Решења задатака с писменог испита из Геометрије 3, јунски рок 2021

1. Дата је логаритамска спирала својом поларном једначином $\rho=e^{-\theta}, \theta\in\mathbb{R}$.

(а) Доказати да је угао између дате криве и кружнице са центром у координатном почетку, која садржи произвољну тачку са трага дате криве, константан.

(б) Одредити еволуту дате криве, као и инволуту са почетком у координатном почетку.

(в) Доказати да је дата крива подударна редом кривима чије су поларне једначине $\rho=e^{\theta}$ и $\rho=2e^{\theta}$.

(а) Нека је $\alpha:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$, $\alpha(\theta)=(e^{-\theta}\cos\theta, e^{-\theta}\sin\theta)$, параметризација криве $\rho=e^{-\theta}$ и нека је $\theta_0\in\mathbb{R}$ произвољно. Кружница с центром у координатном почетку која садржи тачку $\alpha(\theta_0)$ са криве α има једначину $x^2+y^2=(d(\alpha(\theta_0),O))^2$ ($O(0,0)$ је координатни почетак). Како је

$$d(\alpha(\theta_0),O)=\|\alpha(\theta_0)-O\|=\|(e^{-\theta_0}\cos\theta_0, e^{-\theta_0}\sin\theta_0)-(0,0)\|=\|(e^{-\theta_0}\cos\theta_0, e^{-\theta_0}\sin\theta_0)\|=$$
$$=\sqrt{e^{-2\theta_0}\cos^2\theta_0+e^{-2\theta_0}\sin^2\theta_0}=\sqrt{e^{-2\theta_0}}=e^{-\theta_0},$$

једначина кружнице је $x^2+y^2=e^{-2\theta_0}$, па се она може параметризовати као $\beta(t)=(e^{-\theta_0}\cos t, e^{-\theta_0}\sin t)$. Угао између криве α и кружнице β гледа се у њиховој заједничкој тачки, тј. у тачки $\alpha(\theta_0)=(e^{-\theta_0}\cos\theta_0, e^{-\theta_0}\sin\theta_0)$, па је вредност параметра t за који се добија управо та тачка било која из скупа $\{\theta_0+2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$. Можемо узети $t=\theta_0$ и добићемо $\beta(\theta_0)=(e^{-\theta_0}\cos\theta_0, e^{-\theta_0}\sin\theta_0)$. За мерење угла требају нам ~~тангентни~~ вектори брзина $\alpha'(\theta_0)$ и $\beta'(\theta_0)$ у тачки $\alpha(\theta_0)(=\beta(\theta_0))$, а како је $\alpha'(\theta)=(-e^{-\theta}\cos\theta-e^{-\theta}\sin\theta, -e^{-\theta}\sin\theta+e^{-\theta}\cos\theta)$ и $\beta'(t)=(e^{-\theta_0}\cdot(-\sin t), e^{-\theta_0}\cdot\cos t)$, следи да је угао између криве α и кружнице β једнак углу који граде вектори $\alpha'(\theta_0)$ и $\beta'(\theta_0)$. Ако је он једнак φ, онда је $\cos\varphi=\dfrac{\langle\alpha'(\theta_0),\beta'(\theta_0)\rangle}{\|\alpha'(\theta_0)\|\,\|\beta'(\theta_0)\|}$.

$$\langle\alpha'(\theta_0),\beta'(\theta_0)\rangle=\langle(-e^{-\theta_0}\cos\theta_0-e^{-\theta_0}\sin\theta_0, -e^{-\theta_0}\sin\theta_0+e^{-\theta_0}\cos\theta_0), (-e^{-\theta_0}\sin\theta_0, e^{-\theta_0}\cos\theta_0)\rangle=$$
$$=\cancel{e^{-2\theta_0}\cos\theta_0\sin\theta_0}+e^{-2\theta_0}\sin^2\theta_0\cancel{-e^{-2\theta_0}\sin\theta_0\cos\theta_0}+e^{-2\theta_0}\cos^2\theta_0=e^{-2\theta_0}$$

$$\|\alpha'(\theta_0)\|^2=(-e^{-\theta_0}\cos\theta_0-e^{-\theta_0}\sin\theta_0)^2+(-e^{-\theta_0}\sin\theta_0+e^{-\theta_0}\cos\theta_0)^2=e^{-2\theta_0}\cos^2\theta_0\cancel{+2e^{-2\theta_0}\cos\theta_0\sin\theta_0}+e^{-2\theta_0}\sin^2\theta_0+$$
$$+e^{-2\theta_0}\sin^2\theta_0\cancel{-2e^{-2\theta_0}\sin\theta_0\cos\theta_0}+e^{-2\theta_0}\cos^2\theta_0=e^{-2\theta_0}+e^{-2\theta_0}=2e^{-2\theta_0}\Rightarrow\|\alpha'(\theta_0)\|=\sqrt2 e^{-\theta_0}$$

$$\|\beta'(\theta_0)\|^2=e^{-2\theta_0}\sin^2\theta_0+e^{-2\theta_0}\cos^2\theta_0=e^{-2\theta_0}\Rightarrow\|\beta'(\theta_0)\|=e^{-\theta_0}$$

$$\Rightarrow\cos\varphi=\frac{e^{-2\theta_0}}{\sqrt2 e^{-\theta_0}\cdot e^{-\theta_0}}=\frac{1}{\sqrt2}\Rightarrow\varphi=\frac{\pi}{4}$$ и не зависи од избора тачке $\alpha(\theta_0)$, тј. константан је.

(б) Из дела (а) видимо да α није природно параметризована.

