ГЕОМЕТРИЈА 3
задаци за рад на вежбама и самостални рад студената

Криве

1. Параметризовати елипсу, хиперболу и параболу дате:

(а) у канонском облику у Декартовом координатном систему;

(б) у поларном координатном систему чији је центар нека жижа криве другог реда, а оса се поклапа са осом криве која садржи жижу.

2. (а) Одредити неку параметризовану криву чији траг представља скуп свих тачака у равни које се добијају као траг фиксиране тачке на растојању d од центра диска полупречника r који се котрља без клизања по равној подлози. Скицирати.

(б) Испитати регуларност те криве у зависности од тога да ли је $d < r$, $d > r$ или $d = r$.

3. Дата је астроида својом једначином у Декартовим координатама $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, $a > 0$.

(а) Одредити неку параметризацију дате криве и доказати да њен траг представља трајекторију фиксиране тачке кружнице полупречника $\frac{a}{4}$ који се котрља без клизања изнутра по непокретном кругу полупречника a. Скицирати.

(б) Доказати да је дужина одсечка тангентне линије астроиде одређеног координатним осама константна.

(в) Одредити неку параметризовану криву на сфери $x^2+y^2+z^2 = a^2$ чија је ортогонална пројекција на xOy-раван дата крива.

4. Дата је кардиоида својом поларном једначином $\rho = a(1 + \cos\theta)$, $a > 0$.

(а) Доказати да је дата крива затворена и израчунати њену дужину.

(б) Доказати да траг ове криве представља трајекторију фиксиране тачке кружннице полупречника $\frac{a}{2}$ који се котрља без клизања споља по непокретном кругу полупречника $\frac{a}{2}$. Скицирати.

5. Дата је Архимедова спирала својом поларном једначином $\rho = a\theta$ $(a \neq 0)$.

(а) Доказати да дата крива представља трајекторију тачке која се креће константном брзином по полуправој са почетком у координатном почетку, која ротира константном угаоном брзином око координатног почетка.

(б) Одредити неку параметризовану криву на конусу $x^2 + y^2 = a^2z^2$ чија је ортогонална пројекција на xOy-раван дата крива.

6. Дата је логаритамска спирала својом поларном једначином $\rho = ca^\theta$ $(a > 0,\ a \neq 1,\ c > 0)$.

(а) Доказати да је угао између вектора положаја и тангенте логаритамске спирале константан.

(б) Одредити природну параметризацију дате криве узимајући за почетну тачку координатни почетак. Образложити зашто је то могуће.

(в) Доказати да су криве $\rho_1 = c_1a^\theta$ и $\rho_2 = c_2a^\theta$ $(c_1 \neq c_2)$ подударне међусобно.

7. (домаћи) Нека је $\mathcal{S}$ скуп свих тачака у координатној равни које задовољавају услов да је производ растојања од тачака $(-a, 0)$ и $(a, 0)$ једнак b^2 $(a, b > 0)$.

(а) Доказати да поларне координате тачака скупа $\mathcal{S}$ задовољавају једначину $\rho^4-2a^2\rho^2\cos(2\theta) = b^4-a^4$. Скицирати скуп $\mathcal{S}$ за $a < b$, $a = b$, $a > b$.

(б) Уколико је $a = b = 1$, доказати да је $\gamma(t) = \left(\frac{\sqrt{2}\cos t}{1+\sin^2 t}, \frac{\sqrt{2}\sin t\cos t}{1+\sin^2 t}\right)$, $t \in (0, 2\pi)$, једна параметризована крива чији је траг скуп $\mathcal{S}$ (без једне тачке), са самопресеком у координатном почетку.

(в) Одредити једначине оскулатпрних кругова и тангенти криве γ у координатном почетку.

8. Дата је ланчаница као график функције $y = a\mathrm{ch}\frac{x}{a}$, $a > 0$.

(а) Параметризовати дату криву на два начина - тако да јој означена кривина буде позитивна, а затим негативна. Одредити Френеов репер обе те параметризоване криве.

(б) Одредити геометријско место тачака (тј. њену инволуту) које описује фиксирана тачка праве која се лепи за ланчаницу без клизања, са почетком у тачки $(0, a)$.

