *називом хомогене.* Група NA је заправо група свих горњетроугаоних матрица из $PSL_2(\mathbb{C})$. Групе N и A комутирају али не комутирају члан по члан већ је $a_y n_x = n_{xy} a_y$, за све $n_x \in N$ и $a_y \in A$.

2.6 Уопштене кривине и Вилкерова квадратна форма

Дефиниција 30. *Нека је C круг кривине κ са центром у тачки (x, y). Уопштена кривина круга C у ознаци $k(C)$ је четворка $(\kappa, \bar{\kappa}, \kappa x, \kappa y)$, где је $\bar{\kappa}$ кривина круга $\bar{C}$ који се добија као слика C при инверзији у односу на јединични круг $D(0,1)$. У случају да је круг C у ствари права $mx + ny = l$, $m^2 + n^2 = 1$, уопштена кривина се дефинише као $k(C) = (0, 2l, m, n)$.*

Како је полупречник круга C једнак $\frac{1}{\kappa}$ према леми 6 полупречник $\bar{C}$ је $\frac{\frac{1}{\kappa}}{x^2+y^2-\frac{1}{\kappa^2}} = \frac{\kappa}{\kappa^2(x^2+y^2)-1}$. Следи, $\bar{\kappa} = \kappa(x^2 + y^2) - \frac{1}{\kappa}$.

Вектор нормале праве $mx + ny = l$ је јединични вектор (m, n) а њено растојање од координатног почетка износи l. Зато је можемо видети као граничну вредност кругова полупречника $\lambda - l$ са центром у $(\lambda m, \lambda n)$, кад $\lambda \to \infty$. Уопштене кривине ових кругова су $\left(\frac{1}{\lambda-l}, \frac{\lambda^2m^2+\lambda^2n^2}{\lambda-l} - (\lambda - l), \frac{\lambda m}{\lambda-l}, \frac{\lambda n}{\lambda-l}\right) = \left(\frac{1}{\lambda-l}, \frac{2\lambda l-l^2}{\lambda-l}, \frac{\lambda m}{\lambda-l}, \frac{\lambda n}{\lambda-l}\right)$. Зато смо у дефиницији узели граничну вредност ових уопштених кривина кад $\lambda \to \infty$. Зато, све што покажемо за уопштене кривине кругова важиће и за њихове граничне вредности – уопштене кривине правих.

Дефиниција 31. *Вилкерова*[15] *квадратна форма је $W(x) = xM_Wx^T$, где је*

---

[15] John Wilker (1943. – 1995.), амерички математичар

$$M_W = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_W^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Лема 32. *(1) За $x \in \mathbb{R}^4$ важи $xM_W^{-1}x^T = 1$ акко је x уопштена кривина неког круга.*

(2) За кругове C_1 и C_2 важи $k(C_1)M_W^{-1}k(C_2)^T = -1$ акко су тангентни.

Доказ. За почетак ћемо срачунати

$$k(C_1)M_W^{-1}k(C_2)^T = \begin{pmatrix} \kappa_1 & \bar{\kappa}_1 & \kappa_1 x_1 & \kappa_1 y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \kappa_2 \\ \bar{\kappa}_2 \\ \kappa_2 x_2 \\ \kappa_2 y_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \kappa_1 & \bar{\kappa}_1 & \kappa_1 x_1 & \kappa_1 y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\kappa_2 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}\bar{\kappa}_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_2 x_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \kappa_2 y_2 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{2}\kappa_1\bar{\kappa}_2 - \frac{1}{2}\bar{\kappa}_1\kappa_2 + \kappa_1\kappa_2 x_1 x_2 + \kappa_1\kappa_2 y_1 y_2.$$

(1) Ако узмемо $C_1 = C_2 = C$ претходна једнакост се трансформише у

$$k(C)M_W^{-1}k(C)^T = -\kappa\bar{\kappa} + \kappa^2 x^2 + \kappa^2 y^2 = -\kappa\left(\kappa(x^2 + y^2) - \frac{1}{\kappa}\right) + \kappa^2 x^2 + \kappa^2 y^2 = 1.$$

Обрнуто, $xM_W^{-1}x^T = -x_1 x_2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$ повлачи $x_2 = \frac{x_3^2 + x_4^2 - 1}{x_1}$. То значи да је x уопштена кривина круга кривине x_1 са центром у $\left(\frac{x_3}{x_1}, \frac{x_4}{x_1}\right)$.

(2) Под претпоставком да су C_1 и C_2 тангентни биће

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = \left(\frac{1}{\kappa_1} + \frac{1}{\kappa_2}\right)^2 = \frac{(\kappa_1 + \kappa_2)^2}{\kappa_1^2\kappa_2^2},$$

те је

$$k(C_1)M_W^{-1}k(C_2)^T =$$

$$= -\frac{1}{2}\kappa_1\left(\kappa_2(x_2^2 + y_2^2) - \frac{1}{\kappa_2}\right) - \frac{1}{2}\left(\kappa_1(x_1^2 + y_1^2) - \frac{1}{\kappa_1}\right)\kappa_2 + \kappa_1\kappa_2 x_1 x_2 + \kappa_1\kappa_2 y_1 y_2 =$$

$$= -\frac{1}{2}\kappa_1\kappa_2\left(x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + y_1^2 + y_2^2 - 2y_1y_2\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2} + \frac{\kappa_2}{\kappa_1}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{(\kappa_1+\kappa_2)^2-\kappa_1^2-\kappa_2^2}{\kappa_1\kappa_2} = -1$$

Обрнуто, из $k(C_1)M_W^{-1}k(C_2)^T = -1$ следи $(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2 = \frac{(\kappa_1+\kappa_2)^2}{\kappa_1^2\kappa_2^2}$, што значи да су кругови C_1 и C_2 тангентни.

□

Нека је $C = (C_1, C_2, C_3, C_4)$ произвољна Декартова конфигурација (из које се добија Аполонијева конфигурација). Придружена матрица $P = P_C$ конфигурације C је матрица која садржи уопштене кривине тј.

$$P := \begin{pmatrix} k(C_1) \\ k(C_2) \\ k(C_3) \\ k(C_4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa_1 & \overline{\kappa}_1 & \kappa_1x_1 & \kappa_1y_1 \\ \kappa_2 & \overline{\kappa}_2 & \kappa_2x_2 & \kappa_2y_2 \\ \kappa_3 & \overline{\kappa}_3 & \kappa_3x_3 & \kappa_3y_3 \\ \kappa_4 & \overline{\kappa}_4 & \kappa_4x_4 & \kappa_4y_4 \end{pmatrix}.$$

Према претходној леми је $PM_W^{-1}P^T = M_Q$. Пошто је M_Q инвертибилно тј. $\det M_Q \neq 0$, из Бине[16]–Кошијеве[17] теореме можемо закључити да је $\det P \neq 0$ тј. да P има инверз. Уколико ову једнакост инвертујемо, помножимо слева са P^T и здесна са P добићемо $M_W = P^TM_Q^{-1}P$. Лако се може проверити да је матрица M_Q инволутивна одакле следи $M_W = P^TM_QP$, као и $M_Q = P^{-T}M_WP^{-1}$.

Претходна лема даје и обрнуто тврђење: из $PM_W^{-1}P^T = M_Q$ (или било које еквивалентне релације) следи да су колоне матрице P уопштене кривине кругова који чине Декартову конфигурацију, тј. матрица P је придружена некој конфигурацији.

2.7 Група $\mathcal{O}_Q(\mathbb{R})$

Дефиниција 33. *Нека је F произвољна n–арна форма над прстеном R. Користићемо ознаку $\mathcal{O}_F(R) = \{M \in GL_n(R) \mid (\forall x \in R^n)\, F(Mx) = F(x)\}$.*

Уколико је M_F матрица форме F, услов $F(Mx) = F(x)$ се трансформише у $x^TM^TM_FMx = x^TM_Fx$ за све $x \in R^n$. Ово последње је еквивалентно са $M^TM_FM = M_F$.

Специјално, за Декартову квадратну форму Q имамо групу $\mathcal{O}_Q(\mathbb{R}) = \{M \in GL_4(\mathbb{R}) \mid (\forall x \in \mathbb{R}^4)\, Q(Mx) = Q(x)\}$. За произвољну тачку $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ једна нула полинома (по t) $Q(t, x_2, x_3, x_4) - Q(x)$ је x_1.

---

[16] Jacques Philippe Marie Binet (1786. – 1856.), француски математичар, физичар и астроном

[17] Augustin Louis Cauchy (1789. – 1857.), француски математичар

Према Вијетовим правилима, друга ће бити $2x_2 + 2x_3 + 2x_4 - x_1$. Следи, $Q(A_1x) = Q(x)$, те је $A_1 \in \mathcal{O}_Q(\mathbb{R})$. И слично се проверава да и преостали генератори Аполонијеве групе $\mathcal{A}$ припадају $\mathcal{O}_Q(\mathbb{R})$, одакле следи да је $\mathcal{A} \leqslant \mathcal{O}_Q(\mathbb{R})$.

Теорема 34. *Групе $\mathcal{O}_Q(\mathbb{R})$ и $\mathcal{O}_W(\mathbb{R})$ су изоморфне.*

Доказ. Тврдимо да је $\Phi : \mathcal{O}_Q(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{O}_W(\mathbb{R})$, $\Phi(M) = P^{-1}MP$ изоморфизам група. За произвољне $M \in \mathcal{O}_Q(\mathbb{R})$ и $x \in \mathbb{R}^4$ важи

$$W(\Phi(M)x) = W(P^{-1}MPx) = (P^{-1}MPx)^T M_W (P^{-1}MPx) =$$

$$= x^T P^T M^T P^{-T} M_W P^{-1} MPx = x^T P^T M^T M_Q MPx = (MPx)^T M_Q (MPx) =$$

$$= Q(MPx) = Q(Px) = (Px)^T M_Q (Px) = x^T P^T M_Q Px = x^T M_W x = W(x).$$

Дакле, $\Phi(M) \in \mathcal{O}_W(\mathbb{R})$, те је Φ добро дефинисано. Очигледно је да је Φ хомоморфизам и да има инверз $M \mapsto P^{-T}MP^{-1}$, одакле следи да су групе $\mathcal{O}_Q(\mathbb{R})$ и $\mathcal{O}_W(\mathbb{R})$ изоморфне. ☐

Из доказа Аполонојеве теорме се види да се свака Аполонијева конфигурација може пресликати у неограничену. Додатном хомотетијом и транслацијом може се пресликати и у $\mathcal{P}_0$. Дакле, свака Аполонијева конфигурација се може пресликати у једну фиксирану конфигурацију уопштеном Мебијусовом трансформацијом, што значи да за сваке две Аполонијеве конфигурације постоји уопштена Мебијусова трансфромација која слика једну у другу. Додатно, ова трансформација је јединствена јер је одређена сликама четири различите додирне тачке. (Сматрамо да су Декартове конфигурације уређене.)

Теорема 35. *Групе $M\ddot{o}b^*(\mathbb{C})$ и $\mathcal{O}_W(\mathbb{R})$ су изоморфне.*

Доказ. Идеја је да дефинишемо хомоморфизам $\Pi : M\ddot{o}b^*(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{O}_W(\mathbb{R})$ који ће сликати Мебијусову трансформацију f у матрицу M за коју важи $k(f(C)) = k(C)M$ за сваки круг C. Јасно је да ће Π бити хомоморфизам уколико покажемо да је добро дефинисано, тј. да за свако f постоји оваква (константна) матрица M. Довољно је показати ово за генераторе групе $M\ddot{o}b^*(\mathbb{C})$: τ_λ, χ_λ, ψ и $g : z \mapsto \overline{z}$.

Транслација τ_λ за вектор $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$ дејствује на уопштену кривину $k(C)$ са

$$(\kappa, \overline{\kappa}, \kappa x, \kappa y) \mapsto \left(\kappa, \kappa\left((x+\lambda_1)^2 + (y+\lambda_2)^2\right) - \frac{1}{\kappa}, \kappa(x+\lambda_1), \kappa(y+\lambda_2)\right) =$$

$$= (\kappa, \overline{\kappa} + 2\lambda_1\kappa x + 2\lambda_2\kappa y + |\lambda|\kappa, \kappa x + \lambda_1\kappa, \kappa y + \lambda_2\kappa).$$

Другим речима, $k(\tau_\lambda(C)) = k(C)M_{\tau_\lambda}$, где је

$$M_{\tau_\lambda} = \begin{pmatrix} 1 & |\lambda| & \lambda_1 & \lambda_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 2\lambda_2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Сада треба проверити да је $\Pi(\tau_\lambda) = M_{\tau_\lambda} \in \mathcal{O}_W(\mathbb{R})$. За произвољно $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^4$ имамо

$$W(M_{\tau_\lambda}x) = W\left((x_1 + |\lambda|x_2 + \lambda_1 x_3 + \lambda_2 x_4, x_2, 2\lambda_1 x_2 + x_3, 2\lambda_2 x_2 + x_4)^T\right) =$$
$$= -4(x_1 + |\lambda|x_2 + \lambda_1 x_3 + \lambda_2 x_4)x_2 + (2\lambda_1 x_2 + x_3)^2 + (2\lambda_2 x_2 + x_4)^2 =$$
$$= -4x_1x_2 + x_3^2 + x_4^2 = W(x_1, x_2, x_3, x_4).$$

Аналогно (и рачунски мало једноставније) се показује да исто важи и за остале генераторе групе $M\ddot{o}b^*(\mathbb{C})$. Следи, Π је добро дефинисан хомоморфизам група.

Нека је $f \in \operatorname{Ker}\Pi$ произвољно. Како се слика у јединичну матрицу, f мора фиксирати уопштене кривине $k(C)$ за све могуће кругове C, па самим тим и њихове центре. Следи, $f \equiv \mathbb{1}_{\mathbb{C}}$ (јер фиксира четири различите тачке), тј. Π је инјективно.

Према напомени пре ове теореме за сваке две Декартове конфигурације постоји јединствена Мебијусова трансформација која слика једну у другу. Другим речима, група $M\ddot{o}b^*(\mathbb{C})$ дејствује слободно и транзитивно на скуп свих уређених Декартових конфигурација D. Зато мономорфизам Π индукује слободно и транзитивно дејство $\Pi(M\ddot{o}b^*(\mathbb{C})) \leqslant \mathcal{O}_W(\mathbb{R})$ на скуп $\{P_C \mid C \in D\}$ десним множењем.

Претпоставимо супротно, постоји неко $M \in \mathcal{O}_W(\mathbb{R}) - \Pi(M\ddot{o}b^*(\mathbb{C}))$. Нека је C било која Декартова конфигурација и P_C њена придружена матрица. Тада је и P_CM придружена матрица јер је $(P_CM)^TM_Q(P_CM) = M^TP_C^TM_QP_CM = C^TM_WC = M_W$. Због транзитивности дејства $\Pi(M\ddot{o}b^*(\mathbb{C}))$ на скуп свих придружених матрица мора постојати $f \in M\ddot{o}b^*(\mathbb{C})$ за које $P_CM = P_C\Pi(f)$. Међутим, дејство $\Pi(M\ddot{o}b^*(\mathbb{C}))$ десним множењем је слободно. Следи, $M = \Pi(f)$ што је у контрадикцији са претпоставком $M \notin \Pi(M\ddot{o}b^*(\mathbb{C}))$. □

Композиција $\Psi' = \Phi^{-1} \circ \Pi : M\ddot{o}b^*(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{O}_Q(\mathbb{R})$ је изоморфизам. Дакле, све групе $M\ddot{o}b^*(\mathbb{C})$, $Isom(\mathbb{H}^3)$, $PSL_2(\mathbb{C})$, $\mathcal{O}_W(\mathbb{R})$ и $\mathcal{O}_Q(\mathbb{R})$ су међусобно изоморфне. Изоморфизам $\Phi = \Phi_C$ (па самим тим и $\Psi' = \Psi'_C$) није јединствен јер зависи од избора матрице $P = P_C$ тј. Декартове конфигурације C.

Остаје још да проверимо да ли се инверзије $\mathfrak{s}_i$ које генеришу геометријску Аполонијеву групу сликају у матрице A_i које генеришу матричну Аполонијеву групу. Наравно, још када смо почели причу о $\mathfrak{s}_i$-овима, изабрали смо једну почетну Декартову конфигурацију, тако да и не чуди претходна вишезначност.

Уколико $k(\mathfrak{s}_i(C_j)) = k(C_j)\Pi(\mathfrak{s}_i)$, $1 \leqslant j \leqslant 4$, узмемо за врсте матрице добићемо $P_{\mathfrak{s}_i(C)} = P_C\Pi(\mathfrak{s}_i) = P_C(\Phi \circ \Psi')(\mathfrak{s}_i) = P_C P_C^{-1}\Psi'(\mathfrak{s}_i)P_C = \Psi'(\mathfrak{s}_i)P_C$. Прве колоне ових матрица (након транспоновања) дају једнакост $\kappa(\mathfrak{s}_i(C)) = \kappa(C)\Psi'(\mathfrak{s}_i)^T$. Са друге стране, матрице A_i смо изабрали тако да важи $\kappa(\mathfrak{s}_i(C)) = \kappa(C)A_i$. Из $\kappa(C)A_i = \kappa(C)\Psi'(\mathfrak{s}_i)^T$ и чињенице да је дејство $\Psi'(M\ddot{o}b^*(\mathbb{C}))$ на скуп свих Декартових четворки слободно следи да је $A_i = \Psi'(\mathfrak{s}_i)^T$. Овим смо показали следећу теорему:

Теорема 36. *Постоји изоморфизам група $M\ddot{o}b^*(\mathbb{C})$ и $\mathcal{O}_Q(\mathbb{R})$ који слика инверзије $\mathfrak{s}_i$ у односу на кругове дуалне Декартове конфигурације у матрице A_i.*

ГЛАВА 3

ГЕОМЕТРИЈСКА СВОЈСТВА АПОЛОНИЈЕВЕ ГРУПЕ

3.1 Испрекидано дејство и Поенкареова теорема

Дефиниција 37. *Кажемо да група* Γ *дејствује испрекидано на тополошки простор* X *ако ни за једно* $x \in X$ *орбита* Γx *нема тачака нагомилавања у* X.

Лема 38. *Претпоставимо да подгрупа* $\Gamma \leqslant M\ddot{o}b^*(\mathbb{C}) \cong Isom(\mathbb{H}^3)$ *дејствује испрекидано на* $\mathbb{H}^3$. *Тада постоји тачка* $x \in \mathbb{H}^3$ *таква да је* $\gamma(x) \neq x$, *за све* $\gamma \in \Gamma - \{\mathbb{1}_{\mathbb{H}^3}\}$.

Доказ. Претпоставимо супротно, да за сваку тачку постоји изометрија из $\Gamma - \{\mathbb{1}_{\mathbb{H}^3}\}$ која је фиксира. Тада за произвољан низ тачака $x_n \to x$ у $\mathbb{H}^3$ постоји низ изометрија $\gamma_n \in \Gamma - \{\mathbb{1}_{\mathbb{H}^3}\}$ таквих да је $\gamma_n(x_n) = x_n$. Додатно, можемо обезбедити да су све γ_n међусобно различите. Векторски потпростор фиксних тачака $\mathfrak{F}_n$ изометрије γ_n је димензије највише 2 за свако n. Зато тачке x_n можемо бирати тако да не упадају $\mathfrak{F}_1 \cup \cdots \cup \mathfrak{F}_{n-1}$. Приметимо да је

$$\delta(x, \gamma_n(x)) \leqslant \delta(x, \gamma_n(x_n)) + \delta(\gamma_n(x_n), \gamma_n(x)) = 2\delta(x, x_n) \to 0,$$

где δ представља хиперболичко растојање инваријантно на дејство $\Gamma \leqslant Isom(\mathbb{H}^3)$. Дакле, x је гранична тачка орбите Γx што је у контрадикцији са чињеницом да група Γ дејствује испрекидано. $\square$

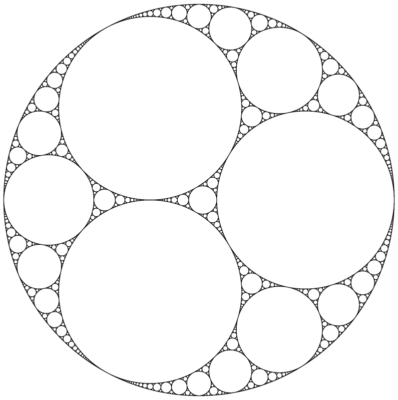
Теорема 39. (Поенкаре) *Свака подгрупа* $\Gamma \leqslant M\ddot{o}b^*(\mathbb{C}) \cong Isom(\mathbb{H}^3)$ *која дејствује испрекидано на хиперболички полупростор* $\mathbb{H}^3$ *је дискретна.*

Доказ. Претпоставимо супротно, да Γ није дискретна, тј. да постоји низ различитих изометрија $\gamma'_n \to \gamma$ у Γ. Тада Γ садржи и низ $\gamma_n = \gamma^{-1}\gamma'_n \to \mathbb{1}_{\mathbb{H}^3}$. Према претходној леми постоји тачка $x \in \mathbb{H}^3$ таква да је $\gamma_n(x) \neq x$ за све $n \in \mathbb{N}$. Из $\gamma_n(x) \to \mathbb{1}_{\mathbb{H}^3}(x) = x$ следи да је x гранична тачка орбите Γx што је у контрадикцији са чињеницом да група Γ дејствује испрекидано. ☐

3.2 Резидуални скуп Аполонијеве конфигурације

Користићемо ознаку $D(x,\varepsilon)$ ($\mathbb{D}(x,\varepsilon)$) за сферу (лопту) полупречника $\varepsilon > 0$ са центром у тачки x.

Резидуални скуп Аполонијеве конфигурације $\mathcal{P}$ (у ознаци $\operatorname{Res}\mathcal{P}$) је $\overline{\bigcup_{C\in\mathcal{P}} C}$ (затворење у $\overline{\mathbb{C}}$). Геометријски, овај скуп можемо видети и као комплемент уније унутрашњости кругова из $\mathcal{P}$.



Слика 11: *Резидуални скуп Аполонијеве конфигурације*

Обележимо са $\Lambda(\mathcal{A})$ скуп свих граничних тачака (у $\overline{\mathbb{H}^3}$) орбите $\mathcal{A}x$, кад x пролази $\overline{\mathbb{H}^3}$. Наравно, овде $\mathcal{A}$ посматрамо као подгрупу $Isom(\mathbb{H}^3)$. Следећа лема даје још једну занимљиву интерпретацију.

Лема 40. $\Lambda(\mathcal{A}) = \operatorname{Res}\mathcal{P}$.

Доказ. Нека је $x \in \operatorname{Res}\mathcal{P}$ произвољна тачка. Тада, за свако $\varepsilon > 0$ лопта $\mathbb{D}(x,\varepsilon)$ у $\mathbb{R}^3$ има непразан пресек са бесконачно много кругова из $\bigcup_{C\in\mathcal{P}} C = \bigcup_{\substack{1\leqslant i\leqslant 4\\ \mathfrak{s}\in\mathcal{A}}} \mathfrak{s}(C_i)$, где је (C_1, C_2, C_3, C_4) произвољна Декартова конфигурација. Следи, за неко $1 \leqslant i \leqslant 4$ лопта $\mathbb{D}(x,\varepsilon)$ има непразан пресек са бесконачно много кругова из $\mathcal{P}_i = \bigcup_{\mathfrak{s}\in\mathcal{A}} \mathfrak{s}(C_i)$. Важи и више, постоји $1 \leqslant i \leqslant 4$ такво да за свако $\varepsilon > 0$ лопта $\mathbb{D}(x,\varepsilon)$ сече бесконачно много кругова из $\mathcal{P}_i$. (У супротном би постојали бројеви $\varepsilon_i > 0$ такви да лопте $\mathbb{D}(x,\varepsilon_i)$ секу само коначан број кругова из $\mathcal{P}_i$. Зато би за $\varepsilon = \min_{1\leqslant i\leqslant 4}$ лопта $\mathbb{D}(x,\varepsilon)$ секла само коначан број кругова из $\mathcal{P}$.) Међу овим круговима може бити само коначно много њих полупречника већег од ε. Ово је интуитивно јасно, а строг доказ ћемо видети у наредној глави. Зато лопта $\mathbb{D}(x,3\varepsilon)$ садржи бесконачно много кругова из $\bigcup_{\mathfrak{s}\in\mathcal{A}} \mathfrak{s}(C_i)$. За произвољну тачку $x' \in C_i$, бесконачно много тачака $\mathfrak{s}(x')$ ће бити у околини $\mathbb{D}(x, 3\varepsilon)$ тачке x. Зато је $x \in \Lambda(\mathcal{A})$, односно $\operatorname{Res}\mathcal{P} \subset \Lambda(\mathcal{A})$.

Да бисмо показали обрнуту инклузију, претпоставимо супротно, да постоји $x \in \Lambda(\mathcal{A}) - \operatorname{Res}\mathcal{P}$. Претпоставимо прво да је тачка x у спољашњости свих дуалних полусфера $\tilde{S}_i$, $1 \leqslant i \leqslant 4$. Подразумевамо да је избор унутрашњости и спољашњости исти као и у равни, тј. такав да су унутрашњости полусфера дисјунктне. Тада постоји околина U тачке x која је у спољашњости свих полусфера. Нека је $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_{i_n} \dots \mathfrak{S}_{i_1} \in \mathcal{A} - \{\mathbb{1}_{\mathbb{H}^3}\}$ произвољна редукована реч. Тада је $\mathfrak{S}_{i_1}(U)$ у унутрашњости $\tilde{S}_{i_1}$, па самим тим и у спољашњости $\tilde{S}_{i_2}$. То даље значи да је $\mathfrak{S}_{i_2}\mathfrak{S}_{i_1}(U)$ у унутрашњости $\tilde{S}_{i_2}$. Понављањем овог поступка можемо закључити да је $\mathfrak{S}(U)$ у унутрашњости $\tilde{S}_{i_n}$. Зато је $U \cap \mathfrak{S}(U) = \emptyset$ за све $\mathfrak{S} \in \mathcal{A} - \{\mathbb{1}_{\mathbb{H}^3}\}$. Са друге стране, из $x \in \Lambda(\mathcal{A})$ следи да околина U садржи бесконачно много тачака исте орбите. Контрадикција.

Ако би тачка x била у унутрашњости неке полусфере $\tilde{S}_{i_0}$, тада би слика тачке x при инверзији у односу на $\tilde{S}_{i_0}$ била у спољашњости свих полусфера и у $\Lambda(\mathcal{A})$ што није могуће. Остаје још случај када x припада тачно једној полусфери S_{i_0} (и није на рубу те полусфере). Он се своди на претходни тако што се x преслика инверзијом у односу на било коју полусферу различиту од S_{i_0}. $\square$

Дакле, скуп тачака нагомилавања $\Lambda(\mathcal{A})$ у $\overline{\mathbb{H}^3}$ једнак $\operatorname{Res}\mathcal{P} \subseteq \partial\mathbb{H}^3$. Другим речима, у $\mathbb{H}^3$ нема тачака нагомилавања па Аполонијева група $\mathcal{A}$ дејствује испрекидано. Према Поенкареовој теореми $\mathcal{A}$ је дискретна подгрупа групе $M\ddot{o}b^*(\mathbb{C}) \cong Isom(\mathbb{H}^3)$.

3.3 Хаусдорфова димензија резидуалног скупа

За унију отворених скупова $B = \bigcup\limits_i B_i$ дефинишемо $N_s(B) := \sum\limits_i \operatorname{diam}(B_i)^s$, где је $\operatorname{diam}(A)$ дијаметар скупа A. Нека је $F \subseteq \mathbb{R}^n$ и $s \geqslant 0$. Број

$$\lim_{\varepsilon \to 0_+} \left(\inf \left\{ N_s(B) \;\middle|\; B = \bigcup_i B_i \text{ је (отворено) покривање } F,\ (\forall i)\operatorname{diam}(B_i) < \varepsilon \right\} \right)$$

ћемо звати s–димензиона Хаусдорфова[18] мера и обележавати са $\mathcal{H}^s(F)$.

Без умањења општости можемо сматрати да је $\operatorname{diam}(B_i) < \varepsilon \leqslant 1$ за свако i. Зато је $\mathcal{H}^s(F)$ опадајућа функција по s која узима вредности из $[0, +\infty]$.

---

[18] Felix Hausdorff (1868. – 1942.), немачки математичар

Дефиниција 41. *Хаусдорфова димензија скупа* $F \subset \mathbb{R}^n$ *(у ознаци* $\dim_{\mathcal{H}}(F)$*) је број* $\inf\{s > 0 \mid \mathcal{H}^s(F) = 0\}$.

Приметимо да смо уместо свих покривања могли да узмемо само покривања дисковима. Ова, на први поглед слабија, дефиниција је еквивалентна нашој јер сваки скуп дијаметра r упада у диск полупречника r, тј. дијаметра $2r$.

Нас ће занимати Хаусдорфова димензија резидуалног скупа. Резидуални скуп ограничене конфигурације је компактан, па можемо сматрати да је свако његово покривање коначно.

Теорема 42. *Нека је* $\delta = \delta(\mathcal{P}) := \dim_{\mathcal{H}} \operatorname{Res} \mathcal{P}$. *Важи* $1 < \delta \leqslant 2$.

Доказ. Покажимо најпре да је $\delta \leqslant 2$ за ограничену конфигурацију $\mathcal{P}$. Нека је $C = D(z, r) \in \mathcal{P}$ произвољан круг. Он је садржан у прстену $P_C = \mathbb{D}(z, r + \frac{\varepsilon}{8r}) - \mathbb{D}(z, r - \frac{\varepsilon}{8r})$. Круг C се може покрити круговима B_i полупречника $\frac{\varepsilon}{8r}$ чији центри припадају C, тако да се никоја три круга не преклапају. Тада је

$$\sum_i \operatorname{diam}(B_i)^2 = \frac{1}{\pi} \sum_i P(B_i) \leqslant \frac{2}{\pi} P\left(\bigcup_i B_i\right) \leqslant \frac{2}{\pi} P(P_C) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\left(r + \frac{\varepsilon}{8r}\right)^2 - \left(r - \frac{\varepsilon}{8r}\right)^2\right)\pi = \frac{2}{\pi} \cdot 4r\frac{\varepsilon}{8r}\pi = \varepsilon.$$

Нека је приликом конструкције Аполонијеве конфигурације у n–том кораку додато $k(n)$ нових кругова. Према претходном, сваки од њих се може покрити неким $B' = \bigcup_i B_i$ тако да важи $N_2(B') = \frac{\varepsilon}{2^{n+1}k(n)}$. Унија B свих тих покривања је покривање конфигурације $\mathcal{P}$ за коју је

$$N_2(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} k(n) \frac{\varepsilon}{2^{n+1}k(n)} = \varepsilon.$$

У случају неограничене конфигурације ово важи за један (произвољни) сегмент (аналогно и још лакше се дуж смешта у правоугаоник). Дакле, за један сегмет постоји покривање B_0 такво да је $N_2(B_0) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Сегменти који су од њега удаљени n сегмената могу се покрити са $B_n^{(1)}$ и $B_n^{(2)}$ тако да је $N_2\left(B_n^{(i)}\right) \leqslant \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}$. Зато се $\mathcal{P}$ може покрити са

$$B = B_0 \cup \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left(B_n^{(1)} \cup B_n^{(2)}\right), \qquad N_2(B) = \frac{\varepsilon}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\varepsilon}{2^{n+2}} + \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}\right) = \varepsilon.$$

Следи, $\mathcal{H}^2(\mathcal{P}) = 0$, па је $\delta \leqslant 2$.

Сличну идеју ћемо искористити и да покажемо да је $\delta > 1$, односно да је $\mathcal{H}^1(\mathcal{P}) > 0$. Нека је $C = D(X, r) \in \mathcal{P}$ произвољан круг и A и B дијаметрално супротне тачке на том кругу. Довољно је показати да је за произвољно покривање B број $N(B)$ већи од неке фиксиране вредности. Лук $\widehat{AB}$ (било који) је покривен неким $B' = \bigcup\limits_i B_i \subset B$. AB се може изделити на делове тако да сваки део $l_i = \widehat{X_i, Y_i}$ упада у B_i и свака права X_iY_i упада у B_i (и самим тим је краћа од $\operatorname{diam}(B_i)$). Са друге стране $\bigcup\limits_i X_iY_i$ спаја A и B, па мора бити дужа од полупречника r. Закључујемо да је $N(B) \geqslant N(B') \geqslant r$ одакле следи $\mathcal{H}^1(\mathcal{P}) \geqslant \lim\limits_{\varepsilon \to 0+} r = r$ и $\delta > 1$. ☐

Лема 43. *Хаусдорфова димензија резидуалног скупа* δ *не зависи од Аполонијеве конфигурације* $\mathcal{P}$.

Доказ. Нека су $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ две произвољне Аполонијеве конфигурације. Размотримо прво случај када се $\mathcal{P}_1$ слика у $\mathcal{P}_2$ Мебијусовом трансформацијом $f : x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$. Ако $\operatorname{Res}\mathcal{P}_1$ не садржи тачку $-\frac{d}{c}$, рестрикција f на $\mathbb{C} - \mathbb{D}\left(-\frac{d}{c}, \varepsilon\right)$ (за довољно мало $\varepsilon > 0$) је ограничено пресликавање. Мебијусова трансформација f је отворено пресликавање јер је инвертибилна. Зато свако покривање B_1 скупа $\operatorname{Res}\mathcal{P}_1$ индукује једно покривање B_2 скупа $\operatorname{Res}\mathcal{P}_2$ при чему за свако $s > 0$ важи $N_s(B_2) \leqslant k(s)N_s(B_1)$ за неку константу $k(s) > 0$. Следи, $\delta(\mathcal{P}_1) \leqslant \delta(\mathcal{P}_2)$. Уколико $\operatorname{Res}\mathcal{P}_1$ садржи $-\frac{d}{c}$ можемо ту конфигурацију транслирати до неке конфигурације $\mathcal{P}_1'$ која не садржи ову тачку. Тада је $\delta(\mathcal{P}_2) \leqslant \delta(\mathcal{P}_1') = \delta(\mathcal{P}_1)$. Из истог разлога је и $\delta(\mathcal{P}_1) \leqslant \delta(\mathcal{P}_2)$, тј. важи једнакост.

Још треба проверити тврђење у случају да се $\mathcal{P}_1$ слика у $\mathcal{P}_2$ уопштеном Мебијусовом трансформацијом $x \mapsto f\left(\overline{x}\right)$, где је f Мебијусова трансформација из претходног пасуса. Тада је $\delta(\mathcal{P}_2) = \delta\left(f\left(\overline{\mathcal{P}_1}\right)\right) = \delta\left(\overline{\mathcal{P}_1}\right) = \delta(\mathcal{P}_1)$, јер конјуговање чува дијаметре, па самим тим и Хаусдорфову димензију. ☐

Претходна оцена за δ ће нам бити сасвим довољна, иако постоје и неке знатно прецизније. Тачна вредност δ за сада није позната, а најбоља апроксимација (на чак шест сигурних цифара) је $\delta \approx 1,305688$ и може се наћи у [22].

3.4 Фундаметална област Аполонијеве групе

Дискретне подгрупе изометрија се могу лепо визуелизовати помоћу свог *фундаменталног домена.* Нека је Γ дискретна подгрупа групе изометрија тополошког простора X. Изометрије се могу видети и као дејство групе Γ на скуп X. Рећи ћемо да су тачке $x, y \in X$ еквивалентне (у ознаци $x \equiv y \pmod{\Gamma}$) ако је $y \in \Gamma(x)$.

Дефиниција 44. *Скуп $\mathcal{F} \subseteq X$ је фундаментална област дискретне подгрупе $\Gamma \leqslant Isom(X)$ ако важи:*

(1) $\mathcal{F}$ је област (тј. отворен и повезан скуп) у X.

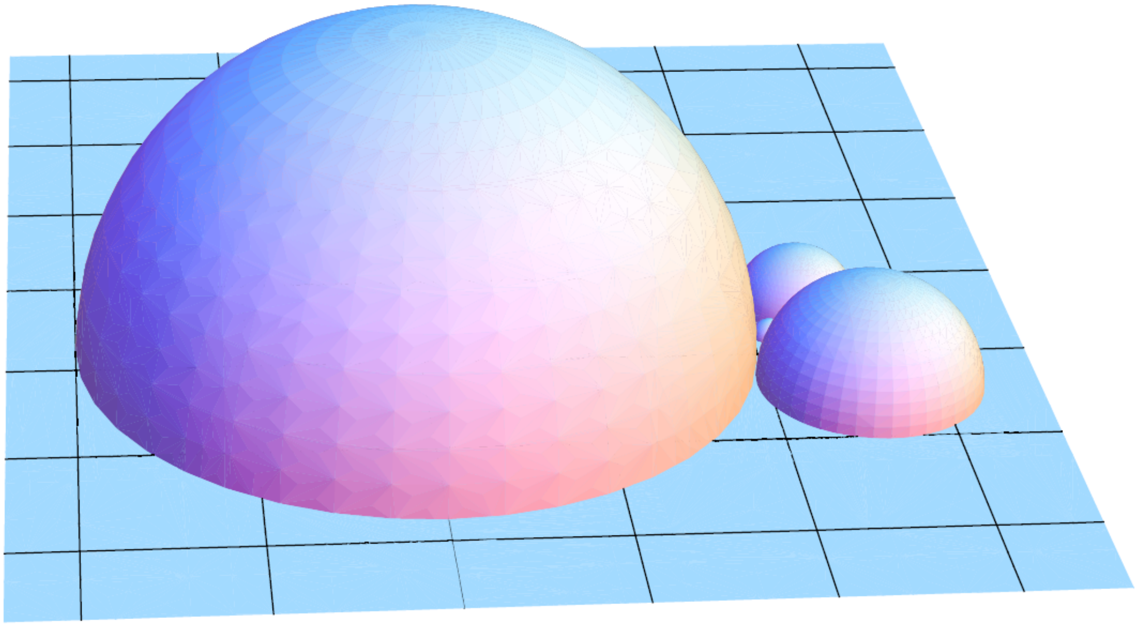
(2) Различите тачке у $\mathcal{F}$ нису еквивалентне.

(3) Свака орбита (класа еквиваленције) има бар по једног представника у $\overline{\mathcal{F}}$.

Дејство Γ индукује и количнички скуп $\Gamma \backslash X$ који подсећа на фундаменталну област $\mathcal{F}$. Суштинска разлика између ових скупова су тачке (класе) на рубу $\partial \mathcal{F}$. Наиме, $\overline{\mathcal{F}}$ најчешће садржи више од једног представника такве класе, док $\mathcal{F}$ нема ни једног.

