Геометрија 3, писмени испит, рок септембар 1, 31.08.2021.

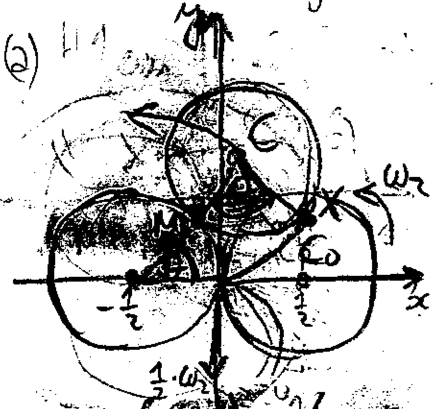
1. Дата је крива својом једначином у поларним координатама $\rho(\theta)=2\sin^2\frac{\theta}{2}$.

(а) Доказати да је дата крива кардиоида, чији траг представља путању тачке са кружнице полупречника $\frac{1}{2}$ која ротира по фиксираној кружници $(x+\frac{1}{2})^2+y^2=\frac{1}{4}$, крећући из координатног почетка.

(б) Доказати да је дата крива затворена, одредити функцију дужине лука са почетком у координатном почетку и израчунати њену дужину.

(в) Доказати да је еволута дате криве опет једна кардиоида.

(а)



У почетном тренутку $t=0$ центар кружнице која се котрља по кружници $(x+\frac{1}{2})^2+y^2=\frac{1}{4}$ налази се у тачки $C_0(\frac{1}{2},0)$. Нека је угаона брзина ротације једнака ω_1. Након времена t, центар C_0 се око тачке $(-\frac{1}{2},0)$ (центра кружнице $(x+\frac{1}{2})^2+y^2=\frac{1}{4}$) заротира за угао $\theta=\omega_1 t$ и прелази у тачку $C(a,b)$, за коју важи

$$\begin{pmatrix}a-(-\frac{1}{2})\\ b-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{2}-(-\frac{1}{2})\\ 0-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}.$$

Дакле $a=-\frac{1}{2}+\cos\theta$, $b=\sin\theta$. Додирна тачка у тренутку $t=0$ је координатни почетак $O(0,0)$ и она се након времена t заротира за угао $\theta=\omega_1 t$ и прелази у тачку $M(x_0,y_0)$, за коју важи

$$\begin{pmatrix}x_0-(-\frac{1}{2})\\ y_0-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0-(-\frac{1}{2})\\ 0-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\cos\theta\\ \frac{1}{2}\sin\theta\end{pmatrix}.$$

Дакле $x_0=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\theta$, $y_0=\frac{1}{2}\sin\theta$. Кружница, која се котрља по кружници $(x+\frac{1}{2})^2+y^2=\frac{1}{4}$, ротира се и око свог центра угаоном брзином ω_2. Како је котрљање без клизања, укупна линијска брзина у додирној тачки мора бити 0, тј. $\frac{1}{2}\omega_1-\frac{1}{2}\omega_2=0$. Дакле $\omega_1=\omega_2$. Тачка M се ротира око тачке C за угао $\omega_2\cdot t=\omega_1\cdot t=\theta$ и прелази у тачку $X(x,y)$. Дакле,

$$\begin{pmatrix}x-a\\ y-b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_0-a\\ y_0-b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cancel{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\cos\theta-(\cancel{-\frac{1}{2}}+\cos\theta)\\ \frac{1}{2}\sin\theta-\sin\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\cos\theta\\ -\frac{1}{2}\sin\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\cos^2\theta+\frac{1}{2}\sin^2\theta\\ -\frac{1}{2}\cos\theta\sin\theta-\frac{1}{2}\cos\theta\sin\theta\end{pmatrix}$$

$$x=a-\frac{1}{2}\cos^2\theta+\frac{1}{2}\sin^2\theta=-\frac{1}{2}+\cos\theta-\frac{1}{2}\cos^2\theta+\frac{1}{2}\sin^2\theta=-\frac{1}{2}(1+\cos^2\theta-\sin^2\theta)+\cos\theta=$$
$$=-\frac{1}{2}(\cos^2\theta+\cos^2\theta)+\cos\theta=-\frac{1}{2}\cdot 2\cos^2\theta+\cos\theta=\cos\theta(1-\cos\theta)=2\sin^2\frac{\theta}{2}\cos\theta$$

$$y=b-\frac{1}{2}\cos\theta\sin\theta-\frac{1}{2}\cos\theta\sin\theta=\sin\theta-\sin\theta\cos\theta=\sin\theta(1-\cos\theta)=2\sin^2\frac{\theta}{2}\sin\theta.$$

Дакле, тачка са кружнице која се котрља без клизања по фиксираној кружници $(x+\frac{1}{2})^2+y^2=\frac{1}{4}$ припада кривој $\alpha(\theta)=(2\sin^2\frac{\theta}{2}\cos\theta, 2\sin^2\frac{\theta}{2}\sin\theta)$, а то је задата крива, јер крива која у поларним координатама има једначину $\rho(\theta)=2\sin^2\frac{\theta}{2}$ јесте управо крива $\alpha:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$, дата са $\alpha(\theta)=(2\sin^2\frac{\theta}{2}\cos\theta, 2\sin^2\frac{\theta}{2}\sin\theta)$.