9. Дата је трактриса $\beta(t) = 2(\cos t + \ln(\mathrm{tg}(\frac{t}{2})), \sin t)$, $t \in (0, \pi)$.

(а) Доказати да је одсечак тангенте дате криве одређен тачком криве и пресеком са $x-$осом константне дужине.

(б) Доказати да је $\gamma(s) = \begin{cases} (2e^{-\frac{s}{2}}, \int\limits_0^s \sqrt{1-e^{-t}}dt), & s \geqslant 0 \\ (2e^{\frac{s}{2}}, \int\limits_0^s \sqrt{1-e^{t}}dt), & s \leqslant 0 \end{cases}$ једна природна репараметризација дате криве.

(в) Одредити геометријско место центара оскулаторних кругова дате криве (тј. њену еволуту).

10. Дат је кружни хеликс $\beta(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$, $a > 0$, $b \neq 0$, $t \in \mathbb{R}$.

(а) Одредити Френеов репер, кривину и торзију ове криве. Израчунати углове које координатне равни Френеовог репера образују са $z-$осом.

(б) Одредити параметризоване криве на јединичној сфери коју описују тангентно/нормално/бинормално векторско поље дате криве транслирани у координатни почетак.

(в) Одредити параметризоване криве чији је траг на фиксираном растојању d од кружног хеликса дуж његових тангентних/нормалних/бинормалних линија.

11. Нека је α просторна крива која представља скуп решења једначине у цилиндричним координатама $z = \rho = e^{2\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$.

(а) Одредити параметризацију криве α, доказати да крива припада конусу $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ и скицирати је. Која крива је пројекција криве α на $xy-$раван?

(б) Одредити природну параметризацију криве узимајући за почетну тачку врх конуса (образложити зашто је то могуће).

(в) Одредити Френеов репер, кривину и торзију криве. Написати Френе-Сереове формуле у тачки $(0, e^{\pi}, e^{\pi})$ користећи добијене вредности.

(г) Одредити једначине оскулаторне, ректификационе и нормалне равни криве у тачки $(0, e^{\pi}, e^{\pi})$.

12. Дата је регуларна раванска крива α и тачке P и Q ван ње. Нека је M_0 тачка криве у којој збир растојања $PM + QM$, $M \in \alpha$, достиже минимум. Доказати да је симетрала угла $\measuredangle PM_0Q$ нормална на тангенту криве α у тачки M_0.

13. (а) Доказати да постоји јединствено векторско поље $X(t)$ (Дарбуово векторско поље) дуж криве $\alpha = \alpha(t)$ параметризоване произвољним параметром, за које важи: $T' = X \times T$, $N' = X \times N$, $B' = X \times B$.

(б) Одредити Дарбуов вектор кружног хеликса.

14. Доказати да за природно параметризовану криву важи:

(а) $[B', B'', B'''] = \tau^5(\frac{\kappa}{\tau})'$, $\kappa, \tau \neq 0$;

(б) (домаћи) $[T', T'', T'''] = \kappa^5(\frac{\tau}{\kappa})'$, $\kappa \neq 0$.

15. Одредити параметризацију раванске криве (до на директну изометријску трансформацију равни) чија је дата означена кривина у зависности од природног параметра s и доказати да је у питању назначена крива:

(а) $\kappa_z(s) = \frac{1}{as+b}$ $(a \neq 0)$ - логаритамска спирала;

(б) $\kappa_z(s) = \frac{a}{a^2+s^2}$ $(a \neq 0)$ - ланчаница;

(в) $\kappa_z(s) = \frac{1}{\sqrt{as}}$ $(a > 0)$ - кружна инволута.

16. (а) Доказати да је слика криве $\alpha(t) = (\sqrt{2}\cos t + \sin t + 1, -\sqrt{2}\sin t + 2, -\sqrt{2}\cos t + \sin t + 3)$, $t \in \mathbb{R}$, кружница. Одредити раван и неку сферу у чијем пресеку лежи слика дате криве.

