Задаци из Методике наставе математике А

1. Користећи математичку индукцију доказати да $17 \,|\, 3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$, за сваки природан број n.

2. Доказати да за свако $n \geq 1$ важи:
$$\frac{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdots (4n-1)}{5 \cdot 9 \cdot 13 \cdots (4n+1)} < \sqrt{\frac{3}{4n+3}}.$$

3. Доказати да је последња цифра броја $2^{2^n} + 1$ седмица, за свако $n \geq 2$.

4. Доказати да за свако $n \geq 2$ важи:
$$\frac{4^n}{n+1} < \frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

5. За свако $n \geq 1$ важи да
$$\frac{1}{2^3-2} + \cdots + \frac{1}{(2n)^3-2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} - \frac{n}{2n+1}.$$

6. Нека је функција $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дата са $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. Помоћу математичке индукције доказати да за сваки природни број $n \geq 1$ важи да $f^n(x) = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$, где је $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ пута}}$.

7. Помоћу математичке индукције доказати да је сваки природни број почевши од 2 прост или производ простих бројева.

8. Доказати да је $(cosx + isinx)^n = cos(nx) + isin(nx)$ за $n \in \mathbb{N}$.

9. Дат је низ реалних бројева $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ тако да
$$a_0 = 2,\ \ a_1 = 3,\ \ a_{n+1} = a_1 a_n - a_0 a_{n-1}, n \geq 1.$$
Доказати да је $a_n = 2^n + 1$ за $n \in \mathbb{N}$.

10. Дат је низ реалних бројева $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ тако да
$$a_0 = 1,\ \ a_1 = 3,\ \ a_2 = 9,\ \ a_{n+3} = -a_{n+2} + 17a_{n+1} - 15a_n, n \geq 0.$$
Доказати да је $a_n = 3^n$ за $n \in \mathbb{N}$.

11. Доказати да за сваки члан Фибоначијевог низа важи да
$$f_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

12. Одредити збир свих двоцифрених природних бројева.

13. Наћи аритметички низ у коме, колико год чланова сабрали, збир је увек једнак троструком квадрату броју чланова.

14. Наћи x:
$$5^3 \cdot 5^7 \cdot 5^{11} \cdots 5^x = 25^{105}.$$

15. Наћи x:
$$(x+1) + (x+6) + (x+11) + \cdots + (x+36) = 172.$$

16. Бројеви a, b и c чине аритметички низ. Доказати да $a^2 + ab + b^2, a^2 + ac + c^2, b^2 + bc + c^2$ такође чине аритметички низ.

17. Бројеви a, b и c су узастопни чланови геометријског низа, чији збир је 65. Ако се средњи члан увећа за 10, добија се аритметички низ. Наћи a, b, c.

18. Бројеви $a_1, a_2, a_3, ...$ чине геометријски низ. Доказати да и $T_1, T_2, T_3, ...$ чине геометријски низ, где су

$$T_1 = a_1 + \cdots + a_n,\ T_2 = a_{n+1} + \cdots + a_{2n},\ T_3 = a_{2n+1} + \cdots + a_{3n}, ...$$

19. Нека су $a_1, \ldots, a_n > 0$ узастопни чланови аритметичког низа. Доказати да је

$$\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_n}} = \frac{n-1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_n}}.$$

20. У једнакостранични троугао, чија дужина странице је a, уписан је други троугао чија темена су средишта страница почетног троугла. У други троугао је уписан трећи, његова темена су средишта страница другог троугла и тако даље. Одредити збир обима и збир површина првих n троуглова.

21. У колико пермутација цифара 0,1,...,9 стоје цифре 1,3,5,7,9 једна до друге:
а) у датом поретку;
б) у произвољном поретку?

22. Доказати да у месту са 1000 становника живе бар две особе са истим иницијалима.

23. На колико начина се може десеторо људи распоредити за округлим столом?

24. Правоугаоник је пресечен са два скупа правих паралелних његовим страницама. Сваки скуп се састоји од по n правих. Колико се на овај начин добије правоугаоника?

25. Колико има четвороцифрених бројева који се могу формирати од цифара 0,1,2,3,4,5 тако да им цифре буду различите?

26. На колико начина n особа може да стане у врсту, а да притом две одабране особе не стоје једна поред друге?