$\alpha(\theta)=(e^{-\theta}\cos\theta, e^{-\theta}\sin\theta)$

$\alpha'(\theta)=(-e^{-\theta}\cos\theta-e^{-\theta}\sin\theta, -e^{-\theta}\sin\theta+e^{-\theta}\cos\theta)$

$\|\alpha'(\theta)\|=\sqrt2 e^{-\theta}$

$T(\theta)=\dfrac{\alpha'(\theta)}{\|\alpha'(\theta)\|}=\left(-\frac{1}{\sqrt2}\cos\theta-\frac{1}{\sqrt2}\sin\theta, -\frac{1}{\sqrt2}\sin\theta+\frac{1}{\sqrt2}\cos\theta\right)$

$\alpha''(\theta)=(\cancel{e^{-\theta}\cos\theta}+e^{-\theta}\sin\theta+e^{-\theta}\sin\theta\cancel{-e^{-\theta}\cos\theta}, \cancel{e^{-\theta}\sin\theta}-e^{-\theta}\cos\theta-e^{-\theta}\cos\theta\cancel{-e^{-\theta}\sin\theta})=(2e^{-\theta}\sin\theta, -2e^{-\theta}\cos\theta)$

$$\alpha'(\theta)\times\alpha''(\theta)=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ -e^{-\theta}\cos\theta-e^{-\theta}\sin\theta & -e^{-\theta}\sin\theta+e^{-\theta}\cos\theta & 0\\ 2e^{-\theta}\sin\theta & -2e^{-\theta}\cos\theta & 0\end{vmatrix}=\left(0,0,2e^{-2\theta}\cos^2\theta+\cancel{2e^{-2\theta}\sin\theta\cos\theta}+2e^{-2\theta}\sin^2\theta-\cancel{2e^{-2\theta}\sin\theta\cos\theta}\right)=$$

$$=(0,0,2e^{-2\theta})$$

$\|\alpha'(\theta)\times\alpha''(\theta)\|=|2e^{-2\theta}|=2e^{-2\theta}$ (тј. $\|\alpha'(\theta)\times\alpha''(\theta)\|=\sqrt{0^2+0^2+(2e^{-2\theta})^2}=\sqrt{(2e^{-2\theta})^2}=|2e^{-2\theta}|$)

$$\Rightarrow B(\theta)=\frac{\alpha'(\theta)\times\alpha''(\theta)}{\|\alpha'(\theta)\times\alpha''(\theta)\|}=(0,0,1)$$

$$N(\theta)=B(\theta)\times T(\theta)=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ 0&0&1\\ -\frac{1}{\sqrt2}\cos\theta-\frac{1}{\sqrt2}\sin\theta & -\frac{1}{\sqrt2}\sin\theta+\frac{1}{\sqrt2}\cos\theta & 0\end{vmatrix}=\left(\frac{1}{\sqrt2}\sin\theta-\frac{1}{\sqrt2}\cos\theta,-\frac{1}{\sqrt2}\cos\theta-\frac{1}{\sqrt2}\sin\theta,0\right)$$

Пошто је трећа координата била помоћна за рачунање N, узећемо $N(\theta)$ у $\mathbb{R}^2$, тј. да је

$$N(\theta)=\left(\frac{1}{\sqrt2}\sin\theta-\frac{1}{\sqrt2}\cos\theta,-\frac{1}{\sqrt2}\cos\theta-\frac{1}{\sqrt2}\sin\theta\right)$$

$$K(\theta)=\frac{\|\alpha'(\theta)\times\alpha''(\theta)\|}{\|\alpha'(\theta)\|^3}=\frac{2e^{-2\theta}}{(\sqrt2e^{-\theta})^3}=\frac{\cancel{2}e^{-2\theta}}{\cancel{2}\sqrt2e^{-3\theta}}=\frac{1}{\sqrt2e^{-\theta}}$$

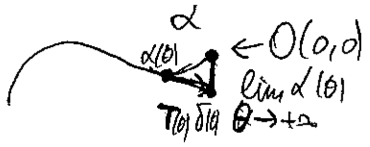
Еволута криве α је крива $\gamma(\theta)=\alpha(\theta)+\frac{1}{K(\theta)}N(\theta)$, $\theta\in\mathbb{R}$. Дакле, $\gamma:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$,

$$\gamma(\theta)=(e^{-\theta}\cos\theta,e^{-\theta}\sin\theta)+\sqrt2e^{-\theta}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt2}\sin\theta-\frac{1}{\sqrt2}\cos\theta,-\frac{1}{\sqrt2}\cos\theta-\frac{1}{\sqrt2}\sin\theta\right)=$$

$$=(\cancel{e^{-\theta}\cos\theta},\cancel{e^{-\theta}\sin\theta})+(e^{-\theta}\sin\theta-\cancel{e^{-\theta}\cos\theta},-e^{-\theta}\cos\theta-\cancel{e^{-\theta}\sin\theta})=$$

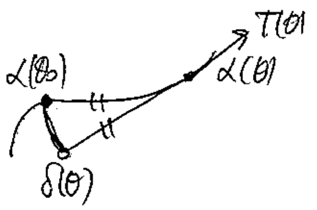
$$=(e^{-\theta}\sin\theta,-e^{-\theta}\cos\theta)$$

Тачка $O(0,0)$ добија се као $\lim_{\theta\to+\infty}\alpha(\theta)$, јер је $\lim_{\theta\to+\infty}e^{-\theta}=0$. То значи да је то „крајња тачка" криве α.



Инволута је крива δ таква да се од тачке $\alpha(\theta)$ треба у смеру вектора $T(\theta)$ удаљити за дужину лука криве α од тачке $\alpha(\theta)$ до тачке $O(0,0)=\lim_{\theta\to+\infty}\alpha(\theta)$. Добија се да је

ПАЖЊА: На вежбама је рађено овако: $\boxed{\delta(\theta)=\alpha(\theta)+\left(\int_\theta^{+\infty}\|\alpha'(u)\|du\right)\cdot T(\theta)}$.



