Решења задатака са писменог испита из Геометрије 3 у јулском испитном року

1. Дата је параметризована крива $\alpha(t)=(\sin^2 t, \sin t\cos t, f(t))$, где је f нека глатка функција.

(а) Уколико је $f(t)=t$, $t\in\mathbb{R}$, доказати да је дата крива кружни хеликс.

(б) Уколико је $f(t)=\cos t$, $t\in\mathbb{R}$, доказати да се све нормалне равни дате криве секу у једној тачки и одредити сферу чији траг садржи траг дате криве.

(в) Уколико је $f(t)=\ln(\cos t)$, $t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, одредити инволуту дате криве, узимајући за почетну тачку пресек трага дате криве са x-осом.

(а) $\alpha(t)=(\sin^2 t,\sin t\cos t,t)=\left(\frac{1-\cos 2t}{2},\frac{1}{2}\cdot 2\sin t\cos t,t\right)=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2t,\frac{1}{2}\sin 2t,t\right)=$

$=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot(-\cos 2t),\frac{1}{2}\sin 2t,t\right)=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\cos(\pi-2t),\frac{1}{2}\sin(\pi-2t),t\right)=$

$\cos(\pi-\varphi)=-\cos\varphi$
$\sin(\pi-\varphi)=\sin\varphi$

$=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(\pi-2t),\frac{1}{2}\sin(\pi-2t),\frac{1}{2}\cdot 2t\right)=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(\pi-2t),\frac{1}{2}\sin(\pi-2t),-\frac{1}{2}\cdot(-2t)\right)=$

$=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(\pi-2t),\frac{1}{2}\sin(\pi-2t),-\frac{1}{2}(\pi-2t)+\frac{\pi}{2}\right)=$

$=\left(\frac{1}{2},0,\frac{\pi}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\cos(\pi-2t),\frac{1}{2}\sin(\pi-2t),-\frac{1}{2}(\pi-2t)\right)$

Уведимо репараметризацију $\pi-2t=u$. Тада добијамо криву $\tilde{\alpha}(u)=\left(\frac{1}{2},0,\frac{\pi}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\cos u,\frac{1}{2}\sin u,-\frac{1}{2}u\right)$. Препознајемо да је у питању крива $(a\cos u,a\sin u,bu)$, за $a=\frac{1}{2}$, $b=-\frac{1}{2}$, транслирана за вектор $\left(\frac{1}{2},0,\frac{\pi}{2}\right)$, односно кружни хеликс (транслација је изометрија простора и не мења тип криве, већ само њен положај у простору).

(б) $\alpha(t)=(\sin^2 t,\sin t\cos t,\cos t)$, $t\in\mathbb{R}$

Нормална раван криве у тачки $\alpha(t_0)$ је раван која садржи тачку $\alpha(t_0)$ и нормална је на вектору $T(t_0)$.

$T(t_0)=\frac{\alpha'(t_0)}{\|\alpha'(t_0)\|}$, па је вектор нормале нормалне равни криве α у тачки $\alpha(t_0)$ уједно и вектор $\alpha'(t_0)$ ($T(t_0)$ и $\alpha'(t_0)$ имају исти правац (и смер)).

$\alpha'(t) = (2\sin t\cos t, \cos^2 t-\sin^2 t, -\sin t)$

Нормална раван криве α у тачки $\alpha(t_0)$ је раван

$$\theta_{t_0}: 2\sin t_0\cos t_0(x-\sin^2 t_0)+(\cos^2 t_0-\sin^2 t_0)(y-\sin t_0\cos t_0)-$$
$$-\sin t_0(z-\cos t_0)=0$$

(раван θ_{t_0} садржи тачку $\alpha(t_0)=(\sin^2 t_0, \sin t_0\cos t_0, \cos t_0)$ и нормална је на вектору $\alpha'(t_0)=(2\sin t_0\cos t_0, \cos^2 t_0-\sin^2 t_0, -\sin t_0)$)

$$\theta_{t_0}: 2\sin t_0\cos t_0(x-\sin^2 t_0)+(\cos^2 t_0-\sin^2 t_0)(y-\sin t_0\cos t_0)-\sin t_0(z-\cos t_0)=0$$
$$2\sin t_0\cos t_0\, x+(\cos^2 t_0-\sin^2 t_0)y-\sin t_0\cdot z-\underline{2\sin^3 t_0\cos t_0}-\sin t_0\cos^3 t_0+\underline{\sin^3 t_0\cos t_0}+$$
$$+\sin t_0\cos t_0=0$$
$$2\sin t_0\cos t_0\, x+(\cos^2 t_0-\sin^2 t_0)y-\sin t_0\cdot z-\sin^3 t_0\cos t_0-\sin t_0\cos^3 t_0+\sin t_0\cos t_0=0$$
$$2\sin t_0\cos t_0\cdot x+(\cos^2 t_0-\sin^2 t_0)\cdot y-\sin t_0\cdot z-\sin t_0\cos t_0(\sin^2 t_0+\cos^2 t_0)+\sin t_0\cos t_0=0$$
$$2\sin t_0\cos t_0\cdot x+(\cos^2 t_0-\sin^2 t_0)\cdot y-\sin t_0\cdot z-\cancel{\sin t_0\cos t_0}+\cancel{\sin t_0\cos t_0}=0$$
$$2\sin t_0\cos t_0\cdot x+(\cos^2 t_0-\sin^2 t_0)\cdot y-\sin t_0\cdot z=0$$
$$\theta_{t_0}: 2\sin t_0\cos t_0\cdot x+(\cos^2 t_0-\sin^2 t_0)y-\sin t_0\cdot z=0$$

Видимо да без обзира на вредност параметра t_0 нормална раван θ_{t_0} садржи тачку $(0,0,0)$, па следи да се све те равни секу у $(0,0,0)$.
Како је $(\sin^2 t_0)^2+(\sin t_0\cos t_0)^2+(\cos t_0)^2 = \sin^4 t_0+\sin^2 t_0\cos^2 t_0+\cos^2 t_0 = \sin^2 t_0(\sin^2 t_0+\cos^2 t_0)+\cos^2 t_0 = \sin^2 t_0+\cos^2 t_0 = 1$, следи да свака тачка $\alpha(t_0)=(\sin^2 t_0, \sin t_0\cos t_0, \cos t_0)$ припада сфери $x^2+y^2+z^2=1$, те траг криве α припада сфери $x^2+y^2+z^2=1$.

(в) $\alpha(t)=(\sin^2 t, \sin t\cos t, \ln(\cos t))$, $t\in(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

Тражимо тачку пресека криве α и x-осе, тј. праве $y=0, z=0$.

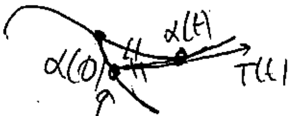
$$\sin t\cos t=0$$
$$\ln(\cos t)=0$$

$$\sin t\cos t=0$$
$$\cos t=1$$

$$\sin t=0$$
$$\cos t=1$$

$\boxed{t=0}$ (једини елемент скупа $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ који задовољава ове једначине)

Дакле, тачка $\alpha(0)$ је пресек криве α и z-осе, па њу бирамо за почетну тачку инволуте.



