Materijali za predmet

G E O M E T R I J A 3

Matematički fakultet

Zoran Rakić

Beograd, 2016. godine

GLAVA 1

Uvod

Ova glava sadrži potrebna predznanja za uspešno savladavanje gradiva koje je izloženo u nastavku ove knjige.

U ovom uvodnom kursu Diferencijalne geometrije, kojeg bismo mogli nazvati i *Lokalna teorija krivih i površi*, najviše ćemo koriste rezultati iz linearne algebre, analize i teorije običnih diferencijalnih jednačina. Zbog toga ćemo se sada podsetiti nekih činjenica iz ovih oblasti koje ćemo u nastavku intenzivno koristiti. Dokazi ovih činjenica mogu se naći u odgovarajućoj literaturi.

Linearna algebra i analitička geometrija

1.1. Vektorski prostor. Definicija. *Realni vektorski prostor je uređena četvorka* $(V, \mathbb{R}, +, \cdot) = V$, *gde je* $+ : V \times V \longrightarrow V$ *i* $\cdot : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V$, *ako* $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall\, u, v, w \in V$ *važi:*

(VP1) $(V, +)$ je Abelova grupa tj. ako su ispunjene aksiome,
- (AG1) $u + (v + w) = (u + v) + w$,
- (AG2) postoji element $\mathbf{0} \in V$ takav da je $\mathbf{0} + u = u$,
- (AG3) za svaki $u \in V$ postoji jedinstveni element $-u \in V$ takav da je $u + (-u) = \mathbf{0}$,
- (AG4) $u + v = v + u$.

(VP2) $\alpha \cdot (\beta \cdot u) = (\alpha\,\beta)\, u$, (kvaziasocijativnost),

(VP3) $(\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u$, (distributivnost),

(VP4) $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$, (distributivnost),

(VP5) $1 \cdot u = u$, (netrivijalnost)

Uobičajeno ćemo izostavljati znak za množenje vektora sa skalarom $\cdot$. Elemente skupa V nazivamo **vektorima**, a elemente skupa $\mathbb{R}$ skalarima.[1]

1.2. Primeri I.

(i1) $\mathbb{R} = (\mathbb{R}, \mathbb{R}, +, \cdot)$, je vektorski prostor nad samim sobom. [2]

(i2) $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, +, \cdot)$ vektorski prostor gde su operacije sabiranja i množenja sa skalarom date sa:

[1] Napomenimo da polje $\mathbb{R}$ u gornjoj definiciji možemo zameniti bilo kojim drugim poljem $\mathbb{F}$ i tada kažemo da je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$.

[2] $+, \cdot$ su standardo sabiranje i množenje realnih brojeva.

(s) $u+v=(u_1,u_2,..,u_n)+(v_1,v_2,..,v_n)=(u_1+v_1,u_2+v_2,..,u_n+v_n)$,

(m) $\lambda\cdot u=\lambda\cdot(u_1,u_2,\dots,u_n)=(\lambda\, u_1,\lambda\, u_2,\dots,\lambda\, u_n)$.

1.2. Primeri II.

(i1) Matrice. Neka je

$$\mathbb{M}_{mn}(\mathbb{R})=\left\{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{bmatrix}=(a_{ij})=A \,\middle|\, a_{ij}\in\mathbb{R}\right\},$$

skup svih matrica tipa $m\times n$. Skup $\mathbb{M}_{mn}(\mathbb{R})$[3] je realni vektorski prostor uz iste operacije kao i $\mathbb{R}^n$ (vidi prethodni primer (i2)). Preciznije, $\forall\, A\in\mathbb{M}_{mn}(\mathbb{R})$ i $\forall\,\lambda\in\mathbb{R}$,

(s) $A+B=(a_{ij})+(b_{ij})=(a_{ij}+b_{ij})$,

(m) $\lambda\cdot A=\lambda\cdot(a_{ij})=(\lambda\, a_{ij})$.

(i2) Polinomi. Skup $(\mathbb{R}[x],\mathbb{R},+,\cdot)$ je realni vektorski prostor pri čemu je $+$ standardno sabiranje polinoma, a $\cdot$ je množenje polinoma sa nekim skalarom.

(i3) Funkcije. Ako sa $\mathbb{R}^S=\{f\,|\,f:S\longrightarrow\mathbb{R}\}$ označimo skup svih (realnih) funkcija sa nekog nepraznog skupa $S\subset\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}$. Tada je $\mathbb{R}^S$ realni vektorski prostor uz ($\forall\, f,g\in\mathbb{R}^S$, $\forall\,\lambda,x\in\mathbb{R}$):

(s) $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$,

(m) $(\lambda\cdot f)(x)=\lambda\cdot f(x)$.

1.3. Baza vektorskog prostora. Neka je dat neki podskup B vektorskog prostora V, koji ne sadrži nula vektor. Kažemo da je $v\in V$ linearna kombinacija vektora iz B, ako postoje $n\in\mathbb{N}$, vektori $v_1,v_2,\dots,v_n\in B$ i skalari $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\in\mathbb{R}$ takvi da je

$$v=\alpha_1\, v_1+\alpha_2\, v_2+\cdots+\alpha_n\, v_n. \tag{1}$$

Od posebnog je interesa slučaj kada je svaki vektor $v\in V$ linearna kombinacija vektora iz skupa B. Tada kažemo da je skup B skup generatora[4] vektorskog prostora V.

Neka je dat neki konačan skup $B=\{v_1,\dots,v_m\}\subseteq V$ podskup vektorskog prostora V. Kažemo da je B linearno nezavisan ako jednačina linearne (ne)zavisnosti:

$$\alpha_1\, v_1+\alpha_2\, v_2+\cdots+\alpha_m\, v_m=0,\qquad \alpha_i\in\mathbb{R}\ \ (i=1,\dots,m), \tag{2}$$

ima samo trivijalno (koje uvek postoji) rešenje: $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_m=0$. Skup B je linearno zavisan ako jednačina (2) ima netrivijalno rešenje tj. ako barem jedan od skalara α_i, $i=1,\dots,m$ je različit od nule. Ako je skup B beskonačan kažemo da je linearno nezavisan ako je svaki njegov konačni podskup linearno nezavisan.

[3] Ako je $m=n$ onda koristim oznaku $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.

[4] Ili generišući skup.

Podskup B vektorskog prostora V koji je istovremeno skup generatora i koji je linearno nezavisan zove se baza vektorskog prostora.

Napomena. Kasinije kada uvedemo pojam koordinatizacije i koordinata vektora u nekoj bazi ispostaviće se da je u bazi važan redosled vektora, tako da ćemo pod bazom vektorskog prostora podrazumevati uređeni skup (ako je $\dim V = n < \infty$ baza je uređena $n-$torka linearno nezavisnih vektora). Kada u zadacima nije važan redosled vektora u bazi onda ćemo bazu posmatrati samo kao skup.

Osnovne činjenice o bazi vektorskog prostora date su u sledećoj fundamentalnoj teoremi.

Teorema. *Neka je V proizvoljan vektorski prostor nad poljem $\mathbb{R}$. Tada,*

(i1) postoji neka baza B vektorskog prostora V.

(i2) ako su B_1 i B_2 dve proizvoljne baze vektorskog prostora V onda postoji bijekcija $f : B_1 \longrightarrow B_2$.

Primetimo da tvrđenje (i2) iz prethodne Teoreme kaže da sve baze vektorskog prostora imaju 'jednak'[5] broj elemenata, što nam omogućuje da definišemo pojam dimenzije vektorskog prostora. Dakle, dimenzija vektorskog prostora V je kardinalni broj neke njegove baze.

Kažemo da je V konačnodimenzioni vektorski prostor ako ima neku bazu koja ima konačno mnogo elemenata. U ovom tekstu bavimo se samo konačnodimenzionim vektorskim prostorima.

Primer 1. $\mathbb{R}^3$ ima dimenziju 3, jer je npr. jedna njegova baza $B = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$.

Primer 2. $\mathbb{R}[x]$ nije konačno dimenzion jer je skup $\{1, x, x^2, ..., x^n, ...\}$ jedna njegova baza.

Napomena. (1) Ako je $B = \{v_i, | i \in I\}$ baza od V, tada proizvoljni vektor $v \in V$ ima jedinstvenu reprezentaciju u obliku konačne sume

$$v = \sum_i \alpha_i \, v_i.$$

Brojevi α_i zovu se komponente vektora v u bazi B.

(2) Primetimo da je prirodno bazu vektorskog prostora posmatrati kao uređen skup.