Од тачке $\alpha(\theta)$ се у смеру супротном од смера вектора $T(\theta)$ треба удаљити за дужину лука од $\alpha(\theta_0)$ до $\alpha(\theta)$. Главна разлика је што је овде $\theta>\theta_0$! Како је у нашем задатку $\theta_0=+\infty$, нама је заправо $\theta<\theta_0$, па пошто би се онда гледала функција дужине лука $s(\theta)=\int_{\theta_0}^{\theta}\|\alpha'(u)\|du$, она би имала негативне вредности, па би тај минус окренуо и минус који стоји у једнакости $\delta(\theta)=\alpha(\theta)-s(\theta)\cdot T(\theta)$ и испоставило би се да се од тачке $\alpha(\theta)$ сада удаљавамо у смеру вектора $T(\theta)$. Опет добијамо

$$\delta(\theta)=\alpha(\theta)-\left(\int_{+\infty}^{\theta}\|\alpha'(u)\|du\right)\cdot T(\theta)=\alpha(\theta)+\left(\int_\theta^{+\infty}\|\alpha'(u)\|du\right)\cdot T(\theta).$$ Како је

$\int_\theta^{+\infty}\|\alpha'(u)\|du=\int_\theta^{+\infty}\sqrt2e^{-u}du=\sqrt2\cdot(-e^{-u})\Big|_\theta^{+\infty}=\sqrt2\cdot e^{-\theta}$, добијамо да је инволута $\delta:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$,

$$\delta(\theta)=(e^{-\theta}\cos\theta,e^{-\theta}\sin\theta)+\sqrt2e^{-\theta}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt2}\cos\theta-\frac{1}{\sqrt2}\sin\theta,-\frac{1}{\sqrt2}\sin\theta+\frac{1}{\sqrt2}\cos\theta\right)=$$

$=(\cancel{e^{-\theta}\cos\theta}, \cancel{e^{-\theta}\sin\theta})+(-\cancel{e^{-\theta}\cos\theta}-e^{-\theta}\sin\theta, -\cancel{e^{-\theta}\sin\theta}+e^{-\theta}\cos\theta)=(-e^{-\theta}\sin\theta, e^{-\theta}\cos\theta)$.

(в) Нека је $\mu:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$, $\mu(\theta)=(e^{\theta}\cos\theta, e^{\theta}\sin\theta)$ параметризација криве $\rho=e^{\theta}$, а $\nu:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$, $\nu(\theta)=(2e^{\theta}\cos\theta, 2e^{\theta}\sin\theta)$ параметризација криве $\rho=2e^{\theta}$. Тада је

$\nu(\theta)=(2e^{\theta}\cos\theta, 2e^{\theta}\sin\theta)=(e^{\ln 2}\cdot e^{\theta}\cos\theta, e^{\ln 2}\cdot e^{\theta}\sin\theta)=(e^{\theta+\ln 2}\cos\theta, e^{\theta+\ln 2}\sin\theta)$, па репараметризацијом $\tilde\theta=\theta+\ln 2$ добијамо криву $\tilde\nu(\tilde\theta)=\nu(\tilde\theta-\ln 2)=(e^{\tilde\theta\cancel{-\ln 2}\cancel{+\ln 2}}\cos(\tilde\theta-\ln 2), e^{\tilde\theta\cancel{-\ln 2}\cancel{+\ln 2}}\sin(\tilde\theta-\ln 2))=(e^{\tilde\theta}\cos(\tilde\theta-\ln 2), e^{\tilde\theta}\sin(\tilde\theta-\ln 2))$. Можемо сада сваку тачку криве $\tilde\nu$ заротирати око $O(0,0)$ за угао $\ln 2$. Матрица те ротације је $\begin{pmatrix}\cos(\ln 2) & -\sin(\ln 2)\\ \sin(\ln 2) & \cos(\ln 2)\end{pmatrix}$, а тачка $\tilde\nu(\tilde\theta)$ се ротира у тачку $\begin{pmatrix}\cos(\ln 2) & -\sin(\ln 2)\\ \sin(\ln 2) & \cos(\ln 2)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{\tilde\theta}\cos(\tilde\theta-\ln 2)\\ e^{\tilde\theta}\sin(\tilde\theta-\ln 2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{\tilde\theta}\cos(\tilde\theta-\ln 2)\cos(\ln 2)-e^{\tilde\theta}\sin(\tilde\theta-\ln 2)\sin(\ln 2)\\ e^{\tilde\theta}\cos(\tilde\theta-\ln 2)\sin(\ln 2)+e^{\tilde\theta}\sin(\tilde\theta-\ln 2)\cos(\ln 2)\end{pmatrix}$. Приметимо да се јављају адиционе формуле $\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha+\beta)$ и $\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta=\sin(\alpha+\beta)$, те се тачка $\tilde\nu(\tilde\theta)$ ротира у тачку $(e^{\tilde\theta}\cos(\tilde\theta\cancel{-\ln 2}\cancel{+\ln 2}), e^{\tilde\theta}\sin(\tilde\theta\cancel{-\ln 2}\cancel{+\ln 2}))=(e^{\tilde\theta}\cos\tilde\theta, e^{\tilde\theta}\sin\tilde\theta)$, која припада кривој μ. Дакле, слика криве $\tilde\nu$ (а тиме и криве ν, јер је траг ових кривих исти скуп тачака) јесте садржана у кривој μ, а очигледно је и обрнуто тј. крива μ је садржана у слици криве $\tilde\nu$, па су ове криве подударне (ротација која слика једну на другу је изометрија).

2. Дата је параметризована ротациона површ $r(u,\theta)=(u\cos\theta, u\sin\theta, \ln u)$, $u>0$, $\theta\in(0,2\pi)$.

(а) Доказати да се тангентна раван дате површи дуж криве $\alpha(t)=(e^{t}\cos t, e^{t}\sin t, t)$, $t\in\mathbb{R}$, поклапа са оскулаторном равни ове криве.

(б) Доказати да не постоји тачка на датој површи у којој асимптотски правци полове углове између главних праваца.

(в) Ако је $\gamma(s)$ природно параметризована геодезијска линија на тој површи и $\varphi(s)$ угао који она заклапа с паралелом полупречника $R(s)$, доказати да је $R\cos\varphi=const$.

(г) Доказати да пресликавање $(u,\theta)\mapsto(t,s)=(\ln(u+\sqrt{u^2+1}), \theta)$ индукује пресликавање између дате површи и дела катеноида $\sigma(t,s)=(ch\,t\cos s, ch\,t\sin s, t)$, $t>0$, $s\in(0,2\pi)$, које чува Гаусову кривину, али није изометрија.