$\beta(t)=\alpha(t)-s(t)T(t)$, где је $s(t)=\int_0^t \|\alpha'(u)\|du$ функција дужине лука криве α с почетком у тачки $\alpha(0)$ (тј. $t=0$).

$$\alpha'(t)=\left(2\sin t\cos t,\ \cos^2 t-\sin^2 t,\ \frac{1}{\cos t}\cdot(-\sin t)\right)=(\sin 2t,\ \cos 2t,\ -\operatorname{tg} t)$$

$$\|\alpha'(t)\|^2=\sin^2 2t+\cos^2 2t+\operatorname{tg}^2 t=1+\operatorname{tg}^2 t=\frac{1}{\cos^2 t}\Longrightarrow \|\alpha'(t)\|=\frac{1}{\cos t}$$ (пошто је $t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, следи да је $\cos t>0$)

$$s(t)=\int_0^t\|\alpha'(u)\|du=\int_0^t\frac{1}{\cos u}du=\int_0^t\frac{\cos u\,du}{\cos^2 u}=\int_0^t\frac{\cos u\,du}{1-\sin^2 u}=\left\{\begin{matrix}\sin u=x & u=0,\ x=0 \\ \cos u\,du=dx & u=t,\ x=\sin t\end{matrix}\quad u\in\left(-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}\right)\right\}=$$

$$=\int_0^{\sin t}\frac{dx}{1-x^2}=\frac{1}{2}\int_0^{\sin t}\frac{1-x+1+x}{1-x^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^{\sin t}\frac{1-x}{1-x^2}dx+\frac{1}{2}\int_0^{\sin t}\frac{1+x}{1-x^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^{\sin t}\frac{dx}{1+x}+\frac{1}{2}\int_0^{\sin t}\frac{dx}{1-x}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln|1+x|\Big|_0^{\sin t}-\frac{1}{2}\ln|1-x|\Big|_0^{\sin t}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\Big|_0^{\sin t}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin t}{1-\sin t}\right|-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+0}{1-0}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin t}{1-\sin t}\right|-\underbrace{\frac{1}{2}\ln 1}_{=0}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin t}{1-\sin t}\right|$$

Није неопходно: $$\frac{1+\sin t}{1-\sin t}=\frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}=\frac{\frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}{2}}{\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}{2}}=\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{2}\right)}=\operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{2}\right)$$

$$\Longrightarrow s(t)=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin t}{1-\sin t}\right|=\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{2}\right)\right|=\frac{1}{2}\ln\left(\operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{2}\right)\right)=\ln\left(\sqrt{\operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{2}\right)}\right)=\ln\left(\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{2}\right)\right)$$

$t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$
$\Rightarrow \frac{t}{2}\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$
$\Rightarrow \frac{\pi}{4}-\frac{t}{2}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$
$\Rightarrow \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{2}\right)>0$

Инволута криве α с почетком у тачки $\alpha(0)$ је

$$\beta(t)=\alpha(t)-s(t)T(t)=(\sin^2 t,\ \sin t\cos t,\ \ln(\cos t))-\ln\left(\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{2}\right)\right)\cdot T(t)$$

$$T(t)=\frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}=\frac{1}{\|\alpha'(t)\|}\alpha'(t)=\frac{1}{\frac{1}{\cos t}}\cdot\left(\sin 2t,\ \cos 2t,\ -\frac{\sin t}{\cos t}\right)=$$

$$=(\sin 2t\cos t,\ \cos 2t\cos t,\ -\sin t)$$

$$\Rightarrow \beta(t)=(\sin^2 t,\ \sin t\cos t,\ \ln(\cos t))-\Big(\ln\left(\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{2}\right)\right)\cdot\sin 2t\cos t,\ \ln\left(\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{2}\right)\right)\cos 2t\cos t,$$
$$-\ln\left(\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{2}\right)\right)\cdot\sin t\Big)$$

$$=\left(\sin^2 t-\ln\left(\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{2}\right)\right)\cdot\sin 2t\cos t,\ \sin t\cos t-\ln\left(\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{2}\right)\right)\cdot\cos 2t\cos t,\ \ln(\cos t)+\ln\left(\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{2}\right)\right)\cdot\sin t\right).$$

2. Дата је површ једначином у Декартовим координатама $z=3x^2y-y^3$.

(а) Доказати да је тачка $(0,0,0)$ ове површи планарна, док су све остале тачке хиперболичке. Ако је $P(r)$ површина дела површи одређеног условом $x^2+y^2\le r^2$, а $\bar{P}(r)$ површина дела сфере на који се слика разматрани део површи при Гаусовом пресликавању, доказати да је гранична вредност $\lim\limits_{r\to 0+}\frac{\bar{P}(r)}{P(r)}$ једнака Гаусовој кривини у тачки $(0,0,0)$.

(б) Доказати да међу раванским кривама које се налазе у нормалном сечењу дате површи у тачки $(0,0,0)$, постоје тачно три асимптотске линије и тачно шест геодезијских линија.

(в) Доказати да пресликавање $(x,y,z)\longmapsto\left(-\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y, \frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y, z\right)$ простора $\mathbb{R}^3$, које представља ротацију око z-осе за угао $\frac{2\pi}{3}$, индукује изометрију дате ~~криве~~ површи на саму себе, у односу на коју су скупови асимптотских и геодезијских линија из дела (б) инваријантни.

(г) Одредити главне и асимптотске правце дате површи у тачки $(1,\sqrt{3},0)$, као и углове које асимптотски правци заклапају са главним правцима.

(а) $r(x,y)=(x,y,3x^2y-y^3)$ – параметризација површи

$$r_x(x,y)=(1,0,6xy)$$

$$r_y(x,y)=(0,1,3x^2-3y^2)$$

$$r_x(x,y)\times r_y(x,y)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & 6xy\\ 0 & 1 & 3x^2-3y^2\end{vmatrix}=(-6xy,-3x^2+3y^2,1)$$

$$\|r_x(x,y)\times r_y(x,y)\|^2=36x^2y^2+9x^4-18x^2y^2+9y^4+1=9x^4+18x^2y^2+9y^2+1$$

$$=(3x^2+3y^2)^2+1\Rightarrow\|r_x(x,y)\times r_y(x,y)\|=\sqrt{(3x^2+3y^2)^2+1}$$

$$\Rightarrow n(x,y)=\frac{r_x(x,y)\times r_y(x,y)}{\|r_x(x,y)\times r_y(x,y)\|}=\left(-\frac{6xy}{\sqrt{(3x^2+3y^2)^2+1}},\frac{-3x^2+3y^2}{\sqrt{(3x^2+3y^2)^2+1}},\frac{1}{\sqrt{(3x^2+3y^2)^2+1}}\right).$$

$$r_{xx}(x,y)=(0,0,6y)$$

$$r_{xy}(x,y)=(0,0,6x)$$

$$r_{yy}(x,y)=(0,0,-6y)$$

$e(x,y)=\langle r_{xx}(x,y), n(x,y)\rangle = \frac{6y}{\sqrt{(3x^2+3y^2)^2+1}}$

$f(x,y)=\langle r_{xy}(x,y), n(x,y)\rangle = \frac{6x}{\sqrt{(3x^2+3y^2)^2+1}}$

$g(x,y)=\langle r_{yy}(x,y), n(x,y)\rangle = -\frac{6y}{\sqrt{(3x^2+3y^2)^2+1}}$

Како је $EG-F^2=\langle r_x,r_x\rangle\langle r_y,r_y\rangle-\langle r_x,r_y\rangle^2=\|r_x\|^2\|r_y\|^2-(\|r_x\|\|r_y\|\cos\measuredangle(r_x,r_y))^2=$
$=\|r_x\|^2\|r_y\|^2(1-\cos^2\measuredangle(r_x,r_y))=\|r_x\|^2\|r_y\|^2\sin^2\measuredangle(r_x,r_y)=\|r_x\times r_y\|^2$, следи да је

