Писмени испит из Геометрије 3

рок јануар 1, 12.1.2022.

1. Дата је астроида својом једначином у Декартовим координатама $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=4$.

(а) Одредити неку параметризацију астроиде и доказати да је одсечак тангенте у произвољној регуларној тачки те параметризоване криве, одређен пресецима са координатним осама, константне дужине.

(б) Доказати да је еволута астроиде опет једна астроида.

(в) Одредити неку параметризовану криву на сфери $x^2+y^2+z^2=64$ чији се траг ортогонално пројектује на дату астроиду.

(а) $\alpha:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^2$, $\alpha(t)=(8\cos^3 t, 8\sin^3 t)$

Како је $(8\cos^3 t)^{\frac{2}{3}}+(8\sin^3 t)^{\frac{2}{3}}=8^{\frac{2}{3}}(\cos t)^{\cancel{3}\cdot\frac{2}{\cancel{3}}}+8^{\frac{2}{3}}(\sin t)^{\cancel{3}\cdot\frac{2}{\cancel{3}}}=(\sqrt[3]{8})^2\cos^2 t+(\sqrt[3]{8})^2\sin^2 t=$
$=2^2\cos^2 t+2^2\sin^2 t=4\cos^2 t+4\sin^2 t=4$, то $\alpha(t)=(8\cos^3 t, 8\sin^3 t)$ јесте једна параметризација астроиде.

$\alpha'(t)=(8\cdot 3\cos^2 t\cdot(-\sin t), 8\cdot 3\sin^2 t\cdot\cos t)=(-24\sin t\cos^2 t, 24\cos t\sin^2 t)=24\sin t\cos t(-\cos t,\sin t)$

$\|\alpha'(t)\|^2=(24\sin t\cos t)^2\cdot(\cos^2 t+\sin^2 t)=(24\sin t\cos t)^2\Longrightarrow\|\alpha'(t)\|=|24\sin t\cos t|=12\cdot|2\sin t\cos t|=$
$=12\cdot|\sin 2t|$

$\|\alpha(t)\|=0\iff 12\cdot|\sin 2t|=0\iff|\sin 2t|=0\iff\sin 2t=0\iff 2t=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\iff t=\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$

Астроида није регуларна у тачкама $t=\frac{k\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$.

Нека је $t\in\mathbb{R}\setminus\{\frac{k\pi}{2}\mid k\in\mathbb{Z}\}$ произвољна. Тангента астроиде у тачки $\alpha(t)=(8\cos^3 t, 8\sin^3 t)$ је

$$p:\ \frac{x-8\cos^3 t}{-\cancel{24\sin t}\cos^{\cancel{2}} t}=\frac{y-8\sin^3 t}{\cancel{24}\cancel{\cos t}\sin^{\cancel{2}} t}$$

$$p:\ \frac{x-8\cos^3 t}{-\cos t}=\frac{y-8\sin^3 t}{\sin t}$$

Пресек тангенте p и x-осе је тачка $A(x_0,0)$ таква да је $\frac{x_0-8\cos^3 t}{-\cos t}=\frac{0-8\sin^3 t}{\sin t}$.

$$\frac{x_0-8\cos^3 t}{-\cos t}=\frac{-8\sin^3 t}{\sin t}=-8\sin^2 t$$

$$x_0-8\cos^3 t=8\sin^2 t\cos t$$

$$x_0=8\cos^3 t+8\sin^2 t\cos t=8\cos t(\cos^2 t+\sin^2 t)=8\cos t$$

Дакле, пресек тангенте p и x-осе је тачке $A(8\cos t,0)$.

Пресек тангенте p и y-осе је тачка $B(0,y_0)$ таква да је $\frac{0-8\cos^3 t}{-\cos t}=\frac{y_0-8\sin^3 t}{\sin t}$.

$$\frac{y_0-8\sin^3 t}{\sin t}=\frac{-8\cos^3 t}{-\cos t}=8\cos^2 t$$

$y_0 - 8\sin^3 t = 8\cos^2 t \sin t$

$y_0 = 8\sin^3 t + 8\cos^2 t \sin t = 8\sin t(\sin^2 t + \cos^2 t) = 8\sin t$

Дакле, пресек тангенте p и y-осе је тачка $B(0, 8\sin t)$. Дужина одсечка AB одређеног пресецима тангенте p с координатним осама једнака је

$$|AB| = \sqrt{(0-8\cos t)^2 + (8\sin t - 0)^2} = \sqrt{(-8\cos t)^2 + (8\sin t)^2} = \sqrt{64\cos^2 t + 64\sin^2 t} = \sqrt{64} = 8,$$

што значи да не зависи од избора регуларне тачке с астроиде.

