ГЕОМЕТРИЈА 3
задаци за самостални рад студената, школска 2019/20

Површи

1. Дата је парабола $\alpha(t) = (2t, t^2, 0)$, $t \in \mathbb{R}$. Параметризовати праволинијску површ која представља унију правих које секу дату параболу и имају за векторе правца у одговарајућим тачкама:

(а) $\beta(t) = (1, 2, 3)$; (б) $\beta(t) = (1 - 2t, 2 - t^2, 3)$; (в) $\beta(t) = (2, 2t, 1)$.

У свим случајевима одредити површ другог реда која је добијена на тај начин (једначина и скица) и описати координатне линије.

2. Одредити параметризовану линијску површ чији траг представља унију правих које секу кружни хеликс $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $t \in \mathbb{R}$, и за векторе правца имају:

(а) тангентно; (б) нормално;

векторско поље хеликса у одговарајућој тачки. У оба случаја испитати регуларност добијене површи, описати координатне линије површи (параметризација и назив криве) и одредити тачке у којима су оне нормалне међусобно.

3. Одредити јединично нормално векторско поље површи дуж Вивијанијеве криве $\alpha(t) = (1 + \cos t, \sin t, 2\sin\frac{t}{2})$, $t \in (-2\pi, 2\pi)$, уколико је та површ:

(а) сфера $x^2 + y^2 + z^2 = 4$; (б) кружни цилиндар $(x-1)^2 + y^2 = 1$.

Одредити тачке у којима се тангентне равни ових површи (дуж Вивијанијеве криве) поклапају.

4. Посматрајмо скуп тачака M_a $(a \neq 0)$ задат имплицитном једначином $xyz = a^3$.

(а) Доказати да је скуп M_a дисјунктна унија трагова четири елементарне површи. За једну од њих описати координатне линије и израчунати угао између њих.

(б) Доказати да тангентна раван у произвољној тачки ове површи заклапа са координатним осама тетраедар константне запремине.

5. Дат је кружни конус једначином у Декартовим координатама $z^2 = 3(x^2 + y^2)$ и крива $\gamma(t) = (t\cos t, t\sin t, \sqrt{3}t)$, $t \in \mathbb{R}$, чији траг припада датом конусу.

(а) Одредити углове које крива γ заклапа са меридијанима и паралелама на конусу.

(б) Одредити угао између оскулаторне равни криве γ и тангентне равни конуса дуж криве γ.

6. Дат је хиперболички параболоид једначином у Декартовим координатама $y = x^2 - z^2$.

(а) Одредити тангентну раван параболоида у тачки $(2, 3, 1)$ и њен пресек са датим параболоидом. Доказати да вектор $(2, 2, 3)$ припада тангентном простору параболоида у тачки $(2, 3, 1)$ и одредити неку криву чији траг припада параболоиду, а вектор брзине у тачки $(2, 3, 1)$ износи $(2, 2, 3)$.

(б) Доказати да на датом параболоиду постоје две фамилије мимоилазних правих тако да свака тачка параболоида припада тачно једној правој из сваке фамилије. Параметризовати параболоид као линијску површ.

7. Дат је торус добијен ротацијом круга $(x-5)^2 + z^2 = 9$ у xOz равни око $z-$осе.

(а) Доказати да је раван $3x = 4z$ тангентна раван конуса у двема тачкама, као и да ова раван сече дати торус по круговима полупречника 5 чији су центри у тачкама $(0, \pm 3, 0)$.

(б) Израчунати углове под којим ове две кружнице секу меридијане и паралеле торуса.

8. (а) Доказати да је параметризација јединичне сфере добијена ротацијом полукружнице $(\frac{1}{\operatorname{ch} t}, 0, \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t})$, $t \in \mathbb{R}$, око $z-$осе, конформна.

(б) Одредити две фамилије кривих на сфери које полове углове између меридијана и паралела.

9. Дата је елементарна површ $r(u, v) = (\operatorname{ch} u(\cos v + \sin v), \operatorname{ch} u(\sin v - \cos v), \sqrt{2}u)$, $u \in \mathbb{R}$, $v \in (0, 2\pi)$.