$EG-F^2=(3x^2+3y^2)^2+1.$

Гаусова кривина: $K(x,y)=\frac{e(x,y)g(x,y)-f(x,y)^2}{E(x,y)G(x,y)-F(x,y)^2}=\frac{\overbrace{-\frac{36y^2}{(3x^2+3y^2)^2+1}}^{\leq 0}-\overbrace{\frac{36x^2}{(3x^2+3y^2)^2+1}}^{\leq 0}}{\underbrace{(3x^2+3y^2)^2+1}_{>0}}\leq 0$

$K(x,y)=0 \iff y=0$ и $x=0$ (тада су квадрати у бројиоцу једнаки 0)

Дакле, $K(x,y)<0$ за $(x,y)\neq(0,0)$, тј. све тачке осим $r(0,0)=(0,0,0)$ су хиперболичке.

в. $e(0,0)=f(0,0)=g(0,0)=0$

$(EG-F^2)k^2-(eG+Eg-2fF)k+(eg-f^2)=0$ једначина главних кривина

У тачки $(0,0)$: $EG-F^2=1$, $eG+Eg-2fF=0$, $eg-f^2=0$ $\Rightarrow k^2=0 \Rightarrow k_1=k_2=0$

$\Rightarrow$ тачка $r(0,0)=(0,0,0)$ је планарна тачка

$$P(r)=\iint_{x^2+y^2\leq r^2}\sqrt{EG-F^2}\,dx\,dy=\left\{\begin{array}{ll} x=\rho\cos\varphi & x^2+y^2\leq r^2\Rightarrow 0\leq\rho\leq r \\ y=\rho\sin\varphi & 0\leq\varphi\leq 2\pi \\ \text{јакобијан смене: } \frac{D(x,y)}{D(\rho,\varphi)}=\rho & \end{array}\right\}=\underbrace{\int_0^{2\pi}d\varphi}_{2\pi}\int_0^r\sqrt{(3\rho^2)^2+1}\,\rho\,d\rho=$$

$$=2\pi\cdot\int_0^{r}\sqrt{9\rho^4+1}\,\rho\,d\rho=\left\{\begin{array}{ll}\rho^2=u & \rho=0,\ u=0\\ 2\rho\,d\rho=du & \rho=r,\ u=r^2\end{array}\right\}=2\pi\cdot\int_0^{r^2}\sqrt{9u^2+1}\cdot\frac{du}{2}=\left\{\begin{array}{l}3u=\operatorname{sh}v\\ 3du=\operatorname{ch}v\,dv\end{array}\right\}$$

$$=\pi\cdot\int_0^{\operatorname{arsh}(3r^2)}\underbrace{\sqrt{\operatorname{sh}^2v+1}}_{\operatorname{ch}^2v}\cdot\frac{1}{3}\operatorname{ch}v\,dv=\frac{\pi}{3}\int_0^{\operatorname{arsh}(3r^2)}\operatorname{ch}^2v\,dv=\frac{\pi}{3}\int_0^{\operatorname{arsh}(3r^2)}\frac{\operatorname{ch}2v+1}{2}dv=\frac{\pi}{6}\left(\int_0^{\operatorname{arsh}(3r^2)}\operatorname{ch}2v\,dv+\int_0^{\operatorname{arsh}(3r^2)}dv\right)=$$

$$=\frac{\pi}{6}\left(\frac{1}{2}\operatorname{sh}2v\Big|_0^{\operatorname{arsh}(3r^2)}+v\Big|_0^{\operatorname{arsh}(3r^2)}\right)=\frac{\pi}{6}\left(\frac{1}{2}\cdot 2\operatorname{sh}v\operatorname{ch}v\Big|_0^{\operatorname{arsh}(3r^2)}+\operatorname{arsh}(3r^2)\right)=$$

$$=\frac{\pi}{6}\left(3r^2\cdot\sqrt{1+9r^4}+\operatorname{arsh}(3r^2)\right)\qquad\left(\begin{array}{l}\operatorname{sh}(\operatorname{arsh}(3r^2))=3r^2\\ \operatorname{ch}(\operatorname{arsh}(3r^2))=\sqrt{1+\operatorname{sh}^2(\operatorname{arsh}(3r^2))}=\sqrt{1+(3r^2)^2}=\sqrt{1+9r^4}\end{array}\right)$$

За површину дела сфере, добијеног Гаусовим пресликавањем дела површи где је $x^2+y^2\le r^2$, је потребна параметризација

површи $z=3x^2y-y^3$, тј. параметризација сфере дата јединичним нормалним в. пољем површи са $n(x,y)=\left(\frac{-6xy}{\sqrt{(3x^2+3y^2)^2+1}}, \frac{-3x^2+3y^2}{\sqrt{(3x^2+3y^2)^2+1}}, \frac{1}{\sqrt{(3x^2+3y^2)^2+1}}\right)$

Уведимо репараметризацију $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$. Тада је

$6xy=6\cdot\rho\cos\varphi\cdot\rho\sin\varphi=3\rho^2\cdot 2\sin\varphi\cos\varphi=3\rho^2\cdot\sin 2\varphi$,

$3x^2-3y^2=3\rho^2\cos^2\varphi-3\rho^2\sin^2\varphi=3\rho^2(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)=3\rho^2\cos 2\varphi$,

$3x^2+3y^2=3\rho^2\cos^2\varphi+3\rho^2\sin^2\varphi=3\rho^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)=3\rho^2$, па је репараметризација дела сфере добијеног Гаусовим пресликавањем

$$\tilde{n}(\rho,\varphi)=\left(-\frac{3\rho^2\sin 2\varphi}{\sqrt{(3\rho^2)^2+1}}, -\frac{3\rho^2\cos 2\varphi}{\sqrt{(3\rho^2)^2+1}}, \frac{1}{\sqrt{(3\rho^2)^2+1}}\right)$$

$$\tilde{n}(\rho,\varphi)=\left(-\frac{3\rho^2\sin 2\varphi}{\sqrt{9\rho^4+1}}, -\frac{3\rho^2\cos 2\varphi}{\sqrt{9\rho^4+1}}, \frac{1}{\sqrt{9\rho^4+1}}\right)$$

$$\tilde{n}_\rho(\rho,\varphi)=\left(-\frac{6\rho\sin 2\varphi\cdot\sqrt{9\rho^4+1}-3\rho^2\sin 2\varphi\cdot\frac{36\rho^3}{2\sqrt{9\rho^4+1}}}{9\rho^4+1}, -\frac{6\rho\cos 2\varphi\cdot\sqrt{9\rho^4+1}-3\rho^2\cos 2\varphi\cdot\frac{36\rho^3}{2\sqrt{9\rho^4+1}}}{9\rho^4+1}, -\frac{1}{2}(9\rho^4+1)^{-\frac{3}{2}}\cdot 36\rho^3\right)$$