б) Еволута криве α је крива β дата са $\beta(t) = \alpha(t) + \frac{1}{\kappa(t)} \cdot N(t)$, за свако t из домена криве α за које је α регуларна и $\kappa(t) \neq 0$.

$$\kappa(t) = \frac{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3} \quad (\alpha'(t) \neq 0 \text{ да би } \kappa(t) \text{ било дефинисано})$$

$\alpha(t) = (8\cos^3 t, 8\sin^3 t)$

$\alpha'(t) = (-24\cos^2 t \sin t, 24\sin^2 t \cos t)$

$$\alpha''(t) = \left(-24\cdot(2\cos t\cdot(-\sin t)\cdot \sin t + \cos^2 t \cdot \cos t), 24\cdot(2\sin t\cos t \cdot \cos t + \sin^2 t\cdot(-\sin t))\right) =$$

$$= \left(-24\cdot(-2\cos t\sin^2 t + \cos^3 t), 24\cdot(2\sin t\cos^2 t - \sin^3 t)\right)$$

$$= \left(-24\cos t(-2\sin^2 t + \cos^2 t), 24\sin t(2\cos^2 t - \sin^2 t)\right)$$

$$\alpha'(t) \times \alpha''(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -24\cos^2 t\sin t & 24\sin^2 t\cos t & 0 \\ -24\cos t(-2\sin^2 t + \cos^2 t) & 24\sin t(2\cos^2 t - \sin^2 t) & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}\cdot\begin{vmatrix} - & 0 \\ - & 0\end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} - & 0 \\ - & 0\end{vmatrix} +$$

$$+ \vec{k}\cdot\begin{vmatrix} -24\cos^2 t\sin t & 24\sin^2 t\cos t \\ -24\cos t(-2\sin^2 t + \cos^2 t) & 24\sin t(2\cos^2 t - \sin^2 t)\end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}\cdot 0 - \vec{j}\cdot 0 + \vec{k}\cdot\left(-24^2\sin^2 t\cos^2 t(2\cos^2 t - \sin^2 t) - (-24^2)\sin^2 t\cos^2 t\cdot(-2\sin^2 t + \cos^2 t)\right) =$$

$$= \left(0, 0, -24^2\sin^2 t\cos^2 t\left(2\cos^2 t - \sin^2 t - (-2\sin^2 t + \cos^2 t)\right)\right) =$$

$$= \left(0, 0, -24^2\sin^2 t\cos^2 t\left(\underline{2\cos^2 t} \underline{-\sin^2 t} + \underline{2\sin^2 t} \underline{- \cos^2 t}\right)\right) =$$

$$= \left(0, 0, -24^2\sin^2 t\cos^2 t\cdot(\cos^2 t + \sin^2 t)\right) = \left(0, 0, -24^2\sin^2 t\cos^2 t\right)$$

$$\|\alpha'(t)\times\alpha''(t)\|^2 = 0^2 + 0^2 + (-24^2\sin^2 t\cos^2 t)^2 = (24^2\sin^2 t\cos^2 t)^2 \Longrightarrow \|\alpha'(t)\times\alpha''(t)\| = 24^2\sin^2 t\cos^2 t$$

$$\|\alpha'(t)\|^2 = (-24\cos^2 t\sin t)^2 + (24\sin^2 t\cos t)^2 = 24^2\cos^4 t\sin^2 t + 24^2\sin^4 t\cos^2 t = 24^2\cos^2 t\sin^2 t(\cos^2 t + \sin^2 t) =$$

$$= 24^2\cos^2 t\sin^2 t \Longrightarrow \|\alpha'(t)\| = 24|\cos t\sin t|$$

$$\kappa(t) = \frac{\|\alpha'(t)\times\alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3} = \frac{24^2\cos^2 t\sin^2 t}{24^3|\cos t\sin t|^3} = \frac{1}{24}\cdot\frac{\cancel{\cos^2 t\sin^2 t}}{\cancel{\cos^2 t\sin^2 t}\cdot|\cos t\sin t|} = \frac{1}{24|\cos t\sin t|}$$

Према томе, $\kappa(t)\neq 0$ у свим тачкама у којима је дефинисана, а то су тачке у којима је $\|\alpha'(t)\|\neq 0$, тј. у којима је α регуларна, а то су тачке $t\neq \frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$.