1.4. Orijentacija u vektorskom prostoru. Neka je V vektorski prostor i neka su date dve baze od V, $e = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ i $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$. Tada je moguće vektore baze f izraziti preko vektora baze e, tj.

$$f_k = T_{ef} e_k = \sum_{i=1}^{n} \gamma_{ik} e_i, \qquad k = 1, \ldots, n\,. \tag{3}$$

[5] tj. da postoji bijekcija sa jedne baze na drugu.

Matrica T_{ef} zove se matrica prelaska sa baze e u bazu f. Za proizvoljni vektor $x \in V$ imamo:

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i f_i = \sum_{i=1}^{n} x'_i e_i\,, \quad \text{neka je } x(f) = (x_1, \dots, x_n) \quad \text{i} \quad x(e) = (x'_1, \dots, x'_n).$$

Koristeći formule (3) dobijamo vezu između koordinata vektora x u bazama f i e,

$$x(e) = T_{ef}\, x(f) \qquad \text{ili} \qquad x(f) = [\,T_{ef}\,]^{-1} x(e). \tag{4}$$

Očigledno važi: $T_{fe}^{-1} = T_{ef}$.

Ako je g treća baza od V onda nakon eliminacije baze f dobijamo:

$x(e) = T_{ef}\, T_{fg}\, x(g)\,,$ i kako je $x(e) = T_{eg}\, x(g)\,,$ zaključujemo da je $T_{ef} T_{fg} = T_{eg}$.

• Kako je matrica prelaska sa jedne baze u drugu regularna njena determinanta je različita od nule. Ova činjenica omogućuje nam da na skupu svih baza[6] vektorskog prostora V uvedemo pojam orijentacije na sledeći način: *Za baze e i f kažemo da imaju istu orijentaciju ako je* $\det T_{ef} > 0$.

• Lako se proverava koristeći Bine-Košijevu teoremu i svojstva matrica prelaska da je orijentacija baza vektorskog prostora relacija ekvivalencije, koja ima dve klase ekvivalencije.

• U slučaju prostora[7] $\mathbb{R}^n$ obično se uzimamo da je predstavnik pozitivno orijentisanih baza: kanonska baza $e = (e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1))$.

Dakle, proizvoljna baza f od $\mathbb{R}^n$ je pozitivna ako je $\det T_{ef} > 0$, a negativna ako je $\det T_{ef} < 0$.

Primetimo da je npr. baza $f = (e_2, e_1, e_3, \dots, e_n)$ negativna, jer je $\det T_{ef} = -1 < 0$.

1.5. Skalarni proizvod. Podsetimo se da smo skalarni proizvod dva vektora, v i w, u trodimenzionom prostoru uveli formulom

$$v \cdot w = \|v\|\, \|w\| \cos\theta, \tag{5}$$

gde su $\|v\|$ i $\|w\|$ intenziteti vektora v i w i gde je θ ugao koji zaklapaju vektori v i w. Poznato je da ovako uvedeni skalarni proizvod važe sledeća svojstva $(\,\forall\, v_1, v_2, w \in V, \forall\, \alpha \in \mathbb{R})$:

(a1) $\langle v_1 + v_2, w\rangle = \langle v_1, w\rangle + \langle v_2, w\rangle$,

(a2) $\langle \alpha v, w\rangle = \alpha\, \langle v, w\rangle$,

(a3) $\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle$,

(a4) $\langle v, v\rangle \geq 0$, i

(a5) $\langle v, v\rangle = 0$ ako i samo ako je $v = 0$.

[6] Baze smatramo uređenim skupovima

[7] Svaki euklidski vektorski prostor dimenzije n izomorfan je euklidskom prostoru $\mathbb{R}^n$.

Generalizacijom prethodnih svojstava skalarnog proizvoda dolazimo do pojma euklidskog vektorskog prostora. Kažemo da je V **euklidski** vektorski prostor ako je definisana skalarni proizvod $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ za koju važe aksiome (a1)-(a5).

Primer. Standardni skalarni proizvod. U $\mathbb{R}^n$ definišemo bilinearno preslikavanje:

(6)
$$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i\, w_i = v_1\, w_1 + v_2\, w_2 + \cdots + v_n\, w_n,$$

gde je $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ i $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$.

U svakom euklidskom prostoru dužina (norma) vektora v, može se izraziti formulom: $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$. Takođe, u svakom euklidskom prostoru može se dobro definisati i pojam ugla, koristeći Koši (Cauchy) – Švarcova (Schwartz) nejednakost.

Teorema. *Za bilo koja dva vektora v i w euklidskog vektorskog prostora V važi nejednakost:*

(7)
$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\|\, \|w\|,$$

pri čemu jednakost važi ako i samo ako su vektori v i w linearno zavisni.

Iz ove nejednakosti sledi

$$-1 \leq \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\|\, \|w\|} \leq 1, \quad \text{i postoji jedinstveni ugao } \theta \in [0, \pi] \text{ takav da je } \quad \cos\theta = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\|\, \|w\|}$$

i tada ugao θ proglasimo uglom između vektora v i w, tj. $\theta = \angle(v, w)$.

Posledica. *(Nejednakost trougla) Za bilo koja dva vektora v i w euklidskog vektorskog prostora V važi nejednakost:*

(8)
$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|.$$

Prethodnih nekoliko tvrdnji pokazuju da u svakom euklidskom prostoru možemo uvesti osnovne geometrijske koncepte: dužinu i ugao[8].

1.6. Ortogonalnost i ortonormirana baza. Za vektore v i w euklidskog prostora V kažemo da su ortogonalni (normalni) i pišemo $v \perp w$ ako je $\langle v, w \rangle = 0$.

Kažemo da je baza e ortonormirana ako važi:

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}, \qquad \forall\, i, j = 1, 2, \ldots, n$$

• Iz osobina skalarnog proizvoda sledi da ako je e ortonormirana baza euklidskog prostora V, da je

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i\, w_i = v_1\, w_1 + v_2\, w_2 + \cdots + v_n\, w_n,$$

gde je $v = v_1 e_1 + v_2 e_2 + \cdots + v_n e_n$ i $w = w_1 e_1 + w_2 e_2 + \cdots + w_n e_n$.

[8] Podsetite se Euklidovih aksioma.

Ortonormirana baza uvek postoji, jer važi:

Teorema 1. *Neka je $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ proizvoljna baza euklidskog prostora V, tada postoji (pozitivno orijentisana) ortonormirana baza $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ takva da je*

$$
\begin{aligned}
f_1 &= \alpha_{11}\, e_1, \\
f_2 &= \alpha_{12}\, e_1 + \alpha_{22}\, e_2, \\
&\vdots \\
f_n &= \alpha_{1n}\, e_1 + \alpha_{2n}\, e_2 + \cdots + \alpha_{nn}\, e_n\,.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Prethodna teorema poznata je i kao Gram$-$Šmitov (Schmidtov) postupak ortogonalizacije, koji predstavlja jedan linearan algoritam kojim se proizvoljnoj bazi f dodeljuje ortonormirana baza e.

Teorema 2. *Svaki realni $n-$dimenzioni euklidski prostor izomorfan je euklidskom prostoru $\mathbb{R}^n$, sa standardnim skalarnim proizvodom.*

1.7. Gramova matrica. Za vektore $f_1, \dots, f_k$ iz V, posmatramo matricu

$$
G(f_1, \dots, f_k) = \begin{bmatrix} \langle f_1, f_1\rangle & \langle f_1, f_2\rangle & \dots & \langle f_1, f_k\rangle \\ \langle f_2, f_1\rangle & \langle f_2, f_2\rangle & \dots & \langle f_2, f_k\rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle f_k, f_1\rangle & \langle f_k, f_2\rangle & \dots & \langle f_k, f_k\rangle \end{bmatrix}
\tag{10}
$$

koja se zove Gramova matrica. Posebno važna funkcija je determinata ove matrice koja se zove Gramova determinanta, tj.

$$\Gamma\,(f_1, \dots, f_k) = \det(\langle f_i, f_j\rangle) = \det G(f_1, \dots, f_k).$$

Od mnogobrojnih svojstava Gramove determinante za nas su važna svojstva data u sledećoj teoremi.