(б) Најпре треба приметити да је

$$2\sin^2\frac{\theta}{2}\cos\theta=(1-\cos\theta)\cos\theta=\cos\theta-\cos^2\theta=\cos\theta-\frac{1}{2}(1+\cos2\theta)=\cos\theta-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos2\theta \text{ и}$$
$$2\sin^2\frac{\theta}{2}\sin\theta=(1-\cos\theta)\sin\theta=\sin\theta-\cos\theta\sin\theta=\sin\theta-\frac{1}{2}\sin2\theta.$$

Основни период функције $\cos\theta$ је 2π, а основни период функције $\cos2\theta$ је $\frac{2\pi}{2}=\pi$. Стога је основни период функције $\cos\theta-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos2\theta$ је 2π. Такође, основни период функције $\sin\theta$ је 2π, а основни период функције $\sin2\theta$ је $\frac{2\pi}{2}=\pi$. Према томе, основни период функције $\sin\theta-\frac{1}{2}\sin2\theta$ је 2π, па је 2π основни период функције α. Зато је за испитивање криве α довољно посматрати домен који је неки отворени интервал дужине 2π нпр. $(0,2\pi)$. Крива α је затворена јер је

$$\lim_{\theta\to0+}\alpha(\theta)=\lim_{\theta\to0+}\left(2\sin^2\frac{\theta}{2}\cos\theta, 2\sin^2\frac{\theta}{2}\sin\theta\right)=(0,0) \text{ и } \lim_{\theta\to2\pi-}\alpha(\theta)=\lim_{\theta\to2\pi-}\left(2\sin^2\frac{\theta}{2}\cos\theta, 2\sin^2\frac{\theta}{2}\sin\theta\right)=(0,0),$$

тј. обе граничне вредности су коначне тачке и једнаке су. Како се координатни почетак гранична тачка када $\theta\to0+$, функција дужине лука с почетком у координатном почетку је $s:(0,2\pi)\to\mathbb{R}$, $s(\theta)=\int_0^\theta\|\alpha'(u)\|du$.

$$\alpha'(\theta)=\left(2\cdot2\sin\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2}\cdot\frac{1}{2}\cos\theta+2\sin^2\frac{\theta}{2}\cdot(-\sin\theta), 2\cdot2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sin\theta+2\sin^2\frac{\theta}{2}\cdot\cos\theta\right)$$
$$\alpha'(\theta)=\left(2\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}\cos\theta-\sin\frac{\theta}{2}\sin\theta\right), 2\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}\sin\theta+\sin\frac{\theta}{2}\cos\theta\right)\right)=$$
$$\alpha'(\theta)=\left(2\sin\frac{\theta}{2}\cdot\cos\left(\frac{\theta}{2}+\theta\right), 2\sin\frac{\theta}{2}\sin\left(\frac{\theta}{2}+\theta\right)\right)=\left(2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}, 2\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right)$$
$$\|\alpha'(\theta)\|^2=4\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{3\theta}{2}+4\sin^2\frac{\theta}{2}\sin^2\frac{3\theta}{2}=4\sin^2\frac{\theta}{2}\Rightarrow\|\alpha'(\theta)\|=2\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|$$

Како је $\theta\in(0,2\pi)$, то је $\frac{\theta}{2}\in(0,\pi)$, па је $\sin\frac{\theta}{2}>0$.

$$\Rightarrow\|\alpha'(\theta)\|=2\sin\frac{\theta}{2}\Rightarrow s(\theta)=\int_0^\theta\|\alpha'(u)\|du=\int_0^\theta2\sin\frac{u}{2}du=4\int_0^\theta\sin\frac{u}{2}\,\frac{du}{2}=4\cdot\left(-\cos\frac{u}{2}\right)\Big|_0^\theta=$$
$$=-4\left(\cos\frac{\theta}{2}-\cos\frac{0}{2}\right)=-4\left(\cos\frac{\theta}{2}-1\right)=4\left(1-\cos\frac{\theta}{2}\right)=4\cdot2\sin^2\frac{\theta}{4}=8\sin^2\frac{\theta}{4}$$

Дужина криве је ~~заправо~~ $\int_0^{2\pi}\|\alpha'(\theta)\|d\theta=\lim_{\theta\to2\pi+}s(\theta)=\lim_{\theta\to2\pi+}8\cdot\sin^2\frac{\theta}{4}=8\cdot\sin^2\frac{2\pi}{4}=8.$

(в) Еволута криве $\alpha:(0,2\pi)\longrightarrow\mathbb{R}^2$ је крива $\beta:(0,2\pi)\to\mathbb{R}^2$ таква да је $\beta(\theta)=\alpha(\theta)+\frac{1}{\kappa(\theta)}N(\theta)$, где је $\kappa:(0,2\pi)\to\mathbb{R}$ кривина криве α, а $N:(0,2\pi)\to\mathbb{R}^2$ је нормални вектор.

$$\alpha'(\theta)=\left(2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2},\ 2\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right) \leftarrow \text{из дела б}$$

$\|\alpha'(\theta)\|=2\sin\frac{\theta}{2}>0$, јер $\theta\in(0,2\pi)$, па $\frac{\theta}{2}\in(0,\pi)$, те је $\sin\frac{\theta}{2}>0$.

$\Rightarrow$ α је регуларна у свим тачкама $\theta\in(0,2\pi)$.

$$\alpha''(\theta)=\left(\cancel{2}\cos\frac{\theta}{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\cos\frac{3\theta}{2}+\cancel{2}\sin\frac{\theta}{2}\cdot\left(-\sin\frac{3\theta}{2}\right)\cdot\frac{3}{\cancel{2}},\ \cancel{2}\cos\frac{\theta}{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\sin\frac{3\theta}{2}+\cancel{2}\sin\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{3\theta}{2}\cdot\frac{3}{\cancel{2}}\right)$$

$$\alpha''(\theta)=\left(\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}-3\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2},\ \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}+3\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}\right)$$

$$\alpha'(\theta)\times\alpha''(\theta)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2} & 2\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2} & 0\\ \cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}-3\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}+3\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2} & 0\end{vmatrix}=$$

$$=\left(0,0,\cancel{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}}+6\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{3\theta}{2}-\cancel{2\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}}+6\sin^2\frac{\theta}{2}\sin^2\frac{3\theta}{2}\right)=$$

$$=\left(0,0,6\sin^2\frac{\theta}{2}\right)\Rightarrow\|\alpha'(\theta)\times\alpha''(\theta)\|=6\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$B(\theta)=\frac{\alpha'(\theta)\times\alpha''(\theta)}{\|\alpha'(\theta)\times\alpha''(\theta)\|}=\frac{\left(0,0,6\sin^2\frac{\theta}{2}\right)}{6\sin^2\frac{\theta}{2}}=(0,0,1)$$