$$T(t)=\frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}=\frac{(-24\cos^2 t\sin t, 24\sin^2 t\cos t)}{24|\cos t\sin t|}=\left(\frac{-\cancel{24}\cos t\sin t\cos t}{\cancel{24}|\cos t\sin t|}, \frac{\cancel{24}\cos t\sin t\sin t}{\cancel{24}|\cos t\sin t|}\right)=$$

$$=(-sgn(\cos t\sin t)\cos t, sgn(\cos t\sin t)\sin t) \quad \left(x=|x|\cdot sgn\, x \Rightarrow \frac{x}{|x|}=sgn\, x, \text{ за свако } x\neq 0\right)$$

$$B(t)=\frac{\alpha'(t)\times\alpha''(t)}{\|\alpha'(t)\times\alpha''(t)\|}=\frac{(0,0,-24^2\cos^2 t\sin^2 t)}{24^2\cos^2 t\sin^2 t}=(0,0,-1)$$

$$N(t)=B(t)\times T(t)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 0 & -1\\ -sgn(\cos t\sin t)\cos t & sgn(\cos t\sin t)\sin t & 0\end{vmatrix}=\vec{i}\cdot\begin{vmatrix}0 & -1\\ sgn(\cos t\sin t)\sin t & 0\end{vmatrix}-$$

$$-\vec{j}\cdot\begin{vmatrix}0 & -1\\ -sgn(\cos t\sin t)\cos t & 0\end{vmatrix}+\vec{k}\cdot\begin{vmatrix}0 & 0\\ - & -\end{vmatrix}=\vec{i}\cdot sgn(\cos t\sin t)\cdot\sin t-\vec{j}\cdot(-sgn(\cos t\sin t)\cdot\cos t)+$$

$$+\vec{k}\cdot 0=(sgn(\cos t\sin t)\cdot\sin t, sgn(\cos t\sin t)\cdot\cos t, 0)$$

$$\beta(t)=\alpha(t)+\frac{1}{\kappa(t)}\cdot N(t)=(8\cos^3 t, 8\sin^3 t)+\frac{1}{\frac{1}{24|\cos t\sin t|}}\cdot(sgn(\cos t\sin t)\cdot\sin t, sgn(\cos t\sin t)\cdot\cos t)=$$

$$=(8\cos^3 t, 8\sin^3 t)+24|\cos t\sin t|\cdot(sgn(\cos t\sin t)\cdot\sin t, sgn(\cos t\sin t)\cdot\cos t)=$$

$$=(8\cos^3 t, 8\sin^3 t)+(24\cos t\sin t\sin t, 24\cos t\sin t\cos t)=(8\cos^3 t+24\cos t\sin^2 t, 8\sin^3 t+24\cos^2 t\sin t)$$

$$=(8\cos t(\cos^2 t+3\sin^2 t), 8\sin t(\sin^2 t+3\cos^2 t))=(8\cos t(1+2\sin^2 t), 8\sin t(1+2\cos^2 t))$$

$$=(8\cos t+16\cos t\sin^2 t, 8\sin t+16\sin t\cos^2 t)$$

Да бисмо доказали да је β астроида, докажимо да је њена кривина слична као кривина астроиде α, јер је крива у равни јединствено одређена својом кривином.

$$\beta'(t)=(-8\sin t+16\cdot(-\sin t\cdot\sin^2 t+\cos t\cdot 2\sin t\cos t), 8\cos t+16\cdot(\cos t\cdot\cos^2 t+\sin t\cdot 2\cos t\cdot(-\sin t)))=$$

$$=(-8\sin t+16\cdot\sin t(-\sin^2 t+2\cos^2 t), 8\cos t+16\cos t(\cos^2 t-2\sin^2 t))$$

$$=(8\sin t(-1-2\sin^2 t+4\cos^2 t), 8\cos t(1+2\cos^2 t-4\sin^2 t))=$$

$$=(8\sin t(\underline{-\cos^2 t}-\underline{\sin^2 t}-2\sin^2 t+\underline{4\cos^2 t}), 8\cos t(\underline{\cos^2 t}+\underline{\sin^2 t}+\underline{2\cos^2 t}-\underline{4\sin^2 t}))=$$

$$=(8\sin t(3\cos^2 t-3\sin^2 t), 8\cos t(3\cos^2 t-3\sin^2 t))=(24\sin t\cos 2t, 24\cos t\cos 2t)$$

$$\|\beta'(t)\|^2=24^2\sin^2 t\cos^2 2t+24^2\cos^2 t\cos^2 2t=24^2\cos^2 2t(\sin^2 t+\cos^2 t)=24^2\cos^2 2t\Rightarrow\|\beta'(t)\|=24|\cos 2t|$$

$\beta'(t)=(24\sin t\cos 2t,\ 24\cos t\cos 2t)$

$\beta''(t)=(24\cdot(\cos t\cos 2t+\sin t\cdot(-\sin 2t)\cdot 2),\ 24\cdot(-\sin t\cos 2t+\cos t\cdot(-\sin 2t)\cdot 2))=$

