

# Линеарна алгебра и аналитичка геометрија, 17.02.2016.

1. Решити систем линеарних једначина над пољем  $\mathbb{R}$ :

$$x - y + z - t = 1$$

$$2x + 2y + 2z + 2t = 2$$

$$3x + y + 3z + t = 3$$

$$4x + 3y + 2z + t = 4.$$

2. Нека су  $U$  и  $V$  потпростори векторског простора  $\mathbb{R}^4$  генерисани редом векторима:

$$u_1 = (1, 7, 0, 2), \quad v_1 = (1, 1, 1, 1),$$

$$u_2 = (2, 0, 1, 6), \quad v_2 = (2, -6, 2, 5),$$

$$u_3 = (1, -7, 1, 4); \quad v_3 = (7, -1, 7, 10).$$

Наћи по једну базу, као и димензије потпростора  $U$ ,  $V$ ,  $U + V$  и  $U \cap V$ .

Да ли је сума потпростора  $U$  и  $V$  директна?

3. Нека је  $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  линеарно пресликавање дефинисано са

$$L(x, y, z) = (x + 2y + 3z, 4x + 5y + 6z, 2x + 2y + 2z).$$

а) Одредити матрицу оператора  $L$  у односу на канонску базу простора  $\mathbb{R}^3$ .

б) Одредити ранг, дефект и неке базе језгра и слике оператора  $L$ . Да ли је оператор  $L$  инверзибилан? Одговор образложити.

4. Одредити карактеристични полином матрице  $A = \begin{bmatrix} 9 & -24 & 12 \\ 8 & -23 & 12 \\ 8 & -24 & 13 \end{bmatrix}$ .

Затим одредити сопствене вредности и сопствене векторе матрице  $A$ .

Испитати да ли је матрица  $A$  слична дијагоналној и у случају да јесте, наћи бар једну инверзибилну матрицу  $P$  и дијагоналну  $D$  тако да је  $D = P^{-1}AP$ . Израчунати и  $A^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

5. Грам-Шмитовим поступком одредити неку ортонормирану базу потпростора  $U$  векторског простора  $\mathbb{R}^4$  генерисаног векторима

$$f_1 = (1, 1, 1, 1), \quad f_2 = (5, 3, 5, 3) \quad \text{и} \quad f_3 = (1, 7, 3, 9).$$

6. Дат је векторски потпростор  $W \subseteq \mathbb{R}^4$  решења једначине  $x + y + z + t = 0$ .

а) Наћи неке базе, као и димензије потпростора  $W$  и  $W^\perp$ .

б) Одредити ортогоналне пројекције вектора  $v = (3, 4, -1, 2)$  на потпросторе  $W$  и  $W^\perp$ . Са којим од потпростора  $W$  и  $W^\perp$  вектор  $v$  заклапа мањи угао?

СРЕЋНО!