

Линеарна алгебра и аналитичка геометрија, 10.01.2016.

1. Решити систем линеарних једначина над пољем \mathbb{R} :

$$x + 2y + 2z - t + 3w = -1$$

$$x + 2y + 3z + t + w = 2$$

$$3x + 6y + 8z + t + 5w = 3.$$

2. Нека су U и V потпростори векторског простора \mathbb{R}^4 генерисани редом векторима:

$$u_1 = (1, 7, 6, 5), \quad v_1 = (2, -2, 2, -2),$$

$$u_2 = (3, 5, 8, 3), \quad v_2 = (4, 0, 1, 0),$$

$$u_3 = (-1, 9, 4, 7); \quad v_3 = (4, -8, 7, -8).$$

Наћи бар једну базу, као и димензију простора U , V , $U+V$ и $U \cap V$. Да ли је сума потпростора U и V директна?

3. Нека је $L : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ линеарно пресликавање дефинисано са

$$L(x, y, z, t) = (x + 3y - z + 4t, 2x + 6y + 2z, x + 3y + 3z - 4t).$$

Одредити матрицу пресликавања L у односу на пар канонских база простора \mathbb{R}^4 и \mathbb{R}^3 . Одредити ранг, дефект и неке базе језгра $\text{Ker}L$ и слике $\text{Im}L$ пресликавања L .

4. Одредити карактеристични полином матрице $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

Затим одредити сопствене вредности и сопствене векторе матрице A .

Испитати да ли је матрица A слична дијагоналној и у случају да јесте, наћи бар једну инвертибилну матрицу P и дијагоналну D тако да је $D = P^{-1}AP$. Израчунати и A^n , $n \in \mathbb{N}$.

5. Грам-Шмитовим поступком одредити неку ортонормирану базу потпростора U векторског простора \mathbb{R}^4 генерисаног векторима $f_1 = (1, 1, 1, 1)$, $f_2 = (1, 0, 1, 0)$ и $f_3 = (-1, 2, 0, 1)$.

6. Нека је W потпростор векторског простора \mathbb{R}^3 генерисан векторима $w_1 = (1, 1, 1)$ и $w_2 = (-1, -1, 0)$.

Одредити ортогоналну пројекцију вектора $v = (1, 0, 1)$ на потпростор W , растојање вектора v од потпростора W , као и угао између њих.