$=(24(\cos t\cos 2t-2\sin t\sin 2t),\ -24(\sin t\cos 2t+2\cos t\sin 2t))$

$$\beta'(t)\times\beta''(t)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 24\sin t\cos 2t & 24\cos t\cos 2t & 0\\ 24(\cos t\cos 2t-2\sin t\sin 2t) & -24(\sin t\cos 2t+2\cos t\sin 2t) & 0\end{vmatrix}=\vec{i}\cdot\begin{vmatrix}- & 0\\ - & 0\end{vmatrix}-\vec{j}\cdot\begin{vmatrix}- & 0\\ - & 0\end{vmatrix}$$

$$+\vec{k}\cdot\begin{vmatrix}24\sin t\cos 2t & 24\cos t\cos 2t\\ 24(\cos t\cos 2t-2\sin t\sin 2t) & -24(\sin t\cos 2t+2\cos t\sin 2t)\end{vmatrix}=\vec{i}\cdot 0-\vec{j}\cdot 0+$$

$+\vec{k}\cdot(-24^2(\sin^2 t\cos^2 2t+2\sin t\cos t\sin 2t\cos 2t)-24^2(\cos^2 t\cos^2 2t-2\sin t\cos t\sin 2t\cos 2t))=$

$=(0,0,-24^2(\sin^2 t\cos^2 2t+\cancel{2\sin t\cos t\sin 2t}\cos 2t+\cos^2 t\cos^2 2t-\cancel{2\sin t\cos t\sin 2t\cos 2t}))=$

$=(0,0,-24^2\cos^2 2t(\sin^2 t+\cos^2 t))=(0,0,-24^2\cos^2 2t)$

$\|\beta'(t)\times\beta''(t)\|^2=0^2+0^2+(-24^2\cos^2 2t)^2=(24^2\cos^2 2t)^2\Rightarrow\|\beta'(t)\times\beta''(t)\|=24^2\cos^2 2t$

$$\kappa_\beta(t)=\frac{\|\beta'(t)\times\beta''(t)\|}{\|\beta'(t)\|^3}=\frac{24^2\cos^2 2t}{24^3|\cos 2t|^3}=\frac{1}{24}\cdot\frac{\cancel{\cos^2 2t}}{\cancel{\cos^2 2t}\cdot|\cos 2t|}=\frac{1}{24|\cos 2t|}$$

За криву α је била кривина $\kappa_\alpha(t)=\frac{1}{24|\cos t\sin t|}=\frac{1}{12|2\cos t\sin t|}=\frac{1}{12|\sin 2t|}$. Са функције $|\cos 2t|$ се може прећи на функцију $|\sin 2t|$ једноставном репараметризацијом $t=u-\frac{\pi}{4}$, јер је онда $|\cos 2t|=|\cos(2\cdot(u-\frac{\pi}{4}))|=|\cos(2u-\frac{\pi}{2})|=|\cos 2u\underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{0}+\sin 2u\underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{1}|=|\sin 2u|$.

Дакле, ако репараметризујемо криву β у $\tilde{\beta}(u)=\beta(u-\frac{\pi}{4})$, њена кривина ће бити $\kappa_{\tilde{\beta}}(u)=\kappa_\beta(u-\frac{\pi}{4})=\frac{1}{24|\cos(2\cdot(u-\frac{\pi}{4}))|}=\frac{1}{24|\sin 2u|}$, а она је слична као кривина криве α, јер је $\kappa_{\tilde{\beta}}(u)=\frac{1}{2}\kappa_\alpha(u)$. Дакле, крива β је астроида слична астроиди α, с коефицијентом сличности 2.

(в) Нека је $\gamma(t)=(\gamma_1(t),\gamma_2(t),\gamma_3(t))$ крива чији се траг ортогонално пројектује на астроиду $\alpha(t)=(8\cos^3 t, 8\sin^3 t, 0)$. Ортогонална пројекција криве γ на равни Oxy је крива $(\gamma_1(t),\gamma_2(t),0)$, те да би пројекција била астроида α, то је $\gamma_1(t)=8\cos^3 t$ и $\gamma_2(t)=8\sin^3 t$. Како γ припада сфери $x^2+y^2+z^2=64$, то је $(\gamma_1(t))^2+(\gamma_2(t))^2+(\gamma_3(t))^2=64$.

Дакле, $(\gamma_3(t))^2=64-(\gamma_1(t))^2-(\gamma_2(t))^2=64-(8\cos^3 t)^2-(8\sin^3 t)^2=64-64\cos^6 t-64\sin^6 t=64(1-\cos^6 t-\sin^6 t)$

$\cos^2 t+\sin^2 t=1\ /^3$

$\cos^6 t+3\cos^4 t\sin^2 t+3\cos^2 t\sin^4 t+\sin^6 t=1$

$1-\cos^6 t-\sin^6 t=3\cos^4 t\sin^2 t+3\cos^2 t\sin^4 t=3\cos^2 t\sin^2 t\overbrace{(\cos^2 t+\sin^2 t)}^{=1}=3\cos^2 t\sin^2 t$