Присетимо се Аполонијеве групе. Она дејствује на $\mathbb{H}^3$ инвезијама $\mathfrak{S}_i$ у односу на дуалне полусфере $\tilde{S}_i$. Подразумевамо да је избор унутрашњости и спољашњости исти као у равни, тј. одређен условом да су ове полусфере дисјунктне. Са $\operatorname{int} S$ ($\operatorname{ext} S$) ћемо означавати унутрашњост (спољашњост) (у $\mathbb{H}^3$) скупа S.

Теорема 45. *Фундаментална област Аполонијеве групе је $\mathcal{F} = \bigcap_{i=1}^{4} \operatorname{ext} \tilde{S}_i$.*



Слика 12: *Фундаментална област Аполонијеве групе*

Доказ. Очигледно је $\mathcal{F}$ област у $\mathbb{H}^3$. Проверимо да ли важи друго својство. Претпоставимо супротно, да постоје неке две еквивалентне тачке $x, y \in \mathcal{F}$. Тада постоји и редукована реч $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_{i_n} \ldots \mathfrak{S}_{i_1} \in \mathcal{A}$ која слика x у y. Из $x \in \operatorname{ext} \tilde{S}_{i_1}$ следи $\mathfrak{S}_{i_1}(x) \in \operatorname{int} \tilde{S}_{i_1} \subseteq \operatorname{ext} \tilde{S}_{i_2}$. У n–том кораку добијамо $y = \mathfrak{S}(x) \in \operatorname{int} \tilde{S}_{i_n} \subseteq \mathcal{F}^{\complement}$ што је у супротности са претпоставком $y \in \mathcal{F}$. Нека је $\mathcal{S}x$ произвољна орбита. Ако је $x \in \overline{\mathcal{F}}$ доказ је завршен. Иначе, будући да су унутрашњости полусфера дисјунктне, x мора припадати унутрашњости тачно једне полусфере $\tilde{S}_{i_0}$. Тада је $\mathfrak{S}_{i_0} x \in \operatorname{ext} \tilde{S}_{i_0} \subseteq \mathcal{F}$. □

У доказу леме 40, тачније инклузије $\Lambda(\mathcal{A}) \subseteq \operatorname{Res} \mathcal{P}$, смо баш и користили да је фундаментална област пресек спољашњости и да самим тим не може садржати тачке нагомилавања орбите.

Приметимо да фундаментална област зависи од избора почетне Декартове конфигурације. То значи да постоји бесконачно много фундаменталних области, при чему их трансформације Аполонијеве групе пермутују. Надаље ћемо подразумевати да је избор као у другом или четвртом случају са слике 3. Тада ће се добити фундаментална област која садржи тачку ∞ (као на слици 12) за ограничену конфигурацију. У случају неограничене конфигурације добија се фундаментална област ограничена са две паралелне равни нормалне на границу и две сфере.

Како год бирали фундаменталну област она ће бити полиедар у хиперболичком простору. Може се изабрати и тако да буде коначан полиедар. Међутим, нама ће бити лакше да радимо са горе наведеним полиедрима.

3.5 Лијева алгебра пројективне специјалне групе и групе уопштених Мебијусових трансформација

Нека је $\pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in PSL_2(\mathbb{C})$ произвољна класа и $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in PSL_2(\mathbb{C})$ њен произвољни представник. Због $\det X = 1$ бар један коефицијент X мора бити различит од нуле, нпр a. Тада је пресликавање $\varphi : (x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} x & y \\ z & \frac{1+yz}{x} \end{pmatrix}$ хомеоморфизам неке околине (a, b, c) у $\mathbb{C}^3 \cong \mathbb{R}^6$ и одговарајуће околине матрице X, тј. параметризација, а φ^{-1} је карта која садржи тачку X. Дакле, пројективна специјална група је многострукост комплексне димензије 3, односно реалне димензије 6. Додатно, операција групе је непрекидна, те је $PSL_2(\mathbb{C})$ једна Лијева[19] група.

---

[19] Xarius Sophus Lie (1842. – 1899.), норвешки математичар

Група $M\ddot{o}b^*(\mathbb{C})$ се може разложити на $PSL_2(\mathbb{C}) \rtimes \mathbb{F}_2$, при чему скуп $\mathbb{F}_2$ има дискретну топологију. Следи, група $M\ddot{o}b^*(\mathbb{C})$ је локално хомеоморфна са $PSL_2(\mathbb{C})$. Зато је и $M\ddot{o}b^*(\mathbb{C})$ многострукост и Лијева група (јер је операција непрекидна) димеције 6.

Дефиниција 46. *Лијева алгебра Лијеве групе G димеције n (у ознаци $\mathfrak{g}(G)$) је тангентни простор у неутралу E*

$$T_E G := \{\gamma'(0) \mid \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow G \text{ глатко}, \ \gamma(0) = E\} = d\Phi(T_{(0,0,\dots,0)}\mathbb{R}^n),$$

где је Φ карта која садржи E.

Лијева алгебра $\mathfrak{g}(PSL_2(\mathbb{C}))$ $(\mathfrak{g}(M\ddot{o}b^*(\mathbb{C})))$ је векторски простор над $\mathbb{R}$ димензије 6. Иако имамо и множење скаларом из $\mathbb{C}$, ова Лијева алгебра није векторски простор над $\mathbb{C}$.

Лема 47. *Нека је $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow PSL_2(\mathbb{C})$ глатко пресликавање за које је $\gamma(0) = E$. Тада је $\operatorname{Tr}\gamma'(0) = 0$.*

Доказ. Обележимо са $X[i, j]$ минор који се добија када из матрице X избацимо i–ту врсту и j–ту колону. Приметимо да је

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \det\gamma(t) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j}\gamma(t)_{1j} \det(\gamma(t)[1, j]) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} \left(\gamma'(0)_{1j} \det(\gamma(t)[1, j]) + \gamma(0)_{1j} \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \det(\gamma(t)[1, j])\right) =$$

$$= \gamma'(0) + \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \det(\gamma(t)[1, 1]) = \dots = \sum_{i=1}^{n} \gamma'(0)_{ii} = \operatorname{Tr}\gamma'(0).$$

Са друге стране $\gamma(t) \in PSL_2(\mathbb{C})$, што значи да је $\det\gamma(t) = 1$ за све $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, тј. $\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \det\gamma(t) = 0$. □

Последица 48. *Лијева алгебра $\mathfrak{g}(PSL_2(\mathbb{C}))$ је $\{M \in M_2(\mathbb{C}) \mid \operatorname{Tr} M = 0\}$.*

Доказ. Претходна лема даје $\mathfrak{g}(PSL_2(\mathbb{C})) \leqslant \{M \in M_2(\mathbb{C}) \mid \operatorname{Tr} M = 0\}$. Како су $\mathfrak{g}(PSL_2(\mathbb{C}))$ и $\{M \in M_2(\mathbb{C}) \mid \operatorname{Tr} M = 0\}$ векторски простори (над $\mathbb{R}$), оба димензије 6, важиће и једнакост. □

Последица 49. *Лијева алгебра $\mathfrak{g}(M\ddot{o}b(\mathbb{C}))$ је $\{M \in M_2(\mathbb{C}) \mid \operatorname{Tr} M = 0\}$.*

ГЛАВА 4

ПРЕБРОЈАВАЊЕ ОРБИТА У АПОЛОНИЈЕВОЈ КОНФИГУРАЦИЈИ

4.1 Број простих бројева и простих бројева близанаца

Чувена теорема о простим бројевима каже да је $\pi(T) \sim \frac{T}{\log T}$, кад $T \to +\infty$, где $\pi(T)$ означава број простих бројева мањих од T. Нешто слабија (али за нас значајнија) верзија ове теореме је Чебишовљева[20] теорема.

Теорема 50. (Чебишов) *Постоје позитивне константе* C_1 *и* C_2 *такве да је*

$$C_1 \frac{T}{\log T} \leqslant \pi(T) \leqslant C_2 \frac{T}{\log T},$$

за све $T \gg 1$.

Уређени пар простих бројева $(p, p+2)$ зовемо *пар простих бројева близанаца.* Са $\pi_2(T)$ означавамо број парова $(p, p+2)$ простих бројева

---

[20] Пафнутий Львович Чебышёв (1821. – 1894.), руски математичар и физичар

близанаца за које је $p+2 < T$. Асимптотско понашање ове функције још увек није испитано. Постоји хипотеза о овој асимптотици коју ћемо изложити хеуристички.

Према теореми о простим бројевима, у интервалу $[1, n]$ има приближно $\frac{n}{\log n}$ простих бројева. Следи, вероватноћа да је број n прост је $\frac{1}{\log n}$.

Нека је p прост број, питамо се колика је вероватноћа да и број $p+2$ буде прост. Када би догађаји $\{p \text{ је прост}\}$ и $\{p+2 \text{ је прост}\}$ били независни, онда би вероватноћа да је $p+2$ прост била једнака $\frac{1}{\log p}$. Тада би вероватноћа да пар $(n, n+2)$ чине прости бројеви близанци била $\frac{1}{\log^2 n}$. У интервалу $[1, n]$ би било приближно $\frac{1}{\log^2 n}$, па треба очекивати $\pi_2(T) \sim \frac{T}{\log^2 T}$.

Наравно, ова два догађаја нису независни. Зато се претходна процена множи корективном константом. Број $n > 1$ је прост акко није дељив ниједним простим бројем $p < n$. Вероватноћа да број није дељив са p (тј. да му је класа конгруенције по модулу p различита од нуле) је $\frac{p-1}{p}$. Следи, вероватноћа да ниједан од два случајно изабрана броја није дељив са p износи $\left(\frac{p-1}{p}\right)^2$. Слично, вероватноћа да ни n ни $n+2$ нису дељиви са p износи $\frac{\nu(p)}{p}$, где $\nu(p) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ p-2, & \text{иначе} \end{cases}$ означава број класа конгруенције различитих од 0 и $p-2$ по модулу p. Зато је природно претпоставити да корективна константа износи

$$C := \prod_{p \text{ прост}} \frac{\frac{\nu(p)}{p}}{\left(\frac{p-1}{p}\right)^2} = \prod_{p \text{ прост}} \frac{p\nu(p)}{(p-1)^2} = 2 \prod_{\substack{p \text{ прост} \\ p \geqslant 3}} \frac{p(p-2)}{(p-1)^2} = 2 \prod_{\substack{p \text{ прост} \\ p \geqslant 3}} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right).$$

Претходни производ конвергира јер је

$$\prod_{\substack{p \text{ прост} \\ p \geqslant 3}} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) = e^{\sum\limits_{\substack{p \text{ прост} \\ p \geqslant 3}} \log\left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right)} \leqslant e^{-\sum\limits_{\substack{p \text{ прост} \\ p \geqslant 3}} \frac{1}{(p-1)^2}} < 1.$$

Овим смо дошли до хипотезе о простим бројевима близанцима: $\pi_2(T) \sim C\frac{T}{\log^2 T}$. До сада је показано да овај ред величине представља горњу границу за π_2.

Теорема 51. *Важи оцена* $\pi_2(T) \ll \frac{T}{\log^2 T}$, *кад* $T \to +\infty$.

Детаљније информације о овим функцијама могу се наћи у [4].

4.2 Број кругова у Аполонијевој конфигурацији

После приче о простим бројевима и простим бројевима близанцима (у $\mathbb{N}$), питамо се да ли постоје аналогни концепти на скупу кривина једне Аполонијеве конфигурације. За почетак, јасно је да скуп кривина најчешће не садржи све природне бројеве. Затим, могуће је да постоји више кругова у једној конфигурацији који имају исте кривине. Зато ни бројање свих кривина није тако једноставно као бројање свих природних бројева.

Постоје две суштински различите Декартове конфигурације – ограничена и неограничена. Додатно, код неограничене се кругови периодично понављају, што није случај са ограниченом. Зато ћемо код ограничене конфигурације бројати све кругове, а код неограничене само кругове на једном сегменту (између две паралелне праве и два суседна највећа круга).

Овакво пребројавање ће довести до тога да је случај неограничене конфигурације знатно компликованији од ограничене, што је у супротности са неком интуицијом да је лакше испитати неограничену конфигурацију.

Кругове чије су кривине прости бројеви зовемо *прости кругови.* Пар тангентних простих кругова зовемо *пар простих кругова близанаца.*

Дефиниција 52. *Нека је $\mathcal{P}$ Аполонијева конфигурација.*

(1) Са $N^{\mathcal{P}}(T)$ означавамо број кругова у конфигурацији $\mathcal{P}$ кривине мање од T.

(2) Са $N_2^{\mathcal{P}}(T)$ означавамо број парова тангентних кругова у конфигурацији $\mathcal{P}$ кривине мање од T.

(3) Са $\pi^{\mathcal{P}}(T)$ означавамо број простих кругова у конфигурацији $\mathcal{P}$ кривине мање од T.

(4) Са $\pi_2^{\mathcal{P}}(T)$ означавамо број парова простих кругова близанаца у конфигурацији $\mathcal{P}$ кривине мање од T.

Понекад се у претходној дефиницији ставља услов да је апсолутна вредност кривине мања од T и/или да је прост број. Такође, уместо услова мањи T, понекад се узима мањи и једнак T. Ово може променити вредности ових функција евентуално за један, тако да нам тај детаљ није превише битан.

Уколико се Аполонијева конфигурација $\mathcal{P}'$ добија из Аполонијеве конфигурације $\mathcal{P}$ (еуклидском[21]) изометријом равни претходне четири

---

[21] *Ευκλειδης ο Αλεξανδρεια* (око 325. п.н.е. – око 265. п.н.е.), антички математичар

функције ових конфигурација ће бити једнаке. Зато, у даљој причи, нећемо разликовати конфигурације $\mathcal{P}$ и $\mathcal{P}'$.

Обележимо са $P(\mathcal{P})$ површину спољашњег круга за ограничену конфигурацију, односно површину једног сегмента за неограничену. Круг кривине мање од T, има полупречник већи од $\frac{1}{T}$, па самим тим и површину већу од $\frac{\pi}{T^2}$. Зато важи тривијална оцена

$$N^{\mathcal{P}}(T) < \frac{P(\mathcal{P})}{\frac{\pi}{T^2}} = \frac{P(\mathcal{P})}{\pi}T^2$$

из које следи да је број $N_{\mathcal{P}}(T)$ коначан за сваки коначан број T.

Како је $\pi^{\mathcal{P}}(T) \leqslant N^{\mathcal{P}}(T)$, $N_2^{\mathcal{P}}(T) \leqslant N^{\mathcal{P}}(T)^2$ и $\pi_2^{\mathcal{P}}(T) \leqslant \pi^{\mathcal{P}}(T)^2$, и остале величине из претходне дефиниције ће бити коначне за коначно T. Нас ће занимати њихово асимптотско понашање.

Лема 53. *Нека је $\mathcal{P}$ Аполонијева конфигурација са кореном четворком ξ. Означимо са $\kappa^{(n)} = \xi A$, где је $A = A_{i_1}A_{i_2}\dots A_{i_n}$ редукована реч састављена од генератора Аполонијеве групе $\mathcal{A}$. Тада је нова координата (тј. она која се не јавља у $\kappa^{(n-1)} = \xi A_{i_1}\dots A_{i_{n-1}}$) уједно и највећа координата у $\kappa^{(n)}$.*

Доказ. Тврђење доказујемо индукцијом по дужини редуковане речи n. За $n = 1$ следи из чињенице да је ξ корена четворка.

Нека тврђење важи за $n-1$, треба проверити за n. Нека је $\kappa^{(n-1)} = (\kappa_1^{(n-1)}, \kappa_2^{(n-1)}, \kappa_3^{(n-1)}, \kappa_4^{(n-1)})$ при чему је нпр. $\kappa_4^{(n-1)}$ највећа координата. Према индукцијској претпоставци је $\kappa_4^{(n-1)}$ последња добијена вредност. Како је A редукована реч мора бити $A_{i_n} \neq A_{i_{n-1}}$. Зато A_{i_n} мења једну од прве три координате нпр. $\kappa_3^{(n-1)}$. Тада је нова координата у $\kappa^{(n)}$ једнака

$$\kappa_3^{(n)} = 2(\kappa_1^{(n-1)} + \kappa_2^{(n-1)} + \kappa_4^{(n-1)}) - \kappa_3^{(n-1)} =$$

$$= 2(\kappa_1^{(n-1)} + \kappa_2^{(n-1)}) + \kappa_4^{(n-1)} + (\kappa_4^{(n-1)} - \kappa_3^{(n-1)}) \geqslant \kappa_4^{(n-1)} \geqslant \kappa_i^{(n-1)} = \kappa_i^{(n)},$$

за $i \in \{1,2,4\}$, јер је $\kappa_1^{(n-1)} + \kappa_2^{(n-1)} \geqslant 0$ и $\kappa_4^{(n-1)} \geqslant \kappa_3^{(n-1)}$. □

Тврђење 54. *Нека је $\mathcal{P}$ Аполонијева конфигурација са кореном четворком $\xi \in \mathbb{Z}^4$ и $T \gg 1$. Тада важи*

(1) $N^{\mathcal{P}}(T) = \begin{cases} \#\mathcal{A}_\xi \#\{\kappa \in \xi\mathcal{A} \mid \|\kappa\|_\infty < T\} + 3, & \textit{ако је } \mathcal{P} \textit{ ограничена} \\ \#\{\kappa \in \xi\mathcal{A} \mid \|\kappa\|_\infty < T\} + 3, & \textit{ако је } \mathcal{P} \textit{ неограничена} \end{cases},$

(2) $N_2^{\mathcal{P}}(T) = 3N^{\mathcal{P}}(T) - 6,$

(3) $N_2^{\mathcal{P}}(T) = \begin{cases} 3\#\mathcal{A}_\xi \#\{\kappa \in \xi\mathcal{A} \mid \|\kappa\|_\infty < T\} + 3, & \textit{ако је } \mathcal{P} \textit{ ограничена} \\ 3\#\{\kappa \in \xi\mathcal{A} \mid \|\kappa\|_\infty < T\} + 3, & \textit{ако је } \mathcal{P} \textit{ неограничена} \end{cases},$

где је $\|\cdot\|_\infty$ *супремум (максимум) норма на* $\mathbb{Z}^4$*:* $\|(x_1, x_2, x_3, x_4)\|_\infty = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant 4} |x_i|$.

Доказ. Услов $T \gg 1$ је потребан само да обезбеди да су све четири вредности из корене четворке ξ мање од T. Дакле, може се мало и ослабити, али то није превише битно.

(1) Докажимо прво $N^{\mathcal{P}}(T) = \#\{\kappa \in \xi\mathcal{A} \mid \|\kappa\|_\infty < T\}+3$ у специјалном случају када је конфигурација $\mathcal{P}$ ограничена а стабилизатор тривијалан ($\mathcal{A}_\xi = \{\mathbb{1}_{\mathbb{Z}^4}\}$). За произвољну Декартову четворку $\kappa = \xi A$, $A \in \mathcal{A}$ имамо да је $\mathcal{A}_\kappa = A^{-1}\mathcal{A}_\xi A = \{\mathbb{1}_{\mathbb{Z}^4}\}$. Приметимо да је $\#\mathcal{A}_\kappa$ једнака броју Декартових конфигурација у $\mathcal{P}$ чије су кривине κ. Дакле, у овом случају нема Декартових конфигурација са истим кривинама. По претпоставци четири броја из корене четворке су мања од T. Све остале Декартове четворке које одговарају истој Аполонијевој конфигурацији су облика ξA за неку редуковану реч $A = A_{i_1} \dots A_{i_n} \in \mathcal{A}$. Према претхоној леми нова вредност у ξA (тј. она која се не јавља у $\xi A_{i_1} \dots A_{i_{n-1}}$) је уједно и највећа вредност у ξA. Другим речима, треба бројати оне Декартове конфигурације κ чија је највећа координата $\|\kappa\|_\infty$ мања од T. Зато је

$$N^{\mathcal{P}}(T) = 4+\#\{\kappa = \xi A \mid A \in \mathcal{A}-\{\mathbb{1}_{\mathbb{Z}^4}\}, \|\kappa\|_\infty < T\} = \#\{\kappa \in \xi\mathcal{A} \mid \|\kappa\|_\infty < T\}+3.$$

У случају да стабилизатор није тривијалан за корену четворку (бројева) ξ постоји $\#\mathcal{A}_\xi$ Декартових конфигурација (кругова) у $\mathcal{P}$. Према претходном, за сваку од тих конфигурација постоји по $\gamma + 3$ круга кривине мање од T који формирају γ Декартових конфигурација, где је $\gamma = \#\{\kappa \in \xi\mathcal{A} \mid \|\kappa\|_\infty < T\}$. Следи, у $\mathcal{P}$ има $\#\mathcal{A}_\xi\gamma$ Декартових конфигурација код којих су све кривине мање од T, те је $N^{\mathcal{P}}(T) = \#\mathcal{A}_\xi\gamma + 3$.

Нека је сада конфигурација $\mathcal{P}$ неограничена. Њена корена четворка је $\xi = (0, 0, c, c)$ за неко $c > 0$, а стабилизатор $\mathcal{A}_\xi = \langle A_3, A_4\rangle$. Елементи стабилизатора $\mathcal{A}_\xi$ (посматрани као Мебијусове трансформације) сликају кругове једног сегмента у (идентичне) кругове другог сегмента, тј. $\mathcal{A}_\xi$ представља скуп пермутација сегмената. Пошто бројимо само кругове на једном сегменту, важиће исти закључак као у случају ограничене конфигурације са тривијалним стабилизатором.

(2) Из конструкције Аполонијеве конфигурације се види да међу круговима конструисаним у истој генерацији нема међусобно тангентних (изузев четири круга из нулте генерације). У нултој генерацији је сваки пар кругова међусобно тангентан, значи има $\binom{4}{2} = 6$ парова. Дакле, два тангентна круга су сигурно из различитих генерација. Зато, да се не би понављали приликом бројања, за сваки круг (кривине мање од T) ћемо бројати колико има кругова (кривине мање од T) који су конструисани пре њега и који су тангентни са њим. Према конструкцији, круг C кривине $\kappa < T$ констриусан у n–тој генерацији је тангентан на тачно

три круга који су конструисани пре њега. Додатно, са њима чини Декартову конфигурацију. Како је C последњи конструисан, према претходној леми, ова три круга имају кривине мање или једнаке $\kappa < T$, па за круг C имамо тачно три пара. Зато је укупан број парова једнак

$$N_2^{\mathcal{P}}(T) = 3(N^{\mathcal{P}}(T) - 4) + 6 = 3N^{\mathcal{P}}(T) - 6.$$

(3) Следи из (1) и (2). □

Као што смо већ рекли подразумевамо да је корена четворка ξ примитивна. Произвољна корена четворка ξ' се може представити као $\xi' = y\xi$, где је $y :=$ НЗД$(\xi_1', \xi_2', \xi_3', \xi_4') \in \mathbb{N}$ и $\xi := \frac{1}{y}\xi'$ примитивна корена четворка. Хомотетија a_y повећава полупречнике y пута, па самим тим и смањује кривине y пута. Следи, $N^{\mathcal{P}'}(T) = N^{\mathcal{P}}(yT)$ и $N_2^{\mathcal{P}'}(T) = N_2^{\mathcal{P}}(yT)$, где је $\mathcal{P}$ $(\mathcal{P}')$ Аполонијева конфигурација са кореном четворком ξ (ξ').

Тврђење 55. *Нека је $\mathcal{P}$ Аполонијева конфигурација са кореном четворком $\xi \in \mathbb{Z}^4$ и $T \gg 1$. Тада важи*

(1) $\pi^{\mathcal{P}}(T) \ll \sum_{i=1}^{4} \#\{\kappa = (\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4) \in \xi\mathcal{A} \mid \|\kappa\|_\infty < T,\ \kappa_i \text{ је прост}\}$,

(2) $\pi_2^{\mathcal{P}}(T) \ll \sum_{\substack{1 \leqslant i,j \leqslant 4 \\ i \neq j}} \#\{\kappa = (\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4) \in \xi\mathcal{A} \mid \|\kappa\|_\infty < T,\ \kappa_i \text{ и } \kappa_j \text{ су прости}\}$.

Доказ. (1) Нека је $\gamma := \begin{cases} \#\mathcal{A}_\xi, & \text{ако је } \mathcal{P} \text{ ограничена} \\ 1, & \text{ако је } \mathcal{P} \text{ неограничена} \end{cases} \ll 1$, јер је стабилизатор $\mathcal{A}_\xi$ коначан. Слично као у претходној теореми се показује да је

$$\pi^{\mathcal{P}}(T) \leqslant \gamma\#\{\kappa \in \xi\mathcal{A} \mid \|\kappa\|_\infty < T,\ \|\kappa\|_\infty \text{ је прост}\} + 3.$$

Овде стоји знак неједнакости због тога што је могуће да неки од бројева из корене четворке није прост. Одавде следи асимптотска оцена

$$\pi^{\mathcal{P}}(T) \ll \#\{\kappa \in \xi\mathcal{A} \mid \|\kappa\|_\infty < T,\ \|\kappa\|_\infty \text{ је прост}\} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{4} \#\{\kappa = (\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4) \in \xi\mathcal{A} \mid \|\kappa\|_\infty < T,\ \kappa_i \text{ је прост}\}.$$

(2) Слично,

$$\pi_2^{\mathcal{P}}(T) \leqslant \gamma\#\{\kappa \in \xi\mathcal{A} \mid \|\kappa\|_\infty < T,\ \|\kappa\|_\infty \text{ и још једно } \kappa_i \text{ су прости}\} + 5 \ll$$

$$\ll \#\{\kappa \in \xi\mathcal{A} \mid \|\kappa\|_\infty < T,\ \|\kappa\|_\infty \text{ и још једно } \kappa_i \text{ су прости}\} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{4} \#\{\kappa \in \xi\mathcal{A} \mid \|\kappa\|_\infty < T,\ \|\kappa\|_\infty \text{ и } \kappa_i \text{ су прости}\} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{4} \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant 4\\ j\neq i}} \#\{\kappa \in \xi\mathcal{A} \mid \|\kappa\|_\infty < T,\ \kappa_i \text{ и } \kappa_j \text{ су прости}\}.$$

□

Напоменимо да прича о асимптотском понашању $\pi^{\mathcal{P}}$ и $\pi_2^{\mathcal{P}}$ има смисла само под претпоставком да је корена четворка примитивна. У супротном је корена четворка ξ' конфигурације $\mathcal{P}$ једнака $y\xi$, где је y природан број већи од 1 и ξ корена четворка. Тада су функције $\pi^{\mathcal{P}}$ и $\pi_2^{\mathcal{P}}$ коначне, нпр. $\pi^{\mathcal{P}}(T) = \begin{cases} 2, & \mathcal{P} \text{ неограничена, } y \text{ прост, } y < T \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$.

Специјално, ово значи да не постоје доње границе (сем нуле, наравно) функција $\pi^{\mathcal{P}}$ и $\pi_2^{\mathcal{P}}$. Занимљиво је да ћемо добити горње границе ових функција сличне оценама за π (у Чебишовљевој теореми) и π_2 (у теореми 51).

4.3 Мотивација: решетка у еуклидском простору

Идеја за оцену броја $N^{\mathcal{P}}(T)$ долази из једног једноставног бројања тачака решетке у еуклидском простору $\mathbb{R}^3$. Група $(\mathbb{Z}^3, +)$, која је дискретна подгрупа $Isom(\mathbb{R}^3)$, дејствује на овај скуп транслацијама. Њена фундаментална област је нпр. коцка $\mathcal{F} = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^3$. Присетимо се како се може оценити број тачака решетке $\mathbb{Z}^3$ у лопти $\mathbb{D}_T = \mathbb{D}(0, T)$. За сваку тачку $\gamma \in \mathbb{D}_T$, коцка $\gamma + \mathcal{F}$ упада у лопту $\mathbb{D}_{T+1}$. Обрнуто, $\gamma + \mathcal{F} \subseteq \mathbb{D}_T$ повлачи $\gamma \in \mathbb{D}_T$. Зато је

$$\frac{V(\mathbb{D}_{T-1})}{V(\mathcal{F})} \leqslant \#\{\gamma \in \mathbb{Z}^3 \mid \gamma + \mathcal{F} \subseteq \mathbb{D}_T\} \leqslant \#\mathbb{Z}^3 \cap \mathbb{D}_T \leqslant$$

$$\leqslant \#\{\gamma \in \mathbb{Z}^3 \mid \gamma + \mathcal{F} \subseteq \mathbb{D}_{T+1}\} \leqslant \frac{V(\mathbb{D}_{T+1})}{V(\mathcal{F})}.$$

Знамо да је $V(\mathbb{D}_{T-1}) = V(\mathbb{D}_T) - V(\mathbb{D}_T - \mathbb{D}_{T-1}) \geqslant V(\mathbb{D}_T) - V(P_T)$ и $V(\mathbb{D}_{T+1}) = V(\mathbb{D}_T) + V(\mathbb{D}_{T+1} - \mathbb{D}_T) \leqslant V(\mathbb{D}_T) + V(P_T)$, где је $P_T = \mathbb{D}_{T+1} - \mathbb{D}_{T-1}$ јединична околина $\partial\mathbb{D}_T = D(0, T)$. Следи,

$$\#\mathbb{Z}^3 \cap \mathbb{D}_T = \frac{V(\mathbb{D}_T)}{V(\mathcal{F})} + O(V(P_T)),\ T \to +\infty.$$

Пошто је $V(\mathbb{D}_T) = \frac{4\pi}{3}T^3$, $V(\mathcal{F}) = 1$ и $V(P_T) = \frac{4\pi}{3}(T+1)^3 - \frac{4\pi}{3}(T-1)^3 = \frac{4\pi}{3}(6T^2+2)$ претходна оцена постаје $\#\mathbb{Z}^3 \cap \mathbb{D}_T = \frac{4\pi}{3}T^3 + O(T^2)$.

Покушаћемо да ову идеју искористимо и за асимптотику $N^{\mathcal{P}}(T)$. Заменићемо скуп $\mathbb{R}^3$ са $\mathbb{H}^3$, а решетку $\mathbb{Z}^3$ орбитом Аполонијеве групе и проверити шта од претходног важи у том случају. Наилазимо на следеће проблеме/разлике:

(1) Ради сигурности треба кругове $\mathbb{D}_{T-1}$ и $\mathbb{D}_{T+1}$ заменити са $\mathbb{D}_{T-d}$ и $\mathbb{D}_{T+d}$, где је d дијаметар фундаменталне области $\mathcal{F}$ (или било који број већи од њега).

(2) У хиперболичком простору се запремина рачуна мало другачије тако да више не мора бити $V(\mathbb{D}_{T+d}) \sim V(\mathbb{D}_{T-d})$, кад $T \longrightarrow +\infty$.

(3) Користили смо да је запремина лопте $\mathbb{D}_T$ много већа од запремине $\mathbb{D}_{T+d} - \mathbb{D}_T$ и $\mathbb{D}_T - \mathbb{D}_{T-d}$, или еквивалентно, од површине сфере (руба лопте). Ово не важи у хиперболичком простору.

(4) Фундаментална област Аполонијеве групе је поприлично велика, чак је и бесконачне запремине.

(5) Овде смо изометрије еуклидског простора (целобројне транслације) идентификовали са тачкама $\mathbb{Z}^3 \subseteq \mathbb{R}^3$. Слично, (хиперболичке) изометрије из Аполонијеве групе можемо идентификовати са тачкама $\mathbb{H}^3$. Зато ће нам бити од користи хомогене координате.

4.4 Лева Харова мера и норма Собољева на количничком скупу

Надаље ћемо, ради поједностављивања записа, са G означавати групу $M\ddot{o}b^{*}(\mathbb{C})$ (и све остале групе које су јој изоморфне). Наравно, G је много више од групе, она има норму, топологију...

Метрика на хиперболичком полупростору $\mathbb{H}^3$ (тзв. *Поенкареова*[22] *метрика*) је задата са $g_{(x,y)}(X,Y) = \frac{1}{y^2}\langle X,Y\rangle$, $X, Y \in TM$. База тангентног простора $T\mathbb{H}^3$ је $\mathcal{B} := \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \;\middle|\; 1 \leqslant i \leqslant 3 \right\}$ (при чему подразумевамо да је $x_3 = y$). За базне векторе важи $g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \frac{\delta_{ij}}{y^2}$, где је δ_{ij} Кронекеров[23] симбол. Грамова[24] детерминанта у односу на ову базу је

---

[22] Jules Henri Poincaré (1854. – 1912.), француски математичар и физичар

[23] Leopold Kronecker (1823. – 1891.), немачки математичар

[24] Jørgen Pedersen Gram (1850. – 1916.), дански математичар и економиста

$$\Gamma=\begin{vmatrix} g\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_1}\right) & g\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2}\right) & g\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial y}\right)\\ g\left(\frac{\partial}{\partial x_2},\frac{\partial}{\partial x_1}\right) & g\left(\frac{\partial}{\partial x_2},\frac{\partial}{\partial x_2}\right) & g\left(\frac{\partial}{\partial x_2},\frac{\partial}{\partial y}\right)\\ g\left(\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial x_1}\right) & g\left(\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial x_2}\right) & g\left(\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial y}\right)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{1}{y^2} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{y^2} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{y^2}\end{vmatrix}=\frac{1}{y^6}.$$

Следи, запреминска форма је $\omega=\sqrt{|\Gamma|}dx_1\wedge dx_2\wedge dy=\frac{1}{y^3}dx_1\wedge dx_2\wedge dy$. Зато је на $\mathbb{H}^3$ природно посматрати меру $d\mu(x_1,x_2,y):=\frac{dx_1dx_2dy}{y^3}$.

Лема 56. *Мера μ је G–инваријантна.*

Доказ. У доказу теореме 22 смо видели да је група $G\cong Isom(\mathbb{H}^3)$ генерисана транслацијама $\widetilde{\tau_\lambda}:(x,y)\mapsto(x+\lambda,y)$, $\lambda\in\mathbb{C}$, композицијама хомотетија и ротација $\widetilde{\chi_\lambda}:(x,y)\mapsto(\lambda x,|\lambda|y)$, $\lambda\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$, композицијом инверзије и рефлексије $\widetilde{\psi}:(x,y)\mapsto\left(\frac{\overline{x}}{|x|^2+y^2},\frac{y}{|x|^2+y^2}\right)$ и рефлексијом $\widetilde{c}:(x,y)\mapsto(\overline{x},y)$. Зато је довољно проверити да је мера μ иваријантна на поменуте четири трансформације:

$$d\mu\left(\widetilde{\tau_\lambda}(x,y)\right)=d\mu(x+\lambda,y)=\frac{d(x_1+\lambda_1)d(x_2+\lambda_2)dy}{y^3}=$$

$$=\frac{1}{y^3}\left\|\begin{matrix}\frac{\partial}{\partial x_1}(x_1+\lambda_1) & \frac{\partial}{\partial x_2}(x_1+\lambda_1) & \frac{\partial}{\partial y}(x_1+\lambda_1)\\ \frac{\partial}{\partial x_1}(x_2+\lambda_2) & \frac{\partial}{\partial x_2}(x_2+\lambda_2) & \frac{\partial}{\partial y}(x_2+\lambda_2)\\ \frac{\partial}{\partial x_1}(y) & \frac{\partial}{\partial x_2}(y) & \frac{\partial}{\partial y}(y)\end{matrix}\right\|dx_1dx_2dy=$$

$$=\frac{1}{y^3}\left\|\begin{matrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{matrix}\right\|dx_1dx_2dy=\frac{dx_1dx_2dy}{y^3}=d\mu(x,y),$$

$$d\mu\left(\widetilde{\chi_\lambda}(x,y)\right)=d\mu(\lambda_1x_1-\lambda_2x_2,\lambda_2x_1+\lambda_2x_2,|\lambda|y)=$$

$$=\frac{d(\lambda_1x_1-\lambda_2x_2)d(\lambda_2x_1+\lambda_1x_2)d(|\lambda|y)}{(|\lambda|y)^3}=$$

$$=\frac{1}{|\lambda|^2y^3}\left\|\begin{matrix}\lambda_1 & -\lambda_2 & 0\\ \lambda_2 & \lambda_1 & 0\\ 0 & 0 & |\lambda|\end{matrix}\right\|dx_1dx_2dy=$$

$$=\frac{|(\lambda_1^2+\lambda_2^2)\,|\lambda||\,dx_1dx_2dy}{|\lambda|^3y^3}=d\mu(x,y),$$

$$d\mu\left(\widetilde{\psi}(x,y)\right)=d\mu\left(\frac{\overline{x}}{|x|^2+y^2},\frac{y}{|x|^2+y^2}\right)=$$

$$=\frac{d\left(\frac{x_1}{x_1^2+x_2^2+y^2}\right)d\left(\frac{-x_2}{x_1^2+x_2^2+y^2}\right)d\left(\frac{y}{x_1^2+x_2^2+y^2}\right)}{\left(\frac{y}{x_1^2+x_2^2+y^2}\right)^3}=$$

$$= \left(\frac{x_1^2+x_2^2+y^2}{y}\right)^3 \left|\begin{vmatrix} \frac{-x_1^2+x_2^2+y^2}{\left(x_1^2+x_2^2+y^2\right)^2} & \frac{-2x_1x_2}{\left(x_1^2+x_2^2+y^2\right)^2} & \frac{-2x_1y}{\left(x_1^2+x_2^2+y^2\right)^2} \\ \frac{2x_1x_2}{\left(x_1^2+x_2^2+y^2\right)^2} & \frac{-x_1^2+x_2^2-y^2}{\left(x_1^2+x_2^2+y^2\right)^2} & \frac{2x_2y}{\left(x_1^2+x_2^2+y^2\right)^2} \\ \frac{-2x_1y}{\left(x_1^2+x_2^2+y^2\right)^2} & \frac{-2x_2y}{\left(x_1^2+x_2^2+y^2\right)^2} & \frac{x_1^2+x_2^2-y^2}{\left(x_1^2+x_2^2+y^2\right)^2} \end{vmatrix}\right| dx_1dx_2dy =$$

$$= \frac{1}{\left(\left(x_1^2+x_2^2+y^2\right)y\right)^3} \left|\begin{vmatrix} -x_1^2+x_2^2+y^2 & -2x_1x_2 & -2x_1y \\ 2x_1x_2 & -x_1^2+x_2^2-y^2 & 2x_2y \\ -2x_1y & -2x_2y & x_1^2+x_2^2-y^2 \end{vmatrix}\right| dx_1dx_2dy =$$

$$= \frac{1}{\left(\left(x_1^2+x_2^2+y^2\right)y\right)^3} \left|\left(-x_1^2+x_2^2+y^2\right)\begin{vmatrix} -x_1^2+x_2^2-y^2 & 2x_2y \\ -2x_2y & x_1^2+x_2^2-y^2 \end{vmatrix} - \right.$$

$$\left. -2x_1x_2\begin{vmatrix} -2x_1x_2 & -2x_1y \\ -2x_2y & x_1^2+x_2^2-y^2 \end{vmatrix} + (-2x_1y)\begin{vmatrix} -2x_1x_2 & -2x_1y \\ -x_1^2+x_2^2-y^2 & 2x_2y \end{vmatrix}\right| dx_1dx_2dy =$$

$$= \frac{1}{\left(\left(x_1^2+x_2^2+y^2\right)y\right)^3} \left|\left(-x_1^2+x_2^2+y^2\right)\left(\left(x_2^2-y^2\right)^2 - x_1^4 + 4x_2^2y^2\right) - \right.$$

$$\left. +4x_1^2x_2^2\left(x_1^2+x_2^2-y^2+2y^2\right) + 4x_1^2y^2\left(2x_2^2+x_1^2-x_2^2+y^2\right)\right| dx_1dx_2dy =$$

$$= \frac{1}{\left(\left(x_1^2+x_2^2+y^2\right)y\right)^3} \left|\left(x_1^2+x_2^2+y^2\right)\left(\left(-x_1^2+x_2^2+y^2\right)^2 + 4x_1^2\left(x_2^2+y^2\right)\right)\right| dx_1dx_2dy =$$

$$= \frac{1}{\left(x_1^2+x_2^2+y^2\right)^2 y^3} \left|\left(x_1^2+x_2^2+y^2\right)^2\right| dx_1dx_2dy = d\mu(x,y)$$

$$d\mu\left(\widetilde{c}(x,y)\right) = d\mu\left(\overline{x},y\right) = \frac{dx_1d(-x_2)dy}{y^3} = \frac{1}{y^3}\left|\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}\right| dx_1d_2dy = d\mu(x,y).$$

□

Желимо да дефинишемо леву Харову[25] меру на групи G. Према Ивасавиној декомпозицији, она се може разложити као $G = NAKC$, где је C циклична група генерисана конјуговањем c. Подгрупа C је двочлана, па G можемо видети као дисјунктну унију две копије NAK. Зато је довољно дефинисати меру на NAK. На њеној подгрупи горњетроугаоних матрица $NA \cong \mathbb{H}^3$ мера се дефинише на природан начин: $dn_xda_y = \frac{1}{y^3}dxdy$. Ова мера је G–инваријантна, па самим тим и лева Харова. Нека је dk било која вероватносна лева Харова мера на подгрупи K, тада је са

$$d\mu(n_xa_ykc) := \frac{1}{y^3}dn_xda_ydk = \frac{1}{y^3}dxdydk$$

дефинисана лева Харова мера на групи G.