27. Колико различитих делилаца има број $p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_m^{k_m}$, где су $p_1, \ldots, p_m$ различити прости бројеви и $k_1, \ldots, k_m \in \mathbb{N}$?

28. На колко начина се на шаховску таблу може поставити 8 различитих топова, тако да се никоја два не налазе у истој врсти или истој колони?

29. На једној полици у библиотеци се налази 50 књига, од чега је 15 из алгебре, 15 из геометрије, 15 из анализе и 5 из информатике. На колико начина се могу распоредити књиге на полици тако да књиге из исте области буду једна до друге?

30. У скупу од 100 тачака има тачно 8 четворки колинеарних тачака. Колико је (највише) различитих правих одређено овим скупом тачака?

31. Колико има целих бројева између 100 и 10000 код којих су тачно три цифре једнаке?

32. На колико начина се 30 оловака може поделити на 7 студената?

33. На колико начина се 200 куглица може распоредити у 50 кутија, тако да у свакој кутији буде бар по једна куглица?

34. На колико начина 10 студената може сести на 5 столица, а на колико начина на 15 столица?

35. На колико начина се 100 куглица може ставити у 5 кутија, тако да прва садржи 5 куглица, друга 10, трећа 20, четврта 30 куглица и пета остатак?

36. Одредити број дијагонала конвексног n-тоугла.

37. Колико различитих петоцифрених бројева се може саставити од цифара 1,2,...,7 тако да се цифре не понављају и да је збир последње две цифре паран број?

38. Колико различитих петоцифрених бројева дељивих са 6 се може саставити од цифара 0,1,2,3,4,5 тако да се цифре не понављају?

39. Збир биномних коефицијената другог и трећег члана у развијеном облику бинома $(x^{-\frac{3}{2}} + x^{\frac{2}{3}})^n$ једнак је 136. Одредити члан који садржи $x^{\frac{17}{2}}$.

40. Користећи биномну формулу доказати да је број $11^{10} - 1$ дељив са 100.

41. Колико рационалних чланова има у развијеном облику степена $(\sqrt{2} + \sqrt[4]{3})^{100}$?

42. Одредити све $z \in \mathbb{C}$ тако да

$$\left|\frac{16z+1}{4\bar{z}}\right| = 4, \ \ Re\left(\frac{2z}{\bar{z}}\right) = 1.$$

43. Написати број $(\sqrt{3} - i)^{100}$ у тригонометријском облику.

44. Одредити све $z \in \mathbb{C}$ тако да $z^4 + 8 + 8\sqrt{3}i = 0$.

45. Одредити све $z \in \mathbb{C}$ тако да $\bar{z} = z^2$.

46. Израчунати $z^{142} + z^{-142}$ ако је $z^2 - z + 1 = 0$.

47. Доказати да је за $n \in \mathbb{N}$:

$$(1-i)^n + (1+i)^n = 2^{\frac{n+2}{2}} cos(\frac{n\pi}{4}).$$

48. Написати $sin(5x)$ и $cos(5x)$ преко $sinx$, то јест $cosx$.

49. Ако је број $\frac{z-1}{z+1}$ чисто имагинарни, где $z \neq -1$, доказати да је $|z| = 1$.

50. Полином p при дељењу са $x - 1$ даје остатак 3, а при дељењу са $x - 2$ остатак 4. Одредити остатак при дељењу полинома p са $(x - 1)(x - 2)$.

51. Одредити бројеве $a, b, c \in \mathbb{R}$ тако да полином $p(x) = x^4 + x^3 + ax^2 + bx + c$ при дељењу са $x - 1$ даје остатак 1, са $x - 2$ остатак 2, а са $x - 3$ остатак 3.

52. Наћи остатак при дељењу полинома $p(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x + 1$ са $x^3 - x$.

53. Доказати да је $p(x) = x^{3m} + x^{3n+1} + x^{3s+2}$ дељив са $x^2 + x + 1$, где су $m, n, s \in \mathbb{N}$.

54. Решити једначину $x^3 - 3\sqrt{3}x^2 + 7x - \sqrt{3} = 0$, ако се зна да је разлика нека два њена решења једнака $\sqrt{2}$.

55. Одредити полином $p \in \mathbb{R}[x]$ четвртог степена, чија једна нула је $1 - 2i$, двострука нула је -2 и важи да $p(-3) = 20$.