$(\gamma_3(t))^2 = 64(1-\cos^6 t - \sin^6 t) = 64\cdot 3\cos^2 t\sin^2 t$

Функцију $\gamma_3(t)$ треба да одаберемо тако да буде диференцијабилна и да задовољи $(\gamma_3(t))^2 = 64\cdot 3\cos^2 t\sin^2 t$, па можемо одабрати $\gamma_3(t) = 8\cdot\sqrt{3}\cdot\cos t\sin t$. Према томе, једна крива на сфери $x^2+y^2+z^2=64$ чији се траг ортогонално пројектује на астроиду α јесте крива $\gamma:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (8\cos^3 t, 8\sin^3 t, 8\sqrt{3}\cos t\sin t)$.

2. Дата је параметризована цилиндрична површ $r(u,v) = (\operatorname{ch} u, u, v)$, $(u,v)\in\mathbb{R}^2$.

(а) Одредити углове која крива $\alpha(t) = (\operatorname{ch} t, t, \operatorname{sh} t)$, $t\in\mathbb{R}$, заклапа са изводницама дате површи.

(б) Одредити главне кривине и главне правце дате површи у произвољној тачки.

(в) Одредити експлицитне формуле изометрије између дате површи и неке равни.

(г) Одредити све геодезијске линије на датој површи.

$r(u,v) = (\operatorname{ch} u, u, v)$

$r_u(u,v) = (\operatorname{sh} u, 1, 0)$

$r_v(u,v) = (0,0,1)$

$E(u,v) = \langle r_u(u,v), r_u(u,v)\rangle = \operatorname{sh}^2 u + 1^2 + 0^2 = \operatorname{ch}^2 u$

$F(u,v) = \langle r_u(u,v), r_v(u,v)\rangle = \operatorname{sh} u\cdot 0 + 1\cdot 0 + 0\cdot 1 = 0+0+0 = 0$

$G(u,v) = \langle r_v(u,v), r_v(u,v)\rangle = 0^2+0^2+1^2 = 1$

$r_u(u,v)\times r_v(u,v) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \operatorname{sh} u & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{vmatrix} - \vec{j}\cdot\begin{vmatrix} \operatorname{sh} u & 0 \\ 0 & 1\end{vmatrix} + \vec{k}\cdot\begin{vmatrix} \operatorname{sh} u & 1 \\ 0 & 0\end{vmatrix} = \vec{i}\cdot 1 - \vec{j}\cdot\operatorname{sh} u + \vec{k}\cdot 0$

$r_u(u,v)\times r_v(u,v) = (1, -\operatorname{sh} u, 0)$

$\|r_u(u,v)\times r_v(u,v)\|^2 = 1^2 + (-\operatorname{sh} u)^2 = 1+\operatorname{sh}^2 u = \operatorname{ch}^2 u \Rightarrow \|r_u(u,v)\times r_v(u,v)\| = \operatorname{ch} u$

$n(u,v) = \dfrac{r_u(u,v)\times r_v(u,v)}{\|r_u(u,v)\times r_v(u,v)\|} = \dfrac{(1,-\operatorname{sh} u, 0)}{\operatorname{ch} u} = \left(\dfrac{1}{\operatorname{ch} u}, -\operatorname{th} u, 0\right)$

$r_{uu}(u,v) = (\operatorname{ch} u, 0, 0)$

$r_{uv}(u,v) = (0,0,0)$

$r_{vv}(u,v) = (0,0,0)$

$e(u,v) = \langle r_{uu}(u,v), n(u,v)\rangle = \operatorname{ch} u\cdot\dfrac{1}{\operatorname{ch} u} + 0\cdot(-\operatorname{th} u) + 0\cdot 0 = 1+0+0 = 1$

$f(u,v) = \langle r_{uv}(u,v), n(u,v)\rangle = 0\cdot\dfrac{1}{\operatorname{ch} u} + 0\cdot(-\operatorname{th} u) + 0\cdot 0 = 0+0+0 = 0$

$g(u,v) = \langle r_{vv}(u,v), n(u,v)\rangle = 0\cdot\dfrac{1}{\operatorname{ch} u} + 0\cdot(-\operatorname{th} u) + 0\cdot 0 = 0+0+0 = 0$

(а) Крива α се може записати у облику $\alpha(t) = r(t, \operatorname{sh} t)$, јер је $r(t,\operatorname{sh} t) = (\operatorname{ch} t, t, \operatorname{sh} t)$. За криву α на површи r тражимо функције $u(t)$ и $v(t)$ тако да је $\alpha(t) = r(u(t), v(t))$, према томе, у нашем случају је $u(t) = t$, $v(t) = \operatorname{sh} t$.