$$T(\theta)=\frac{\alpha'(\theta)}{\|\alpha'(\theta)\|}=\frac{\left(2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2},\ 2\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right)}{2\sin\frac{\theta}{2}}=\left(\cos\frac{3\theta}{2},\sin\frac{3\theta}{2}\right)$$

$$N(\theta)=B(\theta)\times T(\theta)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 0 & 1\\ \cos\frac{3\theta}{2} & \sin\frac{3\theta}{2} & 0\end{vmatrix}=\left(-\sin\frac{3\theta}{2},\cos\frac{3\theta}{2},0\right)$$

$$\kappa(\theta)=\frac{\|\alpha'(\theta)\times\alpha''(\theta)\|}{\|\alpha'(\theta)\|^3}=\frac{{}^{3}\cancel{6}\cancel{\sin^2\frac{\theta}{2}}}{4\cancel{8}\sin^{\cancel{3}}\frac{\theta}{2}}=\frac{3}{4\sin\frac{\theta}{2}}$$

Еволута је $\beta(\theta)=\alpha(\theta)+\frac{1}{\kappa(\theta)}N(\theta)=\left(2\sin^2\frac{\theta}{2}\cos\theta,\ 2\sin^2\frac{\theta}{2}\sin\theta\right)+\frac{4\sin\frac{\theta}{2}}{3}\cdot\left(-\sin\frac{3\theta}{2},\cos\frac{3\theta}{2}\right)=$

$=\left(2\sin^2\frac{\theta}{2}\cos\theta-\frac{4}{3}\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2},\ 2\sin^2\frac{\theta}{2}\sin\theta+\frac{4}{3}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}\right)$. Како је $\sin\frac{3\theta}{2}=\sin\left(\frac{\theta}{2}+\theta\right)=$ $=\sin\frac{\theta}{2}\cos\theta+\cos\frac{\theta}{2}\sin\theta$ и $\cos\frac{3\theta}{2}=\cos\left(\frac{\theta}{2}+\theta\right)=\cos\frac{\theta}{2}\cos\theta-\sin\frac{\theta}{2}\sin\theta$, следи да је

$$\alpha(\theta)=\left(2\sin^2\frac{\theta}{2}\cos\theta-\frac{4}{3}\sin\frac{\theta}{2}\cdot\left(\sin\frac{\theta}{2}\cos\theta+\cos\frac{\theta}{2}\sin\theta\right),\ 2\sin^2\frac{\theta}{2}\sin\theta+\frac{4}{3}\sin\frac{\theta}{2}\cdot\left(\cos\frac{\theta}{2}\cos\theta-\sin\frac{\theta}{2}\sin\theta\right)\right)=$$

$$=\left(\underline{2\sin^2\frac{\theta}{2}\cos\theta}-\underline{\frac{4}{3}\sin^2\frac{\theta}{2}\cos\theta}-\frac{4}{3}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\sin\theta,\ \underline{2\sin^2\frac{\theta}{2}\sin\theta}+\frac{4}{3}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\theta\underline{-\frac{4}{3}\sin^2\frac{\theta}{2}\sin\theta}\right)=$$

$$=\left(\frac{2}{3}\sin^2\frac{\theta}{2}\cos\theta-\frac{2}{3}\cdot2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cdot\sin\theta,\ \frac{2}{3}\sin^2\frac{\theta}{2}\sin\theta+\frac{2}{3}\cdot2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\theta\right)=$$

$$=\left(\frac{\cancel{2}}{3}\cdot\frac{1-\cos\theta}{\cancel{2}}\cdot\cos\theta-\frac{2}{3}\cdot\sin\theta\cdot\sin\theta,\ \frac{\cancel{2}}{3}\cdot\frac{1-\cos\theta}{\cancel{2}}\cdot\sin\theta+\frac{2}{3}\cdot\sin\theta\cos\theta\right)=$$

$= \left(\frac13\cos\theta - \frac13\cos^2\theta - \frac23\sin^2\theta, \frac13\sin\theta - \frac13\cos\theta\sin\theta + \frac23\sin\theta\cos\theta\right) =$

$= \left(\frac13\cos\theta - \frac23\cos^2\theta - \frac23\sin^2\theta + \frac13\cos^2\theta, \frac13\sin\theta + \frac13\sin\theta\cos\theta\right) = \left(\frac13\cos\theta + \frac13\cos^2\theta - \frac23, \frac13\sin\theta(1+\cos\theta)\right) =$

$= \left(-\frac23 + \frac13\cos\theta(1+\cos\theta), \frac13\sin\theta(1+\cos\theta)\right) = \left(-\frac23 + \frac23\cos^2\frac\theta2\cos\theta, \frac23\cos^2\frac\theta2\sin\theta\right) =$

$= \left(-\frac23, 0\right) + \frac13\cdot\left(2\cos^2\frac\theta2\cos\theta, 2\cos^2\frac\theta2\sin\theta\right)$. Дакле, крива β је настала од кардиоиде $\left(2\cos^2\frac\theta2\cos\theta, 2\cos^2\frac\theta2\sin\theta\right)$ најпре хомотетијом с коефицијентом $\frac13$, а потом транслацијом за вектор $\left(-\frac23, 0\right)$. Како су хомотетија и транслација трансформације сличности, тј. не мењају облик фигуре, еволута β је заиста кардиоида.

2. Дата је параметризована површ $r(u,v) = \left(u - \sin u\,\mathrm{ch}\,v, 1 - \cos u\,\mathrm{ch}\,v, 4\sin\frac u2\,\mathrm{sh}\frac v2\right)$, $u, v \in \mathbb{R}$.

(а) Доказати да је дата параметризација конформна и одредити две фамилије кривих које полове углове између координатних линија.

