# ГЕОМЕТРИЈА 3
## задаци за самостални рад студената, школска 2020/21

## Криве

**1.** Скицирати следеће:

(а) трагове раванских кривих датих својом параметризацијом:

$$(\operatorname{ctg} t, \operatorname{tg} t),\ \ t \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right); \qquad \left(\frac{t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right),\ \ t \in \mathbb{R}; \qquad (2e^t, e^{2t}),\ \ t \in \mathbb{R};$$

(б) трагове просторних кривих датих својом параметризацијом:

$$(\ln t, 2\ln t, 2\ln t),\ \ t \in \mathbb{R}^+; \qquad (\ln t, \ln 2t, \ln 2t),\ \ t \in \mathbb{R}^+; \qquad (\ln t, \ln^2 t, \ln^2 t),\ \ t \in \mathbb{R}^+;$$

(в) скупове тачака у равни датих једначином у Декартовим координатама и одредити неке параметризоване криве чији су трагови ови скупови:

$$x^3 = y^4, \qquad x^3 = y^5, \qquad x^3 = y^6.$$

**2.** Доказати да је крива чија је поларна параметризација:

(а) $\rho = \cos\theta$ кружница; (б) $\rho = \dfrac{1}{\cos\theta}$ права; (в) $\rho = \dfrac{1}{1+\cos\theta}$ парабола; (г) $\rho^2 = \dfrac{1}{\cos 2\theta}$ хипербола;

(д) $\rho = \cos^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$ кардиоида.

**3.** (а) (*Диоклесова цисоида*) Нека је $OA$ пречник круга полупречника $a$ и права $t$ тангента тог круга која садржи тачку $A$. Нека полуправа $l$ са почетком у тачки $O$ сече тангенту $t$ у тачки $C$ и круг у тачки $B$. Уколико је $M$ тачка полуправе $l$ таква да је $OM = BC$, одредити параметризацију криве чији траг описује тачка $M$ када полуправа $l$ ротира око тачке $O$.

(б) (*Строфоида*) Дата је права $l$ паралелно са $y-$осом и на растојању $a$ од ње. Произвољна полуправа $l'$ чији је почетак координатни почетак $O$ сече у тачки $A$ праву $l$. Нека круг чији је центар тачка $A$, који додирује $x-$осу у тачки $B$, сече полуправу $l'$ у тачкама $M$ и $M'$. Одредити параметризацију криве чији траг описују тачке $M$ и $M'$ када полуправа $l'$ ротира око тачке $O$.

**4.** (а) Доказати да тангента у произвољној тачки циклоиде (уколико постоји) садржи највишу тачку круга који садржи тачку у којој се посматра тангента и чијим котрљањем је дата циклоида добијена.

(б) Одредити инволуту и еволуту циклоиде.

**5.** Одредити раванску криву (до на директну изометрију равни) ако је дата њена означена кривина $\kappa_z(s) = \dfrac{-1}{\sqrt{2as}}$, $a > 0$ ($s > 0$ је природни параметар криве) и доказати да је добијена крива инволута круга.

**6.** Дата је крива поларном једначином $\rho = \sin^3 \frac{\theta}{3}$.

(а) Испитати регуларност и израчунати дужину дате криве, уколико је њен траг затворена крива.

(б) Одредити Френеов репер и кривину дате криве.

(в) Одредити углове које тангента дате криве заклапа са координатним осама.

(г) Одредити једначине два оскулаторна круга криве у тачки самопресека $(0, \frac{1}{8})$.

**7.** Крива дата параметризацијом $\alpha(t) = (3\cos t - \cos 3t, 3\sin t - \sin 3t)$, $t \in \mathbb{R}$, зове се нефроида.

(а) Доказати да је дата крива епициклоида која се добија као траг фиксиране тачке круга полупречника 1 који се котрља изнутра по кругу полупречника 2 који је фиксиран и има центар у координатном почетку ($t$ је угао између позитивног дела $x-$осе и вектора положаја центра мањег круга). Испитати регуларност дате криве и скицирати је.

(б) Доказати да крива задовољава следеће једначине у поларним и Декартовим координатама:
$(\frac{\rho}{2})^{\frac{2}{3}} = (\sin\frac{\theta}{2})^{\frac{2}{3}} + (\cos\frac{\theta}{2})^{\frac{2}{3}}, \qquad (x^2 + y^2 - 4)^3 = 108y^2.$

(в) Доказати да је траг криве $\alpha$ затворена крива и израчунати њену дужину.

(г) Одредити функцију дужине лука, означену и неозначену кривину дате криве за $t \in (0, \pi)$, узимајући за почетну тачку прво $(0, 4)$, а затим $(2, 0)$. Доказати да за погодно одабрану функцију дужине лука $s$ и кривину $\kappa(s)$ важи формула $4\rho^2 + s^2 = 12s$, где је $\rho(s)$ полупречник кривине дате криве.

(д) Одредити неку глатку угаону функцију $\varphi(s)$ која представља угао који тангента криве заклапа са позитивним делом $x-$осе и проверити да ли важи $\kappa_z = \frac{d\varphi}{ds}$, $s-$природни параметар.

(ђ) Одредити параметризацију еволуте дате криве и скицирати је. Која је крива у питању?

(е) Одредити неку параметризовану криву $\beta(t)$ чији траг припада сфери полупречника 4 са центром у координатном почетку, а ортогонална пројекција представља траг дате нефроиде.

(ж) Изразити јединични вектор правца $z-$осе, као и вектор положаја тачака сферне криве $\beta$ у Френеовој бази криве $\beta$. Израчунати углове које ректификациона, оскулаторна и нормална раван криве $\beta$ граде са тангентном равни сфере у одговарајућој тачки, као и са вектором правца $z-$осе.