Нека је $t_0 \in \mathbb{R}$ произвољна тачка. Изводнице цилиндричне површи су криве $r(u_0, v)$, према томе, изводница која садржи тачку $\alpha(t_0) = r(t_0, \operatorname{sh} t_0)$ јесте крива $\beta: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\beta(v) = r(t_0, v)$ и заједничка тачка криве α и изводнице β јесте тачка $\beta(\operatorname{sh} t_0) = r(t_0, \operatorname{sh} t_0) = (\operatorname{ch} t_0, t_0, \operatorname{sh} t_0) = \alpha(t_0)$. Угао између криве α и изводнице β је угао између вектора $\alpha'(t_0)$ и $\beta'(\operatorname{sh} t_0)$.

$\alpha(t) = r(t, \operatorname{sh} t) \,/'$

$\alpha'(t) = r_u(t, \operatorname{sh} t) \cdot 1 + r_v(t, \operatorname{sh} t) \cdot \operatorname{ch} t$

$\alpha'(t_0) = 1 \cdot r_u(t_0, \operatorname{sh} t_0) + \operatorname{ch} t_0 \cdot r_v(t_0, \operatorname{sh} t_0)$

$\beta(v) = r(t_0, v) \,/'$

$\beta'(v) = r_v(t_0, v) \cdot 1$

$\beta'(\operatorname{sh} t_0) = 0 \cdot r_u(t_0, \operatorname{sh} t_0) + 1 \cdot r_v(t_0, \operatorname{sh} t_0)$

$$\cos\sphericalangle(\alpha'(t_0), \beta'(\operatorname{sh} t_0)) = \frac{\langle \alpha'(t_0), \beta'(\operatorname{sh} t_0) \rangle}{\|\alpha'(t_0)\| \cdot \|\beta'(\operatorname{sh} t_0)\|}$$

$$\langle \alpha'(t_0), \beta'(\operatorname{sh} t_0) \rangle = \mathrm{I}(\alpha'(t_0), \beta'(\operatorname{sh} t_0)) = (1 \;\; \operatorname{ch} t_0) \cdot \begin{pmatrix} E(t_0, \operatorname{sh} t_0) & F(t_0, \operatorname{sh} t_0) \\ F(t_0, \operatorname{sh} t_0) & G(t_0, \operatorname{sh} t_0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$E(u,v) = \operatorname{ch}^2 u$, $F(u,v) = 0$, $G(u,v) = 1$

$$\langle \alpha'(t_0), \beta'(\operatorname{sh} t_0) \rangle = (1 \;\; \operatorname{ch} t_0) \cdot \begin{pmatrix} \operatorname{ch}^2 t_0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (\operatorname{ch}^2 t_0 \;\; \operatorname{ch} t_0) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \operatorname{ch} t_0$$

$$\|\alpha'(t_0)\|^2 = \langle \alpha'(t_0), \alpha'(t_0) \rangle = (1 \;\; \operatorname{ch} t_0) \cdot \begin{pmatrix} \operatorname{ch}^2 t_0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \operatorname{ch} t_0 \end{pmatrix} = (\operatorname{ch}^2 t_0 \;\; \operatorname{ch} t_0) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \operatorname{ch} t_0 \end{pmatrix} = \operatorname{ch}^2 t_0 + \operatorname{ch}^2 t_0 = 2\operatorname{ch}^2 t_0$$

$\|\alpha'(t_0)\| = \sqrt{2} \cdot \operatorname{ch} t_0$

$$\|\beta'(\operatorname{sh} t_0)\|^2 = \langle \beta'(\operatorname{sh} t_0), \beta'(\operatorname{sh} t_0) \rangle = (0 \;\; 1) \cdot \begin{pmatrix} \operatorname{ch}^2 t_0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (0 \;\; 1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow \|\beta'(\operatorname{sh} t_0)\| = 1$$

$$\Rightarrow \cos\sphericalangle(\alpha'(t_0), \beta'(\operatorname{sh} t_0)) = \frac{\operatorname{ch} t_0}{\sqrt{2} \operatorname{ch} t_0 \cdot 1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sphericalangle(\alpha'(t_0), \beta'(\operatorname{sh} t_0)) = \arccos \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$$

(б) Главне кривине површи r у тачки $r(u_0, v_0)$ су решења квадратне једначине $(EG - F^2) \cdot k^2 - (eG + Eg - 2fF)k + (eg - f^2) = 0$, где је $E = E(u_0, v_0) = \operatorname{ch}^2 u_0$, $F = F(u_0, v_0) = 0$, $G = G(u_0, v_0) = 1$, $e = e(u_0, v_0) = 1$, $f = f(u_0, v_0) = 0$, $g = g(u_0, v_0) = 0$.