(б) Одредити средњу кривину дате површи у тачки $(2\pi, 0, 0)$, као и главне и асимптотске правце (уколико постоје) дате површи у тој тачки.

(в) Доказати да су криве у пресеку дате површи и равни $z=0$ геодезијске линије на датој површи.

(г) Одредити све главне линије међу координатним линијама дате површи.

(а) Да би параметризација била конформна, потребно је да коефицијенти прве основне форме задовоље једнакости $E=G$, $F=0$.

$r_u(u,v) = \left(1 - \cos u\,\mathrm{ch}\,v, \sin u\,\mathrm{ch}\,v, \cancel{4}^{2}\cos\frac u2\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\mathrm{sh}\frac v2\right)$

$r_v(u,v) = \left(-\sin u\,\mathrm{sh}\,v, -\cos u\,\mathrm{sh}\,v, \cancel{4}^{2}\sin\frac u2\cdot\mathrm{ch}\frac v2\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\right)$

$E(u,v) = \langle r_u(u,v), r_u(u,v)\rangle = (1-\cos u\,\mathrm{ch}\,v)^2 + \sin^2 u\,\mathrm{ch}^2 v + 4\cos^2\frac u2\,\mathrm{sh}^2\frac v2 = 1 - 2\cos u\,\mathrm{ch}\,v + \underline{\cos^2 u\,\mathrm{ch}^2 v} + \underline{\sin^2 u\,\mathrm{ch}^2 v} + 4\cos^2\frac u2\,\mathrm{sh}^2\frac v2 = 1 - 2\cos u\,\mathrm{ch}\,v + \mathrm{ch}^2 v + 4\cos^2\frac u2\,\mathrm{sh}^2\frac v2 = 1 - 2\cos u\,\mathrm{ch}\,v + \mathrm{ch}^2 v + \cancel{4}\cdot\frac{1+\cos u}{\cancel{2}}\cdot\frac{\mathrm{ch}\,v - 1}{\cancel{2}} = \cancel{1} - 2\cos u\,\mathrm{ch}\,v + \mathrm{ch}^2 v + \mathrm{ch}\,v - \cancel{1} + \cos u\,\mathrm{ch}\,v - \cos u = \mathrm{ch}^2 v - \cos u\,\mathrm{ch}\,v + \mathrm{ch}\,v - \cos u = \mathrm{ch}\,v(\mathrm{ch}\,v - \cos u) + \mathrm{ch}\,v - \cos u = (\mathrm{ch}\,v - \cos u)(\mathrm{ch}\,v + 1)$

$F(u,v) = \langle r_u(u,v), r_v(u,v)\rangle = (1 - \cos u\,\mathrm{ch}\,v)(-\sin u\,\mathrm{sh}\,v) - \sin u\cos u\,\mathrm{ch}\,v\,\mathrm{sh}\,v + 4\cos\frac u2\sin\frac u2\,\mathrm{sh}\frac v2\,\mathrm{ch}\frac v2 =$

$= -\sin u\,\mathrm{sh}\,v + \cancel{\cos u \sin u\,\mathrm{ch}\,v\,\mathrm{sh}\,v} - \cancel{\sin u\cos u\,\mathrm{ch}\,v\,\mathrm{sh}\,v} + 2\cos\frac u2\sin\frac u2\cdot 2\,\mathrm{sh}\frac v2\,\mathrm{ch}\frac v2 =$

$= \cancel{-\sin u\,\mathrm{sh}\,v} + \cancel{\sin u\,\mathrm{sh}\,v} = 0$

$G(u,v) = \underline{\sin^2 u\,\mathrm{sh}^2 v + \cos^2 u\,\mathrm{sh}^2 v} + 4\sin^2\frac u2\,\mathrm{ch}^2\frac v2 = \mathrm{sh}^2 v + \cancel{4}\cdot\frac{1-\cos u}{\cancel{2}}\cdot\frac{\mathrm{ch}\,v+1}{\cancel{2}} = \mathrm{ch}^2 v - \cancel{1} + \mathrm{ch}\,v + \cancel{1} - \cos u\,\mathrm{ch}\,v - \cos u = \mathrm{ch}\,v(\mathrm{ch}\,v - \cos u) + \mathrm{ch}\,v - \cos u = (\mathrm{ch}\,v - \cos u)(\mathrm{ch}\,v + 1) = E(u,v)$

Дакле, параметризација јесте конформна, што значи да се углови између кривих на површи могу мерити у (u,v)-равни. Како су координатне линије заправо $u=u_0$ и $v=v_0$, а то су праве паралелне редом v- и u-оси, следи да су у (u,v)-равни криве које полове углове између координатних линија заправо $v=u+n_1$ и $v=-u+n_2$, $n_1,n_2\in\mathbb{R}$. Према томе, пошто је r конформна параметризација, следи да су $\alpha_{n_1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$, $\alpha_{n_1}(u)=r(u,u+n_1)$ и $\beta_{n_2}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$, $\beta_{n_2}(u)=r(u,-u+n_2)$, криве на површи које полове углове између координатних линија.

(б) Најпре треба одредити вредности параметара u,v тако да је $r(u,v)=(2\pi,0,0)$.

$\left(u-\sin u\operatorname{ch}v,\ 1-\cos u\operatorname{ch}v,\ 4\sin\frac{u}{2}\operatorname{sh}\frac{v}{2}\right)=(2\pi,0,0)$

$4\sin\frac{u}{2}\operatorname{sh}\frac{v}{2}=0 \Rightarrow \sin\frac{u}{2}=0$ или $\operatorname{sh}\frac{v}{2}=0 \Rightarrow \frac{u}{2}=k\pi, k\in\mathbb{Z}$ или $\frac{v}{2}=0$

1° $\frac{u}{2}=k\pi$, тј. $u=2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$

Тада је $\sin u=0$, па је $2\pi=u-\sin u\operatorname{ch}v=2k\pi-0=2k\pi$. Дакле $k=1$, тј. $u=2\pi$

Остаје још да се реши једначина $1-\cos u\operatorname{ch}v=0$.