---

[25] Alfréd Haar (1885. – 1933.), мађарски математичар

Како је претходна мера лева Харова, она дефинише и једну леву Харову меру на количничком скупу $\mathcal{A}\backslash G$. Традиционално, и њу ћемо обележавати са μ, а из контекста ће бити јасно о којој мери је реч.

Група G се може видети као дисјунктна унија групе директних изометрија NAK и скупа индиректних $NAKc$. Пошто Аполонијева група садржи индиректне изометрије (инверзије), свака класа у $\mathcal{A}\backslash G$ ће имати бар по једног представника који је директна изометрија. Зато ћемо надаље, где год то олакшава посао, занемаривати коњуговање и групу G поистовећивати са $M\ddot{o}b(\mathbb{C}) \cong PSL_2(\mathbb{C})$.

Скуп $\mathcal{A}\backslash\mathbb{H}^3$ можемо интерпретирати на два начина: као подскуп количничког скупа $\mathcal{A}\backslash G$ или као простор орбита при дејству Аполонијеве групе на скуп $\mathbb{H}^3$. Самим тим овај скуп има и две мере: меру наслеђену из $\mathcal{A}\backslash G$ и количничку меру коју индукује мера на $\mathbb{H}^3$. Према конструкцији је јасно да се ради о истој мери (коју по потреби можемо интерпретирати на два начина).

Са $\mathcal{L}^2(X)$ ћемо означавати векторски простор реалних функција (дефинисаних на X) квадратно интеграбилних по Лебегу[26] са скаларним производом $\langle f, g\rangle_{\mathcal{L}^2(X)} = \int\limits_X fgd\mu$.

Специјално, за $X = \mathcal{A}\backslash G$, с обзиром на начин на који смо дефинисали меру, интеграл по $\mathcal{A}\backslash\mathbb{H}^3$ можемо поистоветити са интегралом по некој фиксираној фундаменталној области Аполонијеве групе (нпр. по оној из теореме 45). Поред норме која долази из скаларног производа $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)}$ користићемо и *норму Собољева*[27].

Дефиниција 57. *Нека је $n \in \mathbb{N}$ и нека је*

$$X_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 := \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_4 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

$$X_5 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad X_6 := \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

база Лијеве алгебре $\mathfrak{g}(M\ddot{o}b^*(\mathbb{C}))$. Норма Собољева реда n функције $f \in \mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G) \cap C^\infty(\mathcal{A}\backslash G)$ је

$$\mathcal{S}_n(f) := \max_{\substack{0 \leqslant m \leqslant n \\ 1 \leqslant i_j \leqslant 6}} \|X_{i_1} \ldots X_{i_m}(f)\|_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)}.$$

Напоменимо да се у претходној дефиницији понекад уместо максимума узима сума. Овај детаљ није превише битан будући да су у питању еквивалентне норме (дају исту топологију).

---

[26] Henri Léon Lebesgue (1875. – 1941.), француски математичар

[27] Сергей Львович Соболев (1908. – 1989.), руски математичар

4.5 Асимптотско понашање функције $N^{\mathcal{P}}$

Један од основних циљева овог рада је испитивање асимптотског понашања функције $N^{\mathcal{P}}$. Најпрактичнија реализација групе G је $\mathcal{O}_Q(\mathbb{R}) \leqslant GL_4(\mathbb{R})$ (теорема 36). Нека је $B_T := \{x \in \mathbb{R}^4 \mid \|x\|_\infty < T\}$ лопта у $\mathbb{R}^4$ у односу на максимум норму тј. коцка.

Нека је $\mathcal{P}$ ограничена Аполонијева конфигурација са кореном четворком ξ. Према тврђењу 54, функција $N^{\mathcal{P}}(T)$ је до на адитивну константу једнака $\#\mathcal{A}_\xi \# B_T$. Овде $\#\mathcal{A}_\xi$ означава колико има копија Декартове конфигурације са истом Декартовом четворком бројева ξ. Тај број можемо елиминисати тако што уместо Декартових четворки које упадају у B_T бројимо одговарајуће Декартове конфигурације:

$$N^{\mathcal{P}}(T) = \sum_{A \in \mathcal{A}} \chi_{B_T}(\xi A) + 3$$

где је χ карактеристична функција.

Сличну формулу можемо применити и у случају неограничене Аполонијеве конфигурације $\mathcal{P}$. Једина разлика је што сада не бројимо све кругове, већ само оне на једном сегменту. Сегменти се периодично понављају и добијају се из једног (почетног) сегмента транслацијама Аполонијеве групе. Зато је број кругова једнак

$$N^{\mathcal{P}}(T) = \sum_{A \in (\mathcal{A} \cap N) \backslash \mathcal{A}} \chi_{B_T}(\xi A) + 3.$$

Како бисмо имали исту формулу у оба случаја, и код ограничене конфигурације ћемо групу $\mathcal{A}$ заменити количником $(\mathcal{A} \cap N) \backslash \mathcal{A}$ јер је у том случају пресек $\mathcal{A} \cap N$ тривијалан. Група транслација N је Абелова. Зато је свака њена подгрупа, па и $\mathcal{A} \cap N$, нормална. То даље повлачи да је количнички скуп $(\mathcal{A} \cap N) \backslash N$ заправо група.

Један од кључних објеката у нашој причи је бројачка функција

$$F_T(g) := \sum_{A \in (\mathcal{A} \cap N) \backslash \mathcal{A}} \chi_{B_T}(\xi A g).$$

Јасно је да је $N^{\mathcal{P}}(T) = F_T(E) + 3$, где је E неутрал групе G, тј. јединична матрица. Приметимо да је функција F_T инваријантна на дејство Аполонијеве групе (множењем слева), па можемо сматрати да $F_T : \mathcal{A} \backslash G \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Бројачка функција F_T узима само целобројне вредности, тј. има прекиде. Самим тим, она није превише погодна за изучавање. Зато ћемо најпре урадити њено ,,заглађивање“. Другим речима, заменићемо F_T неком глатком функцијом и проценити њено асимптотско понашање.

Групу G можемо видети као скуп линеарних пресликавања нормираног векторског простора $\mathbb{Z}^4$ (са максимум нормом). Зато на групи G имамо и норму $[[A]] := \max\limits_{x\in\mathbb{Z}} \frac{\|xA\|_\infty}{\|x\|_\infty}$. Нека је $0 < \varepsilon < 1$ произвољно и

$$U_\varepsilon := \{g \in G \mid [[g - E]] < \varepsilon,\ [[g^{-1} - E]] < \varepsilon\}$$

околина неутрала у G. Скуп U_ε је отворен као пресек два отворена скупа (задата као инверзне слике отвореног скупа $(-\infty, \varepsilon)$ при непрекидним пресликавањима).

Како Аполонијева група $\mathcal{A}$ садржи само матрице са целобројним коефицијентима, она мора бити дискретна подгрупа групе G и у топологији индукованој овом нормом. Зато је, за довољно мало ε, рестрикција пројекције $G \longrightarrow \mathcal{A}\backslash G$ на U_ε мономорфизам, тј. изоморфизам са сликом. Другим речима, околина U_ε неутрала E у G је изоморфна са одговарајућом околином неутрала $\mathcal{A}$ у $\mathcal{A}\backslash G$.

Нека је $\phi_\varepsilon \in C_c^\infty(G)$ ненегативна функција чији је носач садржан у U_ε таква да је $\int\limits_G \phi_\varepsilon d\mu = 1$. Можемо је спустити и на количнички простор $\mathcal{A}\backslash G$ усредњавањем

$$\Phi_\varepsilon(\mathcal{A}g) := \sum_{A\in\mathcal{A}} \phi_\varepsilon(Ag).$$

Помоћу $\Phi_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathcal{A}\backslash G)$ ћемо урадити ,,заглађивање“ бројачке функције F_T. За то ће нам требати једна помоћна техничка лема.

Лема 58. *Важе инклузије*

(1) $B_T U_\varepsilon \subseteq B_{(1+\varepsilon)T}$,

(2) $B_{(1-\varepsilon)T} \subseteq \bigcap\limits_{u\in U_\varepsilon} B_T u$,

за све $0 < \varepsilon \ll 1$ *и* $T \gg 0$.

Доказ. (1) Нека су $x \in B_T$ и $u \in U_\varepsilon$ произвољни. Тада је

$$\|xu\|_\infty \leqslant \|x\|_\infty [[u]] < T[[u - E + E]] \leqslant T\left([[u - E]] + [[E]]\right) < T(\varepsilon + 1).$$

Следи, $xu \in B_{(1+\varepsilon)T}$, па самим тим и $B_T U_\varepsilon \subseteq B_{(1+\varepsilon)T}$.

(2) Друга инклузија је еквивалентна са $B_{(1-\varepsilon)T} \subseteq B_T u$ за све $u \in U_\varepsilon$. Како је $u \in U_\varepsilon$ акко $u^{-1} \in U_\varepsilon$, следи

$$B_{(1-\varepsilon)T} = B_{(1-\varepsilon)T}u^{-1}u \subseteq B_{(1-\varepsilon)T}U_\varepsilon u \subseteq B_{(1+\varepsilon)(1-\varepsilon)T}u = B_{(1-\varepsilon^2)T}u \subseteq B_T u.$$

□

Тврђење 59. *За све* $0 < \varepsilon \ll 1$ *и* $T \gg 0$ *важи*

$$\langle F_{(1-\varepsilon)T}, \Phi_\varepsilon \rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)} \leqslant F_T(E) \leqslant \langle F_{(1+\varepsilon)T}, \Phi_\varepsilon \rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)}.$$

Доказ. Функција $F_{(1-\varepsilon)T}$ је $\mathcal{A}$–инваријантна, те је

$$\langle F_{(1-\varepsilon)T}, \Phi_\varepsilon \rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)} = \int\limits_{\mathcal{A}g \in \mathcal{A}\backslash G} F_{(1-\varepsilon)T}(g)\Phi_\varepsilon(\mathcal{A}g)d\mu g = \int\limits_{\mathcal{A}g \in \mathcal{A}\backslash G} \sum_{A \in \mathcal{A}} F_{(1-\varepsilon)T}(g)\phi_\varepsilon(Ag)d\mu g.$$

Приметимо да $Ag \notin U_\varepsilon$ за све $A \in \mathcal{A}$ сем евентуално једног. Избором одговарајућег представника g класе $\mathcal{A}g$ можемо сматрати да $Ag \notin U_\varepsilon$ за све $A \in \mathcal{A} - \{E\}$. Претходна једнакост се своди на

$$\langle F_{(1-\varepsilon)T}, \Phi_\varepsilon \rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)} = \int\limits_{U_\varepsilon} F_{(1-\varepsilon)T}(g)\phi_\varepsilon(g)d\mu g = \int\limits_{U_\varepsilon} \sum_{A \in (\mathcal{A}\cap N)\backslash \mathcal{A}} \chi_{B_{(1-\varepsilon)T}}(\xi A g)\phi_\varepsilon(g)d\mu g.$$

Из услова $g \in U_\varepsilon$ и $\xi A g \in B_{(1-\varepsilon)T} \subseteq \bigcap\limits_{u \in U_\varepsilon} B_T u \subseteq B_T g$ следи $\xi A \in B_T$. Зато је $\chi_{B_{(1-\varepsilon)T}}(\xi A g) \leqslant \chi_{B_T}(\xi A)$ за све $g \in U_\varepsilon$.

$$\langle F_{(1-\varepsilon)T}, \Phi_\varepsilon \rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)} \leqslant \int\limits_{U_\varepsilon} \sum_{A \in (\mathcal{A}\cap N)\backslash \mathcal{A}} \chi_{B_T}(\xi A)\phi_\varepsilon(g)d\mu g = \int\limits_{U_\varepsilon} F_T(E)\phi_\varepsilon(g)d\mu g =$$

$$= F_T(E)\int\limits_{U_\varepsilon} \phi_\varepsilon(g)d\mu g = F_T(E)\int\limits_{G} \phi_\varepsilon(g)d\mu g = F_T(E).$$

И слично се показује друга неједнакост помоћу друге инклузије из претходне леме. □

У претходном тврђењу смо имали интеграцију по $\mathcal{A}\backslash G$ и суму (интеграцију) по $(\mathcal{A}\cap N)\backslash\mathcal{A}$. Биће лакше да ова два интеграла спојимо у један интеграл по $(\mathcal{A}\cap N)\backslash G$. Наравно, и на $(\mathcal{A}\cap N)\backslash G$ подразумевамо количничку меру као на $\mathcal{A}\backslash G$. И $\mathcal{A}\cap N$ садржи индиректну изометрију, па све класе садрже парне изометрије.

Показаћемо да $\langle F_{(1\pm\varepsilon)T}, \Phi_\varepsilon \rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)}$ имају исту асимптотску оцену (кад $T \to \infty$). Према леми о два полицајца то ће уједно бити и оцена за $F_T(E)$, а самим тим и за $N^{\mathcal{P}}(T)$.

Дефиниција 60. *(1) Нека је* $\Psi \in \mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)$*. Са* $\Psi^N \in C(\mathcal{A}\backslash G)$ *означавамо њену нормализацију дуж* N*, тј.*

$$\Psi^N(g) := \int\limits_{(\mathcal{A}\cap N)\backslash N} \Psi(ng)dn.$$

(2) Нека је $\Psi \in \mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)$ *и* $k \in K$*. Са* $\Psi_k \in C(\mathcal{A}\backslash G)$ *означавамо*

$$\Psi_k(g) := \int\limits_M \Psi(gmk)dm.$$

Претходне две трансформације не комутирају. Када напишемо Ψ_k^N, подразумеваћемо да се прво примењује $\cdot_k$, па онда $\cdot^N$.

Количнички скуп $M\backslash K$ наслеђује (вероватносну) меру из K.

Лема 61. *За све* $\Psi \in C_c^\infty(\mathcal{A}\backslash G)$ *и све* $T > 0$ *важи*

$$\langle F_T, \Psi\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)} = \int\limits_{M\backslash K} \int\limits_{\frac{\|\xi k\|_\infty}{T}}^{+\infty} \Psi_k^N(a_y)\frac{1}{y^3}dydk.$$

Доказ.

$$\langle F_T, \Psi\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)} = \int\limits_{\mathcal{A}\backslash G} F_T(g)\Psi(g)d\mu g = \int\limits_{\mathcal{A}\backslash G} \sum_{A\in(\mathcal{A}\cap N)\backslash \mathcal{A}} \chi_{B_T}(\xi A g)\Psi(g)d\mu g =$$

$$= \int\limits_{(\mathcal{A}\cap N)\backslash G} \chi_{B_T}(\xi g)\Psi(g)d\mu(g).$$

У последњој једнакости смо извршили смену $g \mapsto Ag$ и користили $\mathcal{A}$–инваријантност функције Ψ и мере μ. Према Ивасавиној декомпозицији матрица $g \in (\mathcal{A}\cap N)\backslash G$ се може представити као $n_x a_y m k$, где су $n_x \in (\mathcal{A}\cap N)\backslash N$, $a_y \in A$, $m \in M$ и $k \in M\backslash K$. Транслација и ротација не мењају кривине, док хомотетија a_y повећава полупречник y пута, тј. смањује кривину y пута. Зато је $\chi_{B_T}(\xi g) = 1$ еквивалентно са $T > \|\xi n_x a_y m k\|_\infty = \|\xi a_y k\|_\infty = \|(\frac{1}{y}\xi)k\|_\infty = \|\frac{1}{y}(\xi k)\|_\infty = \frac{1}{y}\|\xi k\|_\infty$. Следи,

$$\langle F_T, \Psi\rangle = \int\limits_{M\backslash K} \int\limits_M \int\limits_{\frac{\|\xi k\|_\infty}{T}}^{+\infty} \int\limits_{n_x\in(\mathcal{A}\cap N)\backslash N} \Psi(n_x a_y m k)\frac{1}{y^3}dxdydmdk =$$

$$= \int\limits_{M\backslash K} \int\limits_{\frac{\|\xi k\|_\infty}{T}}^{+\infty} \left(\int\limits_{n_x\in(\mathcal{A}\cap N)\backslash N} \int\limits_M \Psi(n_x a_y m k)dmdx \right) \frac{1}{y^3}dydk =$$

$$= \int\limits_{M\backslash K} \int\limits_{\frac{\|\xi k\|_\infty}{T}}^{+\infty} \left(\int\limits_{n_x \in (\mathcal{A}\cap N)\backslash N} \Psi_k(n_x a_y) dx \right) \frac{1}{y^3} dy dk = \int\limits_{M\backslash K} \int\limits_{\frac{\|\xi k\|_\infty}{T}}^{+\infty} \Psi_k^N(a_y) \frac{1}{y^3} dy dk.$$

$\square$

Према Ивасавиној декомпозицији количник $M\backslash K$ представља тангентни простор $T^1_{(0,1)}\mathbb{H}^3$ у тачки $(0,1)$, тако да је област интеграције код спољашњег интеграла баш овај тангентни простор. (Додуше, код Ивасавине декомпозиције смо имали K/M. Разлог је што за операцију R_X множења здесна матрицом X важи $R_{AB} = R_B \circ R_A$. Зато имамо различит запис у зависности од тога да ли операцију групе G интерпретирамо као као композицију или као матрично множење.)

Хтели смо да оценимо скаларни производ $\langle F_{(1\pm\varepsilon)T}, \Phi_\varepsilon \rangle = \int\limits_{M\backslash K} \int\limits_{\frac{\|\xi k\|_\infty}{(1\pm\varepsilon)T}}^{+\infty} (\Phi_\varepsilon)_k^N(a_y)\frac{1}{y^3} dy dk$ кад $T \to \infty$. Једини сингуларитет интеграла

$$\int\limits_0^{+\infty} (\Phi_\varepsilon)_k^N(a_y) \frac{1}{y^3} dy = \int\limits_0^{+\infty} \int\limits_{n_x \in (\mathcal{A}\cap N)\backslash N} \int\limits_M \Phi_\varepsilon(n_x a_y m k) \frac{1}{y^3} dm dx dy$$

је $y = 0$ јер је функција Φ непрекидна и са компактним носачем. Дакле, требаће нам само асимптотска оцена нормализације $(\Phi_\varepsilon)_k^N(a_y)$ кад $y \to 0+$.

4.6 Процена ,,заглађене“ функције

Проблем процене $N^{\mathcal{P}}(T)$ смо свели на оцењивање нормализације $\Psi_k^N \in C_c^\infty(\mathcal{A}\backslash G)$ за све $k \in K$. Или еквивалентно, треба оценити фамилију функција из K у $C_c^\infty(\mathcal{A}\backslash G)$, тј. функцију $\Psi^N \in C_c^\infty(\mathcal{A}\backslash G)^K$. Нормализација Ψ^N је била дефинисана као интеграл

$$\Psi^N(a_y) = \int\limits_{n_x \in (\mathcal{A}\cap N)\backslash N} \Psi(n_x a_y) dx.$$

Зато ћемо најпре испитати особине функције $\Psi \in C_c^\infty(\mathcal{A}\backslash G)$. Конкретно, процениђемо колико $\Psi(n_x h a_y)$ одступа од $\Psi(n_x a_y)$ за h из неке околине неутрала.

Нека је $N^- := \left\{ n_x^- := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; x \in \mathbb{C} \right\}$ подгрупа строго доњетроугаоних матрица из G. Множење

$$\mathfrak{M} : N \times A \times N^- \times M \longrightarrow G, \quad (n, a, n^-, m) \mapsto n a n^- m$$

је дифеоморфизам (са сликом) у некој околини неутрала.

Пошто (у нормализацији) имамо множење слева са n_x и потом интеграл по $n_x \in (\mathcal{A} \cap N) \backslash N$, биће довољно да узмемо $h \in N \backslash G$. За довољне мале $0 < \varepsilon < \varepsilon_0 < 1$ околина неутрала (у $N \backslash G$) $W_\varepsilon := (U_\varepsilon \cap A)(U_{\varepsilon_0} \cap N^-)(U_{\varepsilon_0} \cap M)$ је дифеоморфна са $(U_\varepsilon \cap A) \times (U_{\varepsilon_0} \cap N^-) \times (U_{\varepsilon_0} \cap M)$.

Теорема 62. *За свако* $\Psi \in C_c^\infty(\mathcal{A} \backslash G)^K$ *постоји* $\widehat{\Psi} \in C_c^\infty(\mathcal{A} \backslash G)^K$ *такво да*

(1) за свако мало $\varepsilon > 0$ *и свако* $h \in U_\varepsilon$ *важи* $|\Psi(g) - \Psi(gh)| \leqslant \varepsilon \widehat{\Psi}(g)$*, за све* $g \in \mathcal{A} \backslash G$*.*

(2) за све $n \in \mathbb{N}$ *важи* $\mathcal{S}_n\left(\widehat{\Psi}\right) \ll \mathcal{S}_5(\Psi)$*.*

Доказ. (1) Нека је $\{X_i \mid 1 \leqslant i \leqslant 6\}$ база Лијеве алгебре $\mathfrak{g}(G)$ и нека је L_g множење слева са g. Тада $d(L_g)_E : \mathfrak{g}(G) \longrightarrow T_g G$ даје базу $\{(X_i)_g = d(L_g)_E X_i\}$ тангентног простора у тачки g. Број $C_\Psi := \sup\limits_{g \in \operatorname{supp} \Psi} \sum\limits_{i=1}^{6} \|(X_i)_g(\Psi)\|$ ће бити коначан због претпоставке о компактности носача функције Ψ. Функција Ψ је класе C^∞, па је $|\Psi(g) - \Psi(gh)| \leqslant \max\limits_{h' \in U_\varepsilon} \|\Psi'(gh')\| \; \|g - gh\| \leqslant c\varepsilon \|\Psi'(g)\|$, за неку константу $c > 0$. Извод $\Psi'(g)$ припада $T_g G$, па мора бити линеарна комбинација $(X_i)_g$–ова. Зато је (уз евентуално повећање константе c) $|\Psi(g) - \Psi(gh)| \leqslant c\varepsilon C_\Psi$.

Најприродније би било узети $\widehat{\Psi} = cC_\Psi$. Међутим, ова функција нема компактан носач. Фиксирајмо $\varepsilon_0 > 0$. Додаћемо неку функцију f_0 која има вредност $f_0(gh) = 1$ за све $gh \in \operatorname{supp} \Psi$, тј. $g \in \operatorname{supp} \Psi h^{-1} \subseteq \operatorname{supp} \Psi U_{\varepsilon_0}^{-1}$. Дакле, $f_0 \in C_c^\infty(\mathcal{A} \backslash G)^K$ ће бити функција која има вредност 1 на $\operatorname{supp} \Psi U_{\varepsilon_0}^{-1} K$ (додајемо и K јер у дефиницији Ψ постоји и множење са $k \in K$ здесна) и 0 на $\mathcal{A} \backslash G - \operatorname{supp} \Psi U_{2\varepsilon_0}^{-1} K$. Функција $\widehat{\Psi} := cC_\Psi f_0$ задовољава услов (1) из теореме за све $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$.

(2) Због хомогености норме Собољева имаћемо $\mathcal{S}_n\left(\widehat{\Psi}\right) = cC_\Psi \mathcal{S}_n(f_0) \asymp C_\Psi$, јер константа $c\mathcal{S}_n(f_0)$ не зависи од функције Ψ. Пошто Ψ има компактан носач постојаће константа $K > 0$ таква да је $C_\Psi \leqslant K \sum\limits_{i=1}^{6} \|X_i(\Psi)\|$. Следи, $\mathcal{S}_n\left(\widehat{\Psi}\right) \ll \sum\limits_{i=1}^{6} \|X_i(\Psi)\|$, а ово последње је тзв. 1–норма функције Ψ на многострукости G димензије 6. Према теореми Собољева о утапању, она је мања од $K\mathcal{S}_{\left[\frac{6}{2}\right]+1+1}(\Psi)$, за неку константу $K > 0$. Следи, $\mathcal{S}_n\left(\widehat{\Psi}\right) \ll \mathcal{S}_5(\Psi)$.

□

Присетимо се да је функција Ψ из леме 61 била здесна M–инваријантна.

Последица 63. *Нека је* $\Psi \in C_c^\infty(\mathcal{A}\backslash G)^K$ *здесна* M*–инваријантна. За све* $0 < y < 1$ *и све мале* $\varepsilon > 0$ *важи*

$$|\Psi(na_y) - \Psi(nha_y)| \leqslant (\varepsilon + y)\widehat{\Psi}(na_y),$$

за све $h \in W_\varepsilon$*.*

Доказ. За $h = an_x^- m \in W_\varepsilon$ и $a_y \in A$ имамо

$$ha_y = (an_x^- m)a_y = an_x^- a_y m = aa_y n_{xy}^- m = a_y a n_{xy}^- m = ah'.$$

Пошто је функција Ψ здесна M–инваријантна можемо сматрати да је $h' = an_{xy}^- \in (U_\varepsilon \cap A)(U_{y\varepsilon_0} \cap N^-)$. Растојање $d(h', E) \leqslant \sqrt{\varepsilon^2 + (y\varepsilon_0)^2} \leqslant \sqrt{\varepsilon^2 + y^2} \leqslant \varepsilon + y$ повлачи $h' \in U_{\varepsilon+y}$. Следи,

$$|\Psi(na_y) - \Psi(nha_y)| = |\Psi(na_y) - \Psi(na_y h')| \leqslant (\varepsilon + y)\widehat{\Psi}(na_y).$$

□

4.7 Оцена нормализације

Нека је $\Psi \in C_c^\infty(\mathcal{A}\backslash G)^K$ и $\eta \in C_c((\mathcal{A} \cap N)\backslash N)$ ненегативна функција. Дефинишемо функцију $I_\eta(\Psi)$ са

$$I_\eta(\Psi)(a_y) := \int\limits_{n_x \in (\mathcal{A}\cap N)\backslash N} \Psi(n_x a_y)\eta(n_x)dx.$$

Ако би постојала функција $\eta \in C_c((\mathcal{A} \cap N)\backslash N)$ таква да је $\eta = 1$ на скупу

$$\{[n] \in (\mathcal{A} \cap N)\backslash N \mid (\exists a \in A)[n]a \in \operatorname{supp}\Psi\} =$$
$$= \{[n] \in (\mathcal{A} \cap N)\backslash N \mid [n]A \cap \operatorname{supp}\Psi \neq \emptyset\} =$$
$$= \{[n] \in (\mathcal{A} \cap N)\backslash N \mid \mathcal{A}\backslash\mathcal{A}nA \cap \operatorname{supp}\Psi \neq \emptyset\}$$

нормализација би могла да се изрази као

$$\Psi^N(a_y) = \int\limits_{n_x \in (\mathcal{A}\cap N)\backslash N} \Psi(n_x a_y)dx = \int\limits_{n_x \in (\mathcal{A}\cap N)\backslash N} \Psi(n_x a_y)\eta(n_x)dx = I_\eta(\Psi)(a_y).$$

Помоћу последице 63 можемо проценити одступање $I_\eta(\Psi)(ha_y)$ од $I_\eta(\Psi)(a_y)$ за $h \in W_\varepsilon$. Самим тим имамо оцену $\Psi^N(a_y) = I_\eta(\Psi)(a_y)$ чији је главни члан $I_\eta(\Psi)(ha_y)$. Незгода са овом проценом је што зависи од h. То ћемо покушати да елиминишемо интеграцијом по h.

Пошто је множење $N \times AN^-M \longrightarrow G$ дифеоморфизам у околини неутрала, постојаће мера $\check{\mu}$ на AN^-M (у околини неутрала) таква да је $dn \otimes d\check{\mu}(an^-m) = d\mu(nan^-m)$. Нека је r_ε глатка ненегативна функција дефинисана на $N\backslash G$ чији је носач садржан у W_ε и за коју је $\int\limits_{N\backslash G} r_\varepsilon d\nu = 1$ и $r_\varepsilon(an^-m) \ll \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, за све $an^-m \in AN^-M$. Са $\rho_{\eta,\varepsilon}$ ћемо означити функцију

$$\rho_{\eta,\varepsilon}(g) := \begin{cases} \eta(n)r_\varepsilon(an^-m), & g = nan^-m \in \operatorname{supp}\eta(W_\varepsilon \cap AN^-M) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} .$$

Користћемо ознаку ${}_af$ за функцију $x \mapsto f(xa)$.

Теорема 64. *Нека је* $\Psi \in C_c^\infty(\mathcal{A}\backslash G)^K$ *здесна* M*–инваријантна. За све* $0 < y < 1$ *и све мале* $\varepsilon > 0$ *важи*

$$\left|I_\eta(\Psi)(a_y) - \langle {}_{a_y}\Psi, \rho_{\eta,\varepsilon}\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)}\right| \leqslant (\varepsilon + y) I_\eta\left(\widehat{\Psi}\right)(a_y).$$

Доказ. Знамо да је

$$\left|\Psi(na_y) - \int\limits_{N\backslash G} \Psi(nha_y) r_\varepsilon(h) d\check{\mu}(h)\right| =$$

$$= \left|\int\limits_{N\backslash G} (\Psi(na_y) - \Psi(na_yh')) r_\varepsilon(h) d\check{\mu}(h)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{N\backslash G} |\Psi(na_y) - \Psi(na_yh')| r_\varepsilon(h) d\check{\mu}(h) \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{N\backslash G} (\varepsilon + y)\widehat{\Psi}(na_y) r_\varepsilon(h) d\check{\mu}(h) = (\varepsilon + y)\widehat{\Psi}(na_y),$$

$$\left|\int\limits_{(\mathcal{A}\cap N)\backslash N} \Psi(na_y)\eta(n)dn - \int\limits_{(\mathcal{A}\cap N)\backslash N} \int\limits_{N\backslash G} \Psi(nha_y) r_\varepsilon(h) d\check{\mu}(h)\eta(n)dn\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{(\mathcal{A}\cap N)\backslash N} \left|\Psi(na_y) - \int\limits_{N\backslash G} \Psi(nha_y) r_\varepsilon(h) d\check{\mu}(h)\right| \eta(n)dn \leqslant$$

$$\leqslant (\varepsilon + y) \int\limits_{(\mathcal{A}\cap N)\backslash N} \widehat{\Psi}(na_y)\eta(n)dn.$$

Уведимо смену $g = nh \in \mathcal{A}\backslash G$ у други интеграл:

$$\int\limits_{(\mathcal{A}\cap N)\backslash N}\int\limits_{N\backslash G}\Psi(nha_y)r_\varepsilon(h)d\check{\mu}(h)\eta(n)dn = \int\limits_{\mathcal{A}\backslash G}\Psi(ga_y)\rho_{\eta,\varepsilon}(g)d\mu(g) =$$

$$= \int\limits_{\mathcal{A}\backslash G}{}_{a_y}\Psi(g)\rho_{\eta,\varepsilon}(g)d\mu(g) = \langle {}_{a_y}\Psi, \rho_{\eta,\varepsilon}\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)}.$$

Следи, $\left|I_\eta(\Psi)(a_y) - \langle {}_{a_y}\Psi, \rho_{\eta,\varepsilon}\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)}\right| \leqslant (\varepsilon + y)I_\eta\left(\widehat{\Psi}\right)(a_y)$. □

Другим речима,

$$\Psi^N(a_y) = I_\eta(\Psi)(a_y) = \langle {}_{a_y}\Psi, \rho_{\eta,\varepsilon}\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)} + O\left((\varepsilon + y)I_\eta\left(\widehat{\Psi}\right)(a_y)\right).$$

Дефинишимо рекурзивно низ функција Ψ_n са $\Psi_0 := \Psi$ и $\Psi_n := \widehat{\Psi}_{n-1}$, за све $n \in \mathbb{N}$. Када n пута применимо претходну теорему добијамо

$$\Psi^N(a_y) = \langle {}_{a_y}\Psi, \rho_{\eta,\varepsilon}\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)} + \sum_{k=1}^{n-1} O\left((\varepsilon + y)^k\langle {}_{a_y}\Psi_k, \rho_{\eta,\varepsilon}\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)}\right) + O((\varepsilon+y)^n I_\eta(\Psi_n)(a_y)).$$

Уз ознаке из доказа теореме 62 имамо

$$\Psi_n^N(a_y) = \int\limits_{n_x\in(\mathcal{A}\cap N)\backslash N}\widehat{\Psi}_{n-1}(n_x a_y)\eta(n_x)dx = \int\limits_{n_x\in(\mathcal{A}\cap N)\backslash N} cC_{\Psi_{n-1}}f_0(n_x a_y)\eta(n_x)dx =$$

$$= cC_{\Psi_{n-1}}\int\limits_{n_x\in(\mathcal{A}\cap N)\backslash N}\eta(n_x)dx \asymp C_{\Psi_{n-1}} \ll \mathcal{S}_5(\Psi_{n-1}) \ll \mathcal{S}_5(\Psi_{n-2}) \ll \cdots \ll \mathcal{S}_5(\Psi).$$

Нас занима асимптотика кад $y \to 0+$, зато ћемо сматрати да је $0 < y < \varepsilon$. Тада је

$$I_\eta(\Psi)(a_y) = \langle {}_{a_y}\Psi, \rho_{\eta,\varepsilon}\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)} + \sum_{k=1}^{n-1} O\left(\varepsilon^k\langle {}_{a_y}\Psi_k, \rho_{\eta,\varepsilon}\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)}\right) + O\left(\varepsilon^n\mathcal{S}_5(\Psi)\right).$$

Сада треба проценити скаларни производ $\langle {}_{a_y}\Psi, \rho_{\eta,\varepsilon}\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)}$. Ова процена није нимало тривијална. За њу ће нам требати јако компликован алат из различитих области математике који је изложен у наредне две главе.

4.8 Постојање функције η

Целокупну причу о оцени нормализације смо базирали на постојању функције $\eta \in C_c((\mathcal{A}\cap N)\backslash N)$ која има вредност 1 на скупу $\mathfrak{N}(\operatorname{supp}\Psi)$ где је

$$\mathfrak{N}(J) := \{[n] \in (\mathcal{A}\cap N)\backslash N \mid \mathcal{A}\backslash\mathcal{A}nA \cap J \neq \emptyset\}.$$

Да би постојала оваква функција η довољно је показати да је скуп $\mathfrak{N}(J)$ ограничен у $\mathcal{A}\backslash G$ (у количничкој топологији). Позаћемо још јаче тврђење: скуп $\mathfrak{N}(J)$ је ограничен за сваки компактан подскуп $J \Subset (\mathcal{A}\cap N)\backslash N \subseteq \mathcal{A}\backslash G$.

Група Мебијусових трансформација (као и све њене подгрупе) дејствује на $\mathbb{H}^3$, али и на његову границу $\overline{\mathbb{C}}$. Нас ће занимати дејство $\mathcal{A}\cap N$ на $\mathbb{C}$ (које је добро дефинисано будући да трансформације из $\mathcal{A}\cap N$ фиксирају ∞). Транслације групе $\mathcal{A}\cap N$ су истовремено и изометрије еуклидског простора $\mathbb{C}$, па има смисла говорити о њеној фундаменталној области $\mathcal{F}_N$. У случају ограничене конфигурације пресек $\mathcal{A}\cap N$ је тривијалан, па ће фундаментална област бити цело $\mathbb{C}$. Ако је Аполонијева конфигурација неограничена, $\mathcal{A}\cap N$ ће бити циклична група (генерисана композицијом две симетрије). Зато је фундаментална област $\mathcal{F}_N$,,трака“ између две паралелне праве. У том случају је фундаментална област $\mathcal{F}$ смештена између две паралелне равни ортогоналне на границу $\mathbb{C}$. Ради поједностављивања ћемо подразумевати да је $\mathcal{F}_N$ баш пројекција $\mathcal{F}$ на границу.