$$=\left(-\frac{6\rho\sin 2\varphi(9\rho^4+1)-54\rho^5\sin 2\varphi}{(9\rho^4+1)^{\frac{3}{2}}}, -\frac{6\rho\cos 2\varphi(9\rho^4+1)-54\rho^5\cos 2\varphi}{(9\rho^4+1)^{\frac{3}{2}}}, -\frac{18\rho^3}{(9\rho^4+1)^{\frac{3}{2}}}\right)$$

$$=\left(-\frac{\cancel{54\rho^5\sin 2\varphi}+6\rho\sin 2\varphi-\cancel{54\rho^5\sin 2\varphi}}{(9\rho^4+1)^{\frac{3}{2}}}, -\frac{\cancel{54\rho^5\cos 2\varphi}+6\rho\cos 2\varphi-\cancel{54\rho^5\cos 2\varphi}}{(9\rho^4+1)^{\frac{3}{2}}}, -\frac{18\rho^3}{(9\rho^4+1)^{\frac{3}{2}}}\right)$$

$$=\left(-\frac{6\rho\sin 2\varphi}{(9\rho^4+1)^{\frac{3}{2}}}, -\frac{6\rho\cos 2\varphi}{(9\rho^4+1)^{\frac{3}{2}}}, -\frac{18\rho^3}{(9\rho^4+1)^{\frac{3}{2}}}\right)$$

$$\tilde{n}_\varphi(\rho,\varphi)=\left(-\frac{3\rho^2}{\sqrt{9\rho^4+1}}\cdot\cos 2\varphi\cdot 2, -\frac{3\rho^2}{\sqrt{9\rho^4+1}}\cdot(-\sin 2\varphi)\cdot 2, 0\right)=$$

$$=\left(-\frac{6\rho^2\cos 2\varphi}{\sqrt{9\rho^4+1}}, \frac{6\rho^2\sin 2\varphi}{\sqrt{9\rho^4+1}}, 0\right)$$

$$\tilde{E}(\rho,\varphi)=\langle\tilde{n}_\rho(\rho,\varphi),\tilde{n}_\rho(\rho,\varphi)\rangle=\frac{36\rho^2\sin^2 2\varphi}{(9\rho^4+1)^3}+\frac{36\rho^2\cos^2 2\varphi}{(9\rho^4+1)^3}+\frac{324\rho^6}{(9\rho^4+1)^3}=\frac{36\rho^2+324\rho^6}{(9\rho^4+1)^3}$$

$$\tilde{F}(\rho,\varphi)=\langle\tilde{n}_\rho(\rho,\varphi),\tilde{n}_\varphi(\rho,\varphi)\rangle=\frac{36\rho^3\sin 2\varphi\cos 2\varphi}{(9\rho^4+1)^2}-\frac{36\rho^3\cos 2\varphi\sin 2\varphi}{(9\rho^4+1)^2}+0=0$$

$$\tilde{G}(\rho,\varphi)=\langle\tilde{n}_\varphi(\rho,\varphi),\tilde{n}_\varphi(\rho,\varphi)\rangle=\frac{36\rho^4\cos^2 2\varphi}{9\rho^4+1}+\frac{36\rho^4\sin^2 2\varphi}{9\rho^4+1}+0^2=\frac{36\rho^4}{9\rho^4+1}$$

$$\tilde E(\rho,\varphi)=\frac{36\rho^2+324\rho^6}{(9\rho^4+1)^3}=\frac{36\rho^2\cancel{(1+9\rho^4)}}{(9\rho^4+1)^{\cancel{3}\,2}}=\frac{36\rho^2}{(9\rho^4+1)^2}\qquad \tilde E\tilde G-\tilde F^2=\frac{36^2\rho^6}{(9\rho^4+1)^3}$$

$$\tilde F(\rho,\varphi)=0\qquad\qquad \Rightarrow\sqrt{\tilde E\tilde G-\tilde F^2}=\frac{36\rho^3}{(9\rho^4+1)^{\frac32}}$$

$$\tilde G(\rho,\varphi)=\frac{36\rho^4}{9\rho^4+1}$$

Површина дела сфере је $\tilde P(r)=\iint\limits_{\substack{0\le\rho\le r\\0\le\varphi\le2\pi}}\sqrt{\tilde E\tilde G-\tilde F^2}\,d\rho\,d\varphi=\underbrace{\int_0^{2\pi}d\varphi}_{=2\pi}\int_0^r\frac{36\rho^3}{(9\rho^4+1)^{\frac32}}d\rho=\left\{\begin{matrix}\rho^4=x\\4\rho^3d\rho=dx\end{matrix}\right\}=$

$$=2\pi\cdot\cancel{36}^{\,9}\int_0^{r^4}\frac{1}{(9x+1)^{\frac32}}\cdot\frac{1}{\cancel{4}}dx=2\pi\cdot\int_0^{r^4}\frac{9dx}{(9x+1)^{\frac32}}=2\pi\cdot\int_0^{r^4}(9x+1)^{-\frac32}9dx=\left\{\begin{matrix}9x+1=y\\9dx=dy\end{matrix}\right\}=2\pi\int_1^{9r^4+1}y^{-\frac32}dy=$$

$$=2\pi\cdot\frac{y^{-\frac12}}{-\frac12}\Big|_1^{9r^4+1}=-4\pi\cdot\left((9r^4+1)^{-\frac12}-1^{-\frac12}\right)=4\pi\left(1-\frac{1}{\sqrt{9r^4+1}}\right).$$

$$\lim_{r\to0}\frac{\tilde P(r)}{P(r)}=\lim_{r\to0}\frac{4\pi\left(1-\frac{1}{\sqrt{9r^4+1}}\right)}{\frac{\pi}{6}\left(3r^2\sqrt{1+9r^4}+\operatorname{arsh}(3r^2)\right)}=24\lim_{r\to0}\frac{\frac{\sqrt{9r^4+1}-1}{\sqrt{9r^4+1}}}{3r^2\sqrt{1+9r^4}+\operatorname{arsh}(3r^2)}=24\lim_{r\to0}\frac{\sqrt{9r^4+1}-1}{3r^2(1+9r^4)+\sqrt{9r^4+1}\operatorname{arsh}(3r^2)}$$

$$\operatorname{arsh}x=\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|=\ln\left|x+1+\tfrac12x^2+o(x^2)\right|=\ln\left|1+x+\tfrac12x^2+o(x^2)\right|=x+\tfrac12x^2+o(x^2)-\frac{\left(x+\frac12x^2+o(x^2)\right)^2}{2}=$$

$$=x+\cancel{\tfrac12x^2}+o(x^2)-\frac{\cancel{x^2}+o(x^3)}{2}=x+o(x^2),\ x\to0$$

$$\lim_{r\to0}\frac{\tilde P(r)}{P(r)}=24\lim_{r\to0}\frac{\cancel{1}+\frac12 9r^4+o(r^4)-\cancel{1}}{3r^2+27r^6+\left(1+\frac12 9r^4+o(r^4)\right)\cdot\left(3r^2+o(r^4)\right)}=24\lim_{r\to0}\frac{\frac92r^4+o(r^4)}{3r^2+27r^6+3r^2+o(r^4)+\frac{27}{2}r^6+o(r^4)}=$$

$$=24\lim_{r\to0}\frac{\frac92r^4+o(r^4)}{6r^2+o(r^4)}=24\lim_{r\to0}\frac{\frac92r^2+o(r^2)}{6+o(r^2)}=0=K(0,0)\ \text{(Гаусова кривина у }(0,0,0))$$

(б) Нормално сечење површи $r(x,y)=(x,y,3x^2y-y^3)$ у тачки $(0,0,0)$ је када узмемо ма коју раван θ која садржи тачку $(0,0,0)=r(0,0)$ и вектор $n(0,0)=(0,0,1)$. Ако је (a,b,c) вектор нормале такве равни θ, онда је $(a,b,c)\perp(0,0,1)$, тј. важи $\langle(a,b,c),(0,0,1)\rangle=0$, односно $c=0$. Дакле $\theta: a\cdot(x-0)+b\cdot(y-0)\cdot c\cdot(z-0)=0$, тј. $\theta: ax+by=0$, за неке $a,b\in\mathbb{R}$, $a^2+b^2\neq0$.