$r(u,\theta)=(u\cos\theta, u\sin\theta, \ln u)$

$r_u(u,\theta)=(\cos\theta, \sin\theta, \frac{1}{u})$

$r_\theta(u,\theta)=(-u\sin\theta, u\cos\theta, 0)$

$E(u,\theta)=\langle r_u(u,\theta), r_u(u,\theta)\rangle=\cos^2\theta+\sin^2\theta+\frac{1}{u^2}=1+\frac{1}{u^2}$

$F(u,\theta)=\langle r_u(u,\theta), r_\theta(u,\theta)\rangle=\cancel{-u\cos\theta\sin\theta}+\cancel{u\sin\theta\cos\theta}+0=0$

$G(u,\theta)=\langle r_\theta(u,\theta), r_\theta(u,\theta)\rangle=u^2\sin^2\theta+u^2\cos^2\theta=u^2$

$r_u(u,\theta)\times r_\theta(u,\theta)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \cos\theta & \sin\theta & \frac{1}{u}\\ -u\sin\theta & u\cos\theta & 0\end{vmatrix}=(-\cos\theta, -\sin\theta, u\cos^2\theta+u\sin^2\theta)=(-\cos\theta, -\sin\theta, u)$

$\|r_u(u,\theta)\times r_\theta(u,\theta)\|^2=\cos^2\theta+\sin^2\theta+u^2=1+u^2\Rightarrow\|r_u(u,\theta)\times r_\theta(u,\theta)\|=\sqrt{1+u^2}$

$$n(u,\vartheta)=\frac{r_u(u,\vartheta)\times r_\vartheta(u,\vartheta)}{\|r_u(u,\vartheta)\times r_\vartheta(u,\vartheta)\|}=\frac{(-\cos\vartheta,-\sin\vartheta,u)}{\sqrt{1+u^2}}=\left(-\frac{\cos\vartheta}{\sqrt{1+u^2}},-\frac{\sin\vartheta}{\sqrt{1+u^2}},\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\right)$$

$$r_{uu}(u,\vartheta)=\left(0,0,-\frac{1}{u^2}\right)$$

$$r_{u\vartheta}(u,\vartheta)=(-\sin\vartheta,\cos\vartheta,0)$$

$$r_{\vartheta\vartheta}(u,\vartheta)=(-u\cos\vartheta,-u\sin\vartheta,0)$$

$$e(u,\vartheta)=\langle r_{uu}(u,\vartheta),n(u,\vartheta)\rangle=-\frac{1}{u\sqrt{1+u^2}}$$

$$f(u,\vartheta)=\langle r_{u\vartheta}(u,\vartheta),n(u,\vartheta)\rangle=\cancel{\frac{\sin\vartheta\cos\vartheta}{\sqrt{1+u^2}}}-\cancel{\frac{\cos\vartheta\sin\vartheta}{\sqrt{1+u^2}}}+0=0$$

$$g(u,\vartheta)=\langle r_{\vartheta\vartheta}(u,\vartheta),n(u,\vartheta)\rangle=\frac{u\cos^2\vartheta}{\sqrt{1+u^2}}+\frac{u\sin^2\vartheta}{\sqrt{1+u^2}}+0=\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}$$

(а) Крива $\alpha(t)$ се добија кад се за u и ϑ узму функције $u(t)=e^t$ и $\vartheta(t)=t$ (нпр), па је $\alpha(t)=r(u(t),\vartheta(t))=r(e^t,t)$. То значи да је тангентна раван површи у тачки $\alpha(t_0)$ криве α раван која садржи тачку $\alpha(t_0)$ и има вектор $n(u(t_0),\vartheta(t_0))=n(e^{t_0},t_0)$ за вектор нормале. С друге стране, оскулаторна раван криве α у тачки $\alpha(t_0)$ јесте раван која садржи тачку $\alpha(t_0)$ и вектор $B(t_0)$ је њен вектор нормале. Пошто обе равни садрже тачку $\alpha(t_0)$, оне ће се поклапати ако и само ако њихови вектори нормала јесу колинеарни вектори, а пошто су $n(e^{t_0},t_0)$ и $B(t_0)$ оба јединична, услов је $n(e^{t_0},t_0)=\pm B(t_0)$.

$$n(e^{t_0},t_0)=\left(-\frac{\cos t_0}{\sqrt{1+e^{2t_0}}},-\frac{\sin t_0}{\sqrt{1+e^{2t_0}}},\frac{e^{t_0}}{\sqrt{1+e^{2t_0}}}\right)$$

$$\alpha(t)=(e^t\cos t,e^t\sin t,t)$$

$$\alpha'(t)=(e^t\cos t-e^t\sin t,e^t\sin t+e^t\cos t,1)$$

$$\cancel{\|\alpha'(t)\|^2=e^{2t}\cos^2t-2e^{2t}\cos t\sin t+e^{2t}\sin^2t+e^{2t}\sin^2t+2e^{2t}\sin t\cos t+e^{2t}\cos^2t+1=e^{2t}+e^{2t}+1=1+2e^{2t}}$$

$$\Rightarrow\|\alpha'(t)\|=\sqrt{1+2e^{2t}}$$ ← не треба

$$\alpha''(t)=(\cancel{e^t\cos t}-e^t\sin t-e^t\sin t-\cancel{e^t\cos t},\ \cancel{e^t\sin t}+e^t\cos t+e^t\cos t-\cancel{e^t\sin t},0)=(-2e^t\sin t,2e^t\cos t,0)$$

$$\alpha'(t)\times\alpha''(t)=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ e^t\cos t-e^t\sin t & e^t\sin t+e^t\cos t & 1\\ -2e^t\sin t & 2e^t\cos t & 0\end{vmatrix}=(-2e^t\cos t,-2e^t\sin t,2e^{2t}\cos^2t-\cancel{2e^{2t}\sin t\cos t}+2e^{2t}\sin^2t+\cancel{2e^{2t}\sin t\cos t})$$

$$=(-2e^t\cos t,-2e^t\sin t,2e^{2t})$$

$$\|\alpha'(t)\times\alpha''(t)\|^2=4e^{2t}\cos^2t+4e^{2t}\sin^2t+4e^{4t}=4e^{2t}+4e^{4t}=4e^{2t}(1+e^{2t})$$

$$\Rightarrow\|\alpha'(t)\times\alpha''(t)\|=2e^t\sqrt{1+e^{2t}}$$

$$B(t)=\frac{\alpha'(t)\times\alpha''(t)}{\|\alpha'(t)\times\alpha''(t)\|}=\left(-\frac{\cos t}{\sqrt{1+e^{2t}}},-\frac{\sin t}{\sqrt{1+e^{2t}}},\frac{e^t}{\sqrt{1+e^{2t}}}\right)$$

Дакле $B(t_0)=\left(-\frac{\cos t_0}{\sqrt{1+e^{2t_0}}},-\frac{\sin t_0}{\sqrt{1+e^{2t_0}}},\frac{e^{t_0}}{\sqrt{1+e^{2t_0}}}\right)=n(e^{t_0},t_0)$, па следи да се равни поклапају.