Лема 65. *Постоје фундаметална област $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{H}^3$ Аполонијеве групе $\mathcal{A}$, фундаментална област $\mathcal{F}_N \subseteq \mathbb{C}$ групе $\mathcal{A}\cap N$ и број $r > 0$ за које је*

$$\{(x,y) \in \mathbb{H}^3 \mid x \in \mathcal{F}_N, |x|^2 + y^2 > r\} \subseteq \mathcal{F}.$$

Доказ. У случају да је Аполонијева конфигурација ограничена, $\mathcal{F}_N$ је цело C, а $\mathcal{F}$ можемо изабрати као на слици 12. Тада само треба узети r довољно велико да лопта $\mathbb{D}((0,0),r)$ обухвати све четири сфере са слике 12.

Слична идеја пролази и за неограничену Аполонијеву конфигурацију. Само треба узети за $\mathcal{F}$ полиедар чије су две стране паралелне равни, а за $\mathcal{F}_N$ његову пројекцију на границу. □

Теорема 66. *Скуп $\mathfrak{N}(J)$ је ограничен за компактан подскуп $J \Subset (\mathcal{A}\cap N)\backslash N$.*

Доказ. Претпоставимо супротно, да скуп $\mathfrak{N}(J)$ није ограничен у $\mathcal{A}\backslash G$. Тада није ограничена ни његова инверзна слика (при пројекцији) у G. Зато постоји низ $n_i \to \infty$ у N такав да је $\mathcal{A}\backslash\mathcal{A}nA \cap J \neq \emptyset$ тј. постоје низови $\alpha_i', \alpha_i'' \in$

$\mathcal{A}$, $a_i \in A$ и $j_i \in J$ такви да је $\alpha_i' n_i a_i = \alpha_i'' j_i$, за све i. Пошто транслације чувају норму, без умањења општости можемо претпоставити да је $n_i \in \mathcal{F}_N$ за све i. Нека је $\alpha_i := \alpha_i''^{-1}\alpha_i$.

Скуп J је компактан, па низ j_i има подниз који конвергира ка неком елементу $j \in J$. И тај подниз ћемо исто означити са j_i. За тачку $j(0,1)$ постоји трансформација $\alpha \in \mathcal{A}$ таква да је $\alpha j(0,1) \in \overline{\mathcal{F}}$. Тада низ $\alpha j_i(0,1) \to \alpha j(0,1)$. Уколико $\alpha j(0,1)$ припада отвореном скупу $\mathcal{F}$, сви елементи низа $\alpha j_i(0,1)$ почев од неког морају бити у $\mathcal{F}$. У супротном се тачка $\alpha j(0,1)$ налази на некој од страна полиедра $\mathcal{F}$, односно на некој од сфера. Нека је $\mathfrak{S} \in \mathcal{A}$ инверзија у односу на ту сферу. Тада унија $\mathcal{F}' := \mathcal{F} \cup \mathfrak{S}\mathcal{F}$ садржи све тачке $\alpha j_i(0,1)$ почев од неког i.

Норма тачке $n_i a_i(0,1)$ тежи бесконачности, а прва (комплексна) координата ове тачке је управо $n_i \in \mathcal{F}_N$. Тада, према претходној леми, $n_i a_i(0,1) \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$ за све i почев од неког. Следи,

$$\alpha j_i(0,1) = \alpha\alpha_i n_i a_i(0,1) \in \mathcal{F}' \cap \alpha\alpha_i \mathcal{F}',$$

за све i почев од неког. Како је $\mathcal{F}'$ унија највише две копије $\mathcal{F}$, следи да је скуп $\{\alpha\alpha_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ коначан. Наравно, тада је и $\{\alpha_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ коначан скуп.

Скуп $J' := \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} \alpha_i^{-1} J$ је компактан као коначна унија компактних скупова. Зато низ $n_i a_i = \alpha_i^{-1} j_i \in J'$ има конвергентан подниз који ћемо исто означити са $n_i a_i$. Тада је низ норми

$$\|n_i a_i\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 & x_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{y_i} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{y_i}} \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} \sqrt{y_i} & \frac{x_i}{\sqrt{y_i}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{y_i}} \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{y_i + \frac{x_i^2 + 1}{y_i}}$$

ограничен. Оба сабирка су позитивна, па оба морају бити и ограничена. Из ограничености другог и чињенице да $x_i \to \infty$ (јер $n_i \to \infty$) следи да $y_i \to \infty$. Контрадикција. □

Последица 67. *Нека је* $J \Subset (\mathcal{A} \cap N)\backslash N$. *Постоји функција* $\eta \in C_c((\mathcal{A} \cap N)\backslash N)$ *која има вредност* 1 *на скупу* $\mathfrak{N}(J)$.

ГЛАВА 5

ОСНОВНА СОПСТВЕНА ФУНКЦИЈА ЛАПЛАС–БЕЛТРАМИЈЕВОГ ОПЕРАТОРА

5.1 Растојање у хиперболичком простору

Из Поенкареове метрике $g_{(x,y)}(X,Y) = \frac{1}{y^2}\langle X, Y\rangle$, $X, Y \in TM$ следи да је растојање (дефинисано као минимум по геодезијским линијама) на Римановој[28] многострукости $\mathbb{H}^3$ једнако

$$\delta((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \frac{\|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\|}{4y_1 y_2},$$

за све $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{H}^3 \cong \mathbb{C} \times (0, +\infty)$, где је $\|\cdot\|$ еуклидска норма из $\mathbb{R}^3 \cong \mathbb{C} \times \mathbb{R}$. Приметимо да је

$$\delta((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \frac{|x_1 - x_2|^2 + (y_1 - y_2)^2}{4y_1 y_2} = \frac{|x_1 - x_2|^2 + y_1^2 + y_2^2}{4y_1 y_2} - \frac{1}{2}.$$

,,Право" растојање δ није баш најпрактичније. Зато се чешће користи

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := \log \frac{\|(x_1, y_1) - (x_2, -y_2)\| + \|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\|}{\|(x_1, y_1) - (x_2, -y_2)\| - \|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\|}.$$

---

[28] Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826. – 1866.), немачки математичар и физичар

Веза d и δ је следећа:

Лема 68. *За све* $z_1, z_2 \in \mathbb{H}^3$ *важи*

$$\cosh d(z_1, z_2) = 2\delta(z_1, z_2) + 1.$$

Доказ. Ово тврђење се проверава директним рачуном:

$$\cosh d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \frac{e^{d((x_1,y_1),(x_2,y_2))} + e^{-d((x_1,y_1),(x_2,y_2))}}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\|(x_1, y_1) - (x_2, -y_2)\| + \|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\|}{\|(x_1, y_1) - (x_2, -y_2)\| - \|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\|} + \right.$$

$$\left. + \frac{\|(x_1, y_1) - (x_2, -y_2)\| - \|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\|}{\|(x_1, y_1) - (x_2, -y_2)\| + \|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\|}\right) =$$

$$= \frac{(\|(x_1,y_1)-(x_2,-y_2)\|+\|(x_1,y_1)-(x_2,y_2)\|)^2+(\|(x_1,y_1)-(x_2,-y_2)\|-\|(x_1,y_1)-(x_2,y_2)\|)^2}{2(\|(x_1,y_1)-(x_2,-y_2)\|^2-\|(x_1,y_1)-(x_2,y_2)\|^2)} =$$

$$= \frac{2(\|(x_1, y_1) - (x_2, -y_2)\|^2 + \|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\|^2)}{2((y_1 + y_2)^2 - (y_1 - y_2)^2)} =$$

$$= \frac{2(\|x_1 - x_2\|^2 + y_1^2 + y_2^2)}{4y_1y_2} = 2\delta((x_1, y_1), (x_2, y_2)) + 1.$$

□

5.2 Критични експонент Аполонијеве групе

Као што смо већ видели, природан избор „координатног почетка“ у $\mathbb{H}^3$ је тачка $\mathcal{O} = (0, 1)$. Мера на $\overline{\mathbb{H}}^3$ која детектује $\mathcal{O}$ је $\delta_{\mathcal{O}}$, где је δ_z Диракова[29] мера сконцентрисана у тачки z.

Помоћу ове мере ћемо конструисати меру која $\mathcal{A}$–инваријантна на $\overline{\mathbb{H}}^3$ и која детектује орбиту $\mathcal{A}\mathcal{O}$. Природан начин да се то уради је $\sum\limits_{A \in \mathcal{A}} \delta_{A\mathcal{O}}$, али ова мера није коначна јер је Аполонијева група бесконачна. Зато дефинишемо фамилију вероватносних $\mathcal{A}$–инваријантних мера:

$$\nu_s := \frac{1}{\sum\limits_{A \in \mathcal{A}} e^{-sd(\mathcal{O}, A\mathcal{O})}} \sum_{A \in \mathcal{A}} e^{-sd(\mathcal{O}, A\mathcal{O})} \delta_{A\mathcal{O}}.$$

Да би ова мера била добро дефинисана потребно је и довољно да сума $\sum\limits_{A \in \mathcal{A}} e^{-sd(\mathcal{O}, Ao)} = \sum\limits_{A \in \mathcal{A}} \left(e^{-d(o, Ao)}\right)^s$ конвергира. Хиперболичко растојање

---

[29] Paul Adrien Maurice Dirac (1902. – 1984.), швајцарски математичар и физичар

две различите тачке је увек позитивно, па је $e^{-d(\mathcal{O},Ao)} \leqslant 1$, при чему једнакост важи акко је $A \equiv \mathbb{1}$. $A \equiv \mathbb{1}$. То значи да је претходна сума опадајућа функција по s. Следи, постоји нека константа $\sigma = \sigma(\mathcal{P})$ таква да претходна сума конвергира за $s > \sigma$ и дивергира за $s < \sigma$. Због овог својства, константу σ ћемо звати *критични експонент* Аполонијеве групе. Овде Аполонијеву групу видимо као подгрупу уопштених Мебијусових трансформација генерисану инверзијама у односу на дуалне кругове. Зато овако дефинисано σ зависи од Аполонијеве конфигурације $\mathcal{P}$ (тј. од међусобног положаја четири дуална круга и координатног почетка).

Лема 69. *Нека је $z \in \mathbb{H}^3$ произвољно и σ критични експонент Аполонијеве групе. Тада ред $\sum\limits_{A\in\mathcal{A}} e^{-sd(z,Az)}$ конвергира за $s > \sigma$ и дивергира за $s < \sigma$.*

Доказ. Неједнакости троугла за (хиперболичке) троуглове $(\mathcal{O}, A\mathcal{O}, z)$ и $(\mathcal{O}, z, Az)$ дају $d(o,z) + d(o,Ao) \geqslant d(z,Ao)$ и $d(\mathcal{O},z) + d(\mathcal{O},A\mathcal{O}) \geqslant d(z,A\mathcal{O})$ и $d(z,A\mathcal{O}) \geqslant d(z,Az) - d(A\mathcal{O},Az) = d(z,Az) - d(\mathcal{O},z)$. Следи,

$$e^{-d(\mathcal{O},z)} \sum_{A\in\mathcal{A}} e^{-sd(\mathcal{O},A\mathcal{O})} \leqslant e^{d(\mathcal{O},z)} \sum_{A\in\mathcal{A}} e^{-sd(z,Az)},$$

тј. $\sum\limits_{A\in\mathcal{A}} e^{-sd(z,Az)}$ дивергира за $s > \sigma$. Аналогно се показује и други део тврђења. □

Претходна лема каже да број σ не зависи од избора координатног почетка. Зато, без умањења оштости можемо сматрати да орбита $\{A\mathcal{O} \mid A \in \mathcal{A}\}$ има тачку нагомилавања (у $\operatorname{Res}\mathcal{P}$).

За произвољне две Аполонијеве конфигурације постоји уопштена Мебијусова трансформација која слика једну конфигурацију у другу. Одатле и из претходне леме следи да константа σ не зависи од конфигурације $\mathcal{P}$.

Показаћемо да је $\sigma = \delta$, тј. да је мера $\nu(s)$ добро дефинисана за све $s > \delta$. За то ће нам требати пар помоћних појмова и тврђења.

Скуп $\operatorname{Res}\mathcal{P}$ је компактан акко је конфигурација $\mathcal{P}$ ограничена. У случају неограничене конфигурације означићемо са $\widetilde{\operatorname{Res}\mathcal{P}}$ затворење једног сегмента.

Лема 70. *Нека је $\mathcal{P}$ неограничена конфигурација. Тада је $\dim_{\mathcal{H}} \widetilde{\operatorname{Res}\mathcal{P}} = \delta$.*

Доказ. Из $\widetilde{\operatorname{Res}\mathcal{P}} \subseteq \operatorname{Res}\mathcal{P}$ следи $\dim_{\mathcal{H}} \widetilde{\operatorname{Res}\mathcal{P}} \leqslant \delta$. Да би важила обрнута неједнакост довољно је показати да $\mathcal{H}^s\widetilde{\operatorname{Res}\mathcal{P}} = 0$ повлачи $\mathcal{H}^s \operatorname{Res}\mathcal{P} = 0$. Суштински, ово смо већ видели у доказу теореме 42. □

Скуп $\widetilde{\operatorname{Res}\mathcal{P}}$ је компактан. Зато можемо сматрати да је δ Хаусдорфова димензија компактног скупа. Ради поједностављивања нотације, и даље нам δ бити Хаусдорфова димензија $\operatorname{Res}\mathcal{P}$, с тим да ћемо подразумевати да је овај скуп компактан.

Дефиниција 71. *Нека је $\mathbb{D}(z,r)$ диск у $\partial\mathbb{H}^3$ и $B(z,r)$ конус са врхом у $\mathcal{O}$ и основом $\mathbb{D}(z,r)$. Скуп $B(z,r)\cap\{(w)\in\overline{\mathbb{H}^3} \mid d(w,\mathcal{O}) > -\log r\}$ зовемо Громовљев*[30] *диск са центром у z полупречника r и означавамо са $\beta(z,r)$.*

За мале вредности r, број $-\log r$ је велики, тако да $\beta(z,r)$ представља ,,околину" диска $\mathbb{D}(z,r)$ унутар конуса $B(z,r)$.

Лема 72. *Нека је $s > \sigma$. Постоји константа $C > 0$ таква да је $\nu_s(\beta(z,r)) \leqslant Cr^s$, за све $z \in \operatorname{Res}\mathcal{P}$ и све $r > 0$.*

Доказ. Нека је $t := -\log r$ и нека је $g_t\mathcal{O}$ тачка са (хиперболичке) праве кроз $\mathcal{O}$ и x на растојању t од $\mathcal{O}$. Тада је $d(g_t\mathcal{O},\mathcal{O}) \leqslant d(w,\mathcal{O})$ за све $w \in \beta(z,r)$. Следи, у троуглу $(\mathcal{O}, g_t\mathcal{O}, w)$ је $\sphericalangle g_t\mathcal{O} \geqslant \sphericalangle w$ и $\pi < \sphericalangle\mathcal{O} + \sphericalangle w + \sphericalangle g_t\mathcal{O} \leqslant 2\sphericalangle g_t\mathcal{O} + \sphericalangle\mathcal{O}$, тј. $\sphericalangle g_t\mathcal{O} \geqslant \frac{\pi - \sphericalangle\mathcal{O}}{2}$. Угао $\sphericalangle\mathcal{O}$ је мањи од угла при врху конуса (који не зависи од w и који је мали за мало r). Зато је

$$d(\mathcal{O},w) \geqslant d(\mathcal{O},g_t\mathcal{O}) + d(g_t\mathcal{O},w) - k = t + d(g_t\mathcal{O},w) - k,$$

за неку костанту k (која зависи од t, али не и од w). Следи,

$$\sum_{\substack{A\in\mathcal{A}\\ A\mathcal{O}\in\beta(z,r)}} e^{-sd(\mathcal{O},A\mathcal{O})} \leqslant e^{sk}e^{-st} \sum_{\substack{A\in\mathcal{A}\\ A\mathcal{O}\in\beta(z,r)}} e^{-sd(\mathcal{O},g_t\mathcal{O})}.$$

Тачка $g_t\mathcal{O} \notin \operatorname{Res}\mathcal{P}$ не може бити тачка нагомилавања орбите $\mathcal{A}\mathcal{O}$, па постоји тачка $A_0\mathcal{O}$ те орбите која је најближа $g_t\mathcal{O}$. Из неједнакости троугла: $d(g_t\mathcal{O},A\mathcal{O}) \geqslant d(A\mathcal{O},A_0\mathcal{O}) - d(A_0\mathcal{O},g_t\mathcal{O})$ следи

$$\sum_{\substack{A\in\mathcal{A}\\ A\mathcal{O}\in\beta(z,r)}} e^{-sd(\mathcal{O},A\mathcal{O})} \leqslant e^{sk}e^{sd(A_0\mathcal{O},g_t\mathcal{O})}e^{-st} \sum_{\substack{A\in\mathcal{A}\\ A\mathcal{O}\in\beta(z,r)}} e^{-sd(A\mathcal{O},A_0\mathcal{O})} =$$

$$= e^{sk}e^{sd(A_0\mathcal{O},g_t\mathcal{O})}e^{-st} \sum_{\substack{A\in\mathcal{A}\\ A\mathcal{O}\in\beta(z,r)}} e^{-sd(\mathcal{O},A\mathcal{O})} \leqslant$$

$$\leqslant e^{sk}e^{sd(A_0\mathcal{O},g_t\mathcal{O})}e^{-st} \sum_{A\in\mathcal{A}} e^{-sd(\mathcal{O},A\mathcal{O})}.$$

Када $r \to 0+$ имамо да $t \to +\infty$ и $g_t\mathcal{O} \to x \in \operatorname{Res}\mathcal{P}$. Зато $d(A_0\mathcal{O},g_t\mathcal{O}) \to 0$, тј. $e^{sd(A_0\mathcal{O},g_t\mathcal{O})} \to 1$. Специјално, $e^{sd(A_0\mathcal{O},g_t\mathcal{O})}$ је ограничено (као функција по t). Следи, постоји константа C таква да је

$$\sum_{\substack{A\in\mathcal{A}\\ A\mathcal{O}\in\beta(z,r)}} e^{-sd(\mathcal{O},A\mathcal{O})} \leqslant Ce^{-st} \sum_{A\in\mathcal{A}} e^{-sd(\mathcal{O},A\mathcal{O})} = Cr^s \sum_{A\in\mathcal{A}} e^{-sd(\mathcal{O},A\mathcal{O})}.$$

---

[30] Михаил Леонидович Громов (1943. –), руски математичар

Другим речима, $\nu_s(\beta(z,t)) \geqslant Cr^s$. Проблем је једино што константа $C = C(z)$ зависи од тачке z. Али скуп $\operatorname{Res}\mathcal{P}$ је компактан па можемо узети константу $C := \max\limits_{z\in\operatorname{Res}\mathcal{P}} C(z)$. ☐

Теорема 73. *Критични експонент Аполонијеве групе σ једнак је Хаусдорфовој димензији резидуалног скупа δ.*

Доказ. Показаћемо само неједнакост $\sigma \geqslant \delta$. Доказ обрнуте неједнакости је технички знатно компликованији. Може се наћи у [30].

Нека је $s > \sigma$ произвољно. Хоћемо да покажемо да је $s > \delta = \dim_{\mathcal{H}} \operatorname{Res}\mathcal{P}$, или еквивалентно $\mathcal{H}^s \operatorname{Res}\mathcal{P} = 0$. Одатле ће следити $\sigma \geqslant \delta$. Претпоставимо супротно, тада за свако $\varepsilon > 0$ постоји покривање $\{U_j \mid j \in J\}$ такво да за дијаметре $r_j = \operatorname{diam} U_j$ важи $\sum\limits_{j\in J} r_j < \varepsilon_0$. Због компактности можемо сматрати да је ово покривање коначно. Зато постоји $\varepsilon_0 > 0$ такво да и $\operatorname{Res}\mathcal{P}\times[0,\varepsilon_0]$ упада у ово покривање. Изаберимо по једну тачку $z_j \in U_j$. Тада скуп U_j упада у диск полупречника r_j са центром у z_j, па самим тим упада и у скуп $\beta(z_j, r_j)$. Следи, $\{\beta(z_j,r_j) \mid j \in J\}$ покрива $\operatorname{Res}\mathcal{P} \times [0,\varepsilon_0]$. Према претходној леми је

$$\varepsilon > \sum_{j\in J} r_j^s \geqslant \sum_{j\in J} \frac{\mu(\beta(z_j,r_j))}{C} \geqslant \frac{\nu_s(\operatorname{Res}\mathcal{P}\times[0,\varepsilon])}{C}.$$

Следи, $\nu_s(\operatorname{Res}\mathcal{P}\times[0,\varepsilon])$ мора бити нула јер је мања до $C\varepsilon$, за све $\varepsilon > 0$. Са друге стране, орбита $\mathcal{AO}$ има тачку нагомилавања у $\operatorname{Res}\mathcal{P}$, па скуп $\operatorname{Res}\mathcal{P}\times[0,\varepsilon]$ мора садржати бар једну тачку те орбите. Зато је $\operatorname{Res}\mathcal{P}\times[0,\varepsilon]$ скуп строго позитивне мере. Контрадикција. ☐

Последица 74. *Мера ν_s је добро дефинисана за све $s > \delta$.*

5.3 Петерсон–Саливенова мера

Дефиниција 75. *Слаби лимес фамилије мера ν_s кад $s \to \delta+$ зовемо Петерсон*[31]*–Саливенова*[32] *мера и обележавамо са ν.*

Из последице 74 следи да је претходна дефиниција је добра. Како су све мере ν_s вероватносне и $\mathcal{A}$–инваријантне, јасно је да ће и Петерсон–Саливенова мера бити таква. Све мере ν_s су биле сконцентрисане на $\mathbb{H}^3$. Зато Петерсон–Саливенова мера (дефинисана као слаби лимес) мора

---

[31] Samuel James Patterson (1948. –), ирски математичар

[32] Dennis Parnell Sullivan (1941. –), амерички математичар

бити сконцентрисана у $\mathbb{H}^3 \cup \Lambda(\mathcal{A})$, при чему је $\Lambda(\mathcal{A}) = \operatorname{Res}\mathcal{P}$ према теореми 40.

Произвољно $\gamma \in \mathcal{A}$ индукује меру $\gamma_*\nu(V) = \nu(\gamma(V))$. Како је $\gamma_*\delta_x = \delta_{\gamma^{-1}x}$ имамо

$$\gamma_*\nu_s = \frac{1}{\sum\limits_{A\in\mathcal{A}} e^{-sd(\mathcal{O},A\mathcal{O})}} \sum_{A\in\mathcal{A}} e^{-sd(\mathcal{O},A\mathcal{O})} \gamma_*\delta_{A\mathcal{O}} =$$

$$= \frac{1}{\sum\limits_{A\in\mathcal{A}} e^{-sd(\mathcal{O},A\mathcal{O})}} \sum_{A\in\mathcal{A}} e^{-sd(\mathcal{O},A\mathcal{O})} \delta_{\gamma^{-1}A\mathcal{O}} =$$

$$= \frac{1}{\sum\limits_{A\in\mathcal{A}} e^{-sd(\mathcal{O},A\mathcal{O})}} \sum_{A\in\mathcal{A}} e^{-sd(\mathcal{O},\gamma A\mathcal{O})} \delta_{A\mathcal{O}},$$

где смо у последњој суми увели смену $A \to \gamma A$. Следи,

$$d(\gamma_*\nu_s)z = \frac{1}{\sum\limits_{A\in\mathcal{A}} e^{-sd(\mathcal{O},A\mathcal{O})}} \sum_{A\in\mathcal{A}} e^{-sd(\mathcal{O},\gamma A\mathcal{O})} d\delta_{A\mathcal{O}} z.$$

Притом, члан $e^{-sd(\mathcal{O},\gamma A\mathcal{O})}$ у суми постоји акко је $A\mathcal{O} = z$. У том случају је

$$d(\mathcal{O},\gamma A\mathcal{O}) = d(\mathcal{O},A\mathcal{O}) + (d(\mathcal{O},\gamma A\mathcal{O}) - d(\mathcal{O},A\mathcal{O})) =$$

$$= d(\mathcal{O},A\mathcal{O}) + (d(\gamma^{-1}\mathcal{O},z) - d(\mathcal{O},z)).$$

Зато је Радон[33]–Никодимов[34] извод једнак $\frac{d(\gamma_*\nu_s)}{d\nu_s}(x) = e^{-s\beta_x(\gamma^{-1}\mathcal{O},\mathcal{O})}$, где је $\beta_z(z_1,z_2) = d(z_1,z) - d(z_2,z)$. Преласком на слаби лимес кад $s \to \delta+$ добијамо Радон–Никодимов извод $\frac{d(\gamma_*\nu)}{d\nu}(x) = e^{-\delta\beta_x(\gamma^{-1}\mathcal{O},\mathcal{O})}$.

Продужићемо $\beta_z(z_1,z_2)$ по непрекидности за $z \in \mathbb{C} \subseteq \partial\mathbb{H}^3$. Специјално, за $u \in \mathbb{C}$ имамо

$$e^{-\delta\beta_u((x,y),\mathcal{O})} = e^{-\delta \lim\limits_{t\to 0+}(d((x,y),(u,t))-d(\mathcal{O},(u,t)))} =$$

$$= \lim_{t\to 0+}\left(\frac{\frac{\|\mathcal{O}-(u,-t)\|+\|\mathcal{O}-(u,t)\|}{\|\mathcal{O}-(u,-t)\|-\|\mathcal{O}-(u,t)\|}}{\frac{\|(x,y)-(u,-t)\|+\|(x,y)-(u,t)\|}{\|(x,y)-(u,-t)\|-\|(x,y)-(u,t)\|}}\right)^{\delta} =$$

$$= \lim_{t\to 0+}\left(\frac{\frac{(\|\mathcal{O}-(u,-t)\|+\|\mathcal{O}-(u,t)\|)^2}{\|\mathcal{O}-(u,-t)\|^2-\|\mathcal{O}-(u,t)\|^2}}{\frac{(\|(x,y)-(u,-t)\|+\|(x,y)-(u,t)\|)^2}{\|(x,y)-(u,-t)\|^2-\|(x,y)-(u,t)\|^2}}\right)^{\delta} =$$

$$= \left(\frac{2\|\mathcal{O}-(u,0)\|}{2\|(x,y)-(u,0)\|}\right)^{2\delta} \lim_{t\to 0+}\left(\frac{\|(x,y)-(u,-t)\|^2-\|(x,y)-(u,t)\|^2}{\|\mathcal{O}-(u,-t)\|^2-\|\mathcal{O}-(u,t)\|^2}\right)^{\delta} =$$

$$= \left(\frac{|u|^2+1}{|x-u|^2+y^2}\right)^{\delta} \lim_{t\to 0+}\left(\frac{4yt}{4t}\right)^{\delta} = \left(\frac{(|u|^2+1)y}{|x-u|^2+y^2}\right)^{\delta}.$$

---

[33] Johann Karl August Radon (1887. – 1956.), чешки математичар

[34] Otto Marcin Nikodym (1887. – 1974.), пољски математичар

5.4 Лаплас–Белтрамијев оператор

Лаплас[35]*–Белтрамијев*[36] *оператор* Δ (за функције које сликају Риманову многострукост M у $\mathbb{R}$) се дефинише као дивергенција градијента.

Специјално, за $M = \mathbb{H}^3$, имамо Поенкареову метрику $g_{(x,y)}(X,Y) = \frac{1}{y^2}\langle X,Y\rangle$, $X, Y \in TM$ и базу $\mathcal{B} := \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \;\middle|\; 1 \leqslant i \leqslant 3 \right\}$ тангентног простора $T\mathbb{H}^3$, (при чему подразумевамо да је $x_3 = y$). Показали смо да за базне векторе важи $g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \frac{\delta_{ij}}{y^2}$, као и да је запреминска форма дата са $\omega = \frac{1}{y^3} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dy$.

Градијент функције f је векторско поље ∇f такво да важи $g(\nabla f, X) = Xf$, за све $X \in T\mathbb{H}^3$, или еквивалентно, за X из поменуте базе. Нека су $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ координате вектора ∇f у бази $\mathcal{B}$. Тада је

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = g\left(\nabla f, \frac{\partial}{\partial x_i}\right) = g\left(\sum_{j=1}^{3} \alpha_j \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_i}\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{3} \alpha_j g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \frac{1}{y^2} \sum_{j=1}^{3} \delta_{ij} \alpha_j = \frac{\alpha_i}{y^2}.$$

Следи, $\alpha_i = y^2 \frac{\partial f}{\partial x_i}$ и $\nabla f = y^2 \sum\limits_{i=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}$.

Дивергенција векторског поља F је функција $\nabla \circ F$ таква да је $d\left(\iota_F \omega\right) = (\nabla \circ F)\,\omega$, за све $X \in TM$, или еквивалентно $X \in \mathcal{B}$, где је $\iota_F \omega\left(X_1, X_2\right) = (F, X_1, X_2)$ контракција форме ω векторским пољем F. Нека су $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ координате векторског поља F у бази $\mathcal{B}$. Тада је

$$\iota_F \omega \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\right) = \omega\left(F, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\right) =$$

$$= \sqrt{|\Gamma|} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dy \left(\sum_{i=1}^{3} \beta_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\right) =$$

$$= \sqrt{|\Gamma|} \sum_{i=1}^{3} \beta_i dx_1 \wedge dx_2 \wedge dy \left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\right) =$$

$$= \sqrt{|\Gamma|} \sum_{i=1}^{3} \beta_i dx_1 \wedge dx_2 \wedge dy \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_i}\right) =$$

---

[35] Pierre–Simon Marquis de Laplace (1749. – 1827.), француски математичар и астроном

[36] Eugenio Beltrami (1835. – 1900.), италијански математичар

$$= \sqrt{|\Gamma|}\beta_3 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dy \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial y}\right) = \sqrt{|\Gamma|}\beta_3.$$

Аналогно се (због антикомутативности) добија $\iota_F\omega\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial y}\right) = -\sqrt{|\Gamma|}\beta_2$ и $\iota_F\omega\left(\frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial y}\right) = \sqrt{|\Gamma|}\beta_1$. Следи,

$$\iota_F\omega = \sqrt{|\Gamma|}\beta_3 dx_1 \wedge dx_2 - \sqrt{|\Gamma|}\beta_2 dx_1 \wedge dy + \sqrt{|\Gamma|}\beta_1 dx_2 \wedge dy.$$

Диференцирањем претходне форме долазимо до

$$d\left(\iota_F\omega\right) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sqrt{|\Gamma|}\beta_3\right) dx_i \wedge dx_1 \wedge dx_2 -$$

$$-\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sqrt{|\Gamma|}\beta_2\right) dx_i \wedge dx_1 \wedge dy + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sqrt{|\Gamma|}\beta_1\right) dx_i \wedge dx_2 \wedge dy =$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{|\Gamma|}\beta_3\right) dy \wedge dx_1 \wedge dx_2 - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\sqrt{|\Gamma|}\beta_2\right) dx_2 \wedge dx_1 \wedge dy +$$

$$+\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\sqrt{|\Gamma|}\beta_1\right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dy = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sqrt{|\Gamma|}\beta_i\right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dy =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{|\Gamma|}} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sqrt{|\Gamma|}\beta_i\right)\omega = y^3 \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\beta_i}{y^3}\right)\omega.$$

Одатле и из дефиниције дивергенције векторског поља следи да је $\nabla \circ F = y^3 \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\beta_i}{y^3}\right) = y^3 \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{dx_i F}{y^3}\right)$.

Специјално, видели смо да су координате векторског поља ∇f једнаке $y^2 \frac{\partial f}{\partial x_i}$. Зато је Лаплас–Белтрамијев оператор у хиперболичком простору $\mathbb{H}^3$ једнак

$$\Delta f = \nabla \circ \nabla f = \nabla \circ \left(y^2 \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\right) =$$

$$= y^3 \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{y^3} y^2 \frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = y^3 \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{y}\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) =$$

$$= y^3\left(\frac{1}{y}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{1}{y}\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \frac{1}{y}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{1}{y^2}\frac{\partial f}{\partial y}\right) =$$

$$= \left(y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) - y\frac{\partial}{\partial y}\right) f.$$

Сматраћемо да је домен Лаплас–Белтрамијевог оператора $\mathcal{L}^2\left(\mathcal{A}\backslash\mathbb{H}^3\right)$. Напомињемо да смо се овим ограничили само на $\mathcal{A}$–инваријантне функције.

Теорема 76. *Све сопствене вредности Лаплас–Белтрамијевог оператора су реалне и мање или једнаке* $\delta(\delta-2)$. *Спектар Лаплас–Белтрамијевог оператора је дискретан на* $[-1, \delta(\delta-2)]$. *Постоји јединствена сопствена функција* ϕ_0 *Лаплас–Белтрамијевог оператора за сопствену вредност* $\delta(\delta-2)$ *за коју је* $\|\phi_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash\mathbb{H}^3)} = 1$ *и дата је формулом*

$$\phi_0(x,y) = \int\limits_{\mathbb{C}} e^{-\delta\beta_u((x,y),\mathcal{O})} d\nu u.$$

Доказ ове теореме се може наћи у оригиналним радовима Петерсона [25] и Саливена [30].

Функцију ϕ_0 из претходне теореме зовемо *основна сопствена функција* Лаплас–Белтрамијевог оператора Δ. Ова функција је ненегативна као интеграл такве функције. Петерсон–Саливенова мера (на $\mathbb{C} = \partial\mathbb{H}^3$) је сконцентрисана на $\operatorname{Res}\mathcal{P}$, па се за област интеграције уместо $\mathbb{C}$ може узети и $\operatorname{Res}\mathcal{P}$. Према напомени на крају претходног поглавља, функција ϕ_0 се може изразити као

$$\phi_0(x,y) = \int\limits_{\operatorname{Res}\mathcal{P}} \left(\frac{(|u|^2+1)y}{|x-u|^2+y^2}\right)^{\delta} d\nu u.$$

Занимљиве су вредности функције ϕ_0 у тачкама $(x,y) = A\mathcal{O}$ орбите $\mathcal{A}\mathcal{O}$:

$$\phi_0(A\mathcal{O}) = \int\limits_{\operatorname{Res}\mathcal{P}} e^{-\delta\beta_u(A\mathcal{O},\mathcal{O})} d\nu u = \int\limits_{\operatorname{Res}\mathcal{P}} d(A_*^{-1}\nu)u = A_*^{-1}\nu(\operatorname{Res}\mathcal{P}) = \nu(A^{-1}\operatorname{Res}\mathcal{P}).$$

Наравно, скуп $\operatorname{Res}\mathcal{P}$ смо опет могли да заменимо целом равни $\mathbb{C}$.

С обзиром на идентификацију $\mathbb{C} \cong NA$ можемо сматрати да је ϕ_0 дефинисана на $NA \leqslant G$. Додатно, можемо продужити ϕ_0 на цео скуп $G \cong NAK$ захтевом да је ϕ_0 K–инваријантна функција (тј. да је $\phi_0(nak) = \phi_0(na)$, за произвољно $nak \in G$). Како је мера на K вероватносна важиће и $\|\phi_0\|_{\mathcal{L}(\mathcal{A}\backslash G)} = 1$. Нама ће бити најзначајније вредности ϕ_0 дуж y–осе A.

Из $1 < \delta \leqslant 2$ следи да је сопствена вредност $\delta(\delta-2)$ негативна. Претходна теорема каже да су тада и све остале сопствене вредности негативне.

Мотивисани претходном теоремом, прећи ћемо са сопствених вредности λ на промењливе $s = s(\lambda)$, које представљају решења квадратне једначине $s(s-2) = \lambda$.

Лема 77. *Нека је* $\lambda \leqslant \delta(\delta-2)$ *и* $s \in \mathbb{C}$ *решење једначине* $s(s-2) = \lambda$. *Тада је* $s \in [2-\delta, \delta] \cup (1 + \mathbb{R}i)$.

Доказ. Из $s^2-2s-\lambda=0$ следи $s=\frac{2\pm\sqrt{4+4\lambda}}{2}=1\pm\sqrt{1+\lambda}$. У случају $\lambda<-1$ корен је имагинаран па је $s\in 1+\mathbb{R}i$. А у случају $\lambda\geqslant -1$, корен $\sqrt{1+\lambda}$ је реалан и мањи или једнак 1, па је $s\in[0,2]$. Додатно, функција $\lambda(s)=s(s-2)$ је опадајућа на $[0,1)$ и растућа на $(1,2]$. Следи, $s\in[2-\delta,\delta]\cup(1+\mathbb{R}i)$. □

Како s и $2-s$ дају исто λ, домен за s можемо додатно сузити на $[1,\delta]\cup(1+\mathbb{R}^+i)$.

5.5 Наткривања резидуалног скупа

Резудуални скуп $\operatorname{Res}\mathcal{P}$ Аполонијеве конфигурације $\mathcal{P}$ смо дефинисали као затворење (у $\overline{\mathbb{C}}$) уније свих кругова из $\mathcal{P}$. Комплексну раван $\mathbb{C}$ поистовећујемо са групом транслација N, па $\operatorname{Res}\mathcal{P}-\{\infty\}$ можемо видети као подскуп N. Како је скуп $\operatorname{Res}\mathcal{P}-\{\infty\}$ инваријантан на дејство Аполонијеве групе $\mathcal{A}$, следећи скуп је добро дефинисан

$$\operatorname{Res}_N\mathcal{P}:=\{[n_x]\in(\mathcal{A}\cap N)\backslash N \mid x\in\operatorname{Res}\mathcal{P}-\{\infty\}\}.$$

У случају ограничене конфигурације пресек $\mathcal{A}\cap N$ је тривијалан, па је $\operatorname{Res}_N\mathcal{P}$ заправо исто што и $\operatorname{Res}\mathcal{P}-\{\infty\}$. А у случају да је конфигурација неограничена, $\operatorname{Res}_N\mathcal{P}$ је један сегмент те конфигурације.

Скуп $\operatorname{Res}_N\mathcal{A}$ је затворен у количничкој топологији на $(\mathcal{A}\cap N)\backslash\underline{N}$ као слика затвореног скупа $\operatorname{Res}\mathcal{P}-\{\infty\}$ у $\mathbb{C}$ у топологији наслеђеној из $\overline{\mathbb{C}}$.

Тачка ∞ припада $\operatorname{Res}\mathcal{P}$ акко је конфигурација $\operatorname{Res}\mathcal{P}$ неограничена. У том случају је ∞ параболичка фиксна тачка чији је стабилизатор у Аполонијевој групи једнак $\mathcal{A}\cap N$. Дакле, $\mathcal{A}_\infty=\mathcal{A}\cap N$ је циклична група генерисана транслацијом за један сегмент. Зато је ∞ параболичка фиксна тачка ранга 1.

Групу N смо поистоветили са равни $\mathbb{C}$. Зато N можемо видети као реални векторски простор димензије 2. Базу $v=\{v_1,v_2\}$ овог простора можемо изабрати тако да n_{v_1} буде генератор стабилизатора $\mathcal{A}_\infty=\mathcal{A}\cap N$, а v_2 било који вектор ортогоналан на v_1. Са x_1 (x_2) ћемо означити коефицијент вектора x уз први (други) базни вектор.