Teorema. *Neka je V konačnodimenzioni euklidski prostor, i neka su $f_1, \dots, f_k \in V$ tada je:*

- (i1) $\Gamma\,(f_1 + \lambda f_2, f_2, \dots, f_k) = \Gamma\,(f_1, f_2, \dots, f_k)$.
- (i2) Ako je $f_k \perp \mathcal{L}(\{f_1, \dots, f_{k-1}\})$ onda je $\Gamma\,(f_1, \dots, f_k) = \|f_k\|^2\,\Gamma\,(f_1, \dots, f_{k-1})$.
- (i3) $\Gamma\,(f_1, \dots, f_k) = (\mathrm{Vol}\,P(f_1, \dots, f_k))^2 \geq 0$, gde smo sa $\mathrm{Vol}\,P(f_1, \dots, f_k)$ obeležili zapreminu k-dimenzionog paralelepipeda $P(f_1, \dots, f_k)$ razapetog vektorima $f_1, \dots, f_k$.
- (i4) Skup vektora $\{f_1, f_2, \dots, f_k\}$ je linearno nezavisan akko $\Gamma\,(f_1, \dots, f_k) \neq 0$.

1.8. Vektorski i mešoviti proizvod vektora. Dimenzija $n = 3$ ima jednu specifičnost jer dozvoljava da na prirodan način definišemo vektorsko množenje vektora.

• Neka je e kanonska baza od $\mathbb{R}^3$, i neka su dati vektori $v = (v_1, v_2, v_3)$ i $w = (w_1, w_2, w_3)$. Tada njihov vektorski proizvod možemo zapisati u obliku formalne determinante:

$$v \times w = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} e_3. \tag{11}$$

• Sada možemo definisati i mešoviti proizvod vektora, $V \times V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ formulom,

$$[v, w, u] = (v \times w) \cdot u. \tag{12}$$

Ako je e kanonska baza od $\mathbb{R}^3$, i ako su dati vektori $v = (v_1, v_2, v_3)$, $w = (w_1, w_2, w_3)$ i $u = (u_1, u_2, u_3)$. Tada njihov mešoviti proizvod jednak:

$$(v \times w) \cdot u = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix}. \tag{13}$$

Propozicija. $\operatorname{Vol} P(v, w, u) = \mid [v, w, u] \mid$, *gde je* $P(v, w, u)$ *paralelepiped određen vektorima* v, w, u.

Osnovna svojstva mešovitog i vektorskog proizvoda sadržana su u sledećoj teoremi.

Teorema. *Ako su* v, w, u, x *proizvoljni vektori prostora* $\mathbb{R}^3$ *i* $\alpha \in \mathbb{R}$ *tada je*

(L1) $v \times w = -(w \times v)$,
(L2) $(\alpha v) \times w = \alpha (v \times w)$,
(L3) $(v + w) \times u = v \times u + w \times u$,
(L4) $(v \times w) \times u = (v \cdot u) w - (w \cdot u) v$,

(P1) $[v, w, u] = -[w, v, u]$,
(P2) $[v, u, w] = [u, w, v] = [w, v, u]$,
(P3) $[\alpha v, w, u] = \alpha [v, w, u]$,
(P4) $[v + w, u, x] = [v, u, x] + [w, u, x]$.

1.9. Linearni operatori i matrice. Neka su V, W realni vektorski prostori. Preslikavanje $A : V \longrightarrow W$, je linearni operator ili linearna transformacija ako:

$$A(\alpha v + \beta u) = \alpha A(v) + \beta A(u), \qquad v, u \in V, \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

• Neka je $A : V \longrightarrow W$ linearni operator i neka su e i f redom neke baze od V i W. Linearni operator potpuno je određen svojim dejstvom na nekoj bazi (recimo bazi e) i neka je:

$$Ae_j = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} f_i, \qquad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{14}$$

Tada operatoru A dodelimo matricu $\mathcal{A} = A(f, e) = (\alpha_{ij}) \in \mathbb{M}_{mn}(\mathbb{R})$. Ako sa $\mathsf{Hom}\,(V, W)$ označimo vektorski prostor svih linearnih operatora sa V u W, tada preslikavanje $\phi_{ef} : \mathsf{Hom}\,(V, W) \longrightarrow \mathbb{M}_{mn}(\mathbb{R})$, definisano sa $\phi_{ef}(A) = A(f, e)$, je izomorfizam vektorskih prostora.

• Ako označimo sa $C = A \circ B$ kompoziciju linearnih operatora $A : V \longrightarrow W$ i $B : U \longrightarrow V$ onda za matrice tih operatora u datim bazama važi:

$$\mathcal{C} = C(f, g) = A(f, e)\, B(e, g) = \mathcal{A}\mathcal{B}\,. \tag{15}$$

• Neka su V i W vektorski prostori i neka su e e' dve baze od V, a f i f' dve baze vektorskog prostora W i neka je $A : V \longrightarrow W$ linearni operator.

Odredimo veze između matrica operatora A u parovima baza (f, e) i (f', e').

Uzmimo proizvoljni vektor $v \in V$ i posmatrajmo jednakost $w = Av$. Koristeći formule (4) primenjene na vektor w u odgovarajućim bazama dobijamo

$$A(f', e') = [T_{ff'}]^{-1}\, A(f, e) T_{ee'}\,. \tag{16}$$

Od posebnog interesa je slučaj kada je $W = V$ i kada se baze, e i f odnosno e' i f', podudaraju tada (16) postaje:

$$A(e', e') = [T_{ee'}]^{-1}\, A(e, e)\, T_{ee'} \quad \text{ili} \quad A(e') = [T_{ee'}]^{-1}\, A(e)\, T_{ee'} \tag{17}$$

1.11. Sličnost matrica. Kažemo da su matrice $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B} \in \mathbb{M}_n$ slične i pišemo $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$, ako i samo ako postoji regularna matrica $\mathcal{T}$ takva da je $\mathcal{B} = \mathcal{T}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{T}$.

Sličnost matrica je relacija ekvivalencije na $\mathbb{M}_n$.

Ako uzmemo u obzir relaciju

$$A(e') = [\,T_{ee'}]^{-1}\, A(e)\, T_{ee'}\,,$$

koja povezuje matrice proizvoljnog operatora A u bazama e i e' onda zaključujemo da slične matrice zapravo predstavljaju zapis istog linearnog operatora u različitim bazama pri čemu je matrica $\mathcal{T}$ matrica prelaska sa prve baze u drugu.

Invarijante sličnosti su svojstva linearnog operatora $A \in \mathsf{Hom}\, V$ [9], koja ne zavise od matričnog zapisa tj. mogu se pročitati iz matrice operatora u bilo kojoj bazi (jer su ista u svakoj bazi).

1.12. Karakteristični polinom matrice. Neka je $\mathcal{A} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ proizvoljna matrica onda matricu $\mathcal{C} = \mathcal{A} - \lambda\mathcal{I}_n$ (gde je $\mathcal{I}_n$ jedinična matrica reda n, a λ promenljiva), nazivamo karakteristična matrica od $\mathcal{A}$, a njenu determinantu koja je polinom u λ:

$$\mathsf{det}\ \mathcal{C} = \mathsf{det}\,(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I}_n) = \begin{vmatrix} \alpha_{11} - \lambda & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - \lambda & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \dots & \alpha_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = \kappa_{\mathcal{A}}(\lambda) \tag{18}$$

nazivamo karakterističnim polinom matrice $\mathcal{A}$. Jednačina,

$$\kappa_{\mathcal{A}}(\lambda) = 0, \tag{19}$$

[9] $\mathsf{Hom}\, V = \{A : V \longrightarrow V \mid \ A \text{ je linearan operator }\}$.

zove se karakteristična jednačina matrice $\mathcal{A}$.

Lako se vidi da je karakteristični polinom invarijanta sličnosti, što nam omogućuje da definisišemo karakteristični polinom linearnog operatora A, kao karakteristični polinom matrice operatora $A(e)$ u nekoj bazi (e), tj. $\kappa_A(\lambda) = \kappa_{A(e)}(\lambda)$.

1.13. Sopstvene vrednosti. Skalar $\lambda \in \mathbb{F}$ zove se sopstvena vrednost linearnog operatora $A \in \mathsf{Hom}\, V$

$$\text{ako postoji} \quad 0 \neq x \in V \quad \text{takav da je} \quad A\,x = \lambda\,x.$$

Vektor x iz gornje definicije zovemo sopstvenim vektorom koji odgovara sopstvenoj vrednosti λ. Sopstvene vrednosti i sopstveni vektori sadrže najvažnije informacije o linearnom operatoru. Skup svih sopstvenih vrednosti linearnog operatora zove se spektar operatora A i označavamo ga sa $\sigma(A)$.

Skup, $V_\lambda^A = V_\lambda = \{x \in V \mid A\,x = \lambda\,x\}$, zove se sopstveni potprostor sopstvene vrednosti λ operatora A.