Потражимо асимптотске линије површи. Крива $\gamma(t)=r(x(t),y(t))$ је асимптотска линија површи r ако је $\mathrm{II}(\gamma'(t),\gamma'(t))=0$ за свако t. Пошто је $\gamma'(t)=r_x(x(t),y(t))\cdot x'(t)+r_y(x(t),y(t))\cdot y'(t)$, тј. координате од $\gamma'(t)$ у бази $r_x(x(t),y(t)),r_y(x(t),y(t))$ су $x'(t)$ и $y'(t)$, добијамо да је $\mathrm{II}(\gamma'(t),\gamma'(t))=\begin{pmatrix}x'(t)&y'(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e(x(t),y(t))&f(x(t),y(t))\\f(x(t),y(t))&g(x(t),y(t))\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'(t)\\y'(t)\end{pmatrix}=0$, тј.

$$\begin{pmatrix}x'(t)e(x(t),y(t))+y'(t)f(x(t),y(t)) & x'(t)f(x(t),y(t))+y'(t)g(x(t),y(t))\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'(t)\\y'(t)\end{pmatrix}=0$$

$$x'(t)^2e(x(t),y(t))+2x'(t)y'(t)f(x(t),y(t))+y'(t)^2g(x(t),y(t))=0.$$

$$x'(t)^2\cdot\frac{6y(t)}{\sqrt{(3x(t)^2+3y(t)^2)^2+1}}+2x'(t)y'(t)\cdot\frac{6x(t)}{\sqrt{(3x(t)^2+3y(t)^2)^2+1}}-y'(t)^2\cdot\frac{6y(t)}{\sqrt{(3x(t)^2+3y(t)^2)^2+1}}=0$$

$$\cancel{6}x'(t)^2y(t)+\overset{2}{\cancel{12}}x(t)x'(t)y'(t)-\cancel{6}y(t)y'(t)^2=0$$

Пошто ми тражимо асимптотске линије у нормалном сечењу одређеном равни $\theta: ax+by=0$, значи да је за свако t испуњено $ax(t)+by(t)=0$ (тачка $\gamma(t)=r(x(t),y(t))=(x(t),y(t),3x(t)^2y(t)-y(t)^3)$ криве γ припада равни $\theta: ax+by=0$ ако и само ако је $ax(t)+by(t)=0$). Тада је и $ax'(t)+by'(t)=0$. Ако је $a=0$, онда је $b\neq 0$ (јер вектор нормале $(a,b,0)=(0,b,0)$ равни θ не може бити $\vec{0}$), па је $by(t)=0$, тј. $y(t)=0$ и $by'(t)=0$, тј. $y'(t)=0$. Једначина $x'(t)y(t)+2x(t)x'(t)y'(t)+y(t)y'(t)^2=0$ је задовољена за свако t, па је крива $\gamma_1(t)=r(x(t),0)=(x(t),0,3x(t)^2\cdot 0-0^3)=(x(t),0,0)$ (то је x-оса) асимптотска линија. Ако је $a\neq 0$, онда је $x(t)=-\frac{b}{a}y(t)$ и ~~једначина постаје~~ $x'(t)=-\frac{b}{a}y'(t)$. Заменом у једначину добијамо $\left(-\frac{b}{a}y'(t)\right)^2y(t)+2\cdot\left(-\frac{b}{a}y(t)\right)\left(-\frac{b}{a}y'(t)\right)y'(t)-y(t)y'(t)^2=0$, тј.

$\frac{b^2}{a^2}y'(t)^2y(t)+2\frac{b^2}{a^2}y(t)y'(t)^2-y(t)y'(t)^2=0$. Дакле, $\left(3\frac{b^2}{a^2}-1\right)y(t)y'(t)^2=0$.

Ако би било $y'(t)=0$ за свако t, онда би било $y(t)=c=const$ и $x(t)=-\frac{b}{a}y(t)=-\frac{b}{a}\cdot c=const$, што је немогуће, јер би онда траг криве γ једна тачка, а то не сматрамо кривом ($\gamma(t)=r(x(t),y(t))=r(c_1,c)=const$). Слично је и ако је $y(t)=0$ за свако t (онда је $x(t)=-\frac{b}{a}y(t)=0$ за свако t и $\gamma(t)=r(0,0)$ је крива чија је траг једна тачка). Према томе, мора бити $3\frac{b^2}{a^2}-1=0$, тј. $3\frac{b^2}{a^2}=1$, односно $3b^2=a^2$. Дакле, $a=\pm b\sqrt{3}$, па су асимптотске криве у нормалним сечењима одређеним равнима $\sqrt{3}x+y=0$ и $-\sqrt{3}x+y=0$, Заједно са кривом у равни $y=0$, добијамо тачно три асимптотске криве у нормалним сечењима површи r у тачки $(0,0,0)$.

$$r(x,y)=(x,y,3x^2y-y^3)$$
$$r_x(x,y)=(1,0,6xy)$$
$$r_y(x,y)=(0,1,3x^2-3y^2)$$
$$n(x,y)=\left(-\frac{6xy}{\sqrt{(3x^2+3y^2)^2+1}},\frac{-3x^2+3y^2}{\sqrt{(3x^2+3y^2)^2+1}},\frac{1}{\sqrt{(3x^2+3y^2)^2+1}}\right)$$

$\alpha(t)=r(x(t),y(t))$ геодезијска крива у нормалном сечењу одређеног равни $\theta: ax+by=0$. Тада је $ax(t)+by(t)=0$ за свако t. Ако је $a=0$, онда је $b\neq 0$ и $by(t)=0$, па је $y(t)=0$. Добијамо криву $\alpha(t)=r(x(t),0)=(x(t),0,3x(t)^2\cdot 0-0^3)=(x(t),0,0)$, што је x-оса, а пошто је то права, она је геодезијска. Ако је $a\neq 0$, онда је $x(t)=-\frac{b}{a}y(t)$, па је крива

$$\alpha(t)=r(x(t),y(t))=r\left(-\frac{b}{a}y(t),y(t)\right)=\left(-\frac{b}{a}y(t),y(t),3\cdot\left(-\frac{b}{a}y(t)\right)^2y(t)-y(t)^3\right)=$$
$$=\left(-\frac{b}{a}y(t),y(t),3\frac{b^2}{a^2}y(t)^3-y(t)^3\right)=\left(-\frac{b}{a}y(t),y(t),\left(\frac{3b^2}{a^2}-1\right)y(t)^3\right)$$

$$\alpha'(t)=\left(-\frac{b}{a},1,3\cdot\left(\frac{3b^2}{a^2}-1\right)y(t)^2\cdot y'(t)\right)$$
$$\alpha''(t)=\left(0,0,3\left(\frac{3b^2}{a^2}-1\right)\cdot 2y(t)y'(t)^2+3\left(\frac{3b^2}{a^2}-1\right)y(t)^2y''(t)\right)$$