Дефиниција 78. *Кажемо да отворен подскуп $B\subseteq(\mathcal{A}\cap N)\backslash N$ наткрива $\operatorname{Res}_N\mathcal{P}$ ако је:*

(1) $\varepsilon_0(B):=\inf\limits_{\substack{u\in\operatorname{Res}_N\mathcal{P}\\ x\notin B}}\|x-u\|>0$, *за ограничену Аполонијеву конфигурацију* $\mathcal{P}$,

(2) $\varepsilon_0(B):=\inf\limits_{\substack{u\in\operatorname{Res}_N\mathcal{P}\\ x\notin B}}|x_2-u_2|>0$, *за неограничену Аполонијеву конфигурацију* $\mathcal{P}$.

Дакле, у случају ограничене конфигурације захтевамо да затворени скупови $\operatorname{Res}_N \mathcal{P}$ и $(\mathcal{A} \cap N)\backslash N - B$ буду дисјунктни. А у случају неограничене конфигурације исто захтевамо само од њихових пројекција на осу нормалну на правац транслације јер са преласком на класе прве координате више нису добро дефинисане.

5.6 Оцена нормализације основне сопствене функције

С обзиром на начин на који смо групу N поистоветили са равни $\mathbb{C}$, количничка група $(\mathcal{A} \cap N)\backslash N$ ће бити простор орбита $(\mathcal{A} \cap N)\backslash\mathbb{C}$ при дејству транслација Аполонијеве групе на раван $\mathbb{C}$. Нека је $\mathcal{F}_N$ фундаментална област у $\mathbb{C}$ за $(\mathcal{A} \cap N)\backslash N$ из леме 65. Затворење $\overline{\mathcal{F}_N}$ садржи бар по једног представника сваке класе, при чему у $\mathcal{F}$ не постоје еквивалентне тачке. Скуп $\overline{\mathcal{F}} - \mathcal{F} = \partial\mathcal{F}$ је мере нула, а мера на количничкој групи $(\mathcal{A} \cap N)\backslash N$ је дефинисана исто као и мера на $\mathcal{F}_N$ (која је рестрикција мере из $\mathbb{C}$). Зато интеграцију по $(\mathcal{A} \cap N)\backslash N$ можемо заменити интеграцијом по $\mathcal{F}_N$. Другим речима, нормализација је усредњавање дуж фундаменталне области.

Теорема 79. *Нека је $\mathcal{P}$ ограничена Аполонијева конфигурација или $\mathcal{P}_0$.*

(1) Важи $\phi_0^N(a_y) \asymp y^{2-\delta}$, за све $0 < y \ll 1$.

(2) Нека је B наткривање скупа $\operatorname{Res}_N \mathcal{P}$. Тада је

$$\phi_0^N(a_y) = \int\limits_{n_x \in B} \phi(n_x a_y) dx + O\left(y^{\delta}\right),$$

за све $y > 0$.

Доказ. Са $^{\mathsf{C}}$ ћемо означавати скуповни комплемент у $\mathcal{F}_N$. За подскуп $Q \subseteq \mathcal{F}_N$ имамо

$$\int\limits_Q \phi_0(n_x a_y) dx = \int\limits_Q \int\limits_{\operatorname{Res}\mathcal{P}} \left(\frac{(|u|^2+1)\,y}{|x-u|^2+y^2} \right)^{\delta} d\nu u dx = \int\limits_{\operatorname{Res}\mathcal{P}} \int\limits_Q \left(\frac{(|u|^2+1)\,y}{|x-u|^2+y^2} \right)^{\delta} dx d\nu u.$$

Подинтегрална функција је позитивна, па према Фубинијевој[37] теореми смемо да променимо поредак интеграције. Последњи интегал се сменом

---

[37] Guido Fubini (1879. – 1943.), италијански математичар

$x \to x + u$ своди на:

$$\int\limits_{\operatorname{Res}\mathcal{P}}\int\limits_{Q-u}\left(\frac{(|u|^2+1)\,y}{|x|^2+y^2}\right)^{\delta}dxd\nu u=\int\limits_{\operatorname{Res}\mathcal{P}}\left(|u|^2+1\right)^{\delta}\int\limits_{Q-u}\left(\frac{y}{|x|^2+y^2}\right)^{\delta}dxd\nu u.$$

Ваља напоменути да у претходном интегралу $-$ не означава скуповни комплемент него операцију одузимања (на $\mathbb{C}$).

Први случај: ограничена конфигурација.

(1) Норма је ограничена на $\operatorname{Res}\mathcal{P}$, па је

$$\int\limits_{\operatorname{Res}\mathcal{P}}\left(|u|^2+1\right)^{\delta}d\nu u \asymp \int\limits_{\operatorname{Res}\mathcal{P}}d\nu u=\nu(\operatorname{Res}\mathcal{P})\leqslant 1<\infty$$

јер је ν вероватносна мера. У овом случају је $\mathcal{F}_N=\mathbb{C}$. Ставимо $Q=\mathbb{C}$ у претходни интеграл, добијамо

$$\phi_0^N(a_y)=\int\limits_{\mathcal{F}_N}\phi(n_xa_y)dx\asymp\int\limits_{\mathbb{C}}\left(\frac{y}{|x|^2+y^2}\right)^{\delta}dx.$$

У последњи интеграл уводимо смену $w=\frac{x}{y}$. Тада је $dx=dx_1dx_2=d(yw_1)d(yw_2)=y^2dw$. Након тога ћемо прећи на поларне координате, добијамо

$$\begin{aligned}\phi_0^N(a_y)\asymp y^{2-\delta}\int\limits_{\mathbb{C}}\left(\frac{1}{|w|^2+1}\right)^{\delta}dw&=y^{2-\delta}\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{2\pi}\frac{r}{\left(r^2+1\right)^{\delta}}d\theta dr=\\&=2\pi y^{2-\delta}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\delta}\left(r^2+1\right)^{1-\delta}\right)\Bigg|_{r=0}^{+\infty}=\frac{\pi}{\delta-1}y^{2-\delta},\end{aligned}\tag{1}$$

јер је $\delta>0$. Дакле, у овом случају важи $\phi_0^N(a_y)\asymp y^{2-\delta}$, што је још јаче тврђење од (1).

(2) Нека је $\varepsilon_0(B):=\inf\limits_{\substack{u\in\operatorname{Res}_N\mathcal{P}\\ x\notin B}}\|x-u\|>0$. Као што смо већ приметили, у случају ограничене конфигурације, транслације x и u можемо поистоветити са одговарајућим тачкама у $\mathbb{C}$. Додатно, норма разлике транслација ће бити баш апсолутна вредност разлике тачака (иако норма транслације не мора бити једнака апсолутној вредности тачке). За $Q=B^{\complement}$ имамо

$$\phi_0^N(a_y)-\int\limits_B\phi_0(n_xa_y)dx=\int\limits_{B^{\complement}}\phi_0(n_xa_y)dx=\int\limits_{\operatorname{Res}\mathcal{P}}\int\limits_{B^{\complement}}\left(\frac{(|u|^2+1)\,y}{|x-u|^2+y^2}\right)^{\delta}dxd\nu u.$$

У последњи интеграл уводимо смену $x' = x - u$. Из $x \notin B$ и $u \in \operatorname{Res}_N \mathcal{P} = \operatorname{Res} \mathcal{P}$ следи $|x'| \geqslant \varepsilon_0$. Имамо

$$\phi_0^N(a_y) - \int\limits_B \phi_0(n_x a_y) dx \ll \int\limits_{\operatorname{Res}\mathcal{P}} \left(|u|^2+1\right)^\delta d\nu u \int\limits_{|x'|\geqslant\varepsilon_0} \left(\frac{y}{|x'|^2+y^2}\right)^\delta dx' \ll$$

$$\ll \int\limits_{|x'|\geqslant\varepsilon_0} \left(\frac{y}{|x'|^2+y^2}\right)^\delta dx'.$$

Овај интеграл се сменом $w = \frac{x'}{y}$ и преласком на поларне координате своди на

$$y^{2-\delta} \int\limits_{|w|\geqslant\frac{\varepsilon_0}{y}} \left(\frac{1}{|w|^2+1}\right)^\delta dw = y^{2-\delta} \int\limits_{\frac{\varepsilon_0}{y}}^{+\infty} \int\limits_0^{2\pi} \frac{r}{\left(r^2+1\right)^\delta} d\theta dr =$$

$$= 2\pi y^{2-\delta} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\delta} \left(r^2+1\right)^{1-\delta}\right)\Bigg|_{r=\frac{\varepsilon_0}{y}}^{+\infty} = \frac{\pi}{\delta-1} y^{2-\delta} \left(\frac{\varepsilon_0^2}{y^2}+1\right)^{1-\delta} =$$

$$= \frac{\pi}{\delta-1} y^\delta \left(\varepsilon_0^2+y^2\right)^{1-\delta} \ll y^\delta$$

Други случај: $\mathcal{P} = \mathcal{P}_0$.

(1) Циклична група $\mathcal{A} \cap N$ је генерисана транслацијама n_2, а фундаментална област је $\mathcal{F}_N = (-1,1) \times \mathbb{R}$. Резидуални скуп $\operatorname{Res}\mathcal{P}$ је садржан у $\mathbb{R} \times [-1,1]$. Како је $d\nu = o$ на $\overline{\mathbb{C}} - \operatorname{Res}\mathcal{P}$, за $Q = \mathcal{F}_N$ имамо

$$\phi_0^N(a_y) = \int\limits_{\mathbb{R}\times[-1,1]} \left(|u|^2+1\right)^\delta \int\limits_{[-1,1]\times\mathbb{R}-u} \left(\frac{y}{|x|^2+y^2}\right)^\delta dx d\nu u.$$

Ако заменимо поредак интеграције, области интеграције постају $x \in \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ и $u \in (\mathbb{R} \times [-1,1]) \cap ([-1-x_1, 1-x_1] \times \mathbb{R}) = [-1-x_1, 1-x_1] \times [-1,1]$. Следи,

$$\phi_0^N(a_y) = \int\limits_{\mathbb{C}} \left(\frac{y}{|x|^2+y^2}\right)^\delta \int\limits_{[-1-x_1,1-x_1]\times[-1,1]} \left(|u|^2+1\right)^\delta d\nu u dx.$$

За (1) је довољно да покажемо да је

$$I := \inf_{x_1\in\mathbb{R}} \int\limits_{[-1-x_1,1-x_1]\times[-1,1]} \left(|u|^2+1\right)^\delta d\nu u > 0$$

и

$$S := \inf_{x_1\in\mathbb{R}} \int\limits_{[-1-x_1,1-x_1]\times[-1,1]} \left(|u|^2+1\right)^{\delta} d\nu u < \infty$$

јер ће одатле следити

$$\phi_0^N(a_y) \asymp \int\limits_{\mathbb{C}} \left(\frac{y}{|x|^2+y^2}\right)^{\delta} dx = \frac{\pi}{\delta-1} y^{2-\delta} \asymp y^{2-\delta}.$$

Што се тиче инфимума знамо да је

$$I \geqslant \inf_{x_1\in\mathbb{R}} \int\limits_{[-1-x_1,1-x_1]\times[-1,1]} d\nu u = \inf_{x_1\in\mathbb{R}} \nu([-1-x_1, 1-x_1]\times[-1,1]) = \nu\left([-1,1]^2\right).$$

Тврдимо $\nu\left([-1,1]^2\right) > 0$. Претпоставимо супротно, да је овај скуп мере нула. Дуална конфигурација је састављена од две полусфере S_1 и S_2 и две полуравни. Нека су $\mathfrak{S}_1$ и $\mathfrak{S}_2$ инверзије у односу на те полусфере и $\mathfrak{S}_3$ и $\mathfrak{S}_4$ симетрије у односу на те полуравни. Конструисаћемо низ $A_n \in \mathcal{A}$ рекурзивно са $A_1 = \mathfrak{S}_i$, где $i \in \{1,2\}$ бирамо тако да $o \in \operatorname{ext} S_i$, и $A_n = \mathfrak{S}_i A_{n-1}$, где $i \in \{1,2\}$ бирамо тако да A_n и A_{n-1} буду различите. Сви чланови низа $A_n o$ (сем евентуално неколико почетних) припадају компактном скупу $\overline{\operatorname{int} S_1 \cup \operatorname{int} S_2}$. Напомињемо да је ово затворење у $\overline{\mathbb{H}^3}$, а компактност се односи на еуклидску топологију наслеђену из $\mathbb{R}^3$. Због компактности, евентуалним преласком на подниз, можемо сматрати да $A_n o$ конвергира ка некој тачки $p \in \Lambda(\mathcal{A}) = \operatorname{Res}\mathcal{P}$. Без умањења општости можемо сматрати да је $p \in [-1,1]^2$ (јер је $(\mathfrak{S}_3\mathfrak{S}_4)^k p \in [-1,1]^2$ за неко $k \in \mathbb{N}$). Нека $s_n \searrow \delta$, према дефиницији слабог лимеса је

$$\nu(\{p\}) = \lim_{n\to\infty} \nu(s_n)(\{A_n\mathcal{O}\}) = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{-s_n d(\mathcal{O}, A_n\mathcal{O})}}{\sum\limits_{A\in\mathcal{A}} e^{-s_n d(\mathcal{O}, A\mathcal{O})}} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{\sum\limits_{A\in\mathcal{A}} e^{-s_1 d(\mathcal{O}, A\mathcal{O})}} \lim_{n\to\infty} e^{-s_n d(\mathcal{O}, A_n\mathcal{O})} = \frac{e^{-\delta d(\mathcal{O}, p)}}{\sum\limits_{A\in\mathcal{A}} e^{-s_1 d(\mathcal{O}, A\mathcal{O})}} > 0.$$

Са друге стране скуп $\{p\}$ је мере нула као подскуп скупа $\operatorname{Res}\mathcal{P}$ мере нула. Контрадикција.

Да бисмо оценили супремум увешћемо смену $v = u + k = n_k(u) \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}$. Тада је

$$d\nu u = d\nu(n_k^{-1} v) = d(n_{k*}\nu) v = e^{-\delta\beta_v(n_k o, o)} d\nu v =$$

$$= e^{-\delta\beta_v((k,1),o)} d\nu v = \left(\frac{|v|^2+1}{|k-v|^2+1}\right)^{\delta},$$

$$\int\limits_{[-1-x_1,1-x_1]\times[-1,1]} \left(|u|^2+1\right)^{\delta} d\nu u =$$

$$= \int\limits_{[k-1-x_1,k+1-x_1]\times[-1,1]} \left(|v-k|^2+1\right)^\delta \left(\frac{|v|^2+1}{|k-v|^2+1}\right)^\delta d\nu u =$$

$$= \int\limits_{[k-1-x_1,k+1-x_1]\times[-1,1]} \left(|v|^2+1\right)^\delta d\nu u.$$

За свако $x_1 \in \mathbb{R}$ постоји $k = k(x) \in \mathbb{Z}$ такво да је $x \in [k, k+1)$. Тада је $[k-1-x_1, k+1-x_1] \subseteq [-2,1]$. Следи,

$$S \leqslant \int_{[-2,1]\times[-1,1]} (2^2+1)^\delta d\nu v = 5^\delta \nu([-2,1]\times[-1,1]) \leqslant 5^\delta.$$

(2) Нека је $\varepsilon_0(B) := \inf\limits_{\substack{u\in\mathrm{Res}_N\mathcal{P}\\ x\notin B}} |x_2-u_2| > 0$ и $Q = B^{\complement} - u$ (при чему $\mathrm{Res}_N\mathcal{P}$ идентификујемо са $\mathrm{Res}\,\mathcal{P}\cap\mathcal{F}_N$). Тада је

$$\phi_0^N(a_y) - \int\limits_{n_x\in B} \phi_0(n_x a_y)dx = \int\limits_{\mathrm{Res}\,\mathcal{P}} \left(|u|^2+1\right)^\delta \int\limits_{B^{\complement}-u} \left(\frac{y}{|x|^2+y^2}\right)^\delta dx d\nu u.$$

За $u \in \mathrm{Res}\,\mathcal{P}$ постоји $k \in 2\mathbb{Z}$ такво да је $u+k \in \mathrm{Res}_N\mathcal{P}$. Тада из $x+u \in B^{\complement}$ следи $|x_2| = |(x+u)_2 - (u+k)_2| \geqslant \varepsilon_0$. Одатле и из $B^{\complement} \subseteq \mathrm{Res}\,\mathcal{P}\cap\mathcal{F}_N \subseteq (-1,1)\times[-1,1]$ следи

$$\left\{(x,u)\in\mathbb{C}\times\mathrm{Res}\,\mathcal{P} \;\middle|\; x\in B^{\complement}-u\right\} \subseteq$$

$$\subseteq \{((x_1,x_2),(u_1,u_2)) \mid |u_2|\leqslant 1,\ -1-u_1 < x_1 < 1-u_1,\ |x_2|\geqslant\varepsilon_0\}.$$

Услов $-1-u_1 < x_1 < 1-u_1$ можемо заменити условом $-1-x_1 < u_1 < 1-x_1$. Зато је интеграл на десној страни мањи од

$$\int\limits_{|x_2|>\varepsilon_0} \left(\frac{y}{|x|^2+y^2}\right)^\delta \int\limits_{[-1-x_1,1-x_1]\times[-1,1]} \left(|u|^2+1\right)^\delta d\nu u dx \leqslant$$

$$\leqslant S \int\limits_{|x_2|>\varepsilon_0} \left(\frac{y}{|x|^2+y^2}\right)^\delta dx \leqslant S y^\delta \int\limits_{|x_2|>\varepsilon_0} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{x_1^2+x_2^2}\right)^\delta dx_1 dx_2 =$$

$$= 2Sy^\delta \int\limits_{\varepsilon_0}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{x_1^2+x_2^2}\right)^\delta dx_1 dx_2 = 2Sy^\delta \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(t^2+1)^\delta} \int\limits_{\varepsilon_0}^{+\infty} \frac{dx_2}{x_2^{2\delta-1}}.$$

У последњем кораку смо увели смену $t = \frac{x_1}{x_2}$. Још треба показати да су ови интеграли коначни:

$$\int\limits_{\varepsilon_0}^{+\infty} \frac{dx_2}{x_2^{2\delta-1}} = \left.\frac{x_2^{2-2\delta}}{2-2\delta}\right|_{x_2=\varepsilon_0}^{+\infty} = \frac{\varepsilon_0^{2-2\delta}}{2\delta-2},$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{\left(t^2+1\right)^{\delta}} = 2\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dt}{\left(t^2+1\right)^{\delta}} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} s = \frac{1}{t^2+1}, & t = \sqrt{\frac{1-s}{s}} \\ ds = -\frac{2t}{\left(t^2+1\right)^2}, & dt = -\frac{ds}{s^2 \cdot 2\sqrt{\frac{1-s}{s}}} = -\frac{ds}{2s^{\frac{3}{2}}\sqrt{1-s}} \end{array} \right\} =$$

$$= 2\int\limits_{1}^{0} s^{\delta}\left(-\frac{ds}{2s^{\frac{3}{2}}\sqrt{1-s}}\right) = \int\limits_{0}^{1} s^{\delta-\frac{3}{2}}(1-s)^{-\frac{1}{2}}ds =$$

$$= B\left(\delta - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\delta-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\delta-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{\pi}\frac{\Gamma\left(\delta-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\delta)}.$$

□

Последица 80. *Постоје константе* $c_{\phi_0} > 0$ *и* $d_{\phi_0} \geqslant 0$ *такве да је*

$$\phi_0^N(a_y) = c_{\phi_0}y^{2-\delta} + d_{\phi_0}y^{\delta},$$

за све $y > 0$*. Додатно, за ограничену конфигурацију је* $d_{\phi_0} = 0$*.*

Доказ. Из $\Delta\phi_0 = \delta(\delta-2)\phi_0$ следи да је ϕ_0^N решење обичне диференцијалне једначине $y^2f''(y) - yf'(y) = \delta(\delta-2)f(y)$. Из

$$y^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(y^{\delta}\right) - y\frac{\partial}{\partial y}\left(y^{\delta}\right) = y^2\delta(\delta-1)y^{\delta-2} - y\delta y^{\delta-1} = \delta(\delta-2)y^{\delta},$$

$$y^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(y^{2-\delta}\right) - y\frac{\partial}{\partial y}\left(y^{2-\delta}\right) = y^2(2-\delta)(1-\delta)y^{-\delta} - y(2-\delta)y^{1-\delta} = \delta(\delta-2)y^{2-\delta}$$

следи да су функције y^{δ} и $y^{2-\delta}$ решења те исте једначине. Векторски простор решења ове једначине је дводимензионалан, а функције y^{δ} и $y^{2-\delta}$ су линеарно независне јер је њихова детерминанта Вронског[38]

$$W(y^{\delta}, y^{2-\delta}) = \begin{vmatrix} y^{\delta} & y^{2-\delta} \\ \delta y^{\delta-1} & (2-\delta)y^{1-\delta} \end{vmatrix} = (1-\delta)y - \delta y = (1-2\delta)y$$

различита од нуле за позитивно y. Следи, ове две функције чине базу векторског простора решења, па постоје константе c_{ϕ_0} и d_{ϕ_0} такве да је $\phi_0^N(a_y) = c_{\phi_0}y^{2-\delta} + d_{\phi_0}y^{\delta}$. Нормализација ϕ_0^N је ненегативна функција (као интеграл ненегативне функције ϕ_0), па обе константе морају бити ненегативне. Додатно, због асимптотског понашања (први део претходне теореме) мора бити $c_{\phi_0} > 0$.

Из (1) следи $d_{\phi_0} = 0$ за ограничену конфигурацију. □

---

[38] Józef Maria Hoene Wroński (1776. – 1853.), пољски математичар, филозоф и правник

ГЛАВА 6

СФЕРНЕ ФУНКЦИЈЕ И СПЕКТРАЛНИ РАЗМАК

У четвртој глави нам је била потребна процена скаларног производа $\langle {}_{a_y}\psi, \chi\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)}$ функција $\psi \in \mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)^K$ и $\chi \in C_c^\infty(\mathcal{A}\backslash G)$, за мале вредности y. У овој глави дајемо ту процену помоћу резултата из претходне главе и још пар ствари које ћемо извести у овој глави.

6.1 Казимиров оператор

Домен Лаплас–Белтрамијевог оператора је $\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash\mathbb{H}^3)$. Функције дефинисане на $\mathcal{A}\backslash\mathbb{H}^3 \cong \mathcal{A}\backslash NA$ се могу продужити до здесна K–инваријантних функција на $\mathcal{A}\backslash G$. Како је мера на подгрупи K вероватносна, претходно продужење даје инклузију $\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash\mathbb{H}^3) \subseteq \mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)$, при чему се норме $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash\mathbb{H}^3)}$ и $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)}$ поклапају.

Требало би нам продужење Лаплас–Белтрамијевог оператора на читав векторски простор $\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)$. Наравно, због парцијалних нема смисла продужење које би имало исти или сличан облик као Δ. Зато ћемо увести један потпуно нови оператор на $\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)$ и показати да се поклапа са Δ на $\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash\mathbb{H}^3)$.

Сечење по Аполонијевој групи ништа суштински не мења, претходна прича важи и за $\mathbb{H}^3$ и G.

Када смо увели норму Собољева (дефиниција 57), определили смо се за једну фиксирану базу

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

$$X_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad X_6 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

Лијеве алгебре $\mathfrak{g}(G)$.

Дефиниција 81. *Нека је $\{X_i\}$ база Лијеве алгебре $\mathfrak{g}(G)$ и $\{X_i^*\}$ њена дуална база у односу на билинеарну форму $(Y, Z) \mapsto \mathrm{Re}(\mathrm{Tr}(YZ))$. Казимиров*[39] *оператор је диференцијални оператор $\mathcal{C} = \frac{1}{2}\sum\limits_{j=1}^{6} X_j X_j^*$.*

Директним рачуном долазимо до дуалне базе:

$$\left\{X_1^* = X_3,\ X_2^* = -X_4,\ X_3^* = X_1,\ X_4^* = -X_2,\ X_5^* = \frac{1}{2}X_5,\ X_6^* = -\frac{1}{2}X_6\right\}.$$

Следи, Казимиров оператор је експлицитно задат са

$$\mathcal{C} = \frac{1}{2}\left(X_1X_3 - X_2X_4 + X_3X_1 - X_4X_2 + \frac{1}{2}X_5^2 - \frac{1}{2}X_6^2\right).$$

Испоставиће се да се на здесна K–инваријантним функцијама Казимиров оператор поклапа са Лаплас–Белтрамијевим оператором. Здесна K–инваријантне функције поистовећујемо са функцијама дефинисаним на $G/K \cong NA \cong \mathbb{H}^3$.

Теорема 82. *За функције $f : \mathbb{H}^3 \to \mathbb{C}$ важи $\mathcal{C}f = \Delta f$.*

Доказ. Вектор X_1 је тангентни на криву $e^{tX_1} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = n_t$. Следи,

$$X_1 f(x, y) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} f(n_t(x, y)) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} f(x + t, y) =$$

$$= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (x + t)\frac{\partial}{\partial x_1} f(x, y) = \frac{\partial}{\partial x_1} f(x, y).$$

Слично се показује и $X_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}$. Затим имамо

$$X_3 f(x, y) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} f\left(e^{tX_3}(x, y)\right) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}(x, y)\right) =$$

---

[39] Hendrik Brugt Gerhard Casimir (1909. – 2000.), холандски математичар и физичар

$$= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} f\left(\frac{x(t\overline{x}+1)+ty^2}{|tx+1|^2+t^2y^2}, \frac{y}{|tx+1|^2+t^2y^2}\right) =$$

$$= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} f\left(\frac{t\left(|x|^2+y^2\right)+x_1}{t^2\left(|x|^2+y^2\right)+2tx_1+1} + i\frac{x_2}{t^2\left(|x|^2+y^2\right)+2tx_1+1},\right.$$

$$\left.\frac{y}{t^2\left(|x|^2+y^2\right)+2tx_1+1}\right) =$$

$$= \left(x_2^2-x_1^2+y^2\right)\frac{\partial}{\partial x_1}f(x,y) - 2x_1x_2\frac{\partial}{\partial x_2}f(x,y) - 2x_1y\frac{\partial}{\partial y}f(x,y),$$

$$X_4 f(x,y) = \ldots = -2x_1x_2\frac{\partial}{\partial x_1}f(x,y) + \left(x_2^2-x_1^2-y^2\right)\frac{\partial}{\partial x_2}f(x,y) + 2x_2y\frac{\partial}{\partial y}f(x,y),$$

$$X_5 f(x,y) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} f\left(e^{tX_5}(x,y)\right) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} f\left(a_{e^{2t}}(x,y)\right) =$$

$$= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} f\left(e^{2t}x, e^{2t}y\right) = 2x_1\frac{\partial}{\partial x_1}f(x,y) + 2x_2\frac{\partial}{\partial x_2}f(x,y) + 2y\frac{\partial}{\partial y}f(x,y),$$

$$X_6 f(x,y) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} f\left(e^{tX_6}(x,y)\right) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} f\left(m_{2t}(x,y)\right) =$$

$$= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} f(\cos(2t)x_1 - \sin(2t)x_2 + i(\sin(2t)x_1 + \cos(2t)x_2), y) =$$

$$= -2x_2\frac{\partial}{\partial x_1}f(x,y) + 2x_1\frac{\partial}{\partial x_2}f(x,y).$$

Сада Казимиров оператор постаје

$$\mathcal{C} = \frac{1}{2}\left(\left(2\left(x_2^2-x_1^2+y^2\right)+2x_1^2-2x_2^2\right)\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \left(-2\left(x_2^2-x_1^2-y^2\right)+2x_2^2-2x_1^2\right)\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} +\right.$$

$$+2y^2\frac{\partial^2}{\partial y^2} + (-4x_1x_2+4x_1x_2+2x_1x_2-2x_1x_2)\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_2} + (-4x_1y+4x_1y)\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial y} +$$

$$+(-4x_2y+4x_2y)\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial y} + (-2x_1-2x_1+2x_1+2x_1)\frac{\partial}{\partial x_1} +$$

$$\left.+(-2x_2-2x_2+2x_2+2x_2)\frac{\partial}{\partial x_2} + (-2y+2y-2y)\frac{\partial}{\partial y}\right) =$$

$$= y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) - y\frac{\partial}{\partial y} = \Delta.$$

□

Наравно, све што смо рекли за $\mathbb{H}^3$ важи и за $\mathcal{A}\backslash\mathbb{H}^3$, јер функције $\mathcal{A}\backslash\mathbb{H}^3 \to \mathbb{C}$ можемо видети као $\mathcal{A}$–инваријантне функције $\mathbb{H}^3 \to \mathbb{C}$.

6.2 Картанова декомпозиција

Помоћу Ивасавине декомпозиције дошли смо до правоугаоних координата у хиперболичком простору. Сада желимо да уведемо и поларне координате. Нека је $A^+ = \{a_y \in A \mid y > 1\}$. Матрица $\omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in K$ мења координате на дијагонали код дијагоналних матрица. Зато је $A = A^+ \sqcup \{E\} \sqcup \omega A^+$.

Теорема 83. (Картан[40]) *За сваку матрицу $g \in G - K$ постоје матрице $k, k' \in K$ и $a \in A$ такве да је $g = kak'$. Другим речима, $G = KAK \sqcup K$.*

Доказ. Прво, матрицу g можемо помножити слева матрицом $k_1 \in K$ тако да добијемо симетричну матрицу $g_1 = k_1 g$. На основу спектралне теореме за симетричне матрице g_1 се може представити као $k'^{-1}ak'$, где је $k' \in K$ и a дијагонална матрица. Додатно, $\det a = 1$ одакле следи да је $a \in A$.

Ако је $a \in A^+$, имамо $g = kak'$, где је $k = k_1^{-1}k'^{-1} \in K$. Ако је $a = E$ тврђење важи тривијално. У случају да је $a \in \omega A$ имамо декомпозицију $g = (k\omega)(\omega a)k'$. □

На основу Ивасавине и Картанове декомпозиције можемо закључити да је $\mathbb{H}^3 \cong NA \cong NAK/K = (KAK \sqcup K)/K \cong KA \sqcup \{E\}$. Занимљива је геометријска интерпретација ове чињенице.

Матрица E представља тачку $o = (0, 1)$. Тачку $(x, y) \in \mathbb{H}^3 \backslash \{o\}$ смо поистоветили са матрицом $n_x a_y = k a_{y'}$, $y' > 1$. Матрица $k \in K$ фиксира o. Следи,

$$d((x,y),o) = d(n_x a_y o, o) = d(k a_{y'} o, o) = d(k a_{y'} o, ko) = d(a_{y'} o, o) = d((0,y'),o) =$$

$$= \log \frac{\|(0,y') - (0,-1)\| + \|(0,y') - (0,1)\|}{\|(0,y') - (0,-1)\| - \|(0,y') - (0,1)\|} = \log \frac{y' + 1 + y' - 1}{y' + 1 - (y' - 1)} = \log y'.$$

Ово значи да се тачка (x, y) налази на хиперболичкој сфери са центром у o полупречника $r := \log y' > 0$. Одатле следи да је r (па самим тим и y') јединствено.

Како матрица k фиксира o, логично је да она представља углове у поларним координатама. У случају полуравни $\mathbb{H}^2$ ово својство се геометријски лепо види, а детаљније о томе се може пронаћи у [13]. У $\mathbb{H}^3$ би K могло да се параметризује са два угла, али се ту рачун знатно компликује.

---

[40] Élie Joseph Cartan (1869. – 1951.), француски математичар

6.3 Сферни Казимиров оператор

Желимо да одредимо сопствену функцију Лаплас–Белтрамијевог оператора која зависи само од полупречника (у поларним координатама). Према Картановој декомпозицији овај услов је еквивалентан са слева K–инваријантношћу.

Дефиниција 84. *Кажемо да је функција* $f : \mathbb{H}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ *сферна ако је слева* K*–инваријантна.*

Или еквивалентно, функција $f : G \longrightarrow \mathbb{R}$ је сферна ако је (и слева и здесна) K–инваријантна.

Казимиров (Лаплас–Белтрамијев) оператор на сферним функцијама има знатно једноставнији облик. Да бисмо то видели пређи ћемо на другу базу Лијеве алгебре $\mathfrak{g}(G)$:

$$Y_1 := X_1 + X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y_2 := X_1 - X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Y_3 := X_2 + X_4 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad Y_4 := X_2 - X_4 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix},$$

$$Y_5 := X_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad Y_6 := X_6 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

У овој бази Казимиров оператор има облика $\mathcal{C} = \frac{1}{4} \sum\limits_{j=1}^{6} (-1)^j Y_j^2$.

Ову базу смо изабрали јер је

$$e^{tY_2} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}, \; e^{tY_3} = \begin{pmatrix} \cos t & i\sin t \\ i\sin t & \cos t \end{pmatrix}, \; e^{tY_6} = \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix} = m_{2t} \in K.$$

Следи, на сферним функцијама је $Y_j \equiv 0$, за $j \in \{2, 3, 6\}$, а Казимиров оператор је $\mathcal{C} = \frac{1}{4}\left(Y_1^2 - Y_4^2 + Y_5^2\right)$.

Остаје још да одредимо дејство Y_1, Y_4 и Y_5 на сферним функцијама $f(x, y) = f(n_x a_y) = f(k a_{e^{-r}}) = F(r)$. Очигледно је

$$Y_5 F(r) = Y_5 f\left(a_{e-r}\right) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f\left(e^{tY_5} a_{e^{-r}}\right) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f\left(a_{e^{2t}} a_{e^{-r}}\right) =$$

$$= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f\left(a_{e^{2t+r}}\right) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} F(2t + r) = 2F'(r).$$

Нека је $r > 0$ произвољно и

$$Y_{2,r} := \mathrm{Ad}_{a_{e^{-r}}} = a_{e^{-r}} Y_2 a_{e^{-r}}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & e^{-r} \\ -e^r & 0 \end{pmatrix}.$$

Векотри Y_2 и $Y_{2,r}$ чине базу потпростора $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R} \right\} \leqslant \mathfrak{g}(G)$. Зато се Y_1 може представити као $\alpha Y_2 + \beta Y_{2,r}$ за неке константе $\alpha = \alpha(r)$ и $\beta = \beta(r)$. Ове константе можемо одредити као решење система:

$$\left. \begin{array}{ccccc} \alpha & + & \beta e^{-r} & = & 1 \\ \alpha & + & \beta e^{r} & = & -1 \end{array} \right\}.$$

Према Крамеровом правилу је $\alpha = \frac{e^r + e^{-r}}{e^r - e^{-r}} = \operatorname{ctgh} r$ и $\beta = \frac{-2}{e^r - e^{-r}} = -\frac{1}{\sinh r}$.

Дакле,

$$Y_1^2 F = \left(\alpha^2 Y_2^2 + \alpha\beta Y_2 Y_{2,r} + \alpha\beta Y_{2,r} Y_2 + \beta^2 Y_{2,r}^2\right) F = \left(\alpha\beta Y_2 Y_{2,r} + \beta^2 Y_{2,r}^2\right) F,$$

јер је $Y_2 \equiv 0$ на сферним функцијама. Приметимо да је

$$\begin{aligned} Y_{2,r}^2 F(r) = Y_{2,r}^2 f\left(a_{e^{-r}}\right) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} f\left(e^{tY_{2,r}} e^{sY_{2,r}} a_{e_{-r}}\right) = \\ &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} f\left(e^{a_{e^{-r}} t Y_2 a_{e^{-r}}^{-1}} e^{a_{e^{-r}} s Y_2 a_{e^{-r}}^{-1}} a_{e_{-r}}\right) = \\ &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} f\left(a_{e^{-r}} e^{tY_2} a_{e^{-r}}^{-1} a_{e^{-r}} e^{sY_2} a_{e^{-r}}^{-1} a_{e_{-r}}\right) = \\ &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} f\left(a_{e^{-r}} e^{tY_2} e^{sY_2}\right) = \\ &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} f\left(a_{e^{-r}}\right) = 0. \end{aligned}$$

Овде смо користили K–инваријантност функције F и очигледан матрични идентитет $e^{ABA^{-1}} = Ae^B A^{-1}$.

Следи,

$$\begin{aligned} Y_1^2 F = \alpha\beta Y_2 Y_{2,r} F = \alpha\beta \left([Y_2, Y_{2,r}] - Y_{2,r} Y_2\right) F &= \alpha\beta \left[Y_2, Y_{2,r}\right] F = \\ = \alpha\beta \begin{pmatrix} -e^r + e^{-r} & 0 \\ 0 & -e^{-r} + e^r \end{pmatrix} F &= \alpha\beta \left(-e^r + e^{-r}\right) Y_5 F = \\ = \operatorname{ctgh} r \left(-\frac{1}{\sinh r}\right) (-2\sinh r) \cdot 2F' &= 4 \operatorname{ctgh} r F'(r). \end{aligned}$$

Аналогно се показује и да је $Y_4^2 = -4 \operatorname{ctgh} r \frac{d}{dr}$ на сферним функцијама. Дакле, Казимиров оператор за сферне функције има облик

$$\mathcal{C} = \frac{d^2}{dr^2} + 2 \operatorname{ctgh} r \frac{d}{dr}.$$

6.4 Сферне сопствене функције

Сферне сопствене функције Лаплас–Белтрамијевог (Казимировог) оператора су, дакле, решења обичне диференцијалне једначине другог реда

$$F''(r) + 2\operatorname{ctgh} r F'(r) - \lambda F(r) = 0. \tag{2}$$

Множењем са $\sinh r$ долазимо до једначине

$$\sinh r F''(r) + s\cosh r F'(r) - \lambda \sinh r F(r) = 0,$$

односно,

$$(\sinh r F(r))'' - (1+\lambda)\sinh r F(r) = 0$$

која не садржи први извод и коју можемо експлицитно да решимо.

Сменом $g(r) = \sinh r F(r)$ ова једначина се своди на хомогену линеарну диференцијалну једначину другог реда са константним коефицијентима: $g'' - (1+\lambda)g = 0$. За број $1+\lambda$ знамо једино да је реалан и мањи или једнак $1+\delta(\delta-2) = (\delta-1)^2$. Зато ће претходна једначина имати различита решења у зависности од тога да ли је λ мање, веће или једнако -1.