Teorema. *λ_0 je sopstvena vrednost linearnog operatora A akko $\kappa_A(\lambda_0) = 0$.*

1.14. Simetrični operatori i skalarni proizvod. Neka je V vektorski prostor, tada linearni operator $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$ nazivamo linearni funkcional. Svaki linearni funkcional f na euklidskom prostoru V može se predstaviti u sledećem vidu: $f(v) = \langle v, v_0 \rangle$, za neki vektor $v_0 \in V$. Vektor v_0 je jedinstveno određen funkcionalom f.

• Neka je A linearan operator i neka je $w \in V$ vektor. Posmatrajmo preslikavanje,

$$f_w : V \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \text{definisano formulom:} \quad f_w(v) = \langle A(v), w \rangle.$$

Preslikavanje f_w očigledno je linearni funkcional, pa postoji vektor $w_0 = A^*(w)$ takav da je $f_w(v) = \langle v, w_0 \rangle = \langle v, A^*(w) \rangle$. Zbog jedinstvenosti vektora w_0 dobro je definisano preslikavanje, $A^* : V \longrightarrow V$, $w \longrightarrow w_0 = A^*(w)$. Preslikavanje A^* zove se **simetrični adjungovani operator** za kojeg važi očigledna, ali veoma važna fomula

$$\langle Av, w \rangle = \langle v, A^* w \rangle\,. \tag{20}$$

• Za operator A kažemo da je simetričan ako je $A = A^*$.

Teorema. *Neka je A simetričan operator na euklidskom prostoru V. Postoji ortonormirana baza e koja se sastoji od sopstvenih vektora operatora A u kojoj je matrica operatora $A(e)$ dijagonalna, i na dijagonali se nalaze sopstvene vrednosti operatora A.*

• Za simetrični operator A kažemo da pozitivno semidefinitan ili kraće samo pozitivan i pišemo $A \geq 0$ ako je

$$\langle Av, v \rangle \geq 0, \qquad \forall\, v \in V\,.$$

Pozitivan operator je strogo pozitivan (ili pozitivno definitan) ako je

$$\langle Av, v\rangle = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad v = 0 \tag{21}$$

i u tom slučaju pišemo $A > 0$. Analogno definišemo negativne i strogo negativne operatore. Simetrični operator koji nije niti pozitivan ni negativan nazivamo indefinitnim. Važi sledeća karakterizacija pozitivnih operatora:

Propozicija. *Simetrični operator A je strogo pozitivan ako i samo ako su sve njegove sopstvene vrednosti veće od 0.*

• Neka je V realni vektorski prostor bilinearni funkcional (forma) na V je preslikavanje $\mathsf{A} : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ za koje važe sledeće aksiome, $\forall\, v_1,\, v_2 \in V$ i $\forall\, \alpha,\, \beta \in F$:

(b1) $\mathsf{A}(\alpha\, v_1 + \beta\, v_2, w) = \alpha\, \mathsf{A}(v_1, w) + \beta\, \mathsf{A}(v_2, w)$,

(b2) $\mathsf{A}(w, \alpha\, v_1 + \beta\, v_2) = \alpha\, \mathsf{A}(w, v_1) + \beta\, \mathsf{A}(w, v_2)$.

Bilinearni funkcional A je simetričan ako uz (b1) važi još i aksioma $(\forall\, v, w \in V)$:

(b3) $\mathsf{A}(v, w) = \mathsf{A}(w, v)$.

Primetimo da je skalarni proizvod simetrični bilinearni funkcional koji ima još dva dodatna svojstva: nedegenerisanost i strogu pozitivnost.

• Neka je A simetrični bilinearni funkcional na V i neka je e neka baza od V. Ako definišemo brojeve $\alpha_{ji} = \mathsf{A}(e_i, e_j)$, onda iz (b3) lako sledi

$$\alpha_{ji} = \mathsf{A}(e_i, e_j) = \mathsf{A}(e_j, e_i) = \alpha_{ij}, \qquad \forall\, i, j = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Tada simetričnom bilinearnom funkcionalu A dodelimo, na prirodan način, simetričnu matricu $\mathsf{A}(e) = (\alpha_{ij})$, koju nazivamo matricom simetričnog bilinearnog funkcionala A u bazi e.

• Kako je A simetrični bilinearni funkcional, za proizvoljne vektore $v = (v_1, \ldots, v_n)$ i $w = (w_1, \ldots, w_n)$ dobijamo da je

$$\mathsf{A}(v, w) = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ji}\, v_i\, w_j = w^{\tau}\, \mathsf{A}(e)\, v\,. \tag{22}$$

Postavlja se prirodno pitanje kako se menja matrica bilinearnog funkcionala kada se promeni baza. Pokazuje se da u tom slučaju važi formula:

$$\mathsf{A}(f) = T^{*}\mathsf{A}(e)\, T\,, \tag{23}$$

pri čemu su e i f dve baze euklidskog prostora V, a $T = T_{ef}$ je matrica prelaska sa baze e u bazu f.

Teorema. *$\mathsf{A}(v, w)$ je simetrična bilinearna forma ako i samo ako postoji jedinstveni simetrični operator $A : V \longrightarrow V$ takav da je*

$$\mathsf{A}(v, w) = \langle Av, w\rangle\,, \tag{24}$$

pri čemu je $\langle \cdot\,, \cdot\rangle$ (standardni) skalarni proizvod na V.

• Prethodna teorema, kada je primenimo na skalarni proizvod, pokazuje da postoji bijekcija, ϑ, između skupa svih strogo pozitivnih operatora na V i skupa svih skalarnih proizvoda na V, data sa $\vartheta(A) = (v, w)_A$, gde je

$$(v, w)_A = w^\tau A\, v = \langle Av, w \rangle,$$

($\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ je standardni skalarni proizvod na V).

1.15. Kvadratne forme. Neka je $\mathsf{A}(x, y)$ simetrična bilinearni funkcional(forma) na realnom vektorskom prostoru V. Funkcija $Q_{\mathsf{A}}(x) = \mathsf{A}(x, x)$ naziva se kvadratna forma, pridružena bilinearnoj formi A. Bilinearnu formu $\mathsf{A}(x, y)$ nazivamo polarnom formom kvadratne forme $Q_{\mathsf{A}}(x) = \mathsf{A}(x, x)$.

• Polarna forma $\mathsf{A}(x, y)$ potpuno je određena svojom kvadratnom formom Q_{A}, jer je

$$Q_{\mathsf{A}}(x + y, x + y) = \mathsf{A}(x + y, x + y) = \mathsf{A}(x, x) + \mathsf{A}(x, y) + \mathsf{A}(y, x) + \mathsf{A}(y, y)$$

odakle, zbog simetrije, tj. $\mathsf{A}(x, y) = \mathsf{A}(y, x)$ sledi

$$\mathsf{A}(x, y) = \frac{1}{2} \left(\mathsf{A}(x + y, x + y) - \mathsf{A}(x, x) - \mathsf{A}(y, y)\right). \tag{25}$$

• Kvadratna forma $Q_{\mathsf{A}}(x)$ je pozitivno definitna ako je $Q_{\mathsf{A}}(x) \geq 0, \forall\, x \in V$.

• Pozitivno definitna kvadratna forma Q je strogo pozitivno definitna ako za svaki $0 \neq x \in V$ je $Q_{\mathsf{A}}(x) > 0$.

• Primetimo da ako je polarna forma A strogo pozitivno definitne kvadratne forme Q_{A}, tada je simetrični operator A pridružen bilinernoj formi A strogo pozitivan i bilinearna forma A je skalarni proizvod. Dakle, skup svih strogo pozitivnih kvadratnih formi na V je u bijekciji sa skupom svih skalarnih proizvoda na V.

Analitička geometrija

1.15. Prava i ravan. Kao što znamo prava je određena jednom svojom tačkom i vektorom prave. Ako tačka M ima koordinate (x_0, y_0, z_0) i vektor prave $v = (v_1, v_2, v_3)$, tada će tačka $X = X(t) = (x(t), y(t), z(t))$ pripadati pravoj akko $MX = t\,v$. Ovu poslednju jednačinu možemo zapisati i kao

$$\alpha(t) = X(t) = M + t \cdot v \quad \text{ili u koordinatama} \tag{26}$$

$$x(t) = x_0 + t\,v_1, \quad y(t) = y_0 + t\,v_2, \quad z(t) = z_0 + t\,v_3, \tag{27}$$

$$t = \frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3}\,.$$

Ako je Prava p zadata sa svoje dve take $M_1 = (x_1, y_1, z_1)$ i $M_2 = (x_2, y_2, z_2)$. Tada njenu jednačinu možemo izveti tako što ovaj slučaj svedemo na prethodni stavljajući $M_0 = M_1$ i $v = M_2M_1 = M_2 - M_1$. Sada imamo,

$$\alpha(t) = X(t) = M_1 + t \cdot (M_2 - M_1). \tag{28}$$

Primetimo da jednačine prave u prostorima tačaka proizvoljne dimenzije imaju analogan oblik kao i (26), odnosno (28).