(б) Нека је $r(u_0,\vartheta_0)$ произвољна тачка на површи, $u_0>0$, $\vartheta_0\in(0,2\pi)$. Главни вектори $V=a\,r_u(u_0,\vartheta_0)+b\,r_\vartheta(u_0,\vartheta_0)$ задовољавају

$$\begin{vmatrix} -b^2 & ab & -a^2\\ e(u_0,\vartheta_0) & f(u_0,\vartheta_0) & g(u_0,\vartheta_0)\\ E(u_0,\vartheta_0) & F(u_0,\vartheta_0) & G(u_0,\vartheta_0)\end{vmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix} -b^2 & ab & -a^2 \\ -\frac{1}{u_0\sqrt{1+u_0^2}} & 0 & \frac{u_0}{\sqrt{1+u_0^2}} \\ 1+\frac{1}{u_0^2} & 0 & u_0^2 \end{vmatrix} = 0$$

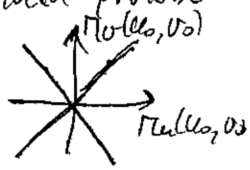
$$-ab\cdot\begin{vmatrix} -\frac{1}{u_0\sqrt{1+u_0^2}} & \frac{u_0}{\sqrt{1+u_0^2}} \\ 1+\frac{1}{u_0^2} & u_0^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$-ab\cdot\left(-\frac{u_0}{\sqrt{1+u_0^2}} - \frac{u_0}{\sqrt{1+u_0^2}} - \frac{1}{u_0\sqrt{1+u_0^2}}\right) = 0$$

$$ab\cdot\underbrace{\left(\frac{2u_0}{\sqrt{1+u_0^2}} + \frac{1}{u_0\sqrt{1+u_0^2}}\right)}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow ab = 0 \Rightarrow a=0 \text{ или } b=0$$

Дакле, главни вектори су $b\cdot r_v(u_0,v_0)$ и $a\cdot r_u(u_0,v_0)$, па можемо узети $r_u(u_0,v_0)$ и $r_v(u_0,v_0)$ за главне векторе.

Главни вектори $r_u(u_0,v_0)$ и $r_v(u_0,v_0)$ су нормални (јер је $F(u_0,v_0)=0$, а представља њихов скаларни производ). (Такође, пошто тачка $r(u_0,v_0)$ није умбиличка, јер би у супротном сви тангентни вектори били главни, свакако знамо да су главни вектори нормални.) Докажимо да асимптотски вектори у тој тачки не могу заклапати углове чији је косинус $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ са главним вектором $r_u(u_0,v_0)$, јер ако би половили углове између главних праваца, угао би био у скупу $\{\pm\frac{\pi}{4}, \pm\frac{3\pi}{4}\}$, те би косинус био $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.



Асимптотски вектори $W = c r_u(u_0,v_0) + d r_v(u_0,v_0)$ задовољавају $\mathrm{II}(W,W)=0$.

$$\mathrm{II}(W,W) = (c\ \ d)\begin{pmatrix} e(u_0,v_0) & f(u_0,v_0) \\ f(u_0,v_0) & g(u_0,v_0)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ d\end{pmatrix} = (c\ \ d)\begin{pmatrix} -\frac{1}{u_0\sqrt{1+u_0^2}} & 0 \\ 0 & \frac{u_0}{\sqrt{1+u_0^2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ d\end{pmatrix} =$$

$$= \left(-\frac{c}{u_0\sqrt{1+u_0^2}} \quad \frac{u_0 d}{\sqrt{1+u_0^2}}\right)\begin{pmatrix} c \\ d\end{pmatrix} = -\frac{c^2}{u_0\sqrt{1+u_0^2}} + \frac{u_0 d^2}{\sqrt{1+u_0^2}}$$

$$\Rightarrow -\frac{c^2}{u_0\sqrt{1+u_0^2}} + \frac{u_0 d^2}{\sqrt{1+u_0^2}} = 0$$

$$-\frac{c^2}{u_0} + u_0 d^2 = 0 \ /\cdot u_0$$

$$-c^2 + u_0^2 d^2 = 0$$

$$c^2 = u_0^2 d^2$$

$c = \pm u_0 d \Rightarrow W_1 = u_0 d r_u(u_0,v_0) + d r_v(u_0,v_0)$ и $W_2 = -u_0 d r_u(u_0,v_0) + d r_u(u_0,v_0)$, $d\neq 0$, јесу асимптотски вектори. Узмимо нпр. $d=1$, тј. $W_1 = u_0 r_u(u_0,v_0) + r_v(u_0,v_0)$ и $W_2 = -u_0 r_u(u_0,v_0) + r_v(u_0,v_0)$. Како је $\frac{\langle W_1, r_u(u_0,v_0)\rangle}{\|W_1\|\cdot\|r_u(u_0,v_0)\|} = \cos\measuredangle(W_1, r_u(u_0,v_0))$, израчунајмо $\langle W_1, r_u(u_0,v_0)\rangle$, $\|W_1\|$ и $\|r_u(u_0,v_0)\|$.