За $\lambda = s(s-2)$ претходна једначина постаје

$$g'' - (s-1)^2 g = 0. \tag{3}$$

Присетимо се да је $\lambda \leqslant \delta(\delta-2)$ еквивалентно са $s \in [2-\delta, \delta] \cup (1+\mathbb{R}i)$. Домен за s смо накнадно смањили на $[1,\delta] \cup (1+\mathbb{R}^+i)$ како бисмо имали једнозначну кореcподенцију између s и λ.

У случају да је $s \in (1,\delta]$, решење једначине (3) је $g_s(r) = \alpha e^{(s-1)r} + \beta e^{-(s-1)r}$. Следи, решење једначине (2) је

$$F_s(r) = \frac{\alpha e^{(s-1)r} + \beta e^{-(s-1)r}}{\sinh r} = \frac{\alpha+\beta}{2}\frac{\cosh((s-1)r)}{\sinh r} + \frac{\alpha-\beta}{2}\frac{\sinh((s-1)r)}{\sinh r}.$$

Да бисмо имали јединствено решење наметнућемо (природан) услов $\lim\limits_{r\to 0+} F_s(r) = 1$. Пошто $\frac{\cosh((s-1)r)}{\sinh r}$ дивергира (кад $r \to 0+$), једина могућност је $\beta = -\alpha$, тј. $F_s(r) = \alpha\frac{\sinh((s-1)r)}{\sinh r}$. Из $\lim\limits_{r\to 0+} F_s(r) = \alpha(s-1)$, следи $\alpha = \frac{1}{s-1}$.

У случају да је $s = 1+ti$, $t \in \mathbb{R}^+$, једначина $g'' + t^2 g = 0$ има решење $g_s(r) = \alpha\cos(tr) + \beta\sin(tr)$. Следи, решење једначине (2) је

$$F_s(r) = \alpha\frac{\cos(tr)}{\sinh r} + \beta\frac{\sin(tr)}{\sinh r}.$$

Опет намећемо (природан) услов $\lim\limits_{r\to 0+} F_s(r) = 1$ да бисмо имали јединствено решење. Пошто $\frac{\cos(tr)}{\sinh r}$ дивергира (кад $r \to 0+$), једина могућност је $\alpha = 0$, тј. $F_s(r) = \beta\frac{\sin(tr)}{\sinh r}$. Из $\lim\limits_{r\to 0+} F_s(r) = \lim\limits_{r\to 0+} \beta\frac{\sin(tr)}{-i\sin(ir)} = \beta\frac{1}{-i}\frac{t}{i} = \beta t$, следи $\beta = \frac{1}{t}$.

Преостаје још случај $s = 1$. Тада је решење једначине $g'' = 0$ полином првог степена, па је решење једначине (2) дато са $F_1(r) = \frac{\alpha r+\beta}{\sinh r}$. Уколико наметнемо услов $\lim\limits_{r\to 0+} F_1(r) = 1$ добијамо јединствено решење $F_1(r) = \frac{r}{\sinh r}$. Овим смо показали следећу теорему:

Теорема 85. *Нека је* $s \in [1,\delta] \cup (1+\mathbb{R}^+ i)$. *Постоји јединстена сферна функција* $F_s : \mathbb{H}^3 \cong NA \longrightarrow \mathbb{R}$ *која задовољава услове:*

$$\Delta F_s = s(s-2)F_s \quad \textit{и} \quad \lim_{r\to 0+} F_s(r) = 1$$

и дата је формулом

$$F_s(r) = \begin{cases} \frac{1}{s-1}\frac{\sinh((s-1)r)}{\sinh r}, & s \in (1,\delta] \\ \frac{1}{t}\frac{\sin(tr)}{\sinh r}, & s = 1+ti,\ t\in\mathbb{R}^+ \\ \frac{r}{\sinh r}, & s = 1 \end{cases}.$$

Вратимо се сада на почетну сферну функцију $f : K\backslash G/K \to \mathbb{C}$. Како се ради о сферној функцији довољно је знати њене вредности дуж y–осе. Према дефиницији функције F_s важи $f_s(a_y) = f_s\left(a_{e^{-\log\frac{1}{y}}}\right) = F_s\left(\log\frac{1}{y}\right)$. Притом, $\log\frac{1}{y} \to 0+$ акко $y \to 1$ акко $a_y \to E$.

Ускоро ћемо видети да функција $\left\langle {}_{a_y}\phi_s, \phi_s\right\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)}$ задовољава услове ове теореме. Требаће нам њено понашање кад $y \to 0+$.

Последица 86. *Нека је* $s \in [1,\delta] \cup (1+\mathbb{R}^+ i)$. *Постоји јединстена сферна функција* $f_s : \mathbb{H}^3 \cong NA \longrightarrow \mathbb{R}$ *која задовољава услове:*

$$\Delta f_s = s(s-2)f_s \quad \textit{и} \quad \lim_{a_y\to E} f_s(a_y) = 1$$

и дата је формулом

$$f_s(a_y) = \begin{cases} \frac{1}{s-1}\frac{y^{2-s}-y^s}{1-y^2}, & s \in (1,\delta] \\ \frac{1}{t}\frac{\sin(t\log y)}{\sinh\log y}, & s = 1+ti,\ t\in\mathbb{R}^+ \\ \frac{\log y}{\sinh\log y}, & s = 1 \end{cases}.$$

Доказ. Према претходној теореми, за $s \in (1,\delta]$ важи

$$f_s(a_y) = \frac{1}{s-1}\frac{\sinh\left((s-1)\log\frac{1}{y}\right)}{\sinh\log\frac{1}{y}} = \frac{1}{s-1}\frac{\frac{e^{-(s-1)\log y}-e^{(s-1)\log y}}{2}}{\frac{e^{-\log y}-e^{\log y}}{2}} =$$

$$= \frac{1}{s-1}\frac{y^{-(s-1)} - y^{s-1}}{\frac{1}{y} - y} = \frac{1}{s-1}\frac{y^{2-s} - y^{s}}{1-y^2}.$$

Друге две једнакости се добијају скраћивањем минуса у бројиоцу и имениоцу. □

Последица 87. *За функцију f_s из претходне теореме важи оцена*

$$f_s(a_y) \ll \begin{cases} \frac{y^{2-s}}{s-1}, & s \in (1,\delta] \\ \frac{y}{\operatorname{Im} s}, & s \in 1+\mathbb{R}^+ i \\ y \log y, & s = 1 \end{cases}$$

за све $0 < y \ll 1$.

Доказ. За $s \in (1,\delta]$ имамо оцену

$$f_s(a_y) = \frac{1}{s-1}\frac{y^{2-s} - y^s}{1-y^2} = \frac{y^{2-s}}{s-1}\frac{1-y^{2s-2}}{1-y^2} \ll \frac{y^{2-s}}{s-1},$$

јер је $2s-2>0$, одакле следи да претходни количник тежи 1 кад $y \to 0+$, па је самим тим ограничен за мале вредности y.

Нека је сада $s = 1 + ti$, $t \in \mathbb{R}^+$. Како је синус ограничен биће

$$f_s(a_y) = \frac{1}{t}\frac{\sin(t\log y)}{\sinh \log y} \ll \frac{1}{t}\frac{1}{\sinh\log y} = \frac{1}{t}\frac{1}{\frac{e^{\log y} - e^{-\log y}}{2}} = \frac{1}{t}\frac{2}{y-\frac{1}{y}} \ll \frac{y}{t}\frac{1}{y^2-1} \ll \frac{y}{t}.$$

И слично, $f_1(a_y) = \frac{\log y}{\sinh \log y} \ll y \log y$. □

6.5 Спектрални размак

Нека је $\delta' := \max\limits_{\substack{s\in(1,\delta) \\ s(s-2)\in \operatorname{Spec}(\mathcal{A}\backslash\mathbb{H}^3)}} s$. Овај максимум постоји јер је спектар Лаплас–Белтрамијевог оператора у том делу дискретан. Дакле, δ' бирамо тако да $\delta'(\delta'-2)$ буде најмања сопствена вредност већа од $\delta(\delta-2)$. Разлику $\delta - \delta'$ зовемо *спектрални размак.*

У четвртој глави нам је била потребна процена скаларног производа $\langle {}_{a_y}\psi, \chi\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)}$ функција $\psi \in \mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)^K$ и $\chi \in C_c^\infty(\mathcal{A}\backslash G)$, за мале вредности y.

Основна сопствена функција ϕ_0 је једина сопствена функција Δ на $\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash\mathbb{H}^3)$ јединичне норме, па ће бити и једина сопствена здесна K–инваријантна функција $\mathcal{C}$ на $\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)$ јединичне норме (јер је мера на K вероватносна). Векторски простор $\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)$ се може разложити на $\mathscr{L}\phi_0 \oplus \phi_0^\perp$, где $\perp$ означава ортогоналну допуну у $\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)$. Сопствени потпростор који одговара сопственој вредности $\delta(\delta-2)$ је једнодимензионалан (јер би у супротном било више нормираних сопствених функција), па ортогонална допуна не може садржати сопствене функције које одговарају $\delta(\delta-2)$. То значи да је најмања сопствена вредност за Δ у $\phi_0^\perp$ једнака $\delta'(\delta'-2)$.

Наша функција ψ се може представити као $\langle\psi,\phi_0\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)}\,\phi_0+\psi^\perp$, за неки вектор $\psi^\perp\in\phi_0^\perp$. Скаларни производ на $\left\langle {}_{a_y}\phi_s,\phi_s\right\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)}$ се поклапа са скаларним производом на $\left\langle {}_{a_y}\phi_s,\phi_s\right\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash\mathbb{H}^3)}$ јер је мера на K вероватносна. Следи,

$$\langle {}_{a_y}\psi,\chi\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)}=\langle\psi,\phi_0\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)}\left\langle {}_{a_y}\phi_0,\chi\right\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)}+\left\langle {}_{a_y}\psi^\perp,\chi\right\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)}.$$

Главни члан наше процене биће $\langle\psi,\phi_0\rangle\left\langle {}_{a_y}\phi_0,\chi\right\rangle$, а сада ћемо проценити и грешку $\left\langle {}_{a_y}\psi^\perp,\chi\right\rangle$.

Када би векторски потпростор $\phi_0^\perp$ био разапет са коначно много сопствених функција ϕ_{s_i} (за сопствене вредности s_i) оператора Δ могли бисмо да кажемо да је

$$\left|\left\langle {}_{a_y}\psi^\perp,\chi\right\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)}\right|=$$

$$=\left|\left\langle\sum_{i=1}^{n}\left\langle\psi^\perp,\phi_{s_i}\right\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)}\,{}_{a_y}\phi_{s_i},\langle\chi,\phi_0\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)}\,\phi_0+\sum_{i=1}^{n}\langle\chi,\phi_{s_i}\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)}\,\phi_{s_i}\right\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)}\right|=$$

$$=\left|\sum_{i=1}^{n}\left\langle\psi^\perp,\phi_{s_i}\right\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)}\langle\chi,\phi_{s_i}\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)}\left\langle {}_{a_y}\phi_{s_i},\phi_{s_i}\right\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left|\left\langle {}_{a_y}\phi_{s_i},\phi_{s_i}\right\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)}\right|\sum_{i=1}^{n}\left|\left\langle\psi^\perp,\phi_{s_i}\right\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)}\langle\chi,\phi_{s_i}\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left|\left\langle {}_{a_y}\phi_{s_i},\phi_{s_i}\right\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)}\right|\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left\langle\psi^\perp,\phi_{s_i}\right\rangle^2_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)}}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\langle\chi,\phi_{s_i}\rangle^2_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)}}\leqslant$$

$$\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left|\left\langle {}_{a_y}\phi_{s_i},\phi_{s_i}\right\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)}\right|\left\|\psi^\perp\right\|_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)}\|\chi\|_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)},$$

јер је $\|\chi\|=\sqrt{\langle\chi,\phi_0\rangle^2+\sum\limits_{i=1}^{n}\langle\chi,\phi_{s_i}\rangle^2}$, а пре тога је искоршћена неједнакост Коши–Шварца[41].

Наравно, ситуација је знатно компликованија. Прво, спектар Лаплас–Белтрамијвог оператора није коначан, чак није ни дискретан. Друго, оператор Δ је дефинисан само на $\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash NA)$, па се само функције здесна K–инваријантне могу овако представити. Зато је и уведен Казимиров оператор као продужење Δ на $\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)$.

---

[41] Karl Hermann Amandus Schwarz (1843. – 1921.), немачки математичар

Ипак, може се извести слична процена:

$$\left\langle {}_{a_y}\psi^{\perp}, \chi \right\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)} \ll \sup_{\substack{s\in[1,\delta']\\ s(s-2)\in\mathrm{Spec}(\mathcal{A}\backslash\mathbb{H}^3)}} \left|\left\langle {}_{a_y}\phi_{s_i}, \phi_{s_i}\right\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)}\right| \mathcal{S}_2\left(\psi^{\perp}\right) \mathcal{S}_2\left(\chi\right).$$

Ова процена следи из теорије репрезентација групе G, јер је $\left(\pi, \phi_0^{\perp}\right)$ једна репрезентација групе G, где је дејство π задато са $\pi(nak)(f) = {}_a f$, за све $f \in \phi_0^{\perp}$. Комплетна теорија репрезентација групе G се може наћи у [34], а сам доказ ове теореме је изложен у [20], пропозиција 5.3. (у још општијем облику за произвољну дискретну подгрупу Γ групе G и $\psi^{\perp} \in \left(C^{\infty}(\Gamma\backslash G) \cap \mathcal{L}^2(\Gamma\backslash G)\right)^K$, а добијена је и још јача оцена од ове). Напомињемо да се супремум узима само по реалним s.

Лема 88. *Нека је $s \in [1, \delta] \cup (1 + \mathbb{R}^+ i)$ и $\phi_s \in \mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash\mathbb{H}^3)$ сопствена функција оператора Δ за сопствену вредност $s(s-2)$ јединичне $\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash\mathbb{H}^3)$–норме. Тада је сферна функција $f_s : \mathbb{H}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_s(a_y) := \left\langle {}_{a_y}\phi_s, \phi_s \right\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash\mathbb{H}^3)}$ једнака сферној функцији из последице 86. Самим тим, за f_s важи процена из последице 87.*

Доказ. Функција f_s је дефинисана само на подгрупи A и задовољава услов $f_s\left(a_{\frac{1}{y}}\right) = \left\langle {}_{a_{\frac{1}{y}}}\phi_s, \phi_s \right\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash\mathbb{H}^3)} = \left\langle \phi_{s,a_y}\, \phi_s \right\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash\mathbb{H}^3)} = f_s(a_y)$, јер је мера на $\mathcal{A}\backslash\mathbb{H}^3$ лева Харова. Зато f_s се може додефинисати до сферне функције.

Довољно је проверити да функција f_s задовољава услове последице 87:

$$s(s-2)f_s(a_y) = \int\limits_{n_{x_0}a_{y_0}\in\mathcal{A}\backslash NA} \left({}_{a_y}s(s-2)\phi_s\right)(n_{x_0}a_{y_0})\phi_s(n_{x_0}a_{y_0})dn_{x_0}da_{y_0} =$$

$$= \int\limits_{n_{x_0}a_{y_0}\in\mathcal{A}\backslash NA} \left({}_{a_y}\Delta\phi_s\right)(n_{x_0}a_{y_0})\phi_s(n_{x_0}a_{y_0})dn_{x_0}da_{y_0} =$$

$$= \int\limits_{n_{x_0}a_{y_0}\in\mathcal{A}\backslash NA} \left((y_0 y)^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) - y_0 y\frac{\partial}{\partial y}\right)\phi_s(n_{x_0}a_{y_0 y})\phi_s(n_{x_0}a_{y_0})dn_{x_0}da_{y_0} =$$

$$= \int\limits_{n_{x_0}a_{y_0}\in\mathcal{A}\backslash NA} \left((y_0 y)^2\frac{\partial^2}{\partial y^2} - y_0 y\frac{\partial}{\partial y}\right)\phi_s(n_{x_0}a_{y_0 y})\phi_s(n_{x_0}a_{y_0})dn_{x_0}da_{y_0}.$$

Приметимо да је $y\frac{d}{dy}\phi_s(n_{x_0}a_{y_0 y}) = y\frac{\partial}{\partial y}\phi_s(n_{x_0}a_{y_0 y})\frac{d}{dy}(y_0 y) = y_0 y\frac{\partial}{\partial y}\phi_s(n_{x_0}a_{y_0 y})$ и $y^2\frac{d^2}{dy^2}\phi_s(n_{x_0}a_{y_0 y}) = \ldots = (y_0 y)^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\phi_s(n_{x_0}a_{y_0 y})$. Следи,

$$s(s-2)f_s(a_y) = \int\limits_{n_{x_0}a_{y_0}\in\mathcal{A}\backslash NA} \left(y^2\frac{d^2}{dy^2} - y\frac{d}{dy}\right)\phi_s(n_{x_0}a_{y_0 y})\phi_s(n_{x_0}a_{y_0})dn_{x_0}da_{y_0} =$$

$$= \left(y^2\frac{d^2}{dy^2} - y\frac{d}{dy}\right) \int\limits_{n_{x_0}a_{y_0}\in\mathcal{A}\backslash NA} \left({}_{a_y}\phi_s\right)(n_{x_0}a_{y_0})\phi_s(n_{x_0}a_{y_0})dn_{x_0}da_{y_0} =$$

$$= \Delta\left\langle {}_{a_y}\phi_s, \phi_s\right\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash\mathbb{H}^3)} = \Delta f_s(a_y).$$

Други услов следи из

$$\lim_{a_y\to E} f_s(a_y) = \left\langle \lim_{a_y\to E} {}_{a_y}\phi_s, \phi_s\right\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash\mathbb{H}^3)} = \langle\phi_s,\phi_s\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash\mathbb{H}^3)} = \|\phi_s\|_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash\mathbb{H}^3)} = 1.$$

□

Како је најмања сопствена вредност Лаплас–Белтрамијевог оператора једнака $\delta'(\delta'-2)$ закључујемо да су све реалне вредности s у $(1,\delta')$. Из претходне леме следи

$$\left\langle {}_{a_y}\phi_s, \phi_s\right\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)} \ll \begin{cases} \frac{y^{2-s}}{s-1}, & s\in(1,\delta'] \\ y\log y, & s=1 \end{cases} \ll y^{2-\delta'},$$

за све сопствене функције ϕ_s и све $0 < y \ll 1$, јер је спектар Лаплас–Белтрамијевог оператора дискретан на $[-1,\delta'(\delta'-2)]$, па постоји максимум $\frac{1}{s-1}$ по s.

Логично је да пројекција $\psi^\perp$ вектора ψ на потпростор $\phi_0^\perp$ има мању норму од самог вектора ψ. Или строго формално говорећи,

$$\mathcal{S}_2\left(\psi^\perp\right) = \mathcal{S}_2\left(\psi - \langle\psi,\phi_0\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)}\phi_0\right) \leqslant$$

$$\leqslant \mathcal{S}_2(\psi) + \langle\psi,\phi_0\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)}\mathcal{S}_2\left(\phi_0\right) \leqslant$$

$$\leqslant \mathcal{S}_2(\psi) + \|\psi\|_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)}\|\phi_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)}\mathcal{S}_2\left(\phi_0\right) \leqslant$$

$$\leqslant \left(1 + \|\phi_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)}\mathcal{S}_2\left(\phi_0\right)\right)\mathcal{S}_2(\psi) \ll \mathcal{S}_2(\psi).$$

Овим смо доказали следећу теорему:

Теорема 89. *Нека је* $\psi \in C_c^\infty(\mathcal{A}\backslash G)^K$ *и* $\chi \in C_c^\infty(\mathcal{A}\backslash G)$. *Тада је*

$$\langle {}_{a_y}\psi, \chi\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)} = \langle {}_{a_y}\psi, \phi_0\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)}\langle {}_{a_y}\phi_0, \chi\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)} + O\left(y^{2-\delta'}\mathcal{S}_2\left(\psi\right)\mathcal{S}_2\left(\chi\right)\right),$$

за све $0 < y \ll 1$.

ГЛАВА 7

ПРЕБРОЈАВАЊЕ ОРБИТА У АПОЛОНИЈЕВОЈ КОНФИГУРАЦИЈИ (НАСТАВАК)

Основни циљ четврте главе био је да се оцени асимптотско понашање функције $N^{\mathcal{P}}(T)$. Тај проблем смо свели на оцену нормализације функције $\Psi \in C_c^{\infty}(\mathcal{A}\backslash G)^K$. Помоћу резултата из претходне две главе најпре ћемо оценити Ψ, а затим ћемо ходом уназад кроз четврту главу доћи и до оцене за $N^{\mathcal{P}}$.

У четвртој глави смо стали код процене за $\Psi \in C_c^{\infty}(\mathcal{A}\backslash G)^K$:

$$I_\eta(\Psi)(a_y) = \langle _{a_y}\Psi, \rho_{\eta,\varepsilon}\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)} + \sum_{k=1}^{n-1} O\left(\varepsilon^k \langle _{a_y}\Psi_k, \rho_{\eta,\varepsilon}\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)}\right) + O\left(\varepsilon^n \mathcal{S}_5(\Psi)\right),$$

за све $0 < y < \varepsilon \ll 1$, где је $n \in \mathbb{N}$ произвољно. Помоћу теореме 89 можемо оценити чланове у суми. За $1 \leqslant k \leqslant n-1$ имамо:

$$\langle _{a_y}\Psi_k, \rho_{\eta,\varepsilon}\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)} = \langle \Psi_k, \phi_0\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)} \langle _{a_y}\phi_0, \rho_{\eta,\varepsilon}\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)} + O\left(y^{2-\delta'} \mathcal{S}_2\left(\rho_{\eta,\varepsilon}\right) \mathcal{S}_2\left(\Psi_k\right)\right).$$

Притом је

$$\begin{aligned} &\langle \Psi_k, \phi_0\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)} \langle _{a_y}\phi_0, \rho_{\eta,\varepsilon}\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)} = \\ &= O\left(\langle _{a_y}\phi_0, \rho_{\eta,\varepsilon}\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)} \|\Psi_k\|_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)} \|\phi_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)}\right) = \\ &= O\left(\langle _{a_y}\phi_0, \rho_{\eta,\varepsilon}\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)} \|\Psi_k\|_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)}\right) = \end{aligned}$$

$$= O\left(\langle {}_{a_y}\phi_0, \rho_{\eta,\varepsilon}\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)}\mathcal{S}_1\left(\Psi_k\right)\right) =$$
$$= O\left(\langle {}_{a_y}\phi_0, \rho_{\eta,\varepsilon}\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)}\mathcal{S}_5(\Psi)\right).$$

Из $r_\varepsilon(an^-m) \ll \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ следи $\rho_{\eta,\varepsilon}(n, an^-m) \ll \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. Према дефиницији скупа W_ε имамо да је $a_y n^- m \in W_\varepsilon$ акко је $a_{\frac{y}{2\varepsilon}} n^- m \in W_{\frac{1}{2}}$. Зато приликом сваког диференцирања искаче коефицијент $\frac{1}{2\varepsilon}$. Следи, $\mathcal{S}_2\left(\rho_{\eta,\varepsilon}\right) = O\left(\varepsilon^{-\frac{5}{2}}\right)$.

И слично из теореме 89 следи

$$\langle {}_{a_y}\Psi, \rho_{\eta,\varepsilon}\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)} = \langle \Psi, \phi_0\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)}\langle {}_{a_y}\phi_0, \rho_{\eta,\varepsilon}\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)} + O\left(y^{2-\delta'}\mathcal{S}_2\left(\rho_{\eta,\varepsilon}\right)\mathcal{S}_2(\Psi)\right) =$$
$$= \langle \Psi, \phi_0\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)}\langle {}_{a_y}\phi_0, \rho_{\eta,\varepsilon}\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)} + O\left(y^{2-\delta'}\varepsilon^{-\frac{5}{2}}\mathcal{S}_2(\Psi)\right).$$

Све ово заједно даје оцену

$$I_\eta(\Psi)(a_y) = \langle \Psi, \phi_0\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)}\langle {}_{a_y}\phi_0, \rho_{\eta,\varepsilon}\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)} + O\left(y^{2-\delta'}\varepsilon^{-\frac{5}{2}}\mathcal{S}_2(\Psi)\right) +$$
$$+\sum_{k=1}^{n-1} O\left(\varepsilon^k\langle {}_{a_y}\phi_0, \rho_{\eta,\varepsilon}\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)}\mathcal{S}_5(\Psi)\right) + \sum_{k=1}^{n-1} O\left(\varepsilon^k y^{2-\delta'}\varepsilon^{-\frac{5}{2}}\mathcal{S}_2\left(\Psi_k\right)\right) + O\left(\varepsilon^n\mathcal{S}_5(\Psi)\right) =$$
$$= \langle \Psi, \phi_0\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)}\langle {}_{a_y}\phi_0, \rho_{\eta,\varepsilon}\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)} + O\left(y^{2-\delta'}\mathcal{S}_2\left(\Psi_k\right)\varepsilon^{-\frac{5}{2}}\right) +$$
$$+O\left(\langle {}_{a_y}\phi_0, \rho_{\eta,\varepsilon}\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)}\mathcal{S}_5(\Psi)\varepsilon\right) + O\left(\mathcal{S}_5(\Psi)\varepsilon^n\right) =$$
$$= \langle {}_{a_y}\phi_0, \rho_{\eta,\varepsilon}\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)}\left(\langle \Psi, \phi_0\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)} + O(\varepsilon\mathcal{S}_5(\Psi))\right) + O\left(y^{2-\delta'}\varepsilon^{-\frac{5}{2}}\mathcal{S}_5(\Psi)\right) + O\left(\varepsilon^n\mathcal{S}_5(\Psi)\right).$$

Нека је $\varepsilon_0 > 0$ произвољно. Последица 67 је тврдила да постоји функција η која је једнака 1 на произвољном компактном скупу. Тада смо захтевали да η има вредност 1 на носачу $\operatorname{supp}\Psi$. Према конструкцији $\mathrm{Res}_N\mathcal{P}$ је затворен и ограничен, па самим тим и компактан скуп. Зато $\operatorname{supp}\Psi$ смемо да заменимо ε_0–околином

$$B := \{x \in (\mathcal{A}\cap N)\backslash N \mid \ (\exists y \in \operatorname{supp}\Psi \cup \mathrm{Res}_N\mathcal{P})\ \ |x-y| \leqslant \varepsilon_0\} \Subset (\mathcal{A}\cap N)\backslash N$$

скупа $\operatorname{supp}\Psi \cup \mathrm{Res}_N\mathcal{P}$. Тада је $\overset{\circ}{B}$ једно наткривање скупа $\mathrm{Res}_N\mathcal{P}$. Из теореме 79 следи

$$\phi_0^N(a_y) = \int\limits_{n_x\in B} \phi_0(n_x a_y)dx + O\left(y^\delta\right) = \int\limits_{n_x\in B} \phi_0(n_x a_y)\eta(n_x)dx + O\left(y^\delta\right)$$
$$= \int\limits_{n_x\in(\mathcal{A}\cap N)\backslash N} \phi_0(n_x a_y)\eta(n_x)dx + O\left(y^\delta\right) = I_\eta(\phi_0)(a_y) + O\left(y^\delta\right).$$

Лема 90. *За све* $0 < \varepsilon \ll \varepsilon_0$ *и све* $0 < y < 1$ *важи*

$$\langle {}_{a_y}\phi_0, \rho_{\eta,\varepsilon} \rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)} = c_{\phi_0} y^{2-\delta} + O(y^{2-\delta}\varepsilon) + O\left(y^{\delta}\right).$$

Доказ. Према конструкцији $\rho_{\eta,\varepsilon}$ је $\operatorname{supp} \rho_{\eta,\varepsilon} \subseteq \operatorname{supp} \eta W_\varepsilon \subseteq \operatorname{supp} \eta((\mathcal{A}\cap N)\backslash N)$. Произвољан елемент $g \in \operatorname{supp} \rho_{\eta,\varepsilon}$ се на јединствен начин може представити као $g = nh$, где је $n \in \operatorname{supp} \eta \subseteq (\mathcal{A}\cap N)\backslash N$ и $h = a_{y_0} n_x^- m \in W_\varepsilon$. Следи,

$$\langle {}_{a_y}\phi_0, \rho_{\eta,\varepsilon} \rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)} = \int\limits_{\mathcal{A}\backslash G} \phi_0(ga_y)\rho_{\eta,\varepsilon}(g) d\mu g = \int\limits_{W_\varepsilon} r_\varepsilon(h) \left(\int\limits_{(\mathcal{A}\cap N)\backslash N} \phi_0(nha_y)\eta(n) dn \right) d\check{\mu} h.$$

Оценимо најпре унутрашњи интеграл. Било би добро да та оцена не зависи од h јер знамо да је $\int\limits_{W_\varepsilon} r_\varepsilon(h) d\check{\mu} h = 1$. Зато ће то бити уједно и оцена за $\langle {}_{a_y}\phi_0, \rho_{\eta,\varepsilon} \rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)}$.

Знамо да је

$$nha_y = na_{y_0} n_x^- m a_y = na_{y_0} n_x^- a_y m = na_{y_0} a_y n_{xy}^- m = na_{yy_0} n_{xy}^- m.$$

Притом је $n_{xy}^- \in U_\varepsilon$ јер је $\|n_{xy}^- - E\| = |xy| < \varepsilon_0 y$.

Множење $A \times N \times K \longrightarrow G$ је дифеоморфизам у $\varepsilon_0 y$–околини неутрала, па самим тим и Липшицово[42] пресликавање по прве две промењливе у тој околини. Нека је l већа од Липшицових константи за ово пресликавање. Тада постоје матрице $a_{y_1} \in A \cap U_{l\varepsilon_0 y}$, $n_{x_1} \in N \cap U_{l\varepsilon_0 y}$ и $k_1 \in K$ такве да је $n_{xy}^- = a_{y_1} n_{x_1} k_1$. Следи,

$$nha_y = na_{yy_0} a_{y_1} n_{x_1} k_1 m = na_{yy_0y_1} n_{x_1} k_1 m = nn_{x_1yy_0y_1} a_{yy_0y_1} k_1 m.$$

Сопствена функција ϕ_0 је K–инваријантна, те је $\phi_0(nha_y) = \phi_0(nn_{x_1yy_0y_1} a_{yy_0y_1})$. Како је мера dn N–инваријантна у унутрашњи интеграл можемо увести смену $n \mapsto nn_{x_1yy_0y_1}^{-1} = nn_{-x_1yy_0y_1}$. Добијамо

$$\int\limits_{(\mathcal{A}\cap N)\backslash N} \phi_0(nha_y)\eta(n) dn = \int\limits_{(\mathcal{A}\cap N)\backslash N} \phi_0(na_{yy_0y_1})\eta(nn_{-x_1yy_0y_1}) dn =$$

$$= \int\limits_{(\mathcal{A}\cap N)\backslash N} \phi_0(na_{yy_0y_1})(\eta(n) - (\eta(n) - \eta(nn_{-x_1yy_0y_1}))) dn.$$

Приметимо да је

$$\|n_{-x_1yy_0y_1} - E\| = |-x_1yy_0y_1| < (l\varepsilon_0)^2 \varepsilon y^3 \ll \varepsilon y^3 < \varepsilon.$$

---

[42] Rudolf Otto Sigismund Lipschitz (1832. – 1903.), немачки математичар

Функција η је Липшицова јер има компактан носач. Зато је $\eta(n) - \eta(nn_{-x_1yy_0y_1}) = O(\varepsilon)$. Следи,

$$\int\limits_{(\mathcal{A}\cap N)\backslash N} \phi_0(nha_y)\eta(n)dn = \int\limits_{(\mathcal{A}\cap N)\backslash N} \phi_0(na_{yy_0y_1})(\eta(n)+O(\varepsilon))dn =$$

$$= I_\eta(\phi_0)(a_{yy_0y_1}) + O\left(\varepsilon\phi_0^N(a_{yy_0y_1})\right) = \phi_0^N(a_{yy_0y_1}) + O\left((yy_0y_1)^\delta\right) + O\left(\varepsilon\phi_0^N(a_{yy_0y_1})\right) =$$

$$= \phi_0^N(a_{yy_0y_1})(1+O(\varepsilon)) + O\left((yy_0y_1)^\delta\right) =$$

$$= \left(c_{\phi_0}(yy_0y_1)^{2-\delta} + d_{\phi_0}(yy_0y_1)^\delta\right)(1+O(\varepsilon)) + O\left((yy_0y_1)^\delta\right)$$

према последици 80. Како је $\delta > 1$ и $yy_0y_1 \in (0,1)$ имаћемо $(yy_0y_1)^\delta \ll (yy_0y_1)^{2-\delta}$. Зато се претходна процена своди на

$$c_{\phi_0}(yy_0y_1)^{2-\delta}(1+O(1))(1+O(\varepsilon))+O\left((yy_0y_1)^\delta\right) = c_{\phi_0}(yy_0y_1)^{2-\delta}(1+O(\varepsilon))+O\left((yy_0y_1)^\delta\right).$$

Из $a_{y_1} \in U_{l\varepsilon_0 y}$ следи $|y_1 - 1| \leqslant \|a_{y_1} - E\| < l\varepsilon_0 y$, па је $|y_1|$ ограничено. Одатле и из $a_{y_0} \in U_\varepsilon$ следи

$$|y_0y_1 - 1| = |y_0y_1 - y_1 + y_1 - 1| \leqslant |y_0y_1 - y_1| + |y_1 - 1| =$$

$$= (|y_1| + 1)\,|y_0 - 1| \ll |y_0 - 1| \leqslant \|a_{y_0} - E\| < \varepsilon.$$

То нас даље доводи до

$$y_0y_1 = 1+(y_0y_1-1) = 1+O(\varepsilon) \text{ и } (y_0y_1)^{2-\delta} = (1+O(\varepsilon))^{2-\delta} = 1+O((2-\delta)\varepsilon) = 1+O(\varepsilon).$$

Следи,

$$\langle_{a_y}\phi_0, \rho_{\eta,\varepsilon}\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)} = \int\limits_{(\mathcal{A}\cap N)\backslash N} \phi_0(nha_y)\eta(n)dn =$$

$$= c_{\phi_0}y^{2-\delta}(1+O(\varepsilon))^2 + O\left(y^\delta(1+O(\varepsilon))\right) = c_{\phi_0}y^{2-\delta} + O(y^{2-\delta}\varepsilon) + O\left(y^\delta\right).$$

□

Из ове леме следи

$$I_\eta(\Psi)(a_y) = \left(c_{\phi_0}y^{2-\delta} + O\left(y^{2-\delta}\varepsilon\right) + O\left(y^\delta\right)\right)\left(\langle\Psi,\phi_0\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)} + O(\varepsilon\mathcal{S}_5(\Psi))\right) +$$

$$+O\left(y^{2-\delta'}\varepsilon^{-\frac{5}{2}}\mathcal{S}_5(\Psi)\right) + O\left(\varepsilon^n\mathcal{S}_5(\Psi)\right) =$$

$$= c_{\phi_0}\langle\Psi,\phi_0\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)}y^{2-\delta} + O\left(y^{2-\delta}\varepsilon\mathcal{S}_5(\Psi)\right) + O\left(y^\delta\right) + O\left(y^{2-\delta'}\varepsilon^{-\frac{5}{2}}\mathcal{S}_5(\Psi)\right) + O\left(\varepsilon^n\mathcal{S}_5(\Psi)\right),$$

јер је $O\left(\phi_0^N(a_y)\,\varepsilon\right) = O\left(y^{2-\delta}\varepsilon\right)$ и $\langle\Psi,\phi_0\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)} \leqslant \|\Psi\|_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)}\|\phi_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)} = \|\phi_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)} \leqslant \mathcal{S}_1(\Psi) \leqslant \mathcal{S}_5(\Psi)$.

Једини услов за број ε био је $y < \varepsilon \ll 1$. Сада ћемо изабрати ε тако да сабирци који представљају грешке $y^{2-\delta}\varepsilon$ и $y^{2-\delta'}\varepsilon^{-\frac{5}{2}}$ буду једнаки. Избор

$\varepsilon := y^{\frac{2}{7}(\delta-\delta')}$ је коректан јер је $\frac{2}{7}(\delta-\delta') \leqslant \frac{2}{7}\delta \leqslant \frac{4}{7} < 1$ што повлачи $y < \varepsilon$ за мале y.

Тврдимо да ће грешка

$$O\left(y^{2-\delta}\varepsilon\mathcal{S}_5(\Psi)\right) = O\left(y^{2-\delta'}\varepsilon^{-\frac{5}{2}}\mathcal{S}_5(\Psi)\right) = O\left(y^{2-\delta+\frac{2}{7}(\delta-\delta')}\mathcal{S}_5(\Psi)\right) = O\left(\varepsilon^{\frac{7(2-\delta)}{2(\delta-\delta')}+1}\mathcal{S}_5(\Psi)\right)$$

,,прогутати“ преостале две грешке. Број $n \in \mathbb{N}$ је такође био произвољан. Зато ћемо узети довољно велико n тако да је $\varepsilon^n \ll \varepsilon^{\frac{7(2-\delta)}{2(\delta-\delta')}+1}$, нпр. $n := \left[\frac{7(2-\delta)}{2(\delta-\delta')}\right] + 2$. Да би грешка $O\left(y^{2-\delta+\frac{2}{7}(\delta-\delta')}\mathcal{S}_5(\Psi)\right)$,,прогутала“ $O\left(y^{\delta}\mathcal{S}_5(\Psi)\right)$ потребно је и довољно да је $2-\delta+\frac{2}{7}(\delta-\delta') \leqslant \delta$ или еквивалентно $12\delta+2\delta' \geqslant 14$. Последње следи из $\delta, \delta' \geqslant 1$.

Према конструкцији је $I_\eta(\Psi)(a_y) = \Psi^N(a_y)$. Овим смо доказали следећу теорему:

Теорема 91. *Нека је $\Psi \in C_c^\infty(\mathcal{A}\backslash G)^K$. Тада је*

$$\Psi^N(a_y) = c_{\phi_0}\langle\Psi, \phi_0\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)}y^{2-\delta}\left(1 + O\left(y^{\frac{2}{7}(\delta-\delta')}\mathcal{S}_5(\Psi)\right)\right),$$

за све мале $y > 0$.

Наглашавамо да ова теорема даје оцену која не зависи од $k \in K$ иако нормализација Ψ_k^N функција зависи од параметра k. (Параметар k у индексу смо изостављали само ради поједностављивања нотације.)

Последица 92. *Нека је $\xi \in \mathbb{Z}^4$ корена четворка и $\Psi \in C_c^\infty(\mathcal{A}\backslash G)^K$. Тада је*

$$\langle F_T, \Psi\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)} = \frac{c_{\phi_0}}{\delta\|\xi\|_\infty^\delta}\langle\Psi, \phi_0\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)}T^\delta\left(1 + O\left(T^{\frac{2}{7}(\delta'-\delta)}\mathcal{S}_5(\Psi)\right)\right),$$

кад $T \to +\infty$.