$1-\cos(2\pi)\operatorname{ch}v=0$

$1-\operatorname{ch}v=0$

$\operatorname{ch}v=1 \Rightarrow v=0$

Провера: $r(2\pi,0)=\left(2\pi-\sin(2\pi)\operatorname{ch}0,\ 1-\cos(2\pi)\operatorname{ch}0,\ 4\sin\frac{2\pi}{2}\operatorname{sh}\frac{0}{2}\right)=(2\pi-0\cdot1,\ 1-1\cdot1,\ 4\cdot\sin\pi\operatorname{sh}0)=$
$=(2\pi,0,0)$ ✓

2° $\frac{v}{2}=0$, тј. $v=0$

Тада је $1-\cos u\operatorname{ch}v=0$, тј. $1-\cos u\cdot\operatorname{ch}0=0$. Дакле $\cos u=1$, па је $u=2k\pi$, за неко $k\in\mathbb{Z}$. Онда је $\sin u=0$, па је $2\pi=u-\sin u\operatorname{ch}v=2k\pi-0=2k\pi$, тј. $k=1$.

Дакле, решење је $u=2\pi$, $v=0$.

Потом треба одредити коефицијенте друге основне форме у тачки $u=2\pi, v=0$.
За то је потребно одредити вектор нормале у тачки $u=2\pi, v=0$.

$r_u(2\pi,0)=(1-1\cdot1,\ 0\cdot1,\ 2\cdot(-1)\cdot0)=(0,0,0) \Rightarrow E(2\pi,0)=0=G(2\pi,0)$

$\|r_u(2\pi,0)\times r_v(2\pi,0)\|=0 \Rightarrow$ површ није регуларна у тачки $u=2\pi, v=0$.

То значи да не постоји тангентни простор у тачки $u=2\pi, v=0$, па није могуће ни говорити о средњој кривини, главним и асимптотским правцима у тачки $u=2\pi, v=0$.

(в) У пресеку површи r и равни $z=0$ је задовољен услов $4\sin\frac{u}{2}\operatorname{sh}\frac{v}{2}=0$, те је $\sin\frac{u}{2}=0$ или $\operatorname{sh}\frac{v}{2}=0$. Дакле, у пресеку површи r и равни $z=0$ налазе се координатне линије $u=2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ и $v=0$. Да би се проверило које од њих јесу геодезијске, потребно је израчунати геодезијске кривине сваке од њих. Нека је $\alpha_k:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$, $\alpha_k(v)=r(2k\pi,v)$. За тачке на њој је

$$r_u(2k\pi,v)=\left(1-\operatorname{ch}v,\,0,\,2\cdot(-1)^k\cdot\operatorname{sh}\frac{v}{2}\right)$$

$$r_v(2k\pi,v)=(0,\,-\operatorname{sh}v,\,0)$$

$$r_u(2k\pi,v)\times r_v(2k\pi,v)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1-\operatorname{ch}v & 0 & 2\cdot(-1)^k\operatorname{sh}\frac{v}{2}\\ 0 & -\operatorname{sh}v & 0\end{vmatrix}=\left(2(-1)^k\operatorname{sh}\frac{v}{2}\operatorname{sh}v,\,0,\,(1-\operatorname{ch}v)(-\operatorname{sh}v)\right)$$

$$\|r_u(2k\pi,v)\times r_v(2k\pi,v)\|^2=4\operatorname{sh}^2\frac{v}{2}\operatorname{sh}^2v+(1-\operatorname{ch}v)^2\operatorname{sh}^2v=\operatorname{sh}^2v\left(4\operatorname{sh}^2\frac{v}{2}+1-2\operatorname{ch}v+\operatorname{ch}^2v\right)=$$

$$=\operatorname{sh}^2v\left(\cancel{4}^{2}\cdot\frac{\operatorname{ch}v-1}{\cancel{2}}+1-2\operatorname{ch}v+\operatorname{ch}^2v\right)=\operatorname{sh}^2v\left(\cancel{2\operatorname{ch}v}-2+1-\cancel{2\operatorname{ch}v}+\operatorname{ch}^2v\right)=\operatorname{sh}^2v(\operatorname{ch}^2v-1)=\operatorname{sh}^4v$$

$$\Rightarrow\|r_u(2k\pi,v)\times r_v(2k\pi,v)\|=\operatorname{sh}^2v\Rightarrow n(2k\pi,v)=\frac{\left(2\cdot(-1)^k\operatorname{sh}\frac{v}{2}\operatorname{sh}v,\,0,\,(\operatorname{ch}v-1)\operatorname{sh}v\right)}{\operatorname{sh}^2v}$$

$$n(2k\pi,v)=\left(\frac{2\cdot(-1)^k\operatorname{sh}\frac{v}{2}}{\operatorname{sh}v},\,0,\,\frac{\operatorname{ch}v-1}{\operatorname{sh}v}\right)$$

$$\alpha_k(v)=r(2k\pi,v)=(2k\pi,\,1-\operatorname{ch}v,\,0)$$

$$\alpha_k'(v)=(0,\,-\operatorname{sh}v,\,0)$$

$$\alpha_k''(v)=(0,\,-\operatorname{ch}v,\,0)$$

$$k_g^{\alpha}(v)=\frac{[n(2k\pi,v),\alpha_k'(v),\alpha_k''(v)]}{\|\alpha_k'(v)\|^3}$$ – геодезијска кривина криве α_k

$$[n(2k\pi,v),\alpha_k'(v),\alpha_k''(v)]=\begin{vmatrix}\frac{2\cdot(-1)^k\operatorname{sh}\frac{v}{2}}{\operatorname{sh}v} & 0 & \frac{\operatorname{ch}v-1}{\operatorname{sh}v}\\ 0 & -\operatorname{sh}v & 0\\ 0 & -\operatorname{ch}v & 0\end{vmatrix}=0\Rightarrow$$ α_k су геодезијске за све $k\in\mathbb{Z}$