α је геодезијска ако и само ако је $K_g(t)=\frac{[n(x(t),y(t)),\alpha'(t),\alpha''(t)]}{\|\alpha'(t)\|^3}=0$. Како је $x(t)=-\frac{b}{a}y(t)$, довољно је да важи $[n(-\frac{b}{a}y(t),y(t)),\alpha'(t),\alpha''(t)]=0$, тј.

$$\begin{vmatrix}-\frac{6\cdot(-\frac{b}{a})y(t)^2}{\sqrt{(3\frac{b^2}{a^2}y(t)^2+3y(t)^2)^2+1}} & \frac{-3\frac{b^2}{a^2}y(t)^2+3y(t)^2}{\sqrt{(3\frac{b^2}{a^2}y(t)^2+3y(t)^2)^2+1}} & \frac{1}{\sqrt{(3\frac{b^2}{a^2}y(t)^2+3y(t)^2)^2+1}}\\ -\frac{b}{a} & 1 & 3\left(\frac{3b^2}{a^2}-1\right)y(t)^2y'(t)\\ 0 & 0 & 3\left(\frac{3b^2}{a^2}-1\right)\left(2y(t)y'(t)^2+y(t)^2y''(t)\right)\end{vmatrix}=0.$$

Развојем по трећој колони добијамо

$$3\left(3\frac{b^2}{a^2}-1\right)y(t)\left(2y'(t)^2+y(t)y''(t)\right)\cdot\begin{vmatrix}\frac{\frac{6b}{a}y(t)^2}{\sqrt{(3\frac{b^2}{a^2}y(t)^2+3y(t)^2)^2+1}} & \frac{-3\frac{b^2}{a^2}y(t)^2+3y(t)^2}{\sqrt{(3\frac{b^2}{a^2}y(t)^2+3y(t)^2)^2+1}}\\ -\frac{b}{a} & 1\end{vmatrix}=0$$

$$0=\frac{\cancel{3}\left(\frac{3b^2}{a^2}-1\right)y(t)\left(2y'(t)^2+y(t)y''(t)\right)}{\cancel{\sqrt{\left(3\frac{b^2}{a^2}y(t)^2+3y(t)^2\right)^2+1}}}\qquad \begin{vmatrix}\frac{6b}{a}y(t)^2 & -3\frac{b^3}{a^2}y(t)^2+3y(t)^2\\ -\frac{b}{a} & 1\end{vmatrix}$$

$$\left(\frac{3b^2}{a^2}-1\right)y(t)\left(2y'(t)+y(t)y''(t)\right)\left(\frac{6b}{a}y(t)^2-3\frac{b^3}{a^3}y(t)^2+3\frac{b}{a}y(t)^2\right)=0$$

$$\left(\frac{9b}{a}-3\frac{b^3}{a^3}\right)y(t)^2$$

$$\left(\frac{3b^2}{a^2}-1\right)\left(\frac{9b}{a}-3\frac{b^3}{a^3}\right)y(t)^3\left(2y'(t)^2+y(t)y''(t)\right)=0$$

$$\left(\frac{3b^2}{a^2}-1\right)3\frac{b}{a}\left(3-\frac{b^2}{a^2}\right)y(t)^3\left(2y'(t)^2+y(t)y''(t)\right)=0$$

Дакле, $\frac{3b^2}{a^2}-1=0$, $\frac{b}{a}=0$ или $3-\frac{b^2}{a^2}=0$, што значи да је $\frac{3b^2}{a^2}=1$, $b=0$ или $\frac{b^2}{a^2}=3$, тј. $3b^2=a^2$, $b=0$ или $b^2=3a^2$, па је $a=\pm b\sqrt{3}$, $b=0$ или $b=\pm a\sqrt{3}$. Када додамо и $a=0$, добијамо да су геодезијске у нормалним сечењима одређеним равнима $y=0$, $\sqrt{3}x+y=0$, $-\sqrt{3}x+y=0$, $x=0$, $x+\sqrt{3}y=0$ и $x-\sqrt{3}y=0$, тј. да их има шест (прве три међу њима су и асимптотске, што значи да су оне праве).

(В) Нека је $(x_0,y_0,3x_0^2y_0-y_0^3)$ произвољна тачка површи. Ротацијом она прелази у тачку $\left(-\frac{1}{2}x_0-\frac{\sqrt{3}}{2}y_0, \frac{\sqrt{3}}{2}x_0-\frac{1}{2}y_0, 3x_0^2y_0-y_0^3\right)$. Она припада површи $z=3x^2y-y^3$ ако и само ако је $3\left(-\frac{1}{2}x_0-\frac{\sqrt{3}}{2}y_0\right)^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x_0-\frac{1}{2}y_0\right)-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x_0-\frac{1}{2}y_0\right)^3=3x_0^2y_0-y_0^3$

$$3\left(\frac{x_0^2}{4}+2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}x_0y_0+\frac{3}{4}y_0^2\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x_0-\frac{1}{2}y_0\right)-\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x_0\right)^3-3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x_0\right)^2\frac{1}{2}y_0+3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x_0\right)\left(\frac{1}{2}y_0\right)^2-\left(\frac{1}{2}y_0\right)^3\right)\stackrel{?}{=}3x_0^2y_0-y_0^3$$

$$\left(\frac{3}{4}x_0^2+\frac{3\sqrt{3}}{2}x_0y_0+\frac{9}{4}y_0^2\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x_0-\frac{1}{2}y_0\right)-\left(\frac{3\sqrt{3}}{8}x_0^3-3\cdot\frac{3}{4}x_0^2\cdot\frac{1}{2}y_0+\frac{3\sqrt{3}}{2}x_0\frac{1}{4}y_0^2-\frac{1}{8}y_0^3\right)\stackrel{?}{=}3x_0^2y_0-y_0^3$$

$$\cancel{\frac{3\sqrt{3}}{8}x_0^3}-\frac{3}{8}x_0^2y_0+\frac{9}{4}x_0^2y_0-\frac{3\sqrt{3}}{4}x_0y_0^2+\frac{9\sqrt{3}}{8}x_0y_0^2-\frac{9}{8}y_0^3-\cancel{\frac{3\sqrt{3}}{8}x_0^3}+\frac{9}{8}x_0^2y_0-\frac{3\sqrt{3}}{8}x_0y_0^2+\frac{1}{8}y_0^3\stackrel{?}{=}3x_0^2y_0-y_0^3$$

$$\left(\frac{9}{4}-\frac{3}{8}+\frac{9}{8}\right)x_0^2y_0+\left(-\frac{3\sqrt{3}}{4}+\frac{9\sqrt{3}}{8}-\frac{3\sqrt{3}}{8}\right)x_0y_0^2+\left(-\frac{9}{8}+\frac{1}{8}\right)y_0^3\stackrel{?}{=}3x_0^2y_0-y_0^3$$