(б) Доказати да је слика криве $\beta(t) = (5\cos t, 3\cos t - 4\sin t, 4\cos t + 3\sin t)$, $t \in \mathbb{R}$, елипса. Одредити раван и неки елипсоид у чијем пресеку лежи слика дате криве.

17. Дата је параметризована крива $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ са $\alpha(t) = \begin{cases} (t, 0, e^{-1/t^2}), & t > 0 \\ (t, e^{-1/t^2}, 0), & t < 0 \\ (0, 0, 0), & t = 0 \end{cases}$.

(а) Испитати регуларност дате криве и израчунати њену кривину. У којим тачкама је кривина једнака 0?

(б) Израчунати торзију дате криве у свим тачкама. Да ли је крива раванска?

18. (а) Ако све тангентне линије регуларне криве садрже фиксну тачку, тада слика те криве припада некој правој. Доказати.

(б) Ако све нормалне линије регуларне криве садрже фиксну тачку, тада слика те криве припада неком кругу. Доказати.

19. (а) Нека је $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$, $0 \in I$, $\kappa \neq 0$, природно параметризована крива. Доказати да је $[X - \alpha(0), \alpha'(0), \alpha''(0)] \equiv 0$, $X = (x, y, z)$, једначина оскулаторне равни у тачки $\alpha(0)$.

(б) Доказати да се све оскулаторне равни неке регуларне криве са кривином различитом од нуле садрже фиксну тачку акко је та крива раванска.

20. (а) Нека је $\alpha(t)$, $t \in I$, регуларна крива. Доказати да је $\alpha(t)$ сферна крива ако и само ако постоји $c \in \mathbb{R}^3$ тако да је $(\alpha(t) - c) \perp T(t)$ за свако $t \in I$.

(б) Доказати да све нормалне равни неке регуларне криве са кривином различитом од нуле садрже фиксну тачку акко је та крива сферна.

21. Нека је α природно параметризована крива која припада сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

(а) Изразити вектор положаја тачака криве α у Френеовој бази те криве.

(б) Доказати да за кривину κ и торзију $\tau \neq 0$ криве α важи $\tau^2(R^2 - \frac{1}{\kappa^2}) = (\frac{\kappa'}{\kappa^2})^2$. Специјално, важи $\kappa \geqslant \frac{1}{R}$.

(в) Доказати да је вектор убрзања дате криве α супротан вектору положаја тачке са криве ако и само ако је крива део великог круга.

22. Уопштена завојна линија (хеликс) је просторна крива чији тангентни вектор заклапа константан угао $\theta \in (0, \pi)$, $\theta \neq \frac{\pi}{2}$, са фиксираним ненула вектором $v \in \mathbb{R}^3$. Уопштени хеликс лежи на цилиндру чије су изводнице одређене правцем v и тачкама криве. Доказати да је крива уопштена завојна линија акко важи један од услова:

(а) нормале су нормалне на v;

(б) бинормале граде константан угао са v;

(в) $\frac{\kappa}{\tau} = \mathrm{const}$.

23. Доказати да је дата крива уопштени хеликс, одредити фиксиран вектор v и угао θ између вектора v и тангенте криве γ у произвољној тачки, као и једначину цилиндра на коме лежи та крива:

(а) $\gamma(t) = (3t, 3t^2, 2t^3)$, $t \in \mathbb{R}$;

(б) $\gamma(t) = (\mathrm{ch} t, \mathrm{sh} t, t)$, $t \in \mathbb{R}$.

24. Еволута регуларне природно параметризоване криве $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ је крива $\beta : I \to \mathbb{R}^2$ дефинисана у тачкама где је $\kappa(s) \neq 0$, дата са $\beta(s) = \alpha(s) + \frac{1}{\kappa(s)} N(s)$, а њена инволута је крива $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ дата са $\gamma(s) = \alpha(s) + (c - s)T(s)$, $c \in I$. Испитати регуларност и одредити означену кривину, кривину и Френеов репер кривих β и γ преко одговарајућих величина криве α.

25. Нека је $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ природно параметризована крива, кривине различите од нуле, таква да вектор положаја сваке тачке $\alpha(s)$ лежи у ректификационој равни криве у тој тачки (тзв. ректификациона крива).