Нека је $\beta:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$, $\beta(u)=r(u,0)$. За тачке на њој је

$$r_u(u,0)=(1-\cos u,\,\sin u,\,0)$$

$$r_v(u,0)=\left(0,\,0,\,2\sin\frac{u}{2}\right)$$

$$r_u(u,0)\times r_v(u,0)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1-\cos u & \sin u & 0\\ 0 & 0 & 2\sin\frac{u}{2}\end{vmatrix}=\left(2\sin u\sin\frac{u}{2},\,-2\sin\frac{u}{2}(1-\cos u),\,0\right)$$

$$\|r_u(u,0)\times r_v(u,0)\|^2=4\sin^2u\sin^2\frac{u}{2}+4\sin^2\frac{u}{2}(1-\cos u)^2=4\sin^2\frac{u}{2}\left(\sin^2u+1-2\cos u+\cos^2u\right)=$$

$$=4\sin^2\frac{u}{2}(2-2\cos u)=8\sin^2\frac{u}{2}\cdot(1-\cos u)=8\sin^2\frac{u}{2}\cdot2\sin^2\frac{u}{2}=16\sin^4\frac{u}{2}$$

$$\Rightarrow \|r_u(u,0)\times r_v(u,0)\| = 4\sin^2\frac{u}{2} \Rightarrow n(u,0) = \frac{\left(2\sin u \sin\frac{u}{2},\ -2\sin\frac{u}{2}(1-\cos u),\ 0\right)}{4\sin^2\frac{u}{2}}$$

$$n(u,0) = \left(\frac{\cancel{2\cdot 2}\sin\frac{u}{2}\cos\frac{u}{2}\,\cancel{\sin\frac{u}{2}}}{\cancel{4\sin^2\frac{u}{2}}},\ -\frac{\cancel{2}\sin\frac{u}{2}\cdot\cancel{2\sin^2\frac{u}{2}}}{\cancel{4\sin^2\frac{u}{2}}},\ 0\right) = \left(\cos\frac{u}{2},\ -\sin\frac{u}{2},\ 0\right)$$

$$\beta(u) = r(u,0) = (u-\sin u,\ 1-\cos u,\ 0)$$

$$\beta'(u) = (1-\cos u,\ \sin u,\ 0)$$

$$\beta''(u) = (\sin u,\ \cos u,\ 0)$$

$$K_g^{\beta}(u) = \frac{[n(u,0), \beta'(u), \beta''(u)]}{\|\beta'(u)\|^3} \leftarrow \text{геодезијска кривина од } \beta$$

$$[n(u,0), \beta'(u), \beta''(u)] = \begin{vmatrix} \cos\frac{u}{2} & -\sin\frac{u}{2} & 0 \\ 1-\cos u & \sin u & 0 \\ \sin u & \cos u & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \beta \text{ је геодезијска}$$

(г) За проверу које су координатне линије главне, потребно је наћи коефицијенте друге основне форме.

$$r_u(u,v)\times r_v(u,v) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1-\cos u\operatorname{ch} v & \sin u \operatorname{ch} v & 2\cos\frac{u}{2}\operatorname{sh}\frac{v}{2} \\ -\sin u\operatorname{sh} v & -\cos u\operatorname{sh} v & 2\sin\frac{u}{2}\operatorname{ch}\frac{v}{2} \end{vmatrix} =$$

$$= \Big(2\sin u\operatorname{ch} v\sin\frac{u}{2}\operatorname{ch}\frac{v}{2} + 2\cos u\operatorname{sh} v\cos\frac{u}{2}\operatorname{sh}\frac{v}{2},\ -2\sin u\operatorname{sh} v\cos\frac{u}{2}\operatorname{sh}\frac{v}{2} - 2\sin\frac{u}{2}\operatorname{ch}\frac{v}{2}(1-\cos u\operatorname{ch} v),$$
$$-(1-\cos u\operatorname{ch} v)\cos u\operatorname{sh} v + \sin^2 u\operatorname{sh} v\operatorname{ch} v\Big) = \Big(4\sin\frac{u}{2}\cos\frac{u}{2}\operatorname{ch} v\sin\frac{u}{2}\operatorname{ch}\frac{v}{2} + 4\cos u\operatorname{sh}\frac{v}{2}\operatorname{ch}\frac{v}{2}\cos\frac{u}{2}\operatorname{sh}\frac{v}{2},$$
$$-8\sin\frac{u}{2}\cos\frac{u}{2}\operatorname{sh}\frac{v}{2}\operatorname{ch}\frac{v}{2}\cos\frac{u}{2}\operatorname{sh}\frac{v}{2} - 2\sin\frac{u}{2}\operatorname{ch}\frac{v}{2}(1-\cos u\operatorname{ch} v),\ -\cos u\operatorname{sh} v + \cos^2 u\operatorname{sh} v\operatorname{ch} v + \sin^2 u\operatorname{sh} v\operatorname{ch} v\Big) =$$
$$= \Big(4\cos\frac{u}{2}\operatorname{ch}\frac{v}{2}\left(\sin^2\frac{u}{2}\operatorname{ch} v + \operatorname{sh}^2\frac{v}{2}\cos u\right),\ -2\sin\frac{u}{2}\operatorname{ch}\frac{v}{2}\left(4\cos^2\frac{u}{2}\operatorname{sh}^2\frac{v}{2} + 1-\cos u\operatorname{ch} v\right),\ -\cos u\operatorname{sh} v + \operatorname{sh} v\operatorname{ch} v\Big) =$$
$$= \Big(4\cos\frac{u}{2}\operatorname{ch}\frac{v}{2}\left(\frac{1-\cos u}{2}\operatorname{ch} v + \frac{\operatorname{ch} v-1}{2}\cos u\right),\ -2\sin\frac{u}{2}\operatorname{ch}\frac{v}{2}\left(\cancel{4}\cdot\frac{1+\cos u}{\cancel{2}}\cdot\frac{\operatorname{ch} v-1}{\cancel{2}} + 1-\cos u\operatorname{ch} v\right),\ \operatorname{sh} v(\operatorname{ch} v-\cos u)\Big) =$$
$$= \Big(\overset{2}{\cancel{4}}\cos\frac{u}{2}\operatorname{ch}\frac{v}{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\left(\operatorname{ch} v - \cancel{\cos u\operatorname{ch} v} + \cancel{\operatorname{ch} v\cos u} - \cos u\right),\ -2\sin\frac{u}{2}\operatorname{ch}\frac{v}{2}\left(\operatorname{ch} v \cancel{-1+\cos u\operatorname{ch} v} - \cos u \cancel{+1-\cos u\operatorname{ch} v}\right),$$
$$\operatorname{sh} v(\operatorname{ch} v-\cos u)\Big) = \left(2\cos\frac{u}{2}\operatorname{ch}\frac{v}{2}(\operatorname{ch} v-\cos u),\ -2\sin\frac{u}{2}\operatorname{ch}\frac{v}{2}(\operatorname{ch} v-\cos u),\ 2\operatorname{sh}\frac{v}{2}\operatorname{ch}\frac{v}{2}(\operatorname{ch} v-\cos u)\right)$$