$$\frac{18-3+9}{8}x_0^2y_0+\frac{-6\sqrt{3}+9\sqrt{3}-3\sqrt{3}}{8}x_0y_0^2+\frac{-9+1}{8}y_0^3\stackrel{?}{=}3x_0^2y_0-y_0^3$$

$$\frac{24}{8}x_0^2y_0+\frac{-8}{8}y_0^3\stackrel{?}{=}3x_0^2y_0-y_0^3$$

$$3x_0^2y_0-y_0^3\stackrel{?}{=}3x_0^2y_0-y_0^3 \checkmark$$

Дакле, уоченом ротацијом се површ слика на себе. При томе, тачке равни $y=0$ (то су тачке $(x_0,0,z_0)$) се сликају у тачке $\left(-\frac{1}{2}x_0,\frac{\sqrt{3}}{2}x_0,z_0\right)$, а оне припадају равни $\sqrt{3}x+y=0$, тачке из равни $\sqrt{3}x+y=0$ (оне су облика $(x_0, -\sqrt{3}x_0, r_0)$) се сликају у тачке $\left(-\frac{1}{2}x_0-\frac{\sqrt{3}}{2}(-\sqrt{3}x_0), \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot x_0 - \frac{1}{2}\cdot(-\sqrt{3}x_0), r_0\right)=\left(-\frac{1}{2}x_0+\frac{3}{2}x_0, \frac{\sqrt{3}}{2}x_0+\frac{\sqrt{3}}{2}x_0, r_0\right)=$ $=(x_0, \sqrt{3}x_0, r_0)$, које припадају равни $y=\sqrt{3}x$, тј. $\sqrt{3}x-y=0$, а тачке из равни $\sqrt{3}x-y=0$ (оне су облика $(x_0, \sqrt{3}x_0, r_0)$) се сликају у тачке

$\left(-\frac{1}{2}x_0-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{3}x_0, \frac{\sqrt{3}}{2}x_0-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}x_0, r_0\right)=\left(-\frac{1}{2}x_0-\frac{3}{2}x_0, \frac{\sqrt{3}}{2}x_0-\frac{\sqrt{3}}{2}x_0, r_0\right)=(-2x_0, 0, r_0)$, које припадају равни $y=0$. Дакле, скуп асимптотских кривих из дела (б) остаје инваријантан.

Тачке из равни $x=0$ (оне су облика $(0, y_0, r_0)$) се сликају у $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}y_0, -\frac{1}{2}y_0, r_0\right)$, које припадају равни $x=\sqrt{3}y$, тј. $x-\sqrt{3}y=0$. Тачке $(\sqrt{3}y_0, y_0, r_0)$ из равни $x-\sqrt{3}y=0$ се сликају у тачке $\left(-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}y_0-\frac{\sqrt{3}}{2}y_0, \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{3}y_0-\frac{1}{2}y_0, r_0\right)=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}y_0-\frac{\sqrt{3}}{2}y_0, \frac{3}{2}y_0-\frac{1}{2}y_0, r_0\right)=(-\sqrt{3}y_0, y_0, r_0)$ које припадају равни $x=-\sqrt{3}y$, тј. $x+\sqrt{3}y=0$, а тачке $(-\sqrt{3}y_0, y_0, r_0)$ из равни $x+\sqrt{3}y=0$ се сликају у тачке $\left(-\frac{1}{2}\cdot(-\sqrt{3}y_0)-\frac{\sqrt{3}}{2}y_0, \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot(-\sqrt{3}y_0)-\frac{1}{2}y_0, r_0\right)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}y_0-\frac{\sqrt{3}}{2}y_0, -\frac{3}{2}y_0-\frac{1}{2}y_0, r_0\right)=(0, -2y_0, r_0)$ које припадају равни $x=0$. Дакле и скуп геодезијских линија из дела (б) остаје инваријантан.

(г) $(1, \sqrt{3}, 0) = r(1, \sqrt{3})$ $\quad \left(0 \overset{?}{=} 3\cdot 1^2\cdot\sqrt{3}-(\sqrt{3})^3 = 3\sqrt{3}-3\sqrt{3} \checkmark\right)$

$r(x,y) = (x, y, 3x^2y-y^3)$

$r_x(x,y) = (1, 0, 6xy)$

$r_y(x,y) = (0, 1, 3x^2-3y^2)$

$r_x(1,\sqrt{3}) = (1, 0, 6\sqrt{3})$

$r_y(1,\sqrt{3}) = (0, 1, 3-3\cdot 3) = (0, 1, -6)$

$E = \langle (1,0,6\sqrt{3}), (1,0,6\sqrt{3})\rangle = 1+36\cdot 3 = 1+108 = 109$

$F = \langle (1,0,6\sqrt{3}), (0,1,-6)\rangle = -36\sqrt{3}$

$G = \langle (0,1,-6), (0,1,-6)\rangle = 1+36 = 37$

$$e(x,y) = \frac{6y}{\sqrt{(3x^2-3y^2)^2+1}} = -g(x,y)$$

$$f(x,y) = \frac{6x}{\sqrt{(3x^2-3y^2)^2+1}}$$

$$e = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{(3-3\cdot 3)^2+1}} = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{12^2+1}} = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{145}} = -g$$

$$f = \frac{6\cdot 1}{\sqrt{(3-3\cdot 3)^2+1}} = \frac{6}{\sqrt{12^2+1}} = \frac{6}{\sqrt{145}}$$

Главни вектори су $a\cdot r_x(1,\sqrt{3})+b\cdot r_y(1,\sqrt{3})$ ако и само ако је

$$\begin{vmatrix} -b^2 & ab & -a^2 \\ e & f & g \\ E & F & G \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} -b^2 & ab & -a^2 \\ \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{145}} & \frac{6}{\sqrt{145}} & -\frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{145}} \\ 109 & -36\sqrt{3} & 37 \end{vmatrix} = 0$$

$$\frac{6}{\sqrt{145}}\begin{vmatrix} -b^2 & ab & -a^2 \\ \sqrt{3} & 1 & -\sqrt{3} \\ 109 & -36\sqrt{3} & 37 \end{vmatrix} = 0$$

$$-37b^2 - 109\sqrt{3}ab + \overbrace{36\cdot 3}^{108}a^2 + 109a^2 + \overbrace{36\cdot 3}^{108}b^2 - 37\sqrt{3}ab = 0$$

$$217a^2 - 146\sqrt{3}ab + 71b^2 = 0$$

$b=0$ није решење, јер ~~да~~ онда $217a^2=0$, па је и $a=0$,
а не желимо вектор $a r_x(1,\sqrt{3})+b r_y(1,\sqrt{3})$ да буде $\vec{0}$