(а) Доказати да је однос торзије и кривине дате криве линеарна функција по природном параметру s.

(б) Уколико је $\beta : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{S}^2$ природно параметризована сферна крива, доказати да је крива $\alpha : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}^3$ дата са $\alpha(s) = \frac{1}{\cos s}\beta(s)$ ректификациона крива.

ГЕОМЕТРИЈА 3
задаци за рад на вежбама

Површи

1. Одредити неке параметризоване површи и њихове једначине у Декартовим координатама, описати координатне линије, израчунати њихове векторе брзине и одредити тачке у којима су оне нормалне међусобно, уколико је траг површи:

(а) хиперболички цилиндар одређен хиперболом $x^2 - y^2 = 1$, $z = 0$, а изводнице су одређене правцем $(2, 0, 1)$;

(б) параболички конус одређен параболом $z = y^2$, $x = 0$, и тачком $(2, 0, 1)$.

2. Дата је параметризација Мебијусове траке $r(u, v) = \left((1 + u \sin \frac{v}{2}) \cos v, (1 + u \sin \frac{v}{2}) \sin v, u \cos \frac{v}{2}\right)$, $-\frac{1}{2} < u < \frac{1}{2}$, $-\pi < v < \pi$. Израчунати нормално векторско поље Мебијусове траке $n(0, v)$ дуж централне кружнице $u = 0$, а затим доказати да је $\lim\limits_{v \to -\pi} r(0, v) = \lim\limits_{v \to \pi} r(0, v)$ и $\lim\limits_{v \to -\pi} n(0, v) = -\lim\limits_{v \to \pi} n(0, v)$.

3. Дат је кружни конус једначином у Декартовим координатама $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

(а) Одредити векторе брзине координатних линија и угао између њих уколико је дати конус локално параметризован прво као график функције, а затим као ротациона површ.

(б) Израчунати коефицијенте прве фундаменталне форме обе површи и упоредити их у одговарајућим тачкама површи користећи координатну трансформацију између површи.

(в) Доказати да криве $\alpha(t) = (e^{\frac{t}{\sqrt{2}}} \cos t, e^{\frac{t}{\sqrt{2}}} \sin t, e^{\frac{t}{\sqrt{2}}})$ и $\beta(t) = (e^{-\frac{t}{\sqrt{2}}} \cos t, e^{-\frac{t}{\sqrt{2}}} \sin t, e^{-\frac{t}{\sqrt{2}}})$, $t \in \mathbb{R}$, полове углове између меридијана и паралела на конусу.

(г) Одредити тангентну раван конуса дуж кривих α и β, као и углове које та раван заклапа са координатним равнима Френеовог репера тих кривих.

4. Дат је једнограни хиперболоид једначином у Декартовим координатама $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

(а) Параметризовати ову површ као ротациону.

(б) Одредити тангентну раван хиперболоида у тачки $(0, \sqrt{2}, 1)$ и њен пресек са датим хиперболоидом. Доказати да вектори $(1, 0, 0)$, $(0, 1, \sqrt{2})$, $(-1, 1, \sqrt{2})$, $(1, 1, \sqrt{2})$ припадају тангентном простору хиперболоида у тачки $(0, \sqrt{2}, 1)$ и одредити неке криве чији траг припада хиперболоиду и имају ове векторе брзине у тачки $(0, \sqrt{2}, 1)$.

(в) Доказати да на једнограном хиперболоиду постоје две фамилије мимоилазних правих тако да свака тачка хиперболоида припада тачно једној правој из сваке фамилије. Репараметризовати хиперболоид као линијску површ.

(г) Одредити неки уопштени хеликс на датом хиперболоиду чији траг описује материјална тачка која се креће константном брзином по правој која припада хиперболоиду и ротира око $z-$осе константном угаоном брзином.

5. Дат је торус добијен ротацијом круга $(x - 4)^2 + z^2 = 4$ у xOz равни око $z-$осе.

(а) Одредити неку параметризовану површ чији је траг део торуса и израчунати површину торуса.