Доказ. Из претходне теореме и теореме 61 следи

$$\langle F_T, \Psi\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)} = \int\limits_{M\backslash K}\int\limits_{\frac{\|\xi k\|_\infty}{T}}^{+\infty}\Psi_k^N(a_y)\frac{1}{y^3}dydk =$$

$$= \int\limits_{M\backslash K}\int\limits_{\frac{\|\xi k\|_\infty}{T}}^{+\infty}c_{\phi_0}\langle\Psi, \phi_0\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)}y^{-1-\delta}\left(1 + O\left(y^{\frac{2}{7}(\delta-\delta')}\mathcal{S}_5(\Psi)\right)\right)dydk =$$

$$= \int\limits_{M\backslash K}\frac{1}{-\delta}c_{\phi_0}\langle\Psi, \phi_0\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)}y^{-\delta}\left(1 + O\left(y^{\frac{2}{7}(\delta-\delta')}\mathcal{S}_5(\Psi)\right)\right)\Bigg|_{y=\frac{\|\xi k\|_\infty}{T}}^{+\infty}dk =$$

$$= \int\limits_{M\backslash K} \frac{c_{\phi_0}}{\delta} \langle \Psi, \phi_0 \rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)} \left(\frac{T}{\|\xi k\|_\infty} \right)^{\delta} \left(1 + O\left(\left(\frac{\|\xi k\|_\infty}{T} \right)^{\frac{2}{7}(\delta - \delta')} \mathcal{S}_5(\Psi) \right) \right) dk.$$

Матрица k припада $K = SU_2(\mathbb{C})$ па поред хиперболичког чува и еуклидско растојање у $\overline{\mathbb{C}}$. Зато k чува полупречнике, па самим тим и кривине кругова. Следи, k чува Декартове четворке, па специјално и корену четворку ξ. Помоћу једнакости $\|\xi k\|_\infty = \|\xi\|_\infty \ll 1$ претходни интеграл се своди на

$$\frac{c_{\phi_0}}{\delta} \langle \Psi, \phi_0 \rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)} \left(\frac{T}{\|\xi\|_\infty} \right)^{\delta} \mu(M\backslash K) \left(1 + O\left(T^{\frac{2}{7}(\delta' - \delta)} \mathcal{S}_5(\Psi) \right) \right).$$

Чинилац $\mu(M\backslash K)$ нестаје јер је мера μ (на $M\backslash K$) вероватносна. ☐

Причу о скаларном производу смо покренули мотивисани тврђењем 59 које је захтевало оцену $\langle F_{(1\pm\varepsilon)T}, \Phi_\varepsilon \rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)}$. Сада смо коначно у могућности да оценимо тај скаларни производ:

$$\langle F_{(1\pm\varepsilon)T}, \Phi_\varepsilon \rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)} =$$

$$= \frac{c_{\phi_0}}{\delta \|\xi\|_\infty^\delta} \langle \Phi_\varepsilon, \phi_0 \rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)} ((1 \pm \varepsilon)T)^{\delta} \left(1 + O\left(((1 \pm \varepsilon)T)^{\frac{2}{7}(\delta' - \delta)} \mathcal{S}_5(\Phi_\varepsilon) \right) \right) =$$

$$= \frac{c_{\phi_0}}{\delta \|\xi\|_\infty^\delta} \langle \Phi_\varepsilon, \phi_0 \rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)} T^{\delta} (1 + O(\varepsilon)) \left(1 + O\left(T^{\frac{2}{7}(\delta' - \delta)} \mathcal{S}_5(\Phi_\varepsilon) \right) \right).$$

Норма Собољева језгра $\mathcal{S}_5(\Phi_\varepsilon) = \mathcal{S}_5(\phi_\varepsilon)$ се може проценити као $O\left(\varepsilon^{-q}\right)$, за неко (довољно велико) $q > 0$.

Остаје још да се оцени $\langle \Phi_\varepsilon, \phi_0 \rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)}$. Знамо да је $\operatorname{supp} \Phi_\varepsilon \subseteq U_\varepsilon$ и $\int\limits_G \Phi_\varepsilon d\mu = 1$. Природно је очекивати да $\langle \Phi_\varepsilon, \phi_0 \rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)} \to \phi_0(e)$, кад $\varepsilon \to 0+$, проценимо разлику:

$$\left| \langle \Phi_\varepsilon, \phi_0 \rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)} - \phi_0(e) \right| = \left| \int\limits_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)} \Phi_\varepsilon(g) \phi_0(g) dg - \phi_0(e) \int\limits_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)} \Phi_\varepsilon(g) dg \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)} \left| (\phi_0(g) - \phi_0(e)) \Phi_\varepsilon(g) \right| dg = \int\limits_{U_\varepsilon} \left| \phi_0(g) - \phi_0(e) \right| \Phi_\varepsilon(g) dg.$$

Основна сопствена функција ϕ_0 је двапут диференцијабилна, па је специјално и Липшицова. Следи,

$$\left| \langle \Phi_\varepsilon, \phi_0 \rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)} - \phi_0(e) \right| \ll \varepsilon \int\limits_{U_\varepsilon} \Phi_\varepsilon(g) dg = \varepsilon.$$

Све заједно даје процену

$$\langle F_{(1\pm\varepsilon)T}, \Phi_\varepsilon \rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)} =$$

$$= \frac{c_{\phi_0}}{\delta\|\xi\|_\infty^\delta} T^\delta (1+O(\varepsilon))\,(\phi_0(e)+O(\varepsilon))\left(1+O\left(T^{\frac{2}{7}(\delta'-\delta)}\varepsilon^{-q}\right)\right) =$$

$$= \frac{c_{\phi_0}}{\delta\|\xi\|_\infty^\delta} T^\delta \left(\phi_0(e)+O(\varepsilon)+O\left(T^{\frac{2}{7}(\delta'-\delta)}\varepsilon^{-q}\right)\right) =$$

$$= \frac{c_{\phi_0}\phi_0(e)}{\delta\|\xi\|_\infty^\delta} T^\delta \left(1+O(\varepsilon)+O\left(T^{\frac{2}{7}(\delta'-\delta)}\varepsilon^{-q}\right)\right),$$

при чему је мало $\varepsilon > 0$ и даље произвољно. Изабраћемо ε тако грешке $O(\varepsilon)$ и $O\left(T^{\frac{2}{7}(\delta'-\delta)}\varepsilon^{-q}\right)$ буду исте. Избор $\varepsilon := T^{\frac{2(\delta'-\delta)}{7(q+1)}}$ је добар јер је експонент негативан (због $\delta' < \delta$) па $\varepsilon \to 0+$ кад $T \to +\infty$. Овим грешка постаје $O\left(T^{-\varepsilon'}\right)$, при чему је број $\varepsilon' := -\left(\frac{2}{7}(\delta'-\delta) - q\frac{2(\delta'-\delta)}{7(q+1)}\right) = \frac{2(\delta-\delta')}{7(q+1)}$ позитиван. Следи,

$$\langle F_{(1\pm\varepsilon)T}, \Phi_\varepsilon\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)} = \frac{c_{\phi_0}\phi_0(e)}{\delta\|\xi\|_\infty^\delta} T^\delta \left(1+O\left(T^{-\varepsilon'}\right)\right).$$

Из претходне приче и тврђења 59 следи:

Теорема 93. *Нека је $\mathcal{P}$ Аполонијева конфигурација са кореном четворком ξ. Постоји $\varepsilon > 0$ такво да је*

$$N^{\mathcal{P}}(T) = \frac{c_{\phi_0}\phi_0(e)}{\delta\|\xi\|_\infty^\delta} T^\delta \left(1+O\left(T^{-\varepsilon}\right)\right),$$

кад $T \to +\infty$.

Теорему 93 смо доказали под претпоставком да је Аполонијева конфигурација $\mathcal{P}$ ограничена или једнака $\mathcal{P}_0$. Претпоставку да је корена четворка примитивна користили смо суштински само у теореми 79 и само у случају неограничене конфигурације. Нека је сада $\mathcal{P}$ произвољна неограничена Аполонијева конфигурација са кореном четворком ξ. Постоји Мебијусова трансформација $g = na_y m \in G$ таква да је $\mathcal{P} = \mathcal{P}_0 g$. Тада је $\xi = y\xi_0$, где је $\xi_0 = (1,1,0,0)$ корена четворка конфигурације $\mathcal{P}_0$, и

$$N^{\mathcal{P}}(T) = N^{\mathcal{P}_0}(yT) = \frac{c_{\phi_0}\phi_0(e)}{\delta\|y\xi\|_\infty^\delta}(yT)^\delta \left(1+O\left((yT)^{-\varepsilon}\right)\right) = \frac{c_{\phi_0}\phi_0(e)}{\delta\|\xi\|_\infty^\delta} T^\delta \left(1+O\left(T^{-\varepsilon}\right)\right).$$

Дакле, теорема 93 важи за произвољну Аполонијеву конфигурацију.

Последица 94. *Нека је $\mathcal{P}$ Аполонијева конфигурација са кореном четворком ξ. Постоји $\varepsilon > 0$ такво да је*

$$N_2^{\mathcal{P}}(T) = \frac{3c_{\phi_0}\phi_0(e)}{\delta\|\xi\|_\infty^\delta} T^\delta \left(1+O\left(T^{-\varepsilon}\right)\right),$$

кад $T \to +\infty$.

Доказ. Следи из тврђења 54 и теореме 93. □

Ове две оцене се често срећу и у нешто слабијем облику:

Последица 95. $\lim\limits_{T\to+\infty} \frac{\log N^{\mathcal{P}}(T)}{\log T} = \lim\limits_{T\to+\infty} \frac{\log N_2^{\mathcal{P}}(T)}{\log T} = \delta.$

ГЛАВА 8

ПРОСТИ КРУГОВИ И ПРОСТИ КРУГОВИ БЛИЗАНЦИ

У претходној глави смо видели да је $N^{\mathcal{P}}(T) \sim N_2^{\mathcal{P}}(T) \sim cT^{\delta}$, где је c константа из теореме 93. Одатле тривијално добијамо горње границе $\pi^{\mathcal{P}}(T) \ll T^{\delta}$ и $\pi_2^{\mathcal{P}}(T) \ll T^{\delta}$. Наравно, ово није најбоља могућа процена. Интуитивно, међу кривинама има више сложених него простих бројева, па треба очекивати да $\pi^{\mathcal{P}}$ и $\pi_2^{\mathcal{P}}$ имају мањи асимптотски ред од $N^{\mathcal{P}}$ и $N_2^{\mathcal{P}}$. У овој глави ћемо извести прецизније процене коришћењем решета за ,,просејавање" простих бројева.

8.1 Селбергово решето

Као што смо већ рекли, мотивација за оцену функција $\pi^{\mathcal{P}}$ и $\pi_2^{\mathcal{P}}$ долази из процене њихових аналогона над $\mathbb{Z}$. Основни алат за доказ теореме 51 је *Селбергово*[43] *решето* ([4], теорема 2.14.). Поред тога, Селбергово решето се користи и за многе друге проблеме везане за просте бројеве, нпр. за асимптотику Ојлерове[44] функције φ или функције која броји просте бројеве у аритметичкој прогресији.

---

[43] Atle Selberg (1917. – 2007.), норвешки математичар

[44] Leonhard Euler (1707. – 1783.), швајцарски математичар, астроном, логичар и инжењер

Зато је природно користити Селбергово решето и за процену наших функција $\pi^{\mathcal{P}}$ и $\pi_2^{\mathcal{P}}$. Овде излажемо један специјалан случај Селберговог решета, довољан за поменуте процене. Користићемо следеће мултипликативне функције

$$\mathbb{1}(n)=1, \quad \delta(n)=\begin{cases} 1, & n=1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}, \quad \mu(n)=\begin{cases} (-1)^{\omega(n)}, & n \text{ бесквадратан} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases},$$

где $\omega(n)$ означава број простих делиоца броја n. Функцију δ зовемо *детектор јединице*, а функцију μ *Мебијусова функција.* Поред ових функција требаће нам и *Дирихлеова*[45] *конволуција* мултипликативних функција $(f * g)(n) := \sum\limits_{d|n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right)$.

Теорема 96. (Селберг) *Нека је a_n низ ненегативних реалних бројева, $\mathcal{X}$ позитиван реалан број, P производ различитих простих бројева и g мултипликативна функција на скупу $S := \{d \in \mathbb{N} \mid P \equiv_d 0\}$ такви да је*

$$\sum_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ d|n}} a_n \ll \mathcal{X} g(d),$$

за све природне бројеве $d|P$. Тада је

$$\sum_{\text{нзд}(n,P)=1} a_n \ll \frac{\mathcal{X}}{\sum\limits_{d|P} h(d)},$$

где је h мултипликативна функција на S задата на простим бројевима $p \in S$ са $h(p)=\frac{g(p)}{1-g(p)}$.

Доказ. Нека је ρ_n низ реалних бројева, такав је $\rho_1 = 1$ и $\rho_n = 0$, за $n \nmid P$. Остале ρ_n–ове (којих је само коначно много) ћемо изабрати накнадно. Приметимо је $\left(\sum\limits_{d|\text{ нзд}(n,P)} \rho_d\right)^2 \geqslant 0$, при чему претходни квадрат има вредност 1 када су бројеви n и P узајамно прости. Следи,

$$\sum_{\text{нзд}(n,P)=1} a_n \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \left(\sum_{d|\text{ нзд}(n,P)} \rho_d\right)^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \sum_{d_1,d_2|\text{ нзд}(n,P)} \rho_{d_1}\rho_{d_2} =$$

$$= \sum_{d_1,d_2|P} \rho_{d_1}\rho_{d_2} \sum_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ d_1,d_2|n}} a_n = \sum_{d_1,d_2|P} \rho_{d_1}\rho_{d_2} \sum_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ \text{НЗС}(d_1,d_2)|n}} a_n \ll$$

$$\ll \sum_{d_1,d_2|P} \rho_{d_1}\rho_{d_2} \mathcal{X} g(\text{НЗС}(d_1,d_2)) = \mathcal{X} \sum_{d_1,d_2|P} \rho_{d_1}\rho_{d_2} g(\text{НЗС}(d_1,d_2)).$$

---

[45] Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805. – 1859.), француско – немачки математичар

Сад треба проценити ову суму. Увешћемо смену $a = \text{НЗС}(d_1, d_2)$, $b = \frac{d_1}{a}$ и $c = \frac{d_2}{a}$. Услов $d_1, d_2 | P$, тј. $\text{НЗС}(d_1, d_2)|P$ је еквивалентан са $abc|P$. Претходна сума се своди на

$$\sum_{abc|P} \rho_{ab}\rho_{ac} g(abc) = \sum_{abc|P} \rho_{ab}\rho_{ac} g(a)g(b)g(c)$$

Како су b и c узајамно прости, услов $abc|P$ је еквивалентан са $ab, ac|P$ и може се изоставити јер је у супротном $\rho_{ab}\rho_{ac} = 0$. Зато је наша сума једнака

$$\sum_{\substack{a,b,c\in\mathbb{N}\\ \text{НЗД}(b,c)=1}} \rho_{ab}\rho_{ac} g(a)g(b)g(c) =$$

$$= \sum_{a=1}^{\infty} g(a) \sum_{\text{НЗД}(b,c)=1} \rho_{ab}\rho_{ac} g(b)g(c) =$$

$$= \sum_{a=1}^{\infty} g(a) \sum_{b,c=1}^{\infty} \rho_{ab}\rho_{ac} g(b)g(c)\delta(\text{НЗД}(b,c)) =$$

$$= \sum_{a=1}^{\infty} g(a) \sum_{b,c=1}^{\infty} \rho_{ab}\rho_{ac} g(b)g(c)(\mu * \mathbb{1})(\text{НЗД}(b,c)) =$$

$$= \sum_{a=1}^{\infty} g(a) \sum_{b,c=1}^{\infty} \rho_{ab}\rho_{ac} g(b)g(c) \sum_{k|\,\text{НЗД}(b,c)} \mu(k) =$$

$$= \sum_{a=1}^{\infty} g(a) \sum_{b,c=1}^{\infty} \rho_{ab}\rho_{ac} g(b)g(c) \sum_{k|b,c} \mu(k) =$$

$$= \sum_{a=1}^{\infty} g(a) \sum_{k=1}^{\infty} \mu(k) \sum_{m,n=1}^{\infty} \rho_{akm}\rho_{akn} g(km)g(kn) =$$

$$= \sum_{a=1}^{\infty} g(a) \sum_{k=1}^{\infty} \mu(k) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \rho_{akn} g(kn)\right)^2 =$$

$$= \sum_{a=1}^{\infty} \frac{1}{g(a)} \sum_{k=1}^{\infty} \mu(k) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \rho_{akn} g(a)g(kn)\right)^2 =$$

$$= \sum_{a=1}^{\infty} \frac{1}{g(a)} \sum_{k=1}^{\infty} \mu(k) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \rho_{akn} g(akn)\right)^2 .$$

јер је $\rho_{akn} \neq 0$ само ако су a и kn узајамно прости и деле P, а функција g је мултипликативна на скупу S. Сменом $d = ak$ претходна сума се своди на

$$\sum_{d=1}^{\infty} \sum_{a|d} \frac{1}{g(a)} \mu\left(\frac{d}{a}\right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \rho_{dn} g(dn)\right)^2 =$$

$$= \sum_{d=1}^{\infty} \left(\frac{1}{g} * \mu\right)(d) \left(\sum_{\substack{n \\ d|n}} \rho_n g(n)\right)^2 =$$

$$= \sum_{d|P} \left(\frac{1}{g} * \mu\right)(d) \left(\sum_{\substack{n \\ d|n}} \rho_n g(n)\right)^2 ,$$

јер $d \nmid P$ повлачи $n \nmid P$ па су сви сабирци у другој суми нуле. Функција g је мултипликативна на скупу S па су такве и функције $\frac{1}{g}$ и $\frac{1}{g} * \mu$. Зато је довољно одредити само вредности $\frac{1}{g} * \mu$ на простим бројевима. Оне износе

$$\left(\frac{1}{g} * \mu\right)(p) = \sum_{d|p} \frac{\mu\left(\frac{p}{d}\right)}{g(d)} = \frac{\mu(p)}{g(1)} + \frac{\mu(1)}{g(p)} = \frac{1}{g(p)} - 1 = \frac{1 - g(p)}{g(p)} = \frac{1}{h(p)}.$$

Следи, $\frac{1}{g} * \mu = \frac{1}{h}$ на целом скупу S. Зато наша сума постоје

$$\sum_{d|P} \frac{1}{h(d)} \left(\sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ d|n}} \rho_n g(n)\right)^2 =$$

$$= \sum_{d|P} \frac{1}{h(d)} (\mu(d))^2 \left(\sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ d|n}} \rho_n g(n)\right)^2 =$$

$$= \sum_{d|P} \frac{1}{h(d)} \left(\mu(d) \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ d|n}} \rho_n g(n)\right)^2 ,$$

јер је $(\mu(d))^2 = 1$ за бесквадратан број $d|P$.

Следећи циљ нам је да минимализујемо суму $\sum\limits_{d|P} \frac{(\lambda(d))^2}{h(d)}$, где је $\lambda(d) =: \mu(d) \sum\limits_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ d|n}} \rho_n g(n)$. Веза $\lambda(d)$ и ρ_d је следећа. Нека је $F(d) := \begin{cases} \frac{\lambda(d)}{\mu(d)}, & d|P \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$. Приметимо да у оба случаја важи $F(d) = \sum\limits_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ d|n}} \rho_n g(n) = \sum\limits_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ d|n}} \rho_n g(n) \mathbb{1}\left(\frac{n}{d}\right)$. Мебијусова формула инверзије даје

$$\rho_d g(d) = \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ d|n}} F(n) \mu\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{\substack{n|P \\ d|n}} \frac{\lambda(n)}{\mu(n)} \mu\left(\frac{n}{d}\right).$$

За $n|P$ из $\mu(d)\mu\left(\frac{n}{d}\right) = \mu\left(d\frac{n}{d}\right) = \mu(n)$ следи $\frac{1}{\mu(n)}\mu\left(\frac{n}{d}\right) = \frac{1}{\mu(d)} = \mu(d)$. Зато је

$$\rho_d = \frac{1}{g(d)} \sum_{\substack{n|P \\ d|n}} \lambda(n)\mu(d) = \frac{\mu(d)}{g(d)} \sum_{\substack{n|P \\ d|n}} \lambda(n).$$

Специјално,

$$1 = \rho_1 = \frac{\mu(1)}{g(1)} \sum_{\substack{n|P \\ 1|n}} \lambda(n) = \sum_{n|P} \lambda(n).$$

Основна идеја је била да се минимализује сума $\sum\limits_{d|P} \frac{(\lambda(d))^2}{h(d)}$. Кошијева неједнакост даје

$$\sum_{d|P} \frac{(\lambda(d))^2}{h(d)} \sum_{d|P} h(d) = \sum_{d|P} \left(\frac{\lambda(d)}{\sqrt{h(d)}} \right)^2 \sum_{d|P} \left(\sqrt{h(d)} \right)^2 \geqslant$$

$$\geqslant \left(\sum_{d|P} \frac{\lambda(d)}{\sqrt{h(d)}} \sqrt{h(d)} \right)^2 = \left(\sum_{d|P} \lambda(d) \right)^2 = 1^2 = 1.$$

Зато је наша сума $\sum\limits_{d|P} \frac{(\lambda(d))^2}{h(d)}$ сигурно већа или једнака $\frac{1}{\sum\limits_{d|P} h(d)}$. Једнакост у Кошијевој неједнакости се достиже када су сабирци пропорционални. Зато треба изабрати ρ_d–ове тако да буде $\frac{\lambda(d)}{\sqrt{h(d)}} = c\sqrt{h(d)}$ тј. $\lambda(d) = ch(d)$, за неку константу c. Или еквивалентно $\rho_d = \frac{c\mu(d)}{g(d)} \sum\limits_{\substack{n|P \\ d|n}} h(n)$. Како је једини услов за ρ_d–ове био $\rho_1 = 1$, овакав избор је могућ за $c := \frac{1}{\sum\limits_{n|P} h(n)}$. Овим смо добили горњу границу $\sum\limits_{\text{НЗД}(n,P)=1} a_n \ll \frac{\mathcal{X}}{\sum\limits_{d|P} h(d)}$. □

8.2 Број простих кругова и простих кругова близанаца

Нека је $\mathcal{P}$ Аполонијева конфигурација са кореном четворком $\xi \in \mathbb{Z}^4$. Сматраћемо да је корена четворка ξ примитивна. Један разлог је што у супротном знамо тачну вредност функција $\pi^{\mathcal{P}}$ и $\pi_2^{\mathcal{P}}$, па нам процена и није потребна. Други разлог је што ћемо користити неке ствари из претходне главе које смо доказали под овом претпоставком (само у случају неограничене конфигурације).

Показали смо (тврђење 55)

$$\pi^{\mathcal{P}}(T) \ll \sum_{i=1}^{4} \#\{\kappa = (\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4) \in \xi\mathcal{A} \mid \|\kappa\|_\infty < T,\ \kappa_i \text{ је прост}\},$$

$$\pi_2^{\mathcal{P}}(T) \ll \sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant 4\\ i\neq j}} \#\{\kappa = (\kappa_1,\kappa_2,\kappa_3,\kappa_4) \in \xi\mathcal{A} \mid \|\kappa\|_\infty < T,\ \kappa_i \text{ и } \kappa_j \text{ су прости}\},$$

кад $T \to +\infty$. Као што смо већ рекли у четвртој глави, кључна разлика у односу на број $N^{\mathcal{P}}$ је што овде не бројимо кругове кривине мање од T, већ бројеве који могу да се јаве као кривине. То смо смели да урадимо јер је стабилизатор $\mathcal{A}_\xi$ коначан.

Приметимо да је довољно проценити по један сабирак (нпр. први) у (коначној) суми. Тада се остали сабирци оцењују аналогно, па ће процена првог сабирка бити уједно и процена читаве суме.

Нека је $P = P(T)$ производ свих различитих простих бројева мањих од T. Тада је број $\kappa_1 \leqslant \|\kappa\|_\infty < T$ прост акко је узајамно прост са P. Следи,

$$\pi^{\mathcal{P}}(T) \ll \#\{\kappa \in \xi\mathcal{A} \mid \|\kappa\|_\infty < T,\ \text{НЗД}(\kappa_1, P) = 1\} =$$

$$= \sum_{\substack{A\in\mathcal{A}_\xi\backslash\mathcal{A}\\ \text{НЗД}((\xi A)_1,P)=1}} \chi_{B_T}(\xi A) = \sum_{\substack{A\in\mathcal{A}_\xi\backslash\mathcal{A}\\ \text{НЗД}(f_1(\xi A),P)=1}} \chi_{B_T}(\xi A),$$

$$\pi_2^{\mathcal{P}}(T) \ll \#\{\kappa \in \xi\mathcal{A} \mid \|\kappa\|_\infty < T,\ \text{НЗД}(\kappa_1, P) = 1,\ \text{НЗД}(\kappa_1, P) = 1\} =$$

$$\#\{\kappa \in \xi\mathcal{A} \mid \|\kappa\|_\infty < T,\ \text{НЗД}(\kappa_1\kappa_2, P) = 1\} =$$

$$= \sum_{\substack{A\in\mathcal{A}_\xi\backslash\mathcal{A}\\ \text{НЗД}((\xi A)_1(\xi A)_2,P)=1}} \chi_{B_T}(\xi A) = \sum_{\substack{A\in\mathcal{A}_\xi\backslash\mathcal{A}\\ \text{НЗД}(f_2(\xi A),P)=1}} \chi_{B_T}(\xi A),$$

где су $f_1(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1$ и $f_2(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1x_2$.

Овим смо проблем свели на оцењивање $F'_T(E)$, где је $F'_T(g) = \sum_{\substack{A\in\mathcal{A}_\xi\backslash\mathcal{A}\\ \text{НЗД}(f(\xi A),P)=1}} \chi_{B_T}(\xi A g)$, за $f \in \{f_1, f_2\}$ (или општије за $f \in \mathbb{Z}[x_1,x_2,x_3,x_4]$). Бројачка функција F'_T подсећа на $F_T(E)$ и може се оценити (одозго) на исти начин као F_T у тврђењу 54. Једина разлика је што функција F'_T није $\mathcal{A}$–инваријантна па не можемо користити усредњено језгро Φ_ε на $\mathcal{A}\backslash G$ већ обично језгро ϕ_ε на G. Добили бисмо

$$F'_T(E) \leqslant \langle F'_{(1+\varepsilon)T}, \phi_\varepsilon \rangle_{\mathcal{L}^2(G)} =$$

$$= \int_G F'_{(1+\varepsilon)T}(E)\phi_\varepsilon(g)d\mu g =$$

$$= \int_G \sum_{\substack{A\in\mathcal{A}_\xi\backslash\mathcal{A}\\ \text{НЗД}(f(\xi A),P)=1}} \chi_{B_{(1+\varepsilon)T}}(\xi A g)\phi_\varepsilon(g)d\mu g =$$

$$= \sum_{\substack{A\in\mathcal{A}_\xi\backslash\mathcal{A}\\ \text{НЗД}(f(\xi A),P)=1}} \int_G \chi_{B_{(1+\varepsilon)T}}(\xi A g)\phi_\varepsilon(g)d\mu g =$$

$$= \sum_{\text{нзд}(n,P)=1} a_n((1+\varepsilon)T),$$

за мале $\varepsilon > 0$, где је $a_n(T) := \sum\limits_{\substack{A\in\mathcal{A}_\xi\backslash\mathcal{A}\\ f(\xi A)=n}} \int\limits_G \chi_{B_T}(\xi A g)\phi_\varepsilon(g)d\mu g$.

Последњу суму ћемо проценити помоћу Селберговог решета. За примену Селбергове теореме нам је прво потребна процена конгруентних сума. Да бисмо разумели ове суме уводимо конгруентне подгрупе Аполонијеве групе.

8.3 Главне конгруентне подгрупе Аполонијеве групе

На самом крају друге главе смо констатовали да је $M\ddot{o}b^*(\mathbb{C}) \cong \mathcal{O}_Q(\mathbb{R})$, где је Q Декартова квадратна форма. Додатно, приликом те реализације групе $M\ddot{o}b^*(\mathbb{C})$ генератори Аполонијеве групе су имали целобројне коефицијенте. Зато је $\mathcal{A} \leqslant \mathcal{O}_Q(\mathbb{Z})$, па следећа дефиниција има смисла.

Дефиниција 97. *(1) Нека је d бесквадратан природан број. Подгрупу $\mathcal{A}(d) := \{A \in \mathcal{A} \mid A \equiv_d E\} \leqslant \mathcal{A}$ зовемо главна конгруентна подгрупа Аполонијеве групе степена d.*

(2) Нека је d бесквадратан број и $\xi \in \mathbb{Z}^4$ Декартова четворка. Подгрупу $\mathcal{A}_\xi(d) := \{A \in \mathcal{A} \mid \xi A \equiv_d \xi\} \leqslant \mathcal{A}$ зовемо главна конгруентна подгрупа Аполонијеве групе степена d која стабилизује ξ.

Овде се, наравно, мисли на конгруенције по свим координатама у $GL_4(\mathbb{Z})$, односно $\mathbb{Z}^4$. Тривијално је $\mathcal{A}(1) = \mathcal{A}_\xi(1) = \mathcal{A}$, за све ξ. Имамо ланце подгрупа $\mathcal{A}(d), \mathcal{A}_\xi \leqslant \mathcal{A}_\xi(d) \leqslant \mathcal{A}$, при чему су индекси $[\mathcal{A}_\xi(d) : \mathcal{A}(d)]$, $[\mathcal{A} : \mathcal{A}_\xi(d)]$ и $[\mathcal{A} : \mathcal{A}(d)]$ коначни (и мањи или једнаки d^4, d^4, d^{16}, редом).

Нека је $A_1 \in \mathcal{A}$, $d \in \mathbb{N}$ бесквадратан и $\Gamma \leqslant \mathcal{A}$. Дефинишемо функције (на $\Gamma\backslash G$):

$$F_T^\Gamma(g) := \sum_{A\in\Gamma_\xi\backslash\Gamma} \chi_{B_T}(\xi A g) \quad \text{и} \quad \Phi^\Gamma_{\varepsilon,A_1}(g) := \sum_{A\in\Gamma} \phi_\varepsilon(A_1^{-1}Ag).$$

Стабилизатор $\mathcal{A}_\xi(d)_\xi$ елемента ξ у групи $\mathcal{A}_\xi(d)$ је једнак стабилизатору $\mathcal{A}_\xi$ за свако d. Зато је $F_T^{\mathcal{A}(d)}(g) := \sum\limits_{A\in\mathcal{A}_\xi\backslash\mathcal{A}(d)} \chi_{B_T}(\xi A g)$.

Лема 98. *Нека је $d \in \mathbb{N}$ бесквадратан и $0 < \varepsilon \ll 1$. Важи*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(T) = \left\langle F_T^{\mathcal{A}}, \Phi_{\varepsilon,E}^{\mathcal{A}} \right\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)} \quad \text{и} \quad \sum_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ d|n}} a_n(T) = \sum_{\substack{A_1\in\mathcal{A}_\xi(d)\backslash\mathcal{A}\\ d|f(\xi A_1)}} \left\langle F_T^{\mathcal{A}_\xi(d)}, \Phi_{\varepsilon,A_1}^{\mathcal{A}_\xi(d)} \right\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}_\xi(d)\backslash G)}.$$

Доказ. Како је $(\xi\mathcal{A})_1 > 0$ (сем у случају када је круг права, а таквих има највише 2, што је занемарљиво) имамо

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(T) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{A\in\mathcal{A}_\xi\backslash\mathcal{A}\\ f(\xi A)=n}} \int\limits_G \chi_{B_T}(\xi A g)\phi_\varepsilon(g) d\mu g =$$

$$= \sum_{A\in\mathcal{A}_\xi\backslash\mathcal{A}} \int\limits_G \chi_{B_T}(\xi A g)\phi_\varepsilon(g) d\mu g =$$

$$= \int\limits_G \sum_{A\in\mathcal{A}_\xi\backslash\mathcal{A}} \chi_{B_T}(\xi A g)\phi_\varepsilon(g) d\mu g =$$

$$= \int\limits_G F_T^{\mathcal{A}}(g)\phi_\varepsilon(g) d\mu g =$$

$$= \int\limits_{\mathcal{A}\backslash G} \sum_{A\in\mathcal{A}} F_T^{\mathcal{A}}(Ag)\phi_\varepsilon(Ag) d\mu g =$$

$$= \int\limits_{\mathcal{A}\backslash G} F_T^{\mathcal{A}}(g) \sum_{A\in\mathcal{A}} \phi_\varepsilon(Ag) d\mu g =$$

$$= \int\limits_{\mathcal{A}\backslash G} F_T^{\mathcal{A}}(g)\Phi_{\varepsilon,E}^{\mathcal{A}}(g) d\mu g = \left\langle F_T^{\mathcal{A}}, \Phi_{\varepsilon,E}^{\mathcal{A}} \right\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash G)}.$$

Нека је сада $d \in \mathbb{N}$, имамо

$$\sum_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ d|n}} a_n(T) = \sum_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ d|n}} \sum_{\substack{A\in\mathcal{A}_\xi\backslash\mathcal{A}\\ f(\xi A)=n}} \int\limits_G \chi_{B_T}(\xi A g)\phi_\varepsilon(g) d\mu g = \sum_{\substack{A\in\mathcal{A}_\xi\backslash\mathcal{A}\\ d|f(\xi A)}} \int\limits_G \chi_{B_T}(\xi A g)\phi_\varepsilon(g) d\mu g.$$

Како је $\mathcal{A}_\xi \leqslant \mathcal{A}_\xi(d) \leqslant \mathcal{A}$ сваки елемент $\mathcal{A}_\xi\backslash\mathcal{A}$ се може разложити као AA_1, где је $A \in \mathcal{A}_\xi\backslash\mathcal{A}_\xi(d)$ и $A_1 \in \mathcal{A}_\xi(d)\backslash\mathcal{A}$. Из $\xi A \equiv_d \xi$ следи $\xi A_1 A \equiv_d \xi A_1$ и $f(\xi A_1 A) \equiv_d f(\xi A_1)$. Тиме се претходни израз своди на

$$\sum_{\substack{A_1\in\mathcal{A}_\xi(d)\backslash\mathcal{A}\\ d|f(\xi A_1)}} \sum_{A\in\mathcal{A}_\xi\backslash\mathcal{A}_\xi(d)} \int\limits_G \chi_{B_T}(\xi A A_1 g)\phi_\varepsilon(g) d\mu g.$$

Унутрашња сума је једнака

$$\sum_{A\in\mathcal{A}_\xi\setminus\mathcal{A}_\xi(d)}\int\limits_G \chi_{B_T}(\xi A A_1 g)\phi_\varepsilon(g)d\mu g =$$

$$= \sum_{A\in\mathcal{A}_\xi\setminus\mathcal{A}_\xi(d)}\int\limits_G \chi_{B_T}(\xi A g)\phi_\varepsilon(A_1^{-1}g)d\mu g =$$

$$= \int\limits_G \sum_{A\in\mathcal{A}_\xi\setminus\mathcal{A}_\xi(d)} \chi_{B_T}(\xi A g)\phi_\varepsilon(A_1^{-1}g)d\mu g =$$

$$= \int\limits_G F_T^{\mathcal{A}_\xi(d)}(g)\phi_\varepsilon(A_1^{-1}g)d\mu g =$$

$$= \int\limits_{\mathcal{A}_\xi(d)\setminus G} \sum_{A\in\mathcal{A}_\xi(d)} F_T^{\mathcal{A}_\xi(d)}(Ag)\phi_\varepsilon(A_1^{-1}Ag)d\mu g =$$

$$= \int\limits_{\mathcal{A}_\xi(d)\setminus G} F_T^{\mathcal{A}_\xi(d)}(g) \sum_{A\in\mathcal{A}_\xi(d)} \phi_\varepsilon(A_1^{-1}Ag)d\mu g =$$

$$= \int\limits_{\mathcal{A}_\xi(d)\setminus G} F_T^{\mathcal{A}_\xi(d)}(g)\Phi_{\varepsilon,A_1}^{\mathcal{A}_\xi(d)}(g)d\mu g =$$

$$= \left\langle F_T^{\mathcal{A}_\xi(d)}, \Phi_{\varepsilon,A_1}^{\mathcal{A}_\xi(d)}\right\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}_\xi(d)\setminus G)}.$$

□

Већ смо приметили да је $\mathcal{A}(d) \leqslant \mathcal{A}_\xi(d) \leqslant \mathcal{A}$ при чему су индекси $[\mathcal{A}_\xi(d) : \mathcal{A}(d)]$, $[\mathcal{A} : \mathcal{A}_\xi(d)]$ и $[\mathcal{A} : \mathcal{A}(d)]$ коначни. Рекли смо да функције дефинисане на $\Gamma\setminus\mathbb{H}^3$ поистовећујемо са Γ–периодичним функцијама дефинисаним на $\mathbb{H}^3$. Нека је $f \in \mathcal{L}^2(\mathcal{A}\setminus\mathbb{H}^3)$ произвољно. Из $\|f\|_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}_\xi(d)\setminus\mathbb{H}^3)} = \sqrt{[\mathcal{A} : \mathcal{A}_\xi(d)]}\|f\|_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\setminus\mathbb{H}^3)} < \infty$ следи $f \in \mathcal{L}^2(\mathcal{A}_\xi(d)\setminus\mathbb{H}^3)$. Дакле, $\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\setminus\mathbb{H}^3) \leqslant \mathcal{L}^2(\mathcal{A}_\xi(d)\setminus\mathbb{H}^3)$, а аналогно се показује и $\mathcal{L}^2(\mathcal{A}_\xi(d)\setminus\mathbb{H}^3) \leqslant \mathcal{L}^2(\mathcal{A}(d)\setminus\mathbb{H}^3)$.

Следи, $\operatorname{Spec}(\mathcal{A}\setminus\mathbb{H}^3) \subseteq \operatorname{Spec}(\mathcal{A}_\xi(d)\setminus\mathbb{H}^3) \subseteq \operatorname{Spec}\mathcal{L}^2(\mathcal{A}(d)\setminus\mathbb{H}^3)$. Слично као у случају $\operatorname{Spec}(\mathcal{A}\setminus\mathbb{H}^3)$ се показује да је $\delta(\delta-2)$ највећи елемент $\operatorname{Spec}(\mathcal{A}_\xi\setminus\mathbb{H}^3)$, као и да овај спектар има исти спектрални размак $\delta-\delta'$. На основу претходних инклузија закључујемо да ове две особине има и $\operatorname{Spec}(\mathcal{A}_\xi(d)\setminus\mathbb{H}^3)$, за све бесквадратне d и све Декартове четворке ξ.