• Ravan u afinom prostoru[10] $\mathbb{R}^3$ potpuno je određena jednom svojom tačkom M i vektorom normale[11] na ravan. Preciznije, ako je data tačka $M(x_0, y_0, z_0)$ i vektor normale $n = (a_1, a_2, a_3)$, tačka X pripadaće toj ravni akko je vektor MX normalan na vektor n, tj.

$$0 = \langle MX, n\rangle = \langle X - M, n\rangle = \langle X, n\rangle - \langle M, n\rangle, \quad \text{ili koordinatno} \tag{29}$$

$$a_1\,x + a_2 y + a_3 z + b = 0, \quad \text{gde je } b = -\langle M, n\rangle. \tag{30}$$

Primetimo da se na isti način može izvesti jednačina hiperravni u u prostoru $\mathbb{R}^n$.
Znamo da je ravan u potpunosti određena jednom svojom tačkom M i dva nekolinearna vektora v, u koji su joj paralelni, tada proizvoljna tačka X pripada ravni akko je

$$MX = \lambda\,v + \mu\,u, \quad \text{ili} \quad X(\lambda, \mu) = M + \lambda\,v + \mu\,u. \tag{31}$$

Parametre λ i μ možemo eliminisati ako primetimo da je vektor $v \times u$ normalan na ravan, jer je tada

$$0 = \langle X - M, v \times u\rangle = [X - M, v, u]. \tag{32}$$

---

[10] Prostoru tačaka.

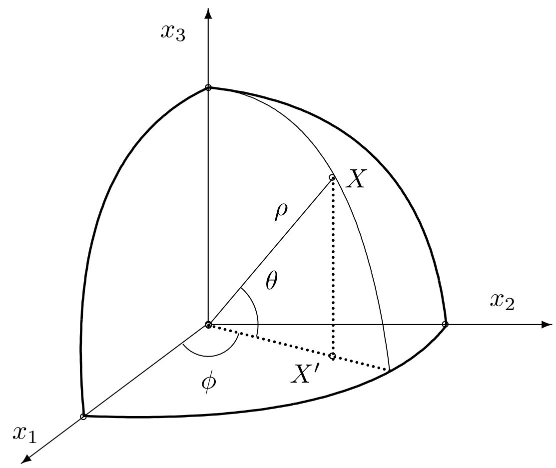
[11] Bolje reći pravcem normanim na ravan.

1.16. Sfera. Sfera S je skup tačaka koje su jednako udaljene od jedne fiksne tačke M. Ako tačka M ima koordinate (x_0, y_0, z_0) i ako je to rastojanje jedanko $r > 0$. Tada će tačka $X = (x, y, z)$ pripadati sferi akko je

$$\langle X - M, X - M\rangle = r^2 \quad \Longleftrightarrow$$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2 \,.$$

Jasno, analogno se izvodi i jednačina sfere u proizvoljnoj dimenziji.



Slika 1. Sferni koordinatni sistem

Videćemo da su nam od posebnog interesa jednačine dvodimenzionih objekata date u parametarskom obliku, zato se prisetimo sfernog koordinatnog sistema kada smo izveli vezu između Dekartovih koordinate tačke kada su nam bile poznate sferne koordinate iste. Ako tačka X ima koordinate (ϱ, θ, ϕ) u sfernom sistemu onda su njene koordinate u Dekartovom date formulama:

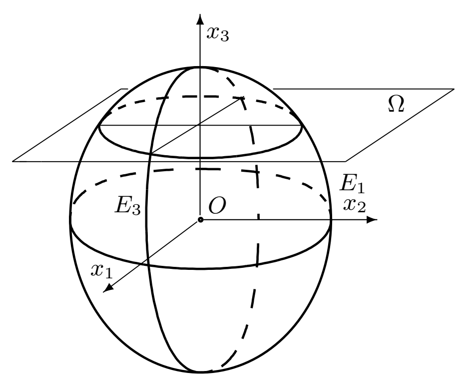
$$x_1 = \varrho\, \cos\theta\, \cos\psi, \qquad x_2 = \varrho\, \cos\theta\, \sin\psi, \qquad x_3 = \varrho\, \sin\theta. \tag{33}$$

Jasno, jednačina sfere polupečnika r čije je središte u koordinatnom početku, je $\rho = r$. I specijalno za $r = 1$ dobijamo parametarske jednačine sfere $\mathbb{S}^2$:

$$r(\theta, \phi) = (\cos\theta\, \cos\phi, \cos\theta\, \sin\phi, \sin\theta), \qquad -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2},\;\; 0 \le \phi < 2\,\pi. \tag{34}$$

1.17. Nedegenerisane površi drugog reda. Pod površima drugog reda podrazumevamo površi, čija je implicitna jednačina drugog stepena. Klasifikacija ovih površi deo je kursa Geometrija 1. Prvi primer ovakve površi je elipsoid, čija je kanonska jednačina:

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 1.$$



Slika 2. Elipsoid

Pozitivni realni brojevi a, b i c nazivaju se poluosama elipsoida. Parametarske jednačine elipsoida, koje možemo dobiti iz jednačine sfere su:

$$r(u, v) = (a\, \cos u\, \cos v, b\, \cos u\, \sin v, c\, \sin u), \qquad -\frac{\pi}{2} \le u \le \frac{\pi}{2},\;\; 0 \le v < 2\,\pi.$$

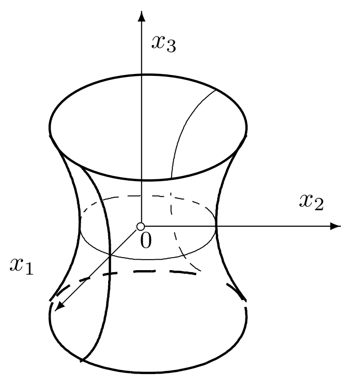
Zatim imamo i jednokrilni i dvokrilni hiperboloid (vidi Slike 3 i 4), čije su kanonske jednačine redom

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}-\frac{x_3^2}{c^2}=1, \qquad \frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}-\frac{x_3^2}{c^2}=-1.$$

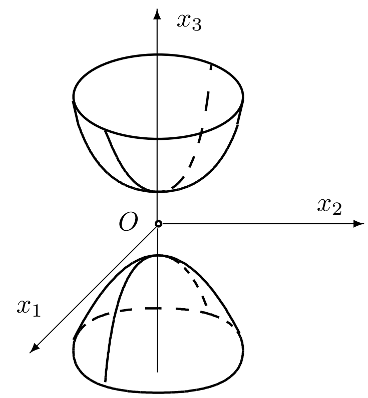
Pozitivni realni brojevi a, b i c nazivaju se poluosama hiperboloida. Njihove parametarske jednačine su:

$$\text{(jh)}\quad r(u,v)=\left(\frac{a}{2}\left(u+\frac{1}{u}\right)\cos v, \frac{b}{2}\left(u+\frac{1}{u}\right)\sin v, \frac{c}{2}\left(u-\frac{1}{u}\right)\right), \quad u\in\mathbb{R}\setminus\{0\},\ \ 0\le v<\pi,$$

$$\text{(dh)}\quad r(u,v)=\left(\frac{a}{2}\left(u-\frac{1}{u}\right)\cos v, \frac{b}{2}\left(u-\frac{1}{u}\right)\sin v, \frac{c}{2}\left(u+\frac{1}{u}\right)\right), \quad u\in\mathbb{R}\setminus\{0\},\ \ 0\le v<\pi.$$



Slika 3. Jednokrilni hiperboloid



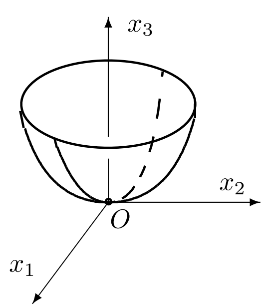
Slika 4. Dvokrilni hiperboloid

Slično imamo i dva paraboloida: eliptički i hiperbolički (vidi Slike 5 i 6), čije su kanonske jednačine, redom