**8.** Дата је параметризована крива $\alpha(t) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}e^t, \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-t}, t\right)$, $t \in \mathbb{R}$.

(а) Одредити неки фиксирани јединични вектор $v$ који заклапа константне углове са векторима Френеове базе дате криве у свакој тачки и одредити те углове.

(б) Доказати да траг дате криве припада хиперболичком цилиндру $xy = \frac{1}{2}$, као и цилиндрима $x + y = \sqrt{2}\operatorname{ch} z$ и $x - y = \sqrt{2}\operatorname{sh} z$. Одредити углове између дате криве и изводница ових цилиндара. Да ли је ова крива уопштени хеликс на неком од ових цилиндара?

**9.** Дата је параметризована крива $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, f(t))$, $t \in \mathbb{R}$, $f$ је глатка функција.

(а) Доказати да оскулаторне равни дате криве заклапају константан угао за $z-$осом уколико је $f(t) = 2\sin^2 \frac{t}{2}$.

(б) Доказати да се нормалне равни дате криве секу у једној тачки уколико је $f(t) = 2\cos\frac{t}{2}$.

**10.** Дата је параметризована крива $\alpha(t) = (2t - \sin(2t), -\cos(2t), 4\sin t)$, $t \in \mathbb{R}$.

(а) Доказати да тангентно векторско поље дате криве, транслирано у координатни почетак, описује Вивијанијеву криву на јединичној сфери.

(б) Одредити криву чији је траг скуп тачака на растојању од дате криве једнаком четворострукој кривини дате криве, у смеру нормалног векторског поља криве.

(в) Доказати да је ортогонална пројекција дате криве на $xOy$ раван циклоида, а на $yOz$ раван део параболе.

**11.** Дата је параметризована крива $\gamma(t) = (e^t(\sin t + \cos t), e^t(\sin t - \cos t), e^t)$, $t \in \mathbb{R}$.

(а) Доказати да дата крива припада конусу $z = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$, а затим одредити њену репараметризацију $\beta(u)$, где је $u = t - \frac{\pi}{4}$.

(б) Доказати да је ортогонална пројекција дате криве на $xOy$ раван логаритамска спирала.

(в) Доказати да траг дате криве тежи координатном почетку када $t \to -\infty$, као и да крива има коначну дужину на сваком интервалу $(-\infty, t]$, $t \in \mathbb{R}$. Одредити затим природну параметризацију дате криве узимајући за почетну тачку координатни почетак.

(г) Израчунати Френеов репер, кривину и торзију дате криве, као и углове које вектори Френеовог репера заклапају са $z-$осом.

**12.** Нека је $\alpha$ регуларна крива. Слика криве $\beta$ састоји од тачака које су на константном растојању $d$ од одговарајућих тачака слике криве $\alpha$ дуж нормала криве $\alpha$.

(а) Испитати регуларност криве $\beta$. Ако је крива $\alpha$ затворена раванска крива, доказати да се може одабрати довољно мало $d$ тако да је крива $\beta$ регуларна.

(б) Изразити кривину криве $\beta$ преко кривине криве $\alpha$ и $d$.

(в) Ако је крива $\alpha$ елипса, одредити све вредности константе $d$ за које је крива $\beta$ такође елипса.

(г) Ако је крива $\alpha$ кружни хеликс, одредити све вредности константе $d$ за које је крива $\beta$ такође кружни хеликс.

**13.** Доказати да је природно параметризована крива $\alpha$ класе $C^4$, са кривином различитом од нуле, један уопштени хеликс ако и само важи $[\alpha'', \alpha''', \alpha^{IV}] = 0$.

**14.** Доказати да је сферна крива константне кривине део круга.

**15.** Нека је $\alpha(s)$, $s \in I$, $0 \in I$, крива параметризована дужином лука, при чему за торзију важи $\tau(s) > 0$ за све $s \in I$. Крива $\beta$ задата је са $\beta(s) = \displaystyle\int_0^s B(u)du$, где је $B(s)$ вектор бинормале криве $\alpha$. Доказати да је крива $\beta$ такође параметризована дужином лука и изразити кривину, торзију, тангентно, нормално, бинормално и Дарбуово векторско поље криве $\beta$ преко одговарајућих елемената криве $\alpha$.

**16.** Нека је $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ регуларна крива параметризована дужином лука $s$, кривине $\kappa \neq 0$ и $0 \in I$.

(а) Доказати да за све тачке $s$ у довољно малој околини тачке $0 \in I$ важи

$$\alpha(s) = \alpha(0) + \left(s - \frac{\kappa_0^2}{6}s^3 + o(s^3)\right) T(0) + \left(\frac{\kappa_0}{2}s^2 + \frac{\kappa_0'}{6}s^3 + o(s^3)\right) N(0) + \left(\frac{\kappa_0\tau_0}{6}s^3 + o(s^3)\right) B(0),$$

где је $\kappa_0 = \kappa(0)$, $\kappa_0' = \kappa'(0)$, $\tau_0 = \tau(0)$.

(б) Дефинишимо криву $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ са $\beta(t) = \alpha(0) + tT_0 + \frac{t^2}{2}\kappa_0 N_0 + \frac{t^3}{6}\kappa_0\tau_0 B_0$. Доказати да су кривина, торзија и оскулаторна раван криве $\beta$ у тачки $t = 0$ исте као кривина, торзија и оскулаторна раван криве $\alpha$ у тачки $s = 0$.

(в) Доказати да је кривина просторне криве $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ у тачки $s_0 \in I$ једнака кривини раванске криве (у истој тачки) која се добија пројектовањем на оскулаторну раван у тачки $\alpha(s_0)$.