(а) Репараметризовати дату површ помоћу координата (t, s) за које важи $t = u$, $s = v - \frac{\pi}{4}$, а затим доказати да је та површ катеноид.

(в) Одредити две фамилије кривих на датом катеноиду које заклапају угао $\frac{\pi}{6}$ са $v-$координатним линијама.

10. Доказати да је друга фундаментална форма површи идентички једнака нули акко је површ део равни.

11. Доказати да произвољна сферна крива има константну нормалну кривину, а затим као последицу извести закључак да је обична кривина сферне криве ограничена одоздо са $\frac{1}{R}$ ($R-$полупречник сфере).

12. Нека је $\alpha(s)$, $s \in I$, природно параметризована крива кривине $0 < \kappa < C$, $C = \text{const}$ и $r(s,t)$ линијска површ дата са $r(s,t) = \alpha(s) + \varepsilon(\cos t\, N(s) + \sin t\, B(s))$, $s \in I$, $t \in (-\pi, \pi)$, $\varepsilon = \text{const} > 0$, где су $N(s)$, $B(s)$ нормално и бинормално векторско поље криве α.

(а) Доказати да је дата површ регуларна за довољно мало ε.

(б) Одредити број асимптотских праваца у свим тачкама површи (дискутовати и образложити одговор).

(в) Доказати да у свакој тачки површи постоје тачно два главна правца (тј. да нема умбиличких тачака на површи), као и да се они поклапају са правцима вектора брзине координатних линија акко је крива α раванска.

13. Дата је површ $z = x^3 - 3xy^2$.

(а) Доказати да $y-$оса и све криве дате параметризацијом $\gamma(t) = (t, at, (1-3a)t^3)$, $a = \text{const}$, $t \in \mathbb{R}$, имају нормалну кривину једнаку нули у тачки $(0,0,0)$.

(б) Доказати да су међу кривама из дела (а) тачно три асимптотске линије на датој површи.

14. Дата је параметризована површ $r : (0, +\infty) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$ са $r(\rho, \theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, \ln\rho)$.

(а) Израчунати Гаусову кривину у произвољној тачки дате површи. Који је тип тачке $(0, e, 1)$?

(б) Одредити асимптотске и главне правце у тачки $(0, e, 1)$ дате површи.

(в) Одредити асимптотске и главне линије које садрже тачку $(0, e, 1)$ дате површи.

15. Одредити све умбиличке тачке на елиптичком параболоиду $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$, $a \neq b$, а затим у тим тачкама израчунати главне кривине датог параболоида.

16. Нека је α природно параметризована асимптотска линија на регуларној површи, чија је кривина различита од нуле свуда. Доказати да за торзију τ_α криве α и Гаусову кривину K_α површи дуж криве α важи $|\tau_\alpha| = \sqrt{-K_\alpha}$.

17. Дата је параметризована површ $r(u,v) = (u - \sin u \operatorname{ch} v, 1 - \cos u \operatorname{ch} v, -4\sin\frac{u}{2}\operatorname{sh}\frac{v}{2})$, $u, v \in \mathbb{R}$.

(а) Доказати да су криве у пресеку дате површи и равни $z = 0$ геодезијске линије на датој површи.

(б) Одредити главне и асимптотске правце (уколико постоје) дате површи у тачки $(\frac{\pi}{2} - 1, 1, 0)$.

18. Одредити све ротационе површи код којих су све координатне линије геодезијске.

19. Дата је површ параметризована поларним координатама $(r, \varphi) \in (0, +\infty) \times (0, 2\pi)$, са коефицијентима прве фундаменталне форме $E = f(r)$, $F = 0$, $G = r^2$, где је f нека позитивна глатка функција.

(а) Доказати да се скуп геодезијских линија састоји од координатних линија $\varphi = \text{const}$ и кривих облика $f(r, \varphi(r))$, где је $\varphi(r) = \displaystyle\int \frac{C\sqrt{f(r)}}{r\sqrt{r^2 - C^2}}dr$, где је C произвољна реална константа.

