Линеарна алгебра и аналитичка геометрија, 21.01.2016.

1. Решити систем линеарних једначина над пољем $\mathbb{R}$:
$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x & + & 2y & + & 2z & - & t & + & 3w & = & 1 \\ x & + & 2y & + & 3z & + & t & + & w & = & 2 \\ 3x & + & 6y & + & 8z & + & t & + & 5w & = & 3 \\ 3x & + & 6y & + & 7z & - & t & + & 7w & = & 4. \end{array}$$

2. Нека су U и V потпростори векторског простора $\mathbb{R}^5$ генерисани редом векторима:
$$\begin{array}{ll} u_1 = (1, 2, 3, -1, -2), & v_1 = (2, 3, 4, 5, 1), \\ u_2 = (0, -1, -2, 3, 4), & v_2 = (4, 3, 5, 1, 2), \\ u_3 = (1, 1, 1, 2, 3); & v_3 = (2, -3, -2, -13, 1). \end{array}$$
Наћи по једну базу, као и димензије потпростора U, V, $U+V$ и $U \cap V$. Да ли је сума потпростора U и V директна?

3. Нека је $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ пресликавање дефинисано са
$L(x,y,z,t) = (x+3y-z+4t,\ 2x+6y+2z,\ x+3y+3z-4t)$.

   а) Доказати да је пресликавање L линеарно.
   б) Одредити матрицу пресликавања L у односу на пар канонских база простора $\mathbb{R}^4$ и $\mathbb{R}^3$.
   ц) Одредити ранг, дефект и неке базе језгра KerL и слике ImL пресликавања L.

4. Одредити карактеристични полином матрице $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 11 & -8 & -7 \\ -13 & 11 & 10 \end{bmatrix}$.
Затим одредити сопствене вредности и сопствене векторе матрице A. Испитати да ли је матрица A слична дијагоналној и у случају да јесте, наћи бар једну инвертибилну матрицу P и дијагоналну D тако да је $D = P^{-1}AP$. Израчунати и A^n, $n \in \mathbb{N}$.

5. Грам-Шмитовим поступком одредити неку ортонормирану базу потпростора U векторског простора $\mathbb{R}^4$ генерисаног векторима
$f_1 = (1,1,-3,-5)$, $f_2 = (8,0,-10,-14)$ и $f_3 = (-4,6,8,10)$.

6. Дат је векторски потпростор $W \subseteq \mathbb{R}^3$ решења једначине $2x+3y-z=0$.

   а) Наћи неке базе, као и димензије потпростора W и $W^{\perp}$.
   б) Одредити ортогоналне пројекције вектора $v=(0,5,1)$ на потпросторе W и $W^{\perp}$. Ком од потпростора W и $W^{\perp}$ је вектор v ближи?

СРЕЋНО!