$(\operatorname{ch}^2 u_0 \cdot 1 - 0^2) \cdot k^2 - (1 \cdot 1 + \operatorname{ch}^2 u_0 \cdot 0 - 2 \cdot 0 \cdot 0)k + (1 \cdot 0 - 0^2) = 0$

$\operatorname{ch}^2 u_0 \cdot k^2 - k + 0 = 0$

$k(\operatorname{ch}^2 u_0 \cdot k - 1) = 0$

$k_1 = 0, \quad k_2 = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 u_0}$

Главни правци су вектори $a \cdot r_u(u_0, v_0) + b \cdot r_v(u_0, v_0)$ чије су координате решења једначине
$$\begin{vmatrix} -b^2 & ab & -a^2 \\ e & f & g \\ E & F & G \end{vmatrix} = 0.$$

$$\begin{vmatrix} -b^2 & ab & -a^2 \\ 1 & 0 & 0 \\ \operatorname{ch}^2 u_0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

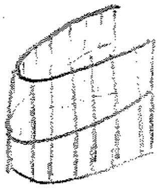
$$-b^2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - ab \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \operatorname{ch}^2 u_0 & 1 \end{vmatrix} - a^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \operatorname{ch}^2 u_0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$-b^2 \cdot 0 - ab \cdot 1 - a^2 \cdot 0 = 0$

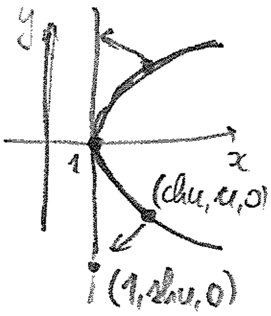
$-ab = 0$

$a = 0$ или $b = 0$

главни правци су $b \cdot r_v(u_0, v_0)$ и $a \cdot r_u(u_0, v_0)$.

(В) 

Да бисмо исправили овај цилиндар у раван, исправимо криву у пресеку тог цилиндра и равни Oxy у праву. То је крива $(\mathrm{ch}u, u, 0)$.



Пронађимо функцију дужине лука криве $\gamma(u)=(\mathrm{ch}u, u, 0)$.

$\gamma'(u)=(\mathrm{sh}u, 1, 0)$

$\|\gamma'(u)\|^2=\mathrm{sh}^2u+1^2+0^2=\mathrm{ch}^2u \Rightarrow \|\gamma'(u)\|=\mathrm{ch}u$

$$s(u)=\int_0^u \|\gamma'(x)\|dx=\int_0^u \mathrm{ch}x\,dx=\mathrm{sh}x\Big|_0^u=\mathrm{sh}u-\mathrm{sh}0=\mathrm{sh}u$$

Дакле, можемо „исправити" цилиндар у раван $x=1$ и параметризована је са $R(u,v)=(1,\mathrm{sh}u,v)$. Докажимо да раван параметризована помоћу R има исте коефицијенте прве основне форме као цилиндрична површ r.

$R_u(u,v)=(0,\mathrm{ch}u,0)$

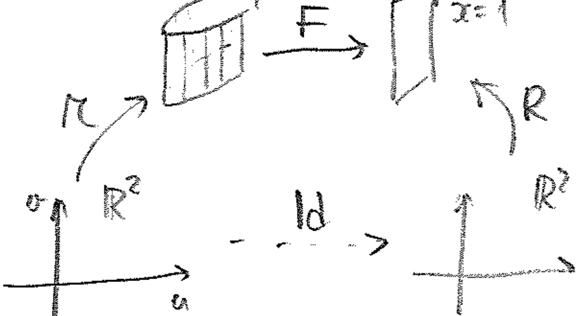
$R_v(u,v)=(0,0,1)$

$E^R(u,v)=\langle R_u(u,v),R_u(u,v)\rangle=0^2+\mathrm{ch}^2u+0^2=\mathrm{ch}^2u=E^r(u,v)$

$F^R(u,v)=\langle R_u(u,v),R_v(u,v)\rangle=0\cdot0+\mathrm{ch}u\cdot0+0\cdot1=0+0+0=0=F^r(u,v)$

$G^R(u,v)=\langle R_v(u,v),R_v(u,v)\rangle=0^2+0^2+1^2=1=G^r(u,v)$

$\Rightarrow r$ и R су изометричне површи



$F=R\circ Id\circ r^{-1}$ – експлицитне формуле изометрије између цилиндра и равни

$r(u,v)=(\mathrm{ch}u,u,v) \Rightarrow r^{-1}(x,y,z)=(y,z)$

$F(x,y,z)=R\circ Id\circ r^{-1}(x,y,z)=R\circ Id(y,z)=R(y,z)=(1,\mathrm{sh}y,z)$.