(б) Одредити нормално векторско поље торуса дуж мање кружнице на торусу која припада равни $z = 0$ и представити га у Френеовој бази те кружнице. Одредити пресек торуса и тангентне равни у тачки $(0, 2, 0)$.

(в) Одредити нормално векторско поље торуса дуж мање кружнице на торусу која припада равни $z = \sqrt{3}$ и представити га у Френеовој бази те кружнице. Одредити пресек торуса и тангентне равни у тачки $(0, 3, \sqrt{3})$.

6. Нека је $r : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{S}^2$, $r(\theta, \varphi) = (\cos\theta \cos\varphi, \cos\theta \sin\varphi, \sin\theta)$, параметризована површ чији је траг део сфере $\mathbb{S}^2$.

(а) Израчунати површину дела јединичне сфере између два меридијана и две паралеле.

(б) Доказати да су криве на сфери које заклапају константан угао ψ са меридијанима дате једначином $\gamma(\theta) = r(\theta, \pm \mathrm{tg}\psi \ln \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) + C)$, $C \in \mathbb{R}$. Ове криве називају се локсодроме.

(в) Израчунати дужину локсодроме која се добија за $C = 0$.

7. (а) Доказати да је параметризација јединичне сфере добијена стереографском пројекцијом конформна. Одредити координатне линије такве параметризације.

(б) Показати да су локсодроме на сфери слике одговарајућих логаритамских спирала из равни $z = 0$ при стереографској пројекцији.

8. Дата је елементарна површ $r(u, v) = (\mathrm{sh}u \cos v, \mathrm{sh}u \sin v, v)$, $u \in \mathbb{R}^+$, $v \in \mathbb{R}$.

(а) Доказати да је дата површ конформна репараметризација хеликоида $f(s, t) = (s \cos t, s \sin t, t)$, $s \in \mathbb{R}^+$, $t \in \mathbb{R}$, па затим одредити две фамилије кривих на хеликоиду које секу хеликсе на хеликоиду под углом $\frac{\pi}{4}$.

(б) Израчунати геодезијску и нормалну кривину координатних линија датог хеликоида.

9. (а) Доказати да се тангентна раван површи дуж асимптотске линије на површи поклапа са оскулаторном равни криве.

(б) Доказати да се тангентна раван површи дуж геодезијске линије на површи поклапа са ректификационом равни криве.

10. Нека је $\alpha = \alpha(s)$, $s \in I$, природно параметризована крива чија је кривина $\kappa \neq 0$ и торзија $\tau \neq 0$. Дефинишимо линијску површ параметризацијом $r(s,v) = \alpha(s) + vB(s)$, $s \in I$, $v \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, при чему је $B = B(s)$ бинормално векторско поље криве α.

(а) Израчунати геодезијску и нормалну кривину координатних линија дате површи.

(б) Одредити тип свих тачака на површи.

11. Дата је параметризована крива $\gamma(t) = (\sin t - t\cos t, \cos t + t\sin t, t^2)$, $t \in \mathbb{R}$, чији траг припада кружном параболоиду $z = x^2 + y^2 - 1$.

(а) Израчунати геодезијску и нормалну кривину криве γ на датом параболоиду.

(б) Израчунати коефицијенте друге фундаменталне форме две параметризације параболоида (као график функције и као ротациона површ) и упоредити их у одговарајућим тачкама површи користећи координатну трансформацију између тих параметризација.

(в) Израчунати главне, Гаусову и средњу кривину датог параболоида у тачкама $(0,0,-1)$ и $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

(г) Нека је $\mathcal{D}(r)$ површина дела параболоида где је $x^2 + y^2 < r^2$, а $\tilde{\mathcal{D}}(r)$ површина слике тог дела параболоида на сфери $\mathbb{S}^2$ при Гаусовом пресликавању. Доказати да је $\lim\limits_{r\to 0} \dfrac{\tilde{\mathcal{D}}(r)}{\mathcal{D}(r)}$ једнак Гаусовој кривини параболоида у тачки $(0,0,0)$.