$$\|r_u(u,v)\times r_v(u,v)\|^2 = 4\cos^2\frac{u}{2}\operatorname{ch}^2\frac{v}{2}(\operatorname{ch} v-\cos u)^2 + 4\sin^2\frac{u}{2}\operatorname{ch}^2\frac{v}{2}(\operatorname{ch} v-\cos u)^2 + 4\operatorname{sh}^2\frac{v}{2}\operatorname{ch}^2\frac{v}{2}(\operatorname{ch} v-\cos u)^2 =$$
$$= 4\operatorname{ch}^2\frac{v}{2}(\operatorname{ch} v-\cos u)^2\left(\cos^2\frac{u}{2} + \sin^2\frac{u}{2} + \operatorname{sh}^2\frac{v}{2}\right) = 4\operatorname{ch}^2\frac{v}{2}(\operatorname{ch} v-\cos u)^2\left(1+\operatorname{sh}^2\frac{v}{2}\right) = 4\operatorname{ch}^4\frac{v}{2}(\operatorname{ch} v-\cos u)^2$$

$$\Rightarrow \|r_u(u,v)\times r_v(u,v)\| = 2\operatorname{ch}^2\frac{v}{2}(\operatorname{ch} v-\cos u) \quad (\operatorname{ch} v \geq 1,\ -\cos u \geq -1 \Rightarrow \operatorname{ch} v-\cos u \geq 0)$$

$$\Rightarrow n(u,v) = \frac{\left(\cancel{2}\cos\frac{u}{2}\cancel{\operatorname{ch}\frac{v}{2}}\cancel{(\operatorname{ch} v-\cos u)},\ -\cancel{2}\sin\frac{u}{2}\cancel{\operatorname{ch}\frac{v}{2}}\cancel{(\operatorname{ch} v-\cos u)},\ \cancel{2}\operatorname{sh}\frac{v}{2}\cancel{\operatorname{ch}\frac{v}{2}}\cancel{(\operatorname{ch} v-\cos u)}\right)}{\cancel{2}\operatorname{ch}^{\cancel{2}}\frac{v}{2}\cancel{(\operatorname{ch} v-\cos u)}}$$

$$n(u,v) = \left(\frac{\cos\frac{u}{2}}{\operatorname{ch}\frac{v}{2}},\ -\frac{\sin\frac{u}{2}}{\operatorname{ch}\frac{v}{2}},\ \frac{\operatorname{sh}\frac{v}{2}}{\operatorname{ch}\frac{v}{2}}\right)$$

$$r_{uu}(u,v)=\left(\sin u\operatorname{ch}v,\ \cos u\operatorname{ch}v,\ -\cancel{2}\sin\frac{u}{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\operatorname{sh}\frac{v}{2}\right)$$

$$r_{uv}(u,v)=\left(-\cos u\operatorname{sh}v,\ \sin u\operatorname{sh}v,\ \cancel{2}\cos\frac{u}{2}\cdot\operatorname{ch}\frac{v}{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\right)$$

$$r_{vv}(u,v)=\left(-\sin u\operatorname{ch}v,\ -\cos u\operatorname{ch}v,\ \cancel{2}\sin\frac{u}{2}\cdot\operatorname{sh}\frac{v}{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\right)$$

$$e(u,v)=\langle r_{uu}(u,v),n(u,v)\rangle=\sin u\operatorname{ch}v\cdot\frac{\cos\frac{u}{2}}{\operatorname{ch}\frac{v}{2}}-\cos u\operatorname{ch}v\cdot\frac{\sin\frac{u}{2}}{\operatorname{ch}\frac{v}{2}}-\sin\frac{u}{2}\operatorname{sh}\frac{v}{2}\cdot\frac{\operatorname{sh}\frac{v}{2}}{\operatorname{ch}\frac{v}{2}}=$$

$$=\frac{\operatorname{ch}v}{\operatorname{ch}\frac{v}{2}}\left(\sin u\cos\frac{u}{2}-\cos u\sin\frac{u}{2}\right)-\frac{\sin\frac{u}{2}\operatorname{sh}^2\frac{v}{2}}{\operatorname{ch}\frac{v}{2}}=\frac{\operatorname{ch}v}{\operatorname{ch}\frac{v}{2}}\cdot\sin\left(u-\frac{u}{2}\right)-\sin\frac{u}{2}\cdot\frac{\operatorname{ch}v-1}{\operatorname{ch}\frac{v}{2}}=$$

$$=\frac{\sin\frac{u}{2}}{\operatorname{ch}\frac{v}{2}}\left(\cancel{\operatorname{ch}v}-\cancel{\operatorname{ch}v}+1\right)=\frac{\sin\frac{u}{2}}{\operatorname{ch}\frac{v}{2}}$$