(Г) $\Gamma^1_{11}=\dfrac{E_uG-2F_uF+E_vF}{2(EG-F^2)}$ $\quad\Gamma^1_{12}=\dfrac{E_vG-G_uF}{2(EG-F^2)}$ $\quad\Gamma^1_{22}=\dfrac{2F_vG-G_uG-G_vF}{2(EG-F^2)}$

$\Gamma^2_{11}=\dfrac{2F_uE-E_vE-E_uF}{2(EG-F^2)}$ $\quad\Gamma^2_{12}=\dfrac{G_uE-E_vF}{2(EG-F^2)}$ $\quad\Gamma^2_{22}=\dfrac{G_vE-2F_vF+G_uF}{2(EG-F^2)}$

$E(u,v)=\mathrm{ch}^2u \Rightarrow E_u(u,v)=2\mathrm{ch}u\mathrm{sh}u,\ E_v(u,v)=0$ $\qquad EG-F^2=\mathrm{ch}^2u\cdot1-0^2=\mathrm{ch}^2u$

$F(u,v)=0 \Rightarrow F_u(u,v)=0,\ F_v(u,v)=0$

$G(u,v)=1 \Rightarrow G_u(u,v)=0,\ G_v(u,v)=0$

$\Gamma^1_{11}(u,v)=\dfrac{2\mathrm{ch}u\mathrm{sh}u\cdot1-2\cdot0\cdot0+0\cdot0}{2\cdot\mathrm{ch}^2u}=\dfrac{\cancel{2}\cancel{\mathrm{ch}u}\mathrm{sh}u}{\cancel{2}\mathrm{ch}^{\cancel{2}}u}=\mathrm{th}u$ $\quad\Gamma^1_{12}(u,v)=\dfrac{0\cdot1-0\cdot0}{2\cdot\mathrm{ch}^2u}=0$

$\Gamma^1_{22}(u,v)=\dfrac{2\cdot0\cdot1-0\cdot1-0\cdot0}{2\cdot\mathrm{ch}^2u}=0$ $\quad\Gamma^2_{11}(u,v)=\dfrac{2\cdot0\cdot\mathrm{ch}^2u-0\cdot\mathrm{ch}^2u-2\mathrm{ch}u\mathrm{sh}u\cdot0}{2\mathrm{ch}^2u}=0$

$$\Gamma_{12}^2(u,v)=\frac{0\cdot ch^2u-0\cdot 0}{2ch^2u}=0 \qquad \Gamma_{22}^2(u,v)=\frac{0\cdot ch^2u-2\cdot 0\cdot 0+0\cdot 0}{2ch^2u}=0$$

Крива $\theta(t)=\pi(u(t),v(t))$ је геодезијска ако и само ако функције u и v задовољавају систем $u''(t)+\Gamma_{11}^1(u(t),v(t))\cdot(u'(t))^2+2\Gamma_{12}^1(u(t),v(t))\cdot u'(t)\cdot v'(t)+\Gamma_{22}^1(u(t),v(t))\cdot(v'(t))^2=0$

$v''(t)+\Gamma_{11}^2(u(t),v(t))\cdot(u'(t))^2+2\Gamma_{12}^2(u(t),v(t))\cdot u'(t)\cdot v'(t)+\Gamma_{22}^2(u(t),v(t))\cdot(v'(t))^2=0$

и ако је $I(\theta'(t),\theta'(t))=1$.

$u''(t)+th\,u(t)\cdot(u'(t))^2=0$

$v''(t)=0 \Rightarrow v'(t)=c \Rightarrow v(t)=ct+d$

$$I(\theta'(t),\theta'(t))=(u'(t)\;\;v'(t))\cdot\begin{pmatrix} ch^2u(t) & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}u'(t)\\ v'(t)\end{pmatrix}=(u'(t)\cdot ch^2u(t)\;\;v'(t))\begin{pmatrix}u'(t)\\ v'(t)\end{pmatrix}=$$

$$=(u'(t))^2\cdot ch^2u(t)+(v'(t))^2=1$$

$(u'(t))^2\cdot ch^2u(t)+c^2=1$

$(u'(t))^2\cdot ch^2u(t)=1-c^2$

$u'(t)\cdot ch\,u(t)=\sqrt{1-c^2}$ или $u'(t)\cdot ch\,u(t)=-\sqrt{1-c^2}$

$(sh\,u(t))'=\sqrt{1-c^2}$ или $(sh\,u(t))'=-\sqrt{1-c^2}$

$sh\,u(t)=\sqrt{1-c^2}\cdot t+c_1$ или $sh\,u(t)=-\sqrt{1-c^2}\cdot t+c_2$

$\underline{u(t)=arsh(\sqrt{1-c^2}\cdot t+c_1)}$ или $\underline{u(t)=arsh(-\sqrt{1-c^2}\cdot t+c_2)}$

$v(t)=ct+d$

Дакле, геодезијске су $\theta(t)=\pi(u(t),v(t))$, где су $u(t)$ и $v(t)$ добијене функције.