$$\langle W_1, r_u(u_0,v_0)\rangle = \mathrm{I}(W_1, r_u(u_0,v_0)) = (u_0\ \ 1)\begin{pmatrix} E(u_0,v_0) & F(u_0,v_0) \\ F(u_0,v_0) & G(u_0,v_0)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0\end{pmatrix} = (u_0\ \ 1)\begin{pmatrix} 1+\frac{1}{u_0^2} & 0 \\ 0 & u_0^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0\end{pmatrix} =$$

$$= \left(u_0 + \frac{1}{u_0} \quad u_0^2\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 0\end{pmatrix} = u_0 + \frac{1}{u_0}$$

$$\|W_1\|^2 = \langle W_1, W_1\rangle = I(W_1,W_1) = \begin{pmatrix}u_0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1+\frac{1}{u_0^2} & 0\\ 0 & u_0^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_0\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}u_0+\frac{1}{u_0} & u_0^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_0\\ 1\end{pmatrix} = u_0^2+1+u_0^2$$

$$= 1+2u_0^2 \Rightarrow \|W_1\| = \sqrt{1+2u_0^2}$$

$$\|r_u(u_0,v_0)\|^2 = \langle r_u(u_0,v_0), r_u(u_0,v_0)\rangle = E(u_0,v_0) = 1+\frac{1}{u_0^2} \Rightarrow \|r_u(u_0,v_0)\| = \sqrt{1+\frac{1}{u_0^2}}$$

$$\Rightarrow \cos\measuredangle(W_1, r_u(u_0,v_0)) = \frac{u_0+\frac{1}{u_0}}{\sqrt{1+2u_0^2}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{u_0^2}}} = \frac{\frac{u_0^2+1}{u_0}}{\sqrt{1+2u_0^2}\cdot\sqrt{\frac{u_0^2+1}{u_0^2}}} = \frac{\frac{u_0^2+1}{\cancel{u_0}}}{\sqrt{1+2u_0^2}\cdot\frac{\sqrt{u_0^2+1}}{\cancel{u_0}}} \quad (u_0>0)$$

$$= \frac{u_0^2+1}{\sqrt{1+2u_0^2}\sqrt{u_0^2+1}} = \frac{\left(\sqrt{u_0^2+1}\right)^{\cancel{2}}}{\sqrt{1+2u_0^2}\,\cancel{\sqrt{u_0^2+1}}} = \sqrt{\frac{1+u_0^2}{1+2u_0^2}}$$

Претпоставимо да је $\sqrt{\frac{1+u_0^2}{1+2u_0^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Онда је $\frac{1+u_0^2}{1+2u_0^2} = \frac{1}{2}$, тј. $2(1+u_0^2) = 1+2u_0^2$. Дакле, $2+\cancel{2u_0^2} = 1+\cancel{2u_0^2}$, тј. $2=1$, што је контрадикција.

Слично, $\langle W_2, r_u(u_0,v_0)\rangle = I(W_2, r_u(u_0,v_0)) = \begin{pmatrix}-u_0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1+\frac{1}{u_0^2} & 0\\ 0 & u_0^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-u_0-\frac{1}{u_0} & u_0^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} =$
$= -u_0-\frac{1}{u_0}$, $\|W_2\|^2 = \langle W_2, W_2\rangle = \begin{pmatrix}-u_0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1+\frac{1}{u_0^2} & 0\\ 0 & u_0^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-u_0\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-u_0-\frac{1}{u_0} & u_0^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-u_0\\ 1\end{pmatrix} = u_0^2+1+u_0^2 =$
$= 1+2u_0^2$, те је $\cos\measuredangle(W_2, r_u(u_0,v_0)) = \frac{-\left(u_0+\frac{1}{u_0}\right)}{\sqrt{1+2u_0^2}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{u_0^2}}} = -\sqrt{\frac{1+u_0^2}{1+2u_0^2}} \neq -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

(B) $\Gamma^1_{11} = \frac{\cancel{G}E_u}{2E\cancel{G}} = \frac{E_u}{2E}$ (јер је $F=0$) $\Gamma^1_{11}(u,v) = \frac{-\frac{\cancel{2}}{u^3}}{\cancel{2}(1+\frac{1}{u^2})} = \frac{-\frac{1}{u^3}}{\frac{u^2+1}{u^2}} = -\frac{1}{u(1+u^2)}$

$\Gamma^1_{12} = \frac{\cancel{G}E_v}{2E\cancel{G}} = \frac{E_v}{2E}$ $\Gamma^1_{12}(u,v) = 0$ (E не зависи од v)

$\Gamma^1_{22} = -\frac{\cancel{G}G_u}{2E\cancel{G}} = -\frac{G_u}{2E}$ $\Gamma^1_{22}(u,v) = -\frac{\cancel{2}u}{\cancel{2}(1+\frac{1}{u^2})} = -\frac{u}{\frac{u^2+1}{u^2}} = -\frac{u^3}{1+u^2}$

$\Gamma^2_{11} = -\frac{\cancel{E}E_v}{2\cancel{E}G} = -\frac{E_v}{2G}$ $\Gamma^2_{11}(u,v) = 0$ (E не зависи од v)

$\Gamma^2_{12} = \frac{\cancel{E}G_u}{2\cancel{E}G} = \frac{G_u}{2G}$ $\Gamma^2_{12}(u,v) = \frac{2u}{2u^2} = \frac{1}{u}$

$\Gamma^2_{22} = \frac{\cancel{E}G_v}{2\cancel{E}G} = \frac{G_v}{2G}$ $\Gamma^2_{22}(u,v) = 0$ (G не зависи од v)

$\gamma(s)$ је природно параметризована геодезијска линија на површи $r(u,v)$, па ако је $\gamma(s) = r(u(s),v(s))$, онда је $I(\gamma'(s),\gamma'(s)) = 1$ и

$$u''(s) + \Gamma^1_{11}(u(s),v(s))\cdot u'(s)^2 + 2\Gamma^1_{12}(u(s),v(s))\cdot u'(s)v'(s) + \Gamma^1_{22}(u(s),v(s))\cdot v'(s)^2 = 0$$

$$v''(s) + \Gamma^2_{11}(u(s),v(s))\cdot u'(s)^2 + 2\Gamma^2_{12}(u(s),v(s))\cdot u'(s)\cdot v'(s) + \Gamma^2_{22}(u(s),v(s))\cdot v'(s)^2 = 0.$$

$$\gamma'(s) = r_u(u(s),v(s))\cdot u'(s) + r_v(u(s),v(s))\cdot v'(s)$$

$$I(\gamma'(s),\gamma'(s)) = \begin{pmatrix}u'(s) & v'(s)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E(u(s),v(s)) & F(u(s),v(s))\\ F(u(s),v(s)) & G(u(s),v(s))\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u'(s)\\ v'(s)\end{pmatrix} = 1$$

$$\begin{pmatrix}u'(s) & v'(s)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1+\frac{1}{u(s)^2} & 0\\ 0 & u(s)^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u'(s)\\ v'(s)\end{pmatrix} = 1$$

$$\begin{pmatrix}u'(s)+\frac{u'(s)}{u(s)^2} & u(s)^2\cdot v'(s)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u'(s)\\ v'(s)\end{pmatrix} = 1$$