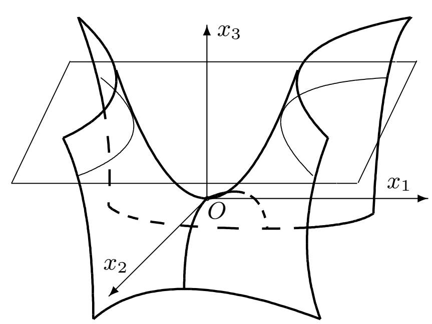
$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}=2\,x_3, \qquad \frac{x_1^2}{a^2}-\frac{x_2^2}{b^2}=2\,x_3.$$

Njihove parametarske jednačine su:

$$\text{(ep)}\quad r(u,v)=\left(u,v,\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}\right), \quad u,v\in\mathbb{R}, \qquad \text{(hp)}\quad r(u,v)=\left(u,v,\frac{u^2}{a^2}-\frac{v^2}{b^2}\right), \quad u,v\in\mathbb{R}.$$



Slika 5. Eliptički paraboloid



Slika 6. Hiperbolički paraboloid

Površi drugog reda, čije su jednačine nešto jednostavnije od prethodnih su konični cilindri, koje dobijamo tako što konikama koje se nalaze u ravni Ox_1x_2 dodamo još jednu dimenziju. Tako dobijamo površi koje su poznate kao konični cilindri: eliptički, hiperbolički i parabolički(vidi Sliku 7), čije su kanonske jednačine redom,

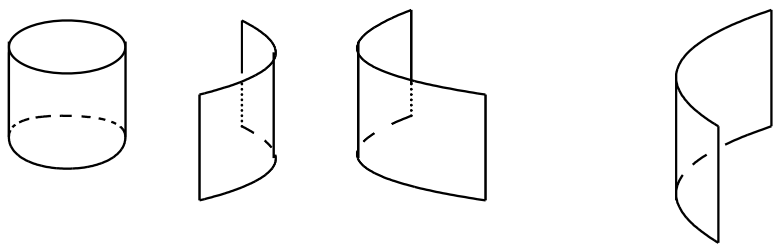
$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}=1, \qquad \frac{x_1^2}{a^2}-\frac{x_2^2}{b^2}=1, \qquad \frac{x_2^2}{b^2}=2\,x_1.$$

Njihove parametarske jednačine su:

(ec) $r(u,v)=(a\,\cos u, b\,\sin u, v)$, $u\in[0,2\,\pi], v\in\mathbb{R}$,

(hc) $r(u,v)=(a\,\mathrm{ch}u, b\,\mathrm{sh}u, v)$, $u,v\in\mathbb{R}$,

(pc) $r(u,v)=(2\,b^2\,u^2, 2\,b^2u, v)$, $u,v\in\mathbb{R}$.



Slika 7. Konični cilindri

Postoji još jedna nedegenerisana površ drugog reda, a to je eliptički konus. Njegova je kanonska jednačina

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}-\frac{x_3^2}{c^2}=0.$$

Jedna njegova parametrizacija je: $r(u,v)=(a\,v\cos u, b\,v\sin u, c\,v), u\in[0,2\,\pi], v\in\mathbb{R}$.

1.18. Helisa, cilindar i helikoid. Jednačina kruga poluprečnika $a>0$, u ravni je $x_1^2+x_2^2=a^2$, ili u parametarskom obliku

(35) $$\alpha(t)=(a\,\cos t, a\,\sin t), \qquad 0\le t<2\,\pi.$$

Ista jednačina u Dekartovim koordinatama, ali u dimenziji 3 predstavlja jednačinu (pravog) cilindra, dok su njegove jednačine u parametarskom obliku

(36) $$r(u,t)=(a\,\cos t, a\,\sin t, u), \qquad 0\le t<2\,\pi,\ \ u\in\mathbb{R}.$$

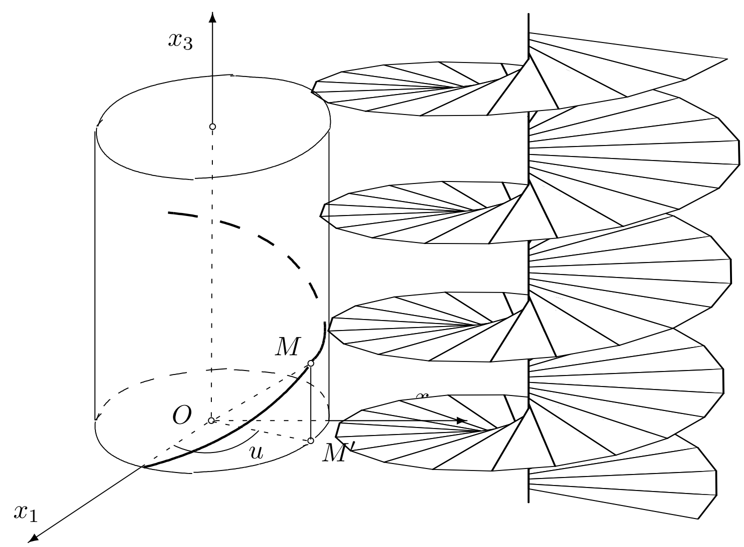
• Desna kružna helisa (ili kraće samo helisa) je kriva koja nastaje kao superpozicija rotacije u Ox_1x_2 ravni sa translacijom duž x_3 ose, vidi Sliku 8. Parametarska jednačina helise je:

(37) $$\alpha(t)=(a\,\cos t, a\,\sin t, c\,t), \qquad a>0, c\neq 0, t\in\mathbb{R}.$$

Skup svih slika tačaka prave $x_2=x_3=0$, u neprekidnom zavojnom kretanju sa osom x_3, je površ čije su jednačine

(38) $$r(u,t)=(u\,\cos t, u\,\sin t, c\,t) \qquad c\neq 0,\ u,t\in\mathbb{R}.$$

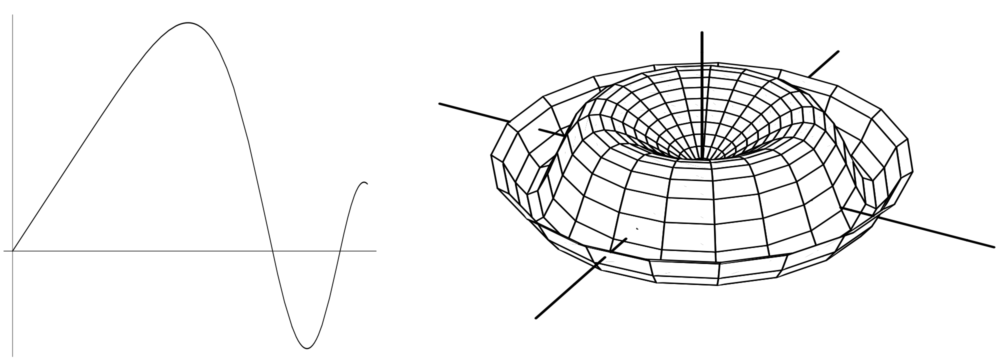
Tu površ nazivamo zavojnom površi ili pravim helikoidom jer su osa rotacije i prava koju rotiramo međusobno upravne, vidi Sliku 8.



Slika 8. Helisa i helikoid

Helisu možemo da shvatimo i kao presek cilindra $r(u,t) = (a\,\cos t, a\,\sin t, u)$ i pravog helikoida zadatog prethodnom jednačinom, dok prav helikoid možemo da shvatimo i kao konoidnu površ čija je direktrisa helisa, osa prava x_3, a direktorna ravan Ox_1x_2.

1.19. Rotacione površi. Neka su u prostoru zadate kriva $\mathcal{C}$ i prava s. Skup slika svih tačaka krive $\mathcal{C}$, pri dejstvu neprekidne familije osnih rotacija čija je osa prava s, je površ koju nazivamo rotacionom ili obrtnom površi. Na Slici 9 dat



Slika 9. Konstrukcija rotacione površi

U praksi obično posmatramo grafik neke funkcije $x_2 = f(x_1)$ i zatim taj grafik rotiramo oko x_1 ose i dobijamo rotacionu površ. Da bismo odredili njenu jednačinu stavimo da je jedan parametar $u = x_1$, a drugi je ugao v kojim je parametrizovan krug koji pripada ravni $x_1 = u$, čiji je poluprečnik $f(u)$, a centar u tački $(u,0,0)$. Ako ugao v merimo od maksimalne vrednosti y koordinate, tada je parametrizacija ovakve rotacione površi

$$(39) \qquad r(u,v) = (u, f(u)\cos v, f(u)\sin v), \qquad u \in \mathcal{D}(f),\ \ 0 \le v < 2\,\pi,$$

gde smo sa $\mathcal{D}(f)$ označili domen funkcije f. Primetimo da u zavisnosti od načina kako merimo ugao v jednačina (39) može biti malo modifikovana (npr. $\cos v$ i $\sin v$ u parametrizaciji (39) zamene mesta), a takođe je moguće permutovati koordinate (u literaturi se često sreće parametrizacija $r(u,v) = (f(u)\cos v, f(u)\sin v, u)$).