$$f(u,v)=\langle r_{uv}(u,v),n(u,v)\rangle=-\cos u\operatorname{sh}v\,\frac{\cos\frac{u}{2}}{\operatorname{ch}\frac{v}{2}}-\sin u\operatorname{sh}v\cdot\frac{\sin\frac{u}{2}}{\operatorname{ch}\frac{v}{2}}+\cos\frac{u}{2}\cancel{\operatorname{ch}\frac{v}{2}}\cdot\frac{\operatorname{sh}\frac{v}{2}}{\cancel{\operatorname{ch}\frac{v}{2}}}=$$

$$=-\frac{\operatorname{sh}v}{\operatorname{ch}\frac{v}{2}}\left(\cos u\cos\frac{u}{2}+\sin u\sin\frac{u}{2}\right)+\cos\frac{u}{2}\operatorname{sh}\frac{v}{2}=-\frac{\operatorname{sh}v}{\operatorname{ch}\frac{v}{2}}\cos\left(u-\frac{u}{2}\right)+\cos\frac{u}{2}\operatorname{sh}\frac{v}{2}=$$

$$=-\frac{2\operatorname{sh}\frac{v}{2}\cancel{\operatorname{ch}\frac{v}{2}}}{\cancel{\operatorname{ch}\frac{v}{2}}}\cos\frac{u}{2}+\cos\frac{u}{2}\operatorname{sh}\frac{v}{2}=-2\operatorname{sh}\frac{v}{2}\cos\frac{u}{2}+\cos\frac{u}{2}\operatorname{sh}\frac{v}{2}=-\cos\frac{u}{2}\operatorname{sh}\frac{v}{2}$$

$$g(u,v)=\langle r_{vv}(u,v),n(u,v)\rangle=-\sin u\operatorname{ch}v\cdot\frac{\cos\frac{u}{2}}{\operatorname{ch}\frac{v}{2}}+\cos u\operatorname{ch}v\cdot\frac{\sin\frac{u}{2}}{\operatorname{ch}\frac{v}{2}}+\sin\frac{u}{2}\operatorname{sh}\frac{v}{2}\cdot\frac{\operatorname{sh}\frac{v}{2}}{\operatorname{ch}\frac{v}{2}}=$$

$$=-\frac{\operatorname{ch}v}{\operatorname{ch}\frac{v}{2}}\left(\sin u\cos\frac{u}{2}-\cos u\sin\frac{u}{2}\right)+\sin\frac{u}{2}\,\frac{\operatorname{sh}^2\frac{v}{2}}{\operatorname{ch}\frac{v}{2}}=-\frac{\operatorname{ch}v}{\operatorname{ch}\frac{v}{2}}\sin\left(u-\frac{u}{2}\right)+\sin\frac{u}{2}\cdot\frac{\operatorname{ch}v-1}{\operatorname{ch}\frac{v}{2}}=$$

$$=\frac{\sin\frac{u}{2}}{\operatorname{ch}\frac{v}{2}}\left(-\cancel{\operatorname{ch}v}+\cancel{\operatorname{ch}v}-1\right)=-\frac{\sin\frac{u}{2}}{\operatorname{ch}\frac{v}{2}}$$

Крива $\alpha(t)=r(u(t),v(t))$ је главна ако и само ако је

$$\begin{vmatrix}-v'(t)^2 & u'(t)v'(t) & -u'(t)^2\\ E(u(t),v(t)) & F(u(t),v(t)) & G(u(t),v(t))\\ e(u(t),v(t)) & f(u(t),v(t)) & g(u(t),v(t))\end{vmatrix}=0.$$

Координатна линија $\alpha_{v_0}(t)=r(t,v_0)$ задовољава $u(t)=t$, $v(t)=v_0$, па је $u'(t)=1$, $v'(t)=0$.

$$\begin{vmatrix}0 & 0 & -1\\ (\operatorname{ch}v_0-\cos t)(\operatorname{ch}v_0+1) & 0 & (\operatorname{ch}v_0-\cos t)(\operatorname{ch}v_0+1)\\ \frac{\sin\frac{t}{2}}{\operatorname{ch}\frac{v_0}{2}} & -\cos\frac{t}{2}\operatorname{sh}\frac{v_0}{2} & -\frac{\sin\frac{t}{2}}{\operatorname{ch}\frac{v_0}{2}}\end{vmatrix}=\cos\frac{t}{2}\operatorname{sh}\frac{v_0}{2}(\operatorname{ch}v_0-\cos t)(\operatorname{ch}v_0+1)=0,\ \forall t\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \operatorname{sh}\frac{v_0}{2}=0\Rightarrow v_0=0$$

Дакле координатна линија $v=0$ је главна.

Координатна линија $\beta_{u_0}(t)=r(u_0,t)$ задовољава $u(t)=u_0$, $v(t)=t$, па је $u'(t)=0$, $v'(t)=1$.

$$\begin{vmatrix}-1 & 0 & 0\\ (\operatorname{ch}t-\cos u_0)(\operatorname{ch}t+1) & 0 & (\operatorname{ch}t-\cos u_0)(\operatorname{ch}t+1)\\ \frac{\sin\frac{u_0}{2}}{\operatorname{ch}\frac{t}{2}} & -\cos\frac{u_0}{2}\operatorname{sh}\frac{t}{2} & -\frac{\sin\frac{u_0}{2}}{\operatorname{ch}\frac{t}{2}}\end{vmatrix}=-\cos\frac{u_0}{2}\operatorname{sh}\frac{t}{2}(\operatorname{ch}t-\cos u_0)(\operatorname{ch}t+1)=0,\ \forall t\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \cos\frac{u_0}{2}=0\Rightarrow\frac{u_0}{2}=\frac{\pi}{2}+k\pi\Rightarrow u_0=\pi+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

Координатне линије $u=\pi+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ јесу главне.