56. Одредити $a, b \in \mathbb{R}$ тако да је полином $p(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 + ax + b$ дељив са $g(x) = x^2 - 2x + 2$:
а) без остатка;
б) са остатком 1;
в) са остатком x.

57. Наћи све $x \in \mathbb{C}$ тако да $(x^2 + 2)^2 + (x^2 - 3)^2 = 625$.

58. Наћи све $x \in \mathbb{C}$ тако да $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) = 15$.

59. Наћи све $x \in \mathbb{C}$ тако да $x^4 + x^2 + 1 = 0$.

60. Наћи све $x \in \mathbb{C}$ тако да $x^7 + 3x^6 + 2x^5 + 4x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 3x + 1 = 0$.

61. Наћи све $x \in \mathbb{C}$ тако да $x^5 - 7x^4 + 16x^3 - 16x^2 + 7x - 1 = 0$.

62. Решити систем једначина:

$$\begin{aligned} x^2 - xy - y^2 + 2x + y - 8 &= 0 \\ 2x - y - 5 &= 0 \end{aligned}$$

63. Решити систем једначина:

$$\begin{aligned} 5x^2 - 6y^2 &= 111 \\ 7x^2 + 3y^2 &= 714 \end{aligned}$$

64. Решити систем једначина:

$$\begin{aligned} x^2 - 3xy + 2y^2 &= 0 \\ x^2 - 3x - y + 3 &= 0 \end{aligned}$$

65. Решити систем једначина:

$$\begin{aligned} x^2 + xy + y^2 &= 19 \\ x^2 - xy + y^2 &= 7 \end{aligned}$$

66. Решити систем једначина:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + x + y - 8 &= 0 \\ x^2 + y^2 + xy - 7 &= 0 \end{aligned}$$

67. Решити једначину у скупу $\mathbb{R}$: $x + 1 = \sqrt{x+7}$.

68. Решити једначину у скупу $\mathbb{R}$: $\sqrt{2x+1} + \sqrt{x-3} = 4$.

69. Решити једначину у скупу $\mathbb{R}$: $\sqrt{2x-4} - \sqrt{x+5} = 1$.

70. Решити једначину у скупу $\mathbb{R}$: $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{3x+1} = \sqrt[3]{x-1}$.

71. Решити једначину у скупу $\mathbb{R}$:

$$\frac{x\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[3]{x^2} - 1} - \frac{\sqrt[3]{x^2} - 1}{\sqrt[3]{x} - 1} = 6.$$

72. Решити једначину у скупу $\mathbb{R}$:

$$\sqrt[5]{(7x-3)^3} + 8\sqrt[5]{(3-7x)^{-3}} = 7.$$

73. Решити неједначину у скупу $\mathbb{R}$: $\sqrt{1-4x^2} \geq 1 - 3x$.

74. Решити неједначину у скупу $\mathbb{R}$: $\sqrt{x^2 - 55x + 250} < x - 14$.

75. Решити неједначину у скупу $\mathbb{R}$: $\sqrt{x+6} > \sqrt{x+1} + \sqrt{2x-5}$.

76. Решити неједначину у скупу $\mathbb{R}$:

$$\frac{\sqrt{2-x^4}}{x} < 1.$$

77. Решити једначину у скупу $\mathbb{R}$:

$$\sqrt{x^2-2x-1+\sqrt{x+1}}=x-1.$$

78. Решити једначину у скупу $\mathbb{R}$: $\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}=12$.

79. Решити неједначину у скупу $\mathbb{R}$:

$$\sqrt{x^2-8x+15}+\sqrt{x^2+2x-15}>\sqrt{4x^2-18x+18}.$$

80. Решити неједначину у скупу $\mathbb{R}$: $\sqrt{x}+\sqrt{x-1}>\sqrt{x+1}$.

81. Решити неједначину у скупу $\mathbb{R}$: $x\sqrt{3x^2+5x-6}<x^2+2x$.

82. Решити једначину у скупу $\mathbb{R}$:

$$\sqrt{x+3-2\sqrt{x+2}}+\sqrt{x+27-10\sqrt{x+2}}=4.$$

83. Решити једначину у скупу $\mathbb{R}$:

$$\sqrt{x}+\sqrt{x-\sqrt{1-x}}=1.$$