• Među svim rotacionim površima ističemo torus, koji se dobija kao slika pri dejstvu neprekidne familije rotacija kruga, $\mathcal{K}$, oko prave s koja sa krugom $\mathcal{K}$ nema zajedničkih tačaka. Neka je s osa x_3, i neka je jednačinama

$$(x_2 - a)^2 + x_3^2 - r^2 = x_1 = 0, \qquad a > r,$$

zadat krug $\mathcal{K}$ u ravni Ox_2x_3. Parametarska jednačina toga kruga biće

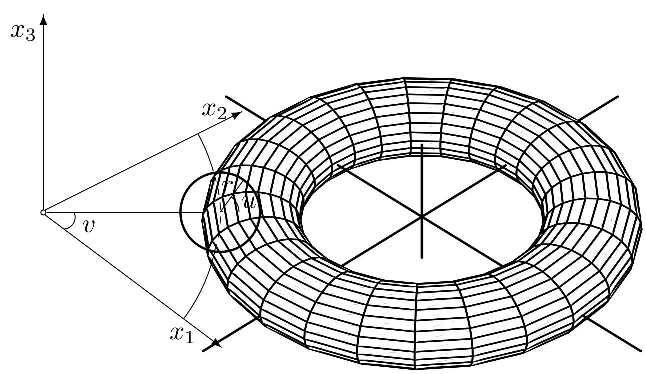
$$\alpha(u) = (0, a + r\,\cos u, r\,\sin u), \tag{40}$$

Ako sa v označimo ugao rotacije kruga $\mathcal{K}$ oko x_3 ose (Slika 10), parametarska jednačina torusa biće

$$r(u,v) = ((a + r\,\cos u)\sin v, (a + r\,\cos u)\cos v, r\,\sin u), \quad 0 \le u, v < 2\pi\,. \tag{41}$$

Eliminacijom parametara u i v iz prethodnih jednačina dobija se Dekartova jednačina torusa

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + a^2 - r^2)^2 = 4\,a^2\,(x_1^2 + x_2^2).$$



Slika 10. Torus

Afina geometrija

1.19. Definicija afinog prostora. Sada ćemo videti kako se pomoću vektorskih prostora uvodi pojam afinog prostora (prostora tačaka). Odatle se mnoge važne osobine vektorskih prostora prenose na prostore tačaka. Posebno, uvode se koordinate u afini prostor, te analitičko – algebarski aparat pomaže da se mnogi geometrijski problemi jasnije i potpunije razumeju ili dokažu znatno jednostavnije.

Definicija 1. Afini prostor [12] je uređena trojka $(\mathbb{A}, V, \Theta)$, gde je $\mathbb{A}$ skup *tačaka*, V pridruženi vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$, i preslikavanje $\Theta : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \longrightarrow V$ koje zadovoljava sledeća dva uslova:

(A1) Za sve $A \in \mathbb{A}$, $v \in V$ postoji tačno jedna tačka $B \in \mathbb{A}$, tako da je $\Theta(A, B) = v$,

(A2) Za proizvoljne tačke $A, B, C \in \mathbb{A}$ važi

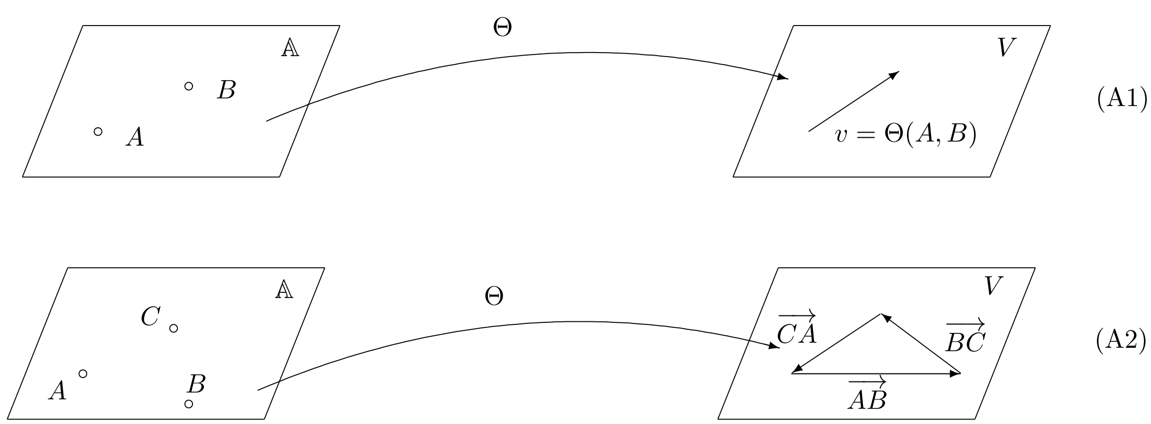
$$\Theta(A, B) + \Theta(B, C) + \Theta(C, A) = \mathsf{0}.$$

Za preslikavanje Θ uobičajeno je da se koristi i kraća oznaka, $\Theta(A, B) = \overrightarrow{AB}$. Tada se osnovna svojstva afinog prostora, tj. uslovi $(A1)$ i $(A2)$ mogu iskazati na sledeći način:

(A1) Za svako $A \in \mathbb{A}$, $v \in V$ postoji tačno jedna tačka $B \in \mathbb{A}$, tako da je $\overrightarrow{AB} = v$,

(A2) Za proizvoljne tačke $A, B, C \in \mathbb{A}$ važi

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{OO} = \mathsf{0}.$$



Slika 11. Aksiome afinog prostora

Napomenimo ovde da se naša razmatranja odnose na slučaj kada je $\mathbb{F}$ polje realnih ili kompleksnih brojeva.

[12] afin – srodan.

Primetimo da iz svojstva (A2), za $A = B = C$ dobijamo $\overrightarrow{AA} = \mathsf{0}$, a onda za $B = C$, $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

Svojstvo (A1) znači da je za fiksirano $A \in \mathbb{A}$ preslikavanje, $\Theta_A : \mathbb{A} \longrightarrow V$, definisano formulom:

$$\Theta_A(B) = \overrightarrow{AB},$$

bijekcija između skupa tačaka afinog prostora $\mathbb{A}$ i pridruženog vektorskog prostora V.

Aksioma (A1), tj. bijektivnost preslikavanja Θ_A, za sve A iz $\mathbb{A}$, omogućuje da uvedemo operaciju sabiranja vektora i tačaka. Preciznije imamo,

Definicija 2. Za $A \in \mathbb{A}$, $v \in V$, $B := A + v$ ako i samo ako $\overrightarrow{AB} = v$. Vektor $v = \overrightarrow{AB} = \Theta_A(B)$ zovemo vektorom položaja tačke B u odnosu na tačku A.

Slika 12. Sabiranje tačaka i vektora

Prethodna definicija omogućuje nam da afini prostor $\mathbb{A}$ možemo predstaviti u obliku: $\mathbb{A} = \{A + v \mid v \in V\} = A + V$, pri čemu je A proizvoljna tačka iz $\mathbb{A}$.

Primetimo da su sve tačke afinog prostora "ravnopravne" [13], tj. za $A, B \in \mathbb{A}$, $A \neq B$, važi da je $\mathbb{A} = A + V = B + V$.

Koristeći pridruživanje Θ iz definicije afinog preslikavanja osnovni geometrijski odnosi definišu se na jeziku vektorskih prostora. Na primer, tačke A, B i C su kolinearne ako i samo ako su pridruženi vektori $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$ kolinearni.

Postavlja se prirodno pitanje, kako da uz pomoć vektorskog prostora V nad poljem $\mathbb{F}$ na nekom nepraznom skupu $\mathbb{A}$, uvedemo strukturu afinog prostora. Prethodne opservacije pokazuju da Θ_A mora biti bijekcija. Ispostavlja se da je to dovoljno, ili preciznije imamo:

Teorema. *Neka je $\mathbb{A}$ neki neprazan skup i neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$, i neka je $A \in \mathbb{A}$, tada svaka bijekcija $\Theta_A : \mathbb{A} \longrightarrow V$, definiše strukturu afinog prostora na $\mathbb{A}$.*

---

[13] Ova ravnopravnost ustvari predstavlja homogenost prostora tačaka.