Зато последица 92 важи и када групу $\mathcal{A}$ заменимо групом $\mathcal{A}_\xi(d)$, а функцију ϕ_0 одговарајућом основном сопственом функцијом $\phi_0^{\mathcal{A}_\xi(d)}$. Према дефиницији $\phi_0^{\mathcal{A}_\xi(d)}$ је јединствена сопствена функција оператора Δ

на $\mathcal{L}^2(\mathcal{A}_\xi(d)\backslash\mathbb{H}^3)$ јединичне $\mathcal{L}^2(\mathcal{A}_\xi(d)\backslash\mathbb{H}^3)$–норме. Функција $\frac{1}{\sqrt{[\mathcal{A}:\mathcal{A}_\xi(d)]}}\phi_0 \in \mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash\mathbb{H}^3) \leqslant \mathcal{L}^2(\mathcal{A}_\xi(d)\backslash\mathbb{H}^3)$ је сопствена за Δ и њена норма је

$$\left\|\frac{1}{\sqrt{[\mathcal{A}:\mathcal{A}_\xi(d)]}}\phi_0\right\|_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}_\xi(d)\backslash\mathbb{H}^3)} = \frac{1}{\sqrt{[\mathcal{A}:\mathcal{A}_\xi(d)]}}\left\|\phi_0\right\|_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}_\xi(d)\backslash\mathbb{H}^3)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{[\mathcal{A}:\mathcal{A}_\xi(d)]}}\sqrt{[\mathcal{A}:\mathcal{A}_\xi(d)]}\left\|\phi_0\right\|_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}\backslash\mathbb{H}^3)} = 1.$$

Због јединствености мора бити $\phi_0^{\mathcal{A}_\xi(d)} \equiv \frac{1}{\sqrt{[\mathcal{A}:\mathcal{A}_\xi(d)]}}\phi_0$. Специјално, то значи да је $c_{\phi_0^{\mathcal{A}_\xi(d)}} = \frac{c_{\phi_0}}{\sqrt{[\mathcal{A}:\mathcal{A}_\xi(d)]}}$.

Нека је $\varepsilon' := \frac{2(\delta-\delta')}{7(q+1)}$ и $\varepsilon := T^{\frac{2(\delta'-\delta)}{7(q+1)}} = T^{-\varepsilon'}$ као у доказу теореме 93. Последица 92 даје (исто као у доказу теореме 93)

$$\left\langle F_{(1\pm\varepsilon)T}^{\mathcal{A}_\xi(d)}, \Phi_{\varepsilon,A_1}\right\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{A}_\xi(d)\backslash G)} = \frac{c_{\phi_0^{\mathcal{A}_\xi(d)}}\phi_0^{\mathcal{A}_\xi(d)}(e)}{\delta\|\xi\|_\infty^\delta}T^\delta\left(1+O\left(T^{-\varepsilon'}\right)\right) \ll$$

$$\ll \frac{c_{\phi_0^{\mathcal{A}_\xi(d)}}\phi_0^{\mathcal{A}_\xi(d)}(e)}{\delta\|\xi\|_\infty^\delta}T^\delta = \frac{c_{\phi_0}\phi_0(e)}{[\mathcal{A}:\mathcal{A}_\xi(d)]\delta\|\xi\|_\infty^\delta}T^\delta \ll \frac{T^\delta}{[\mathcal{A}:\mathcal{A}_\xi(d)]}.$$

Вратимо се на почетак приче. За оцену $\pi^{\mathcal{P}}(T)$ и $\pi_2^{\mathcal{P}}(T)$ нам је требала оцена суме $\sum\limits_{\text{нзд}(n,P)=1} a_n$, где је $a_n := a_n((1+\varepsilon)T) = a_n\left(T + T^{\frac{2\delta'+5\delta}{7(q+1)}}\right)$.

Теорема 99. *Нека је d бесквадратан природан број и ξ корена четворка. Тада је*

$$\sum_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ d|n}} a_n \ll \frac{T^\delta}{[\mathcal{A}:\mathcal{A}_\xi(d)]}\#\{A\in\mathcal{A}_\xi(d)\backslash\mathcal{A} \mid d|f(\xi A)\},$$

кад $T\to+\infty$.

Доказ. Из леме 98 и горње оцене скаларног производа (која не зависи од A_1) следи:

$$\sum_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ d|n}} a_n \ll \frac{T^\delta}{[\mathcal{A}:\mathcal{A}_\xi(d)]}\sum_{\substack{A_1\in\mathcal{A}_\xi(d)\backslash\mathcal{A}\\ d|f(\xi A_1)}} 1 = \frac{T^\delta}{[\mathcal{A}:\mathcal{A}_\xi(d)]}\#\{A\in\mathcal{A}_\xi(d)\backslash\mathcal{A} \mid d|f(\xi A)\}.$$

□

8.4 Примена Селберговог решета

Теорема 99 омогућава примену Селберговог решета. Нека је T произвољан (велики) број. Имамо (баш као у поставци Селберговог решета) низ ненегативних реалних бројева $a_n = a_n((1+\varepsilon)T) = a_n\left(T + T^{\frac{2\delta'+5\delta}{7(q+1)}}\right)$, позитиван реалан број $\mathcal{X}(T) = T^\delta$ и производ различитих простих бројева $P = P(T)$. Теорема 99 даје оцену $\sum\limits_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ d|n}} a_n \ll \mathcal{X} g(d)$, где је $g(d) = \frac{\#\{A\in\mathcal{A}_\xi(d)\backslash\mathcal{A} \ \mid\ f(\xi A)\equiv_d 0\}}{[\mathcal{A}:\mathcal{A}_\xi(d)]}$.

Селбергово решето даје горњу оцену

$$\sum_{\text{нзд}(n,P)=1} a_n((1+\varepsilon)T) \ll \frac{\mathcal{X}(T)}{\sum\limits_{d|P(T)} h(d)}, \tag{4}$$

при чему константа може зависити од параметра T. Из доказа Селбергове теореме је јасно да је константа из претходне процене заправо константа из процене $\sum\limits_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ d|n}} a_n$ коју даје теорема 99 и која не зависи од T. Следи, константа у процени (4) не зависи од T.

Једини услов који недостаје за примену Селберговог решета је мултипликативност функције $g(d) = \frac{\#\{A\in\mathcal{A}_\xi(d)\backslash\mathcal{A} \ \mid\ f(\xi A)\equiv_d 0\}}{\#\{A\in\mathcal{A}_\xi(d)\backslash\mathcal{A}\}}$ на скупу $S = \{d \in \mathbb{N} \mid P \equiv_d 0\}$. За почетак, јасно је да је $g(1) = 1$. Нека је $d > 1$.

И у имениоцу и у бројиоцу имамо бројање по $A \in \mathcal{A}_\xi(d)\backslash\mathcal{A}$. С обзиром на дефиницију $\mathcal{A}_\xi(d)$, ово је исто као да бројимо класе конгруенција по модулу d у орбити $\xi\mathcal{A}$. Означимо са $V_d := \{\kappa \in \mathbb{F}_d^4 - \{(0,0,0,0)\} \mid Q(\kappa) = 0\}$ и $\iota_d : \mathcal{A}_\xi(d)\backslash\mathcal{A} \longrightarrow V_d$ која матрици A додељује класу конгруенције $[\xi A]$. У општем случају ова инклузија није сурјективна. Нпр. за $d = 2$, сва четири генератора Аполонијве групе $\mathcal{A}$ се сликају у $[\xi]$, па је слика $\iota\left(\mathcal{A}_\xi(d)\backslash\mathcal{A}\right)$ једночлана.

Скуп V_d је непразан и коначан па на њему постоји вероватноћа P_d у којој су сви исходи једнако вероватни. Када би догађаји $A_d := \{\kappa \in \operatorname{Im}\iota_d\}$ и $B_d := \{f(\kappa) = 0\}$ били независни могли бисмо да кажемо да је

$$g(d) = \frac{\#\{A \in \mathcal{A}_\xi(d)\backslash\mathcal{A} \mid f(\xi A) \equiv_d 0\}}{\#\{A \in \mathcal{A}_\xi(d)\backslash\mathcal{A}\}} = \frac{\#\{\kappa \in \operatorname{Im}\iota_d \mid f(\kappa) = 0\}}{\#\{\kappa \in \operatorname{Im}\iota_d\}} =$$

$$= \frac{\frac{\#\{\kappa\in\operatorname{Im}\iota_d \ \mid\ f(\kappa)=0\}}{\#V_d}}{\frac{\#\{\kappa\in\operatorname{Im}\iota_d\}}{\#V_d}} = \frac{P_d(A_d B_d)}{P_d(A_d)} = P_d(B_d) = \frac{\#\{\kappa \in V_d \mid f(\kappa) = 0\}}{\#V_d}.$$

Нажалост, догађаји A_d и B_d у општем случају нису независни. Нпр. видели смо да је догађај B_2 сигуран када је број $f(\xi)$ паран, а немогућ иначе. Ипак, ово није тако чест случај. У [20] је доказано да постоји коначан скуп простих бројева S' (који очигледно садржи 2) такав да претходна једнакост важи за све бесквадратне d који немају чинилац у S'.

Зато ћемо из P одстранити све чиниоце који су у S, нека је $P' = \prod\limits_{\substack{p|P \\ p \text{ прост} \\ p \notin S}} p.$

Како $P'|P$ имамо да је

$$\pi^{\mathcal{P}}(T) \ll \#\{\kappa \in \xi\mathcal{A} \mid \|\kappa\|_\infty < T,\ \text{НЗД}(\kappa_1, P) = 1\} \leqslant$$

$$\leqslant \#\{\kappa \in \xi\mathcal{A} \mid \|\kappa\|_\infty < T,\ \text{НЗД}(\kappa_1, P') = 1\}.$$

Следи, уколико оценимо претходну функцију за P', иста оцена ће важити и за P. Са друге стране, све што смо рекли за P, важи и за P'. Зато, без умањења општости, можемо сматрати да P нема чинилац у S' (тј. $S \cap S' = \emptyset$) и да важи $g(d) = \frac{\#\{\kappa \in V_d \ \mid\ f(\kappa)=0\}}{\#V_d}$, за све $d \in S$.

Покаћемо мултипликативност функције g на целом $\mathbb{Z}$, уместо на његовом подскупу S. Довољно је показати да су и именилац и бројилац мултипликативни. Нека је $V'_d := \{\kappa \in V_d \mid f(\kappa) = 0\}$.

Лема 100. *Нека су d_1 и d_2 узајамно прости бројеви различити од* 1. *Тада су скупови $V_{d_1 d_2}$ и $V_{d_1} \times V_{d_2}$ ($V'_{d_1 d_2}$ и $V'_{d_1} \times V'_{d_2}$) у бијекцији.*

Доказ. Ово је класичан трик са кинеском теоремом. Нека су a и b решења система конгруенција

$$a \equiv_{d_1} (1,1,1,1), \quad a \equiv_{d_2} (0,0,0,0), \quad b \equiv_{d_1} (0,0,0,0), \quad b \equiv_{d_2} (1,1,1,1),$$

и $\Phi(x, y) = ax + by$ бијекција између $\mathbb{F}_{d_1} \times \mathbb{F}_{d_2}$ и $\mathbb{F}_{d_1 d_2}$.

Специјално, ако су $x \in V_{d_1}$ и $y \in V_{d_2}$, имаћемо

$$Q(ax + by) \equiv_{d_1} Q(x) \equiv_{d_1} 0 \quad \text{и} \quad Q(ax + by) \equiv_{d_2} Q(y) \equiv_{d_2} 0.$$

Према кинеској теореми $d|Q(ax+by)$, па је рестрикција $\Phi\big|_{V_{d_1} \times V_{d_2}} : V_{d_1} \times V_{d_2} \longrightarrow V_{d_1 d_2}$ добро дефинисана и инјективна. Нека је $z \in V_{d_1 d_2}$ произвољно и $(x, y) := (\rho(z, d_1), \rho(z, d_2))$, где $\rho(z, d)$ означава остатак при дељењу броја z са d. Тада је $Q(x) \equiv_{d_1} Q(z) \equiv_{d_1} 0$ и $Q(y) \equiv_{d_2} 0$, тј. $(x, y) \in V_{d_1} \times V_{d_2}$. Како је $\Phi\big|_{V_{d_1} \times V_{d_2}}(x, y) = z$, закључујемо да је рестрикција $\Phi\big|_{V_{d_1} \times V_{d_2}}$ сурјективна. Следи, постоји бијекција између $V_{d_1} \times V_{d_2}$ и $V_{d_1 d_2}$. Слично се показује да постоји и друга бијекција. ☐

Из ове леме да је $g(d_1 d_2) = \frac{\#V'_{d_1 d_2}}{\#V_{d_1 d_2}} = \frac{\#V_{d_1} \cdot \#V'_{d_2}}{\#V_{d_1} \cdot \#V_{d_2}} = g(d_1) g(d_2)$. Одатле и из $g(1) = 1$ следи да је функција g мултипликативна.

8.5 Процена функција $\pi^{\mathcal{P}}$ и $\pi_2^{\mathcal{P}}$ и аналогија са функцијама π и π_2

Помоћу Селберговог решета смо дошли до процена

$$\pi^{\mathcal{P}}(T) \ll \frac{T^{\delta}}{\sum\limits_{d|P} h_1(d)} \quad \text{и} \quad \pi_2^{\mathcal{P}}(T) \ll \frac{T^{\delta}}{\sum\limits_{d|P} h_2(d)},$$

при чему је функција h_i мултипликативна и задата на простим бројевима са $h_i(p) = \frac{g_i(p)}{1-g_i(p)}$, где је $g_i(d) = \frac{\#\{\kappa \in V_d \mid f_i(\kappa)=0\}}{\# V_d}$.

Преостаје још да проценимо суму h_i–ова. Испитајмо најпре понашање g_i–ова на простим бројевима.

Нека је p прост број и $N_p(F)$ број нула квадратне форме F над пољем $\mathbb{F}_p$. Тада је $\# V_p = N_p(Q) - 1$, јер смо из V_d избацили четворку $(0,0,0,0)$ која је корен Декартове квадратне форме. Слично, $\#\{\kappa \in V_p \mid f_1(\kappa) = 0\}$ је једнак броју нетривијалних нула Декартове форме чија је прва координата нула. Или еквивалентно, броју нетривијалних нула квадратне форме

$$Q'(x_2, x_3, x_4) := 2\sum_{j=2}^{4} x_j^2 - \left(\sum_{j=2}^{4} x_j\right)^2$$

над пољем $\mathbb{F}_p$.

Следи, $g_1(p) = \frac{N_p(Q')-1}{N_p(Q)-1}$. Приметимо да је

$$\begin{gathered}
\#\{\kappa \in V_p \mid f_2(\kappa) = 0\} = \\
= \#\{\kappa \in \mathbb{F}_p^4 \mid Q(\kappa) = 0,\ f_2(\kappa) = 0\} - 1 = \\
= \#\left\{\kappa \in \mathbb{F}_p^4 \mid Q(\kappa) = 0,\ \kappa_1 = 0 \ \vee \ \kappa_2 = 0\right\} - 1 = \\
= \#\left\{\kappa \in \mathbb{F}_p^4 \mid Q(\kappa) = 0,\ \kappa_1 = 0\right\} + \#\left\{\kappa \in \mathbb{F}_p^4 \mid Q(\kappa) = 0,\ \kappa_2 = 0\right\} - \\
-\#\left\{\kappa \in \mathbb{F}_p^4 \mid Q(\kappa) = 0,\ \kappa_1 = \kappa_2 = 0\right\} - 1 = \\
= 2\#\left\{\kappa \in \mathbb{F}_p^4 \mid Q(\kappa) = 0,\ \kappa_1 = 0\right\} - \#\left\{\kappa \in \mathbb{F}_p^4 \mid Q(\kappa) = 0,\ \kappa_1 = \kappa_2 = 0\right\} - 1 = \\
= 2N_p(Q') - N_p(Q'') - 1,
\end{gathered}$$

где је $Q''(x_3, x_4) := 2\sum\limits_{j=3}^{4} x_j^2 - \left(\sum\limits_{j=3}^{4} x_j\right)^2 = x_3^2 + x_4^2 - 2x_3x_4 = (x_3 - x_4)^2$. Како је $Q''(x_3, x_4) = 0$ акко је $x_3 = x_4$, можемо закључити да је $N_p(Q'') = p$, а самим тим и $g_2(p) = \frac{2N_p(Q')-p-1}{N_p(Q)-1}$.

Овим смо почетни проблем свели на оцену $N_p(F)$, где је F квадратна форма.

Теорема 101. *Нека је* $F(x_1, \ldots, x_n) = a_1x_1^2 + \ldots + a_nx_n^2$ *квадратна форма таква да* $p \nmid a_j$, $1 \leqslant j \leqslant n$. *Тада је* $N_p(F) = p^{n-1} + O\left(p^{\frac{n}{2}}\right)$, *за све просте бројеве* p.

Доказ. Нека је $\zeta \in \mathbb{C}$ произвољан примитиван p–ти корен јединице. Тада је $\sum\limits_{y\in\mathbb{F}_p} \zeta^y = 0$. За произвољан број $x \in \mathbb{F}_p$, ζ^x је (неки други) p–ти корен јединице ако је $x \neq 0$ или 1 ако је $x = 0$. Следи,

$$\sum_{y\in\mathbb{F}_p} \zeta^{xy} = \left\{ \begin{array}{ll} p, & x = 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{array} \right. .$$

Другим речима, ова сума детектује нулу. Зато, уколико x заменимо са $F(x_1, \ldots, x_n)$ добијамо

$$N_p(F) = \frac{1}{p} \sum_{x_1,\ldots,x_n\in\mathbb{F}_p} \sum_{y\in\mathbb{F}_p} \zeta^{F(x_1,\ldots,x_n)y}.$$

У случају $y = 0$ имамо p^n сабирака који су једнаки 1. Нека је $\mathbb{F}_p^\times := \mathbb{F}_p - \{0\}$ подгрупа јединица. Следи,

$$N_p(F) = p^{n-1} + \frac{1}{p} \sum_{x_1,\ldots,x_n\in\mathbb{F}_p} \sum_{y\in\mathbb{F}_p^\times} \zeta^{F(x_1,\ldots,x_n)y} =$$

$$= p^{n-1} + \frac{1}{p} \sum_{y\in\mathbb{F}_p^\times} \sum_{x_1,\ldots,x_n\in\mathbb{F}_p} \zeta^{\left(a_1x_1^2+\ldots+a_nx_n^2\right)y} =$$

$$= p^{n-1} + \frac{1}{p} \sum_{y\in\mathbb{F}_p^\times} \prod_{j=1}^{n} \sum_{x_j\in\mathbb{F}_p} \zeta^{a_jx_j^2y} =$$

$$= p^{n-1} + \frac{1}{p} \sum_{y\in\mathbb{F}_p^\times} \prod_{j=1}^{n} S_{a_jy},$$

где је $S_a := \sum\limits_{x\in\mathbb{F}_p} \zeta^{ax^2}$, за $a \in \mathbb{F}_p^\times$. Управо ће p^{n-1} бити главни члан процене $N_p(F)$, оценимо грешку.

Једначина $x^2 \equiv_p z$ има $1 + \left(\frac{z}{p}\right)$ решења (по x), где је $\left(\frac{z}{p}\right)$ Лежандров[46] симбол. Зато је

$$S_a = \sum_{z\in\mathbb{F}_p} \left(1 + \left(\frac{z}{p}\right)\right) \zeta^{az} = \sum_{z\in\mathbb{F}_p} \zeta^{az} + \sum_{z\in\mathbb{F}_p} \left(\frac{z}{p}\right) \zeta^{az} = \sum_{z\in\mathbb{F}_p} \left(\frac{z}{p}\right) \zeta^{az}.$$

---

[46] Adrien Marie Legendre (1752. – 1833.), француски математичар

Дирихлеови карактери $f_a(z) = \zeta^{-az}$ чине ортонормиран систем вектора у односу на скаларни производ $\langle f, g\rangle := \frac{1}{p}\sum\limits_{z\in\mathbb{F}_p} f(z)\overline{g(z)}$. Векторски простор Дирихлеових карактера над пољем $\mathbb{F}_p$ је димензије p (јер је сваки карактер одређен сликом генератора), па карактери f_a, $a \in \mathbb{F}_p$, чине ортонормирану базу овог простора. Лежандров симбол је један Дирихлеов карактер, па се може записати као линеарна комбинација базних вектора $\left(\frac{\cdot}{p}\right) = \sum\limits_{a\in\mathbb{F}_p} \alpha_a f_a$. Коефицијенти α_b се могу изразити као $\left\langle \left(\frac{\cdot}{p}\right), f_a \right\rangle = \frac{1}{p}\sum\limits_{z\in\mathbb{F}_p}\left(\frac{z}{p}\right)\zeta^{az} = \frac{1}{p}S_a$.

Тривијално је

$$\alpha_0 = \frac{1}{p}S_0 = \frac{1}{p}\sum_{z\in\mathbb{F}_p}\left(\frac{z}{p}\right) = \frac{\sum\limits_{z\in\mathbb{F}_p}\left(1+\left(\frac{z}{p}\right)\right) - p}{p} = \frac{p-p}{p} = 0,$$

јер последња сума представља укупан број решења једначина $x^2 \equiv_p z$, кад z пролази $\mathbb{F}_p$. Множење са $c \in \mathbb{F}_p^\times$ је пермутација групе $\mathbb{F}_p$. Зато је

$$\left(\frac{cz}{p}\right) = \left(\frac{c}{p}\right)\left(\frac{z}{p}\right) = \left(\frac{c}{p}\right)\sum_a \alpha_a f_a(z) = \left(\frac{c}{p}\right)\sum_a \alpha_{ac} f_{ac}(z) = \sum_a \left(\frac{c}{p}\right)\alpha_{ac} f_a(cz).$$

Следи, $\left(\frac{c}{p}\right)\alpha_{ac} = \alpha_a$. Из $\left(\frac{c}{p}\right) = \pm 1$ следи $|\alpha_{ac}| = |\alpha_a|$, за све $c \neq 0$. Нека је $a \in \mathbb{F}_p^\times$ произвољан фиксиран елемент. Према претходној причи је

$$\left\|\left(\frac{\cdot}{p}\right)\right\| = \sqrt{\sum_{b\in\mathbb{F}_p}|\alpha_b|^2} = \sqrt{(p-1)|\alpha_a|^2} = \sqrt{p-1}|\alpha_a|.$$

Са друге стране имамо

$$\left\|\left(\frac{\cdot}{p}\right)\right\| = \sqrt{\frac{1}{p}\sum_{z\in\mathbb{F}_p}\left(\frac{z}{p}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{p}\sum_{z\in\mathbb{F}_p^\times}1} = \sqrt{\frac{p-1}{p}}.$$

Следи, $|\alpha_a| = \frac{1}{\sqrt{p}}$ и $|S_a| = p|\alpha_a| = \sqrt{p}$. Зато грешку можемо да проценимо са

$$\left|\frac{1}{p}\sum_{y\in\mathbb{F}_p^\times}\prod_{j=1}^{n}\sum_{x_j\in\mathbb{F}_p}\zeta^{a_j x_j^2 y}\right| = \frac{1}{p}\left|\sum_{y\in\mathbb{F}_p^\times}\prod_{j=1}^{n}S_{a_j y}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{p}\sum_{y\in\mathbb{F}_p^\times}\prod_{j=1}^{n}|S_{a_j y}| = \frac{1}{p}\sum_{y\in\mathbb{F}_p^\times}\prod_{j=1}^{n}\sqrt{p} =$$

$$= \frac{1}{p}(p-1)(\sqrt{p})^n \leqslant p^{\frac{n}{2}}.$$

□

Последица 102. *Важе процене*

$$g_1(p) = p^{-1} + O\left(p^{-\frac{3}{2}}\right) \quad \text{и} \quad g_2(p) = 2p^{-1} + O\left(p^{-\frac{3}{2}}\right),$$

за све просте бројеве p*.*

Доказ. Показаћемо прву процену, аналогно се показује и друга. Из претходне теореме следи

$$g_1(p) = \frac{p^2 + O\left(p^{\frac{3}{2}}\right) - 1}{p^3 + O\left(p^2\right) - 1} = \frac{p^2 + O\left(p^{\frac{3}{2}}\right)}{p^3 + O\left(p^2\right)} =$$

$$= \frac{p^{-1} + O\left(p^{-\frac{3}{2}}\right)}{1 + O\left(p^{-1}\right)} = \left(p^{-1} + O\left(p^{-\frac{3}{2}}\right)\right)\left(1 + O\left(p^{-1}\right)\right) =$$

$$= p^{-1} + O\left(p^{-\frac{3}{2}}\right) + O\left(p^{-2}\right) + O\left(p^{-\frac{5}{2}}\right) = p^{-1} + O\left(p^{-\frac{3}{2}}\right).$$

□

Последица 103. *Важе процене*

$$h_1(d) \asymp \frac{1}{\varphi(d)} \quad \text{и} \quad h_2(d) \asymp \frac{\tau_2(d)}{d} \prod_{\substack{p|d \\ p \text{ прост}}} \frac{1}{1 - \frac{2}{p}},$$

за све бесквадратне бројеве d*, где је* φ *Ојлерова функција, а* $\tau_2(d)$ *број могућих представљања* d *преко производа два природна броја.*

Доказ. Из претходне последице следи

$$\frac{1}{h_1(p)} = \frac{1 - g_1(p)}{g_1(p)} = \frac{1}{g_1(p)} - 1 = \frac{1}{p^{-1} + O\left(p^{-\frac{3}{2}}\right)} - 1 = \frac{p}{1 + O\left(p^{-\frac{1}{2}}\right)} - 1 =$$

$$= p\left(1 + O\left(p^{-\frac{1}{2}}\right)\right) - 1 = p - 1 + O\left(\sqrt{p}\right) \asymp p - 1 = \varphi(p),$$

за све просте бројеве p. Ојлерова функција φ је мултипликативна, па ће и функција $\frac{1}{\varphi}$ бити таква. Зато претходна процена важи за све бесквадратне бројеве.

Слично се показује и $h_2(p) \asymp \frac{1}{\frac{p}{2}-1} = \frac{2}{p}\frac{1}{1-\frac{2}{p}} = \frac{\tau_2(p)}{p}\frac{1}{1-\frac{2}{p}}$, за све просте бројеве p. Тражена оцена следи из чињенице да је функција $d \mapsto \frac{\tau_2(d)}{d}$ је мултипликативна (као количник две мултипликативне функције). □

Сада имамо све што је потребно да оценимо број простих кругова и број простих кругова близанаца.

Теорема 104. *За све Аполонијеве конфигурације $\mathcal{P}$ важи*

$$\pi^{\mathcal{P}}(T) \ll \frac{T^{\delta}}{\log T} \quad \textit{и} \quad \pi_2^{\mathcal{P}}(T) \ll \frac{T^{\delta}}{\log^2 T},$$

кад $T \to +\infty$.

Доказ. Као што смо већ рекли идеја је да искористимо Селбергово решето. Оценимо најпре одоздо суму

$$\sum_{d|P} h_1(d) = \sum_{d|P} \frac{1}{\varphi(d)} = \sum_{d|P} \frac{1}{d \prod\limits_{\substack{p|d \\ p \text{ прост}}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)} = \sum_{d|P} \frac{1}{d} \prod_{\substack{p|d \\ p \text{ прост}}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{p^n} \geqslant \sum_{d \leqslant T} \frac{1}{d},$$

јер се сваки број мањи од T може представити као производ степена чинилаца броја P (простих бројева мањих или једнаких T). Последња сума је тзв. $[T]$*–ти хармонијски број* (где $[\cdot]$ означава цео део броја) и може се проценити са

$$\sum_{d \leqslant T} \frac{1}{d} \sim \log T + \gamma + O\left(\frac{1}{T}\right) \gg \log T,$$

кад $T \to +\infty$, где је γ Ојлерова константа. Из Селбергове теореме и претходне дискусије следи

$$\pi^{\mathcal{P}}(T) \ll \frac{T^{\delta}}{\sum\limits_{d|P} h_1(d)} \ll \frac{T^{\delta}}{\log T}.$$

Слично се изводи и друга процена. Најпре оценимо одоздо суму

$$\sum_{d|P} h_2(d) = \sum_{d|P} \frac{\tau_2(d)}{d} \prod_{\substack{p|d \\ p \text{ прост}}} \frac{1}{1 - \frac{2}{p}} =$$

$$= \sum_{d|P} \frac{\tau_2(d)}{d} \prod_{\substack{p|d \\ p \text{ прост}}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{p}\right)^n \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{d|P} \frac{\tau_2(d)}{d} \prod_{\substack{p|d \\ p \text{ прост}}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{p^n} =$$

$$= \sum_{d|P} \frac{\tau_2(d)}{d} \prod_{\substack{p|d \\ p \text{ прост}}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tau_2\left(p^n\right)}{p^n} \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{d \leqslant T} \frac{\tau_2(d)}{d} \geqslant \sum_{d_1, d_2 \leqslant \sqrt{T}} \frac{1}{d_1 d_2} =$$

$$= \left(\sum_{d \leqslant \sqrt{T}} \frac{1}{d} \right)^2 \gg \log^2 \sqrt{T} = \left(\frac{1}{2} \log T \right)^2 \asymp \log^2 T.$$

Из Селбергове теореме следи

$$\pi_2^{\mathcal{P}}(T) \ll \frac{T^\delta}{\sum\limits_{d|P} h_2(d)} \ll \frac{T^\delta}{\log^2 T}.$$

□

Процене из претходне теореме тривијално важе и у случају да корена четворка конфигурације $\mathcal{P}$ није примитивна, јер је у том случају $\pi^{\mathcal{P}}(T) \leqslant 2$ и $\pi_2^{\mathcal{P}}(T) \leqslant 1$. Дакле, претходна теорема важи за произвољну Аполонијеву конфигурацију.

На први поглед, оцене функција $\pi^{\mathcal{P}}$ и $\pi_2^{\mathcal{P}}$ се разликују од оцена за π (из Чебишовљеве теореме) и π_2 (из теореме 51). Али кад погледамо мало пажљивије, уочићемо аналогију.

Број $N(T)$ природних бројева мањих или једнаких T је тривијално $[T] \sim T$, кад $T \to +\infty$. Зато горњу границу из Чебишовљеве теореме можемо интерпретирати и као $\pi(T) \ll \frac{T}{\log T} \sim \frac{N(T)}{\log N(T)}$. Са друге стране, за Аполонијеве конфигурације важи $N^{\mathcal{P}} \asymp T^\delta$ и $\pi^{\mathcal{P}}(T) \ll \frac{T^\delta}{\log T} \asymp \frac{\delta N^{\mathcal{P}}(T)}{\log N^{\mathcal{P}}(T)} \asymp \frac{N^{\mathcal{P}}(T)}{\log N^{\mathcal{P}}(T)}$, кад $T \to +\infty$.

И слично, имамо аналогију између $\pi_2(T) \ll \frac{N_2(T)}{\log^2 N_2(T)}$ и $\pi_2^{\mathcal{P}}(T) \ll \frac{N_2^{\mathcal{P}}(T)}{\log^2 N_2^{\mathcal{P}}(T)}$, кад $T \to +\infty$, где $N_2(T) \sim T$ представља број парова облика $(n, n+2)$ у $\mathbb{N}$ чије су обе координате мање од T.

Доња граница функција $\pi^{\mathcal{P}}$ и $\pi_2^{\mathcal{P}}$ може бити једино нула, јер смо видели да постоје Аполонијеве конфигурације (чија корена четвока није примитивна) код којих су ове функције ограничене константом.

Природно је поставити питање да ли постоји доња граница ових функција под претпоставком да је корена четворка Аполонијеве конфигурације примитивна. Постоји хипотеза (која се између осталог заснива и на аналогији са π и π_2) да је $\pi^{\mathcal{P}}(T) \asymp \frac{T^\delta}{\log T}$ и $\pi_2^{\mathcal{P}}(T) \asymp \frac{T^\delta}{\log^2 T}$, кад $T \to +\infty$ за Аполонијеве конфигурације са примитивном кореном четворком. Специјално, то би значило да је наша оцена тачног асимптотског реда.

Најбоља (до сада) позната доња оцена за $\pi^{\mathcal{P}}$ је $\pi^{\mathcal{P}}(T) \gg \frac{T}{\log^{\frac{3}{2}} T}$ и може се наћи у [28]. Наравно, ова оцена је знатно слабија од хипотезе. Ипак, она је јако битна јер гарантује постојање бесконачно много простих кругова у свакој Аполонијевој конфигурацији.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Мирослава Антић: *Диференцијална геометрија многострукости*, Математички факултет, Београд, 2015.

[2] Милош Арсеновић, Милутин Достанић, Данко Јоцић: *Теорија мере, функционална анализа, теорија оператора*, Завод за уџбенике и наставна средства, Београд, 2012.

[3] Зенон Иванович Боревич, Игорь Ростиславович Шафаревич: *Теория чисел*, Наука, Москва, 1985.

[4] Горан Ђанковић: *Теорија бројева*, Математички факултет, Београд, 2013.

[5] Владимир Петрович Платонов, Андрей Степанович Рапинчук: *Алгебраические группы и теория чисел*, Наука, Москва, 1991.

[6] Михаил Александрович Шубин: *Лекции об уравнениях математической физики*, Московский центр непрерывного математического образования, Москва, 2003.

[7] Jürgen Elstrodt, Fritz Grunewald, Jens Mennicke: *Gruop Acting on Hyperbolic Space: Harmonic Analysis and Number Theory*, Springer – Verlag Berlin Heidelberg, Berlin, 1998.

[8] Paul Garrett: *Primer of spherical harmonic analysis on* $SL_2(\mathbb{C})$, `http://www.math.umn.edu/~garrett/m/v/SL2C.pdf`, 2014.

[9] Ronald Graham, Jeffrey Lagarias, Colin Mallows, Allan Wilks, Catherine Yan: *Apollonian circle packing: number theory*, Journal of Number Theory, 100: 1 – 45, 2003.

[10] Ronald Graham, Jeffrey Lagarias, Colin Mallows, Allan Wilks, Catherine Yan: *Apollonian circle packing: geometry and group theory. I. Apollonian group*, Discrete & Computational Geometry, 34: 547 – 585, 2005.

[11] Ronald Graham, Jeffrey Lagarias, Colin Mallows, Allan Wilks, Catherine Yan: *Apollonian circle packing: geometry and group theory. I. Higher dimension*, Discrete & Computational Geometry, 35: 37 – 72, 2006.

[12] Gerhard Guettler, Colin Mallows: *A generalization of Apollonian packing of circles*, Journal of Combinatorial Optimization, 1: 1 – 27, 2010.

[13] Henryk Iwaniec: *Spectral Methods of Automorphic Forms*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2002.

[14] Henryk Iwaniec, Emmanuel Kowalski: *Analytic Number Theory*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2004.

[15] Jeffrey Lagarias, Colin Mallows, Allan Wilks: *Beyond the Descartes circle theorem*, American Mathematical Monthly, 109: 338 – 361, 2002.

[16] Alex Kontorovich: *From Apollonius to Zaremba: Local-global phenomena in thin orbits*, Bulletin of the American Mathematical Society, 50: 187 – 228, 2013.

[17] Alex Kontorovich: *The orbital circle method*, Mathematical Sciences Research Institute Publications, 61: 93 – 106, 2013.

[18] Alex Kontorovich: *The hyperbolic lattice point count in infinite volume with applications to sieves*, Duke Mathematical Journal, 149: 1 – 36, 2009.

[19] Alex Kontorovich, Hee Oh: *Almost prime Pythagorean triples in thin orbit*, Journal für die Reine und Angewandte Mathematik, 667: 89 – 131, 2012.

[20] Alex Kontorovich, Hee Oh: *Apollonian circle packing and closed horospheres on hyperbolic 3–manifolds*, Journal of the American Mathematical Society, 24: 603 – 648, 2011.

[21] Peter Lax and Ralph Phillips: *The asymptotic distribution of lattice points in Euclidean and non–Euclidean spaces*, Journal of Functional Analysis, 46: 280 – 350, 1982.

[22] Curtis McMullen: *Huasdorff Dimension and Conformal Dynamics III: Computation of Dimension*, American Journal of Mathematics, 120: 691 – 721, 1998.

[23] Hee Oh: *Apollonian circle packing: Dynamics and number theory*, Japanese Journal of Mathematics, 9: 69 – 97, 2014.

[24] Hee Oh, Nimish Shah: *The asymptotic distribution of circles in the orbits of Kleinian groups*, Inventiones mathematicae, 187: 1 – 35, 2012.

[25] Samuel James Patterson: *The limit set of a Fuchsian group*, Acta Mathematica, 136: 241 – 273, 1976.

[26] Frédéric Paulin: *On the critical exponent of a discrete subgroup of hyperbolic isometries*, Differential Geometry and its Applications, 7: 231 – 236, 1997.

[27] Peter Sarnak: *Integral Apollonian Packing*, American Mathematical Monthly, 118: 291 – 306, 2011.

[28] Peter Sarnak: *Letter to Jeffrey Lagarias*, `http://web.math.princeton.edu/sarnak/AppolonianPackings.pdf`, 2007.

[29] Frederick Soddy: *The Kiss Precise*, Nature, 137: 1021, 1936.

[30] Dennis Sullivan: *The density at infinity of a discrete subgroup of hyperbolic motions*, Institut des Hautes Études Scientifiques. Publications Mathématiques, 50: 171 – 202, 1979.

[31] Dennis Sullivan: *Entropy, Hausdorff measures old and new, and limit sets of geometrically finite Kleinian groups*, Acta Mathematica, 153: 259 – 277, 1984.

[32] Kristopher Tapp: *Matrix Groups for Undergraduates*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2005.

[33] Ilya Vinogradov: *Effective Bisector Estimate with Application to Apollonian Circle Packings*, International Mathematics Research Notices, 12: 3217 – 3262, 2014.

[34] Yehuda Shalom: *Rigidity, unitary representations of semisimple groups, and fundamental groups of manifolds with rank one transformation group*, Annals of Mathematics, 152: 113 – 182, 2000.

[35] Kannan Soundararajan: *Small gaps between prime numbers: The work of Goldston – Pintz – Yildirim*, Bulletin of the American Mathematical Society, 44: 1 – 18, 2007.

[36] `http://www.wikipedia.org`