12. Одредити параметризацију неке криве у нормалном сечењу хиперболичког параболоида $z = x^2 - y^2$ у тачки $(0,0,0)$ и правцу тангентног вектора w и израчунати њену обичну, нормалну и геодезијску кривину у тој тачки, уколико вектор w:

(а) полови један од углова између главних праваца;

(б) заклапа угао $\frac{\pi}{6}$ са неким главним правцем.

13. Нека је дата минимална површ (средња кривина једнака је нули).

(а) Доказати да су асимптотски правци у хиперболичким тачкама минималне површи полове углове између главних праваца.

(б) Доказати да је збир нормалних кривина минималне површи дуж било која два међусобно ортогонална правца тангентног простора једнак нули.

(в) Доказати да су коефицијенти прве форме параметризације сфере индуковане Гаусовим пресликавањем минималне површи пропорционални коефицијентима прве форме те површи у одговарајућој хиперболичкој тачки.

14. Описати скуп тачака тангентне равни на растојању $\frac{1}{\sqrt{|\kappa_n|}}$ од фиксиране тачке регуларне површи у којој се посматра тангентна раван, где је κ_n нормална кривина површи дуж одговарајућег правца.

15. Нека је $\gamma(s) = r(u(s), v(s))$ природно параметризована крива на површи $r = r(u,v)$ и $[T_\gamma, S_\gamma, n_\gamma]$ придружена Дарбуова база криве γ. Геодезијска торзија τ_g криве γ је дефинисана следећим формулама (аналогне Френе-Сереовим формулама): $T' = \kappa_n n + \kappa_g S$, $S' = -\kappa_g T - \tau_g n$, $n' = -\kappa_n T + \tau_g S$. Доказати да важи:

(а) $\tau_g = -\mathrm{II}(T,S) = (\kappa_1 - \kappa_2)\sin\varphi\cos\varphi$, где је φ угао између једног главног вектора и T_γ;

(б) $\tau_g = \tau - \frac{d\theta}{ds}$, где је θ угао између векторских поља n_γ и N_γ.

16. Дата је Енеперова површ $r(u,v) = (u - \frac{u^3}{3} + uv^2, -v + \frac{v^3}{3} - vu^2, u^2 - v^2)$, $(u,v) \in \mathbb{R}^2$.

(а) Доказати да се параметризација сфере индукована Гаусовим пресликавањем Енеперове површи поклапа са оном добијеном стереографском пројекцијом.

(б) Одредити главне и асимптотске правце дате површи и одредити углове између њих.

(в) Одредити главне линије (линије кривине) и асимптотске линије дате површи.

17. Репараметризовати следеће површи тако да важи $F = f = 0$:

(а) хеликоид $r(u,v) = (u\cos v, u\sin v, av)$, $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, $a \neq 0$;

(б) седло $z = xy$.

18. Одредити геодезијске линије кружног цилиндра.

19. Нека је $\alpha(s) = r(u(s), v(s))$ природно параметризована геодезијска линија на површи $r = r(u, v)$ за коју важи $E = E(u)$, $F = 0$, $G = G(u)$. Доказати да важи $\sqrt{G}\cos\theta = C = \text{const}$, при чему је $\theta(s)$ угао између геодезијске линије и v-параметарске криве $u = \text{const}$.

20. Нека је $r = r(u, v)$ регуларна површ на којој су u и v-параметарске криве ортогоналне и коефицијенти прве основне форме зависе само од параметра u. Тада се геодезијске линије увек могу одредити интеграцијом и важи:

(а) u-параметарске криве ($v = \text{const}$) су геодезијске линије;

(б) v-параметарске криве ($u = \text{const} = u_0$) су геодезијске линије акко је $G_u(u_0) = 0$;

(в) крива облика $\gamma(u) = r(u, v(u))$ је геодезијска линија акко је $v = \displaystyle\int \frac{C\sqrt{E}}{\sqrt{G}\sqrt{G - C^2}}du$, $C = \text{const}$.

21. Доказати да је паралела ротационе површи геодезијска линија акко су тангенте меридијана паралелне оси ротације у свим тачкама паралеле.