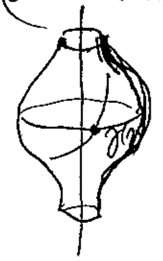
$$u'(s)^2 + \frac{u'(s)^2}{u(s)^2} + u(s)^2\cdot v'(s)^2 = 1$$

$$u''(s) - \frac{1}{u(s)(1+u(s)^2)}\cdot u'(s)^2 - \frac{u(s)^3}{1+u(s)^2}\cdot v'(s)^2 = 0$$

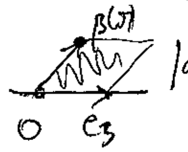
$$v''(s) + 2\cdot\frac{1}{u(s)}\cdot u'(s)\cdot v'(s) = 0 \;/\cdot u(s)^2$$

$$v''(s)\cdot u(s)^2 + v'(s)\cdot 2u(s)\cdot u'(s) = 0$$

$(v'(s)\cdot u(s)^2)' = 0 \Rightarrow v'(s)\cdot u(s)^2 = C = const$ (не зависи од s)



Нека је $\gamma(s_0)$ тачка на кривој γ. Како је $\gamma(s_0) = r(u(s_0), v(s_0))$, паралела површи r која садржи тачку $\gamma(s_0)$ је $\beta(t) = r(u(s_0), t)$ и за $t = v(s_0)$ добија се тачка $\gamma(s_0)$. Полупречник те паралеле (која је кружница) јесте растојање ма које њене тачке од z-осе. Како је $\beta(\pi) = r(u(s_0), \pi) = (u(s_0)\cos\pi, u(s_0)\sin\pi, \ln u(s_0)) = (-u(s_0), 0, \ln u(s_0))$, њено растојање од z-осе, одређене тачком $O(0,0,0)$ и вектором $\vec{e_3} = (0,0,1)$, јесте

$d(\beta(\pi), z\text{-осе}) = \frac{\|(\beta(\pi)-O)\times\vec{e_3}\|}{\|\vec{e_3}\|}$ ( $|d$ из Г1 формула)

$$\beta(\pi) - O = (-u(s_0), 0, \ln u(s_0))$$

$$(\beta(\pi)-O)\times\vec{e_3} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -u(s_0) & 0 & \ln(s_0) \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (0, u(s_0), 0) \Rightarrow \|\beta(\pi)-O\| = u(s_0) > 0$$

$$\|\vec{e_3}\| = 1 \Rightarrow R(s_0) = u(s_0) \Rightarrow R(s) = u(s)$$

Угао који крива γ заклапа с паралелом β у тачки $\gamma(s_0) = \beta(v(s_0))$ јесте угао који граде $\gamma'(s_0)$ и $\beta'(v(s_0))$.

$$\langle \gamma'(s_0), \beta'(v(s_0))\rangle = I(\gamma'(s_0), \beta'(v(s_0))) = (u'(s_0)\;\; v'(s_0)) \begin{pmatrix} E(u(s_0),v(s_0)) & F(u(s_0),v(s_0)) \\ F(u(s_0),v(s_0)) & G(u(s_0),v(s_0)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\gamma'(s_0) = r_u(u(s_0),v(s_0))\cdot u'(s_0) + r_v(u(s_0),v(s_0))\cdot v'(s_0)$$

$$\beta(t) = r(u(s_0), t)$$

$$\beta'(t) = r_v(u(s_0), t) \Rightarrow \beta'(v(s_0)) = r_v(u(s_0), v(s_0))$$

$$\langle \gamma'(s_0), \beta'(v(s_0))\rangle = (u'(s_0)\;\; v(s_0)) \begin{pmatrix} 1+\frac{1}{u(s_0)^2} & 0 \\ 0 & u(s_0)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (u'(s_0)\;\; v'(s_0)) \begin{pmatrix} 0 \\ u(s_0)^2 \end{pmatrix} =$$

$$= v'(s_0)\cdot u(s_0)^2 = C$$

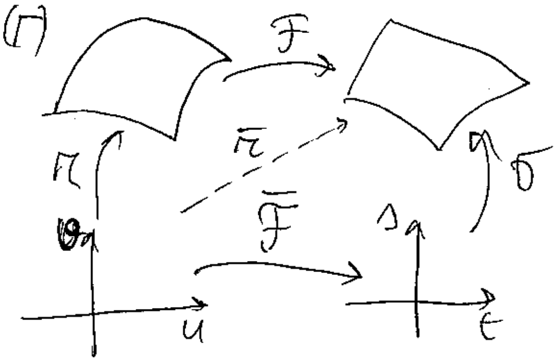
$\|\gamma'(s_0)\| = 1$ (крива је природно параметризована)

$$\|\beta'(v(s_0))\|^2 = \|r_v(u(s_0),v(s_0))\|^2 = G(u(s_0),v(s_0)) = u(s_0)^2 = R(s_0)^2 \Rightarrow \|\beta'(v(s_0))\| = R(s_0)$$

$$\cos\varphi(s_0) = \frac{C}{1\cdot R(s_0)} \Rightarrow R(s_0)\cdot\cos\varphi(s_0) = C$$

Како је s_0 произвољна следи да је $R(s)\cos\varphi(s) = C = const$.