Поделимо са $b^2\neq 0$: $217\left(\frac{a}{b}\right)^2-146\sqrt{3}\,\frac{a}{b}+71=0$

$$\frac{a}{b}=\frac{146\sqrt{3}\pm\sqrt{146^2\cdot 3-4\cdot 217\cdot 71}}{2\cdot 217}=\frac{146\sqrt{3}\pm\sqrt{63948-61628}}{434}=\frac{146\sqrt{3}\pm\sqrt{2320}}{434}$$

$$\begin{array}{r} 146\cdot 146 \\ \hline 876 \\ 584 \\ 146 \\ \hline 21316 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4\cdot 217=868 \\ 868\cdot 71 \\ \hline 6076 \\ \hline 61628 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 21316\cdot 3 \\ \hline 63948 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2320 & 2 \\ 1160 & 2 \\ 580 & 2 \\ 290 & 2 \\ 145 & 5 \\ 29 & 29 \\ 1 & \end{array}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{146\sqrt{3}\pm\sqrt{2^4\cdot 145}}{434}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{146\sqrt{3}\pm 2^2\sqrt{145}}{434}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{\cancel{146}^{73}\sqrt{3}\pm\cancel{4}^{2}\sqrt{145}}{\cancel{434}_{217}}$$

$$\boxed{\frac{a}{b}=\frac{73\sqrt{3}\pm 2\sqrt{145}}{217}}$$

Дакле, главни вектори су $V_1=\frac{73\sqrt{3}+2\sqrt{145}}{217}r_x(1,\sqrt{3})+r_y(1,\sqrt{3})$ и

$V_2=\frac{73\sqrt{3}-2\sqrt{145}}{217}r_x(1,\sqrt{3})+r_y(1,\sqrt{3})$, T).

$V_1=\frac{73\sqrt{3}+2\sqrt{145}}{217}\cdot(1,0,6\sqrt{3})+(0,1,-6)$ и

$V_2=\frac{73\sqrt{3}-2\sqrt{145}}{217}\cdot(1,0,6\sqrt{3})+(0,1,-6)$.

Асимптотски правци: $W=c\,r_x(1,\sqrt{3})+d\,r_y(1,\sqrt{3})$

$\mathrm{II}(W,W)=0$

$$(c\ \ d)\begin{pmatrix} e & f \\ f & g\end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ d\end{pmatrix}=0$$

$$(c\ \ d)\begin{pmatrix} \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{145}} & \frac{6}{\sqrt{145}} \\ \frac{6}{\sqrt{145}} & -\frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{145}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ d\end{pmatrix}=0$$

$$\left(\frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{145}}c+\frac{6}{\sqrt{145}}d \quad \frac{6}{\sqrt{145}}c-\frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{145}}d\right)\begin{pmatrix} c \\ d\end{pmatrix}=0$$

$$\frac{\cancel{6}\sqrt{3}}{\cancel{\sqrt{145}}}c^2+\frac{\cancel{6}}{\cancel{\sqrt{145}}}cd\cdot 2-\frac{\cancel{6}\sqrt{3}}{\cancel{\sqrt{145}}}d^2=0$$

$$\sqrt{3}c^2+2cd-\sqrt{3}d^2=0$$

$d\neq 0$, иначе је $\sqrt{3}c^2=0$, па је и $c=0$, а не желимо $W=\vec{0}$

$$\sqrt{3}\frac{c^2}{d^2}+2\frac{c}{d}-\sqrt{3}=0$$

$$\frac{c}{d}=\frac{-2\pm\sqrt{4+4\cdot 3}}{2\sqrt{3}}=\frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{2\sqrt{3}}=\frac{-2\pm 4}{2\sqrt{3}}$$

$$\frac{-2+4}{2\sqrt{3}}=\frac{2}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{-2-4}{2\sqrt{3}}=-\frac{6}{2\sqrt{3}}=-\frac{3}{\sqrt{3}}=-\sqrt{3}$$

Дакле $\frac{c}{d}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ или $\frac{c}{d}=-\sqrt{3}$, па су асимптотски вектори

$W_1 = r_x(1,\sqrt{3})+\sqrt{3}r_y(1,\sqrt{3})$ и $W_2=-\sqrt{3}r_x(1,\sqrt{3})+r_y(1,\sqrt{3})$, Т).

$$W_1=(1,0,6\sqrt{3})+\sqrt{3}(0,1,-6)=(1,0,6\sqrt{3})+(0,\sqrt{3},-6\sqrt{3})=(1,\sqrt{3},0) \text{ и}$$

$$W_2=-\sqrt{3}(1,0,6\sqrt{3})+(0,1,-6)=(-\sqrt{3},0,-18)+(0,1,-6)=(-\sqrt{3},1,-24).$$

Угао који заклапа W_1 са V_1 је $\arccos\frac{\langle V_1,W_1\rangle}{\|V_1\|\cdot\|W_1\|}$, а угао који W_2 заклапа са V_1 је $\arccos\frac{\langle V_1,W_2\rangle}{\|V_1\|\cdot\|W_2\|}$.

$$\langle V_1,W_1\rangle=I(V_1,W_1)=\begin{pmatrix}\frac{73\sqrt{3}+2\sqrt{145}}{217} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}109 & -36\sqrt{3}\\ -36\sqrt{3} & 37\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{3}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{109}{217}\cdot(73\sqrt{3}+2\sqrt{145})-36\sqrt{3} & -\frac{36\sqrt{3}}{217}(73\sqrt{3}+2\sqrt{145})+37\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{3}\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{109}{217}(73\sqrt{3}+2\sqrt{145})-36\sqrt{3}-\frac{\overset{108}{36\cdot3}}{217}(73+2\sqrt{145})+37\sqrt{3}=$$

$$=\frac{1}{217}(73\sqrt{3}+2\sqrt{145})+\sqrt{3}=\frac{73+217}{217}\sqrt{3}+\frac{2}{217}\sqrt{145}=\frac{290}{217}\sqrt{3}+\frac{2}{217}\sqrt{145}$$

$$\|V_1\|^2=I(V_1,V_1)=\ldots$$

$$\|W_1\|^2=I(W_1,W_1)=\begin{pmatrix}1 & \sqrt{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}109 & -36\sqrt{3}\\ -36\sqrt{3} & 37\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}109-108 & -36\sqrt{3}+37\sqrt{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{3}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & \sqrt{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{3}\end{pmatrix}=1+3=4 \Rightarrow \|W_1\|=2$$

$$\langle V_1,W_2\rangle=\begin{pmatrix}\frac{73\sqrt{3}+2\sqrt{145}}{217} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}109 & -36\sqrt{3}\\ -36\sqrt{3} & 37\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\sqrt{3}\\ 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{109}{217}(73\sqrt{3}+2\sqrt{145})-36\sqrt{3} & -\frac{36\sqrt{3}}{217}(73\sqrt{3}+2\sqrt{145})+37\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\sqrt{3}\\ 1\end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{109\sqrt{3}}{217}(73\sqrt{3}+2\sqrt{145})+108-\frac{36\sqrt{3}}{217}(73\sqrt{3}+2\sqrt{145})+37=$$

$$=-\frac{145\sqrt{3}}{217}(73\sqrt{3}+2\sqrt{145})+145$$

$$\|W_2\|^2=I(W_2,W_2)=\begin{pmatrix}-\sqrt{3} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}109 & -36\sqrt{3}\\ -36\sqrt{3} & 37\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\sqrt{3}\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-109\sqrt{3}-36\sqrt{3} & 108+37\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\sqrt{3}\\ 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-145\sqrt{3} & 145\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\sqrt{3}\\ 1\end{pmatrix}=145\cdot3+145=145\cdot4 \Rightarrow \|W_2\|=2\sqrt{145}$$