22. (а) Доказати да је крива $\gamma(t) = (t\cos(\ln\frac{t}{\sqrt{t^2+a^2}+a}), t\sin(\ln\frac{t}{\sqrt{t^2+a^2}+a}), a\ln\frac{t}{\sqrt{t^2+a^2}+a})$, $t > 0$, геодезијска линија на хеликоиду $r(u, v) = (u\cos v, u\sin v, av)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, $a > 0$.

(б) Доказати да је крива $\gamma(t) = (a\mathrm{ch}t\cos(\ln(\mathrm{th}\frac{t}{2})), a\mathrm{ch}t\sin(\ln(\mathrm{th}\frac{t}{2})), at)$, $t > 0$, геодезијска линија на катеноиду $r(u, v) = (a\mathrm{ch}u\cos v, a\mathrm{ch}u\sin v, au)$, $u \in \mathbb{R}$, $v \in (0, 2\pi)$, $a > 0$.

23. (а) Одредити формуле нормалне пројекције (нормално на $z-$осу) и централне пројекције (из координатног почетка) сфере $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ на цилиндар $x^2 + y^2 = R^2$, $R > 0$.

(б) Доказати да ове пројекције нису изометрије, али да нормална пројекција чува површине.

24. Дате су параметризоване површи $r(u, v) = (u\cos v, u\sin v, a\ln u)$, $u > 0$, $v \in (0, 2\pi)$, $a > 0$, и $\sigma(s, t) = (s\cos t, s\sin t, at)$, $s > 0$, $t \in (0, 2\pi)$, $a > 0$. Доказати да постоји дифеоморфизам између датих површи који чува Гаусову кривину површи, али да не постоји изометрија између датих површи.

25. Дати су хеликоид и катеноид као параметризоване површи $f, g : \mathbb{R} \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$ са $f(u, v) = (\mathrm{ch}u\cos v, \mathrm{ch}u\sin v, u)$ и $g(u, v) = (\mathrm{sh}u\sin v, -\mathrm{sh}u\cos v, v)$. Дефинишимо фамилију параметризованих површи h_t, за $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, са $h_t(u, v) = \cos t g(u, v) + \sin t f(u, v)$.

(а) Доказати да су све површи h_t међусобно изометричне.

(б) Доказати да се главне (асимптотске) линије хеликоиду изометријом из дела (а) сликају на асимптотске (главне) линије на катеноиду.

26. Нека је $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ природно параметризована крива. Тангентна површ криве α је линијска површ дата параметризацијом $r(s, v) = \alpha(s) + vT(s)$, $s \in I$, $v > 0$.

(а) Доказати да је површ r изометрична (делу) равни експлицитно одређујући формуле те изометрије.

(б) Одредити експлицитне формуле ове изометрије уколико је крива кружни хеликс $\alpha(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$, $t \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $b \neq 0$.

27. (а) Доказати да је цилиндрична површ $r(u, v) = (f(u), g(u), v)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, изометрична (делу) равни експлицитно одређујући формуле те изометрије.

(б) Одредити експлицитне формуле изометрије између цилиндричне површи $r(u, v) = (u - \sin u, 1 - \cos u, v)$, $u \in (0, 2\pi)$, $v \in \mathbb{R}$, и дела равни.

28. Дат је конус $z = a\sqrt{x^2 + y^2}$, $a > 0$, $(x, y) \neq (0, 0)$.

(а) Доказати да је дати конус локално изометричан равни експлицитно одређујући формуле те изометрије.

(б) Израчунати најкраће растојање између тачака $A(0, 1, \sqrt{3})$ и $B(0, -1, \sqrt{3})$ на конусу $z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$ и одредити све геодезијске линије које садрже ове две тачке.

29. Доказати да не постоји елементарна површ $r(u, v)$ за коју важи $E = 1$, $F = 0$, $G = \cos^2 u$, $e = \cos^2 u$, $f = 0$, $g = 1$.

30. Нека су коефицијенти прве форме конформно параматеризоване површи $E = G = \lambda(u, v)$, $F = 0$. Доказати да је Гаусова кривина површи дата са $K = -\frac{1}{2\lambda}\triangle(\ln\lambda)$, где је $\triangle$ Лапласијан функције две променљиве $\triangle = \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}$.