(Γ)



Пресликавање $\mathcal{F}$ између датих површи r и σ описано је помоћу пресликавања $\bar{\mathcal{F}}(u,v)=(\ln(u+\sqrt{u^2+1}),v)$. Нама је важна ~~пресл~~ репараметризација $\bar{r}=\sigma\circ\bar{\mathcal{F}}$ површи σ, јер се од нас тражи да покажемо да су за површи r и $\bar{r}$ Гаусове кривине исте, али коефицијенти прве основне форме нису.

$$\bar{r}(u,v)=\sigma(\bar{\mathcal{F}}(u,v))=\sigma(\ln(u+\sqrt{u^2+1}),v)=\sigma(\operatorname{arsh}u,v)=(\operatorname{ch}(\operatorname{arsh}u)\cos v,\operatorname{ch}(\operatorname{arsh}u)\sin v,\operatorname{arsh}u).$$

Како је $\operatorname{ch}x=\sqrt{\operatorname{ch}^2x}$ (јер је $\operatorname{ch}x>0$) и $\operatorname{ch}^2x=1+\operatorname{sh}^2x$, следи да је

$\operatorname{ch}(\operatorname{arsh}u)=\sqrt{1+\operatorname{sh}^2(\operatorname{arsh}u)}=\sqrt{1+u^2}$, те је $\bar{r}(u,v)=(\sqrt{1+u^2}\cos v,\sqrt{1+u^2}\sin v,\operatorname{arsh}u)$.

$$\bar{r}_u(u,v)=\left(\frac{2u}{2\sqrt{1+u^2}}\cos v,\frac{2u}{2\sqrt{1+u^2}}\sin v,\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\right)=\left(\frac{u\cos v}{\sqrt{1+u^2}},\frac{u\sin v}{\sqrt{1+u^2}},\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\right)$$

$$\bar{r}_v(u,v)=(-\sqrt{1+u^2}\sin v,\sqrt{1+u^2}\cos v,0)$$

$$\bar{E}(u,v)=\langle\bar{r}_u(u,v),\bar{r}_u(u,v)\rangle=\frac{u^2\cos^2v}{1+u^2}+\frac{u^2\sin^2v}{1+u^2}+\frac{1}{1+u^2}=\frac{u^2+1}{1+u^2}=1$$

$$\bar{F}(u,v)=\langle\bar{r}_u(u,v),\bar{r}_v(u,v)\rangle=\cancel{-u\cos v\sin v+u\sin v\cos v}+0=0$$

$$\bar{G}(u,v)=\langle\bar{r}_v(u,v),\bar{r}_v(u,v)\rangle=(1+u^2)\sin^2v+(1+u^2)\cos^2v+0^2=1+u^2$$

$$\bar{r}_u(u,v)\times\bar{r}_v(u,v)=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ \frac{u\cos v}{\sqrt{1+u^2}}&\frac{u\sin v}{\sqrt{1+u^2}}&\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\\ -\sqrt{1+u^2}\sin v&\sqrt{1+u^2}\cos v&0\end{vmatrix}=(-\cos v,-\sin v,u\cos^2v+u\sin^2v)=(-\cos v,-\sin v,u)$$

$$\|\bar{r}_u(u,v)\times\bar{r}_v(u,v)\|^2=\cos^2v+\sin^2v+u^2=1+u^2\Rightarrow\|\bar{r}_u(u,v)\times\bar{r}_v(u,v)\|=\sqrt{1+u^2}$$

$$\bar{n}(u,v)=\frac{\bar{r}_u(u,v)\times\bar{r}_v(u,v)}{\|\bar{r}_u(u,v)\times\bar{r}_v(u,v)\|}=\left(-\frac{\cos v}{\sqrt{1+u^2}},-\frac{\sin v}{\sqrt{1+u^2}},\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\right)$$

$$\bar{r}_{uu}(u,v)=\left(\frac{\cos v\sqrt{1+u^2}-u\cos v\cdot\frac{2u}{2\sqrt{1+u^2}}}{1+u^2},\frac{\sin v\sqrt{1+u^2}-u\sin v\frac{2u}{2\sqrt{1+u^2}}}{1+u^2},-\frac{1}{1+u^2}\cdot\frac{2u}{2\sqrt{1+u^2}}\right)=$$

$$=\left(\frac{\frac{\cos v(1+\cancel{u^2})}{\sqrt{1+u^2}}-\cancel{\frac{u^2\cos v}{\sqrt{1+u^2}}}}{1+u^2},\frac{\frac{\sin v(1+\cancel{u^2})}{\sqrt{1+u^2}}-\cancel{\frac{u^2\sin v}{\sqrt{1+u^2}}}}{1+u^2},-\frac{u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\right)=$$

$$=\left(\frac{\cos v}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}},\frac{\sin v}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}},-\frac{u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\right)$$

$$\bar{r}_{uv}(u,v)=\left(-\frac{u\sin v}{\sqrt{1+u^2}},\frac{u\cos v}{\sqrt{1+u^2}},0\right)$$

$$\bar{r}_{vv}(u,v)=(-\sqrt{1+u^2}\cos v,-\sqrt{1+u^2}\sin v,0)$$

$$\bar e(u,v) = \langle \bar r_{uu}(u,v), \bar n(u,v)\rangle = -\frac{\cos^2 v}{(1+u^2)^2} - \frac{\sin^2 v}{(1+u^2)^2} - \frac{u^2}{(1+u^2)^2} = -\frac{\cancel{1+u^2}}{(1+u^2)^{\cancel{2}}} = -\frac{1}{1+u^2}$$

$$\bar f(u,v) = \langle \bar r_{uv}(u,v), \bar n(u,v)\rangle = \cancel{\frac{u\sin v\cos v}{1+u^2}} - \cancel{\frac{u\cos v\sin v}{1+u^2}} + 0 = 0$$

$$\bar g(u,v) = \langle \bar r_{vv}(u,v), \bar n(u,v)\rangle = \cos^2 v + \sin^2 v + 0 = 1$$

Гаусова кривина је $\bar K(u,v) = \dfrac{\bar e(u,v)\bar g(u,v) - \bar f(u,v)^2}{\bar E(u,v)\bar G(u,v) - \bar F(u,v)^2} = \dfrac{-\frac{1}{1+u^2}\cdot 1 - 0^2}{1\cdot(1+u^2) - 0^2} = \dfrac{-\frac{1}{1+u^2}}{1+u^2} = -\dfrac{1}{(1+u^2)^2}$.

Дакле, $\mathcal{F}$ (индуковано пресликавањем $\bar{\mathcal{F}}$) није изометрија (јер је $E \neq \bar E$, нпр), а пошто је $K(u,v) = \bar K(u,v)$, следи да чува Гаусову кривину.