(б) Одредити експлицитно све геодезијске линије равни параметризоване поларним координатама.

20. Псеудосфера је ротациона површ $r(u,v) = (\frac{\cos v}{\operatorname{ch} u}, \frac{\sin v}{\operatorname{ch} u}, u - \operatorname{th} u)$, $u \in \mathbb{R}$, $v \in (0, 2\pi)$, добијена ротацијом око $z-$осе трактрисе у $xz-$равни.

(а) Доказати да је формулама $x = v$, $y = \operatorname{ch} u$, дата локална изометрија псеудосфере и површи $h(x,y)$ чији су коефицијенти прве фундаменталне форме $E = G = \frac{1}{y^2}$, $F = 0$.

(б) Доказати да су геодезијске на псеудосфери сви меридијани, као и криве дате једначином $\operatorname{ch}^2 u + (v - D)^2 = \frac{1}{C^2}$, $C, D = \text{const}$.

(в) Доказати да је Гаусова кривина псеудосфере константна и једнака -1.

21. Дат је хеликоид $r(u,v) = (u\cos v, u\sin v, v)$, $(u,v) \in \mathbb{R}^2$.

(а) Доказати да је дати хеликоид изометричан површи
$h(t,s) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{ch} t\cos s + \frac{1}{2}\operatorname{sh} t \sin s, \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{ch} t \sin s - \frac{1}{2}\operatorname{sh} t\cos s, \frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{1}{2}s\right)$, $(t,s) \in \mathbb{R}^2$.

(б) Одредити главне кривине и главне правце датог хеликоида, а затим доказати да је збир нормалних кривина хеликоида дуж било која два међусобно ортогонална правца тангентне равни једнак нули.

22. Дата је параметризована површ $r(u,v) = (\cos u - v\sin u, \sin u + v\cos u, 2(u+v))$, $u \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R}^+$.

(а) Доказати да је дата површ линијска површ коју чине делови тангенти кружног хеликса (тзв. тангентна површ кружног хеликса), а затим да је изометрична делу $xy-$равни у коме важи $x^2 + y^2 > 25$.

(б) Одредити најкраће растојање између тачака $(-\pi, 1, 3\pi)$ и $(-1, -\pi, 0)$ на датој површи.

23. Дата је елементарна површ $r(u,v)=(u,\operatorname{ch}u,v)$, $(u,v)\in\mathbb{R}^2$.

(а) Доказати да је дата површ изометрична равни одређујући експлицитно формуле те изометрије.

(б) Одредити криве (локсодроме) које заклапају константан угао $\frac{\pi}{6}$ са координатним линијама $v=\text{const}$.

(в) Доказати да све геодезијске линије на површи чине координатне линије, као и криве дате условом $v=A\operatorname{sh}u+B$, $A,B=\text{const}$, $A\neq 0$.

24. Дат је конус $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

(а) Доказати да је дати конус локално изометричан равни одређујући експлицитно формуле те изометрије.

(б) Одредити све геодезијске линије које садрже тачке $(0,\sqrt{2},\sqrt{2})$ и $(2\cos\frac{\pi}{2\sqrt{2}},2\sin\frac{\pi}{2\sqrt{2}},2)$ на датом конусу и израчунати најкраће растојање између ових тачака по конусу.

(в) Доказати да се скуп свих геодезијских линија на конусу састоји од изводница конуса и кривих облика $\gamma(t)=\left(\frac{D\cos t}{\cos(\frac{t}{\sqrt{2}}+C)},\frac{D\sin t}{\cos(\frac{t}{\sqrt{2}}+C)},\frac{D}{\cos(\frac{t}{\sqrt{2}}+C)}\right)$, $t\in\mathbb{R}$, $C,D=\text{const}$, $D\neq 0$.

(г) Одредити једначине кривих на датом конусу које заклапају угао $\dfrac{\pi}{3}$ са изводницама конуса.

25. Доказати да не постоји елементарна површ $r(u,v)$ за коју важи $E=1$, $F=0$, $G=1$, $e=1$, $f=0$, $g=-1$.