Definicija 3. Pridruženi vektorski prostor V afinom prostoru $\mathbb{A}$ naziva se prostor translacija afinog prostora $\mathbb{A}$. Dimenzija afinog prostora $\mathbb{A}$ definiše se kao dimenzija pridruženog vektorskog prostora V. Ako je $\dim \mathbb{A} = 0$, $\mathbb{A}$ je tačka; ako je $\dim \mathbb{A} = 1$, $\mathbb{A}$ se naziva afina prava; ako je $\dim \mathbb{A} = 2$, $\mathbb{A}$ je afina ravan. Ponekad ćemo za $m-$dimenzioni afini (realni) prostor koristiti oznaku $\mathbb{A}^m = (\mathbb{A}^m, V^m, \Theta)$.

1.20. Primeri afinih prostora. Navedimo sada niz primera, koji pokazuju da je skup afinih prostora bogat i da predstavlja uopštenje prave, ravni i prostora, koje smo izučavali u prethodnim glavama ove knjige.

(p1) Prava $\mathbb{E}^1$, ravan $\mathbb{E}^2$ i prostor $\mathbb{E}^3$ su primeri realnog afinog prostora. Sama definicija afinog prostora je prirodno poopštenje zajedničkih svojstava ova tri osnovna primera.

(p2) Ako je V proizvoljni vektorski prostor i $\Theta(a, b) = b - a$, direktno proveravamo da (V, V, Θ) zadovoljava aksiome (A1) i (A2) afinog prostora.

(A1) Za $a \in V$ i $x \in V$ izaberimo $b \in V$ tako da je $\Theta(a, b) = b - a = x$, odnosno $b = a + x$.

(A2) Za $a, b, c \in V$, imamo redom:

$$\Theta(a, b) + \Theta(b, c) + \Theta(c, a) = (b - a) + (c - b) + (a - c) = \mathsf{0}.$$

Znači, proizvoljni vektorski prostor, V, prirodno je snabdeven strukturom afinog prostora i označavamo ga sa $\mathcal{V}_{aff}$.

(p3) Posebno je važan specijalan slučaj, $V = \mathbb{F}^m$. Ako želimo posebno da naglasimo linearnu ili afinu strukturu prostora $\mathbb{F}^m$ koristimo oznake $\mathbb{F}^m_{lin}$ i $\mathbb{F}^m_{aff}$. Ako su $A = (a_1, \ldots, a_m)$ i $B = (b_1, \ldots, b_m)$ tačke iz $\mathbb{F}^m$ onda je

$$\Theta(A, B) = \overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, \ldots, b_m - a_m).$$

Navedimo sada i neke standardne konstrukcije kojima iz datih afinih i vektorskih prostora možemo konstruisati nove.

(k1) Direktni proizvod afinih prostora je takođe afini prostor. Ako su $(\mathbb{A}, V, \Theta)$ i $(\mathbb{B}, W, \Phi)$ afini prostori, onda je i $(\mathbb{A} \times \mathbb{B}, V \times W, \Theta \times \Phi)$ afini prostor, gde je, $(\Theta \times \Phi)\big((A_1, B_1), (A_2, B_2)\big) = \big(\Theta(A_1, A_2), \Phi(B_1, B_2)\big)$, pri čemu je $A_1, A_2 \in V$, $B_1, B_2 \in W$.

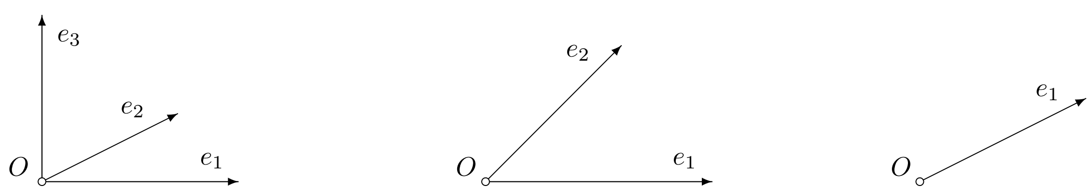
(k2) Neka je V vektorski prostor, W njegov potprostor i $\sim$ relacija ekvivalencije na V definisana sa: $e_1 \sim e_2$ ako i samo ako je $e_1 - e_2$ iz W, za e_1, e_2 iz V. Označimo sa $\mathbb{A}$ jednu klasu ekvivalencije relacije $\sim$. Tada je $(\mathbb{A}, W, \Phi)$ afini prostor, gde je preslikavanje Φ definisano formulom, $\Phi(x, y) = y - x$.

1.21. Afini koordinatni sistem Problem koordinatnog (operativnog) zapisivanja geometrijskih objekata afinih potprostora rešava se na potpuno analogan način kao i za vektorske prostore. Kako su svaka dva vektorska prostora nad istim poljem izomorfna ako i samo ako imaju istu dimenziju isto će važiti i za afine prostore (što ćemo kasnije dokazati). Odavde odmah sledi da ako je $\mathbb{A}^m$ afini prostor dimenzije m nad poljem $\mathbb{F}$ on će biti izomorfan afinom prostoru $\mathbb{F}^m_{aff}$.

Definicija 1. **Afini koordinatni sistem** afinog prostora $(\mathbb{A}^m, V^m, \Theta)$ je par (O, e), gde je O tačka, a $e = (e_1, \ldots, e_m)$ baza vektorskog prostora V^m. Afini koordinatni sistem označavamo i simbolom $O\,e_1 \ldots e_m$. Tačka O naziva se **centar koordinatnog sistema.** Vektore $e_1, e_2, \ldots, e_m$ nazivamo **koordinatnim vektorima.**
Neka su tačke E_i, $i = 1, \ldots, m$ skupa $\mathbb{A}^m$ takve da je $\overrightarrow{OE_i} = e_i$, $i = 1, \ldots, m$, onda posmatramo preslikavanje, $\kappa : \mathbb{A}^m \longrightarrow \mathbb{F}^m$, definisano na sledeći način:

$$\kappa(O) = (0, \ldots, 0) \quad \text{i} \quad \kappa(E_i) = (0, \ldots, 0, \overset{i}{1}, 0, \ldots, 0).$$

Preslikavanje κ zove se **koordinatizacija** ili **koordinatno preslikavanje.**

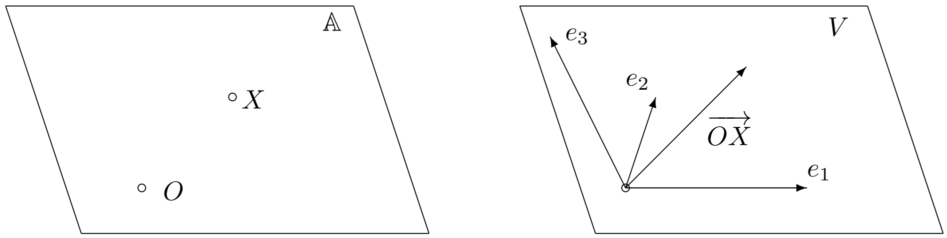


Slika 13. Afini koordinatni sistemi za $n = 3, 2, 1$

Naravno, isto kao i u slučaju afinih prostora $\mathbb{E}^1, \mathbb{E}^2$ i $\mathbb{E}^3$ nećemo pisati oznaku za ovo preslikavanje, već ćemo to podrazumevati. Prema tome, **afine koordinate** tačke X iz $\mathbb{A}^m$ su koordinate vektora $\overrightarrow{OX}$ u bazi $e_1, \ldots, e_m$.

Preciznije, ako je $\overrightarrow{OX} = x_1\,e_1 + \ldots + x_m\,e_m$ onda su brojevi $x_1, \ldots, x_m$ **afine koordinate** tačke X u afinom koordinatnom sistemu $O\,e_1 e_2 \ldots e_m$, što zapisujemo kao $X = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ ili $X(x_1, x_2, \ldots, x_m)$.
Dakle, ako su $X, Y \in \mathbb{A}^m$ dve tačke koje imaju koordinate $X = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, i $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ u afinom koordinatnom sistemu $O\,e_1 e_2 \ldots e_m$ onda vektor $\overrightarrow{XY}$ ima koordinate $(y_1 - x_1, y_2 - x_2, \ldots, y_m - x_m)$ jer je $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{OY} - \overrightarrow{OX}$.
Budući da se svaka tačka afinog prostora može zapisati u obliku $B = X + v$, koordinate tačke B možemo izračunati iz koordinata tačke $X = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ u reperu $(O,\, e)$ i koordinata vektora $v = (v_1, v_2, \ldots, v_m)$ u bazi e na sledeći način:

$$B = X + v = (x_1, \ldots, x_m) + (v_1, \ldots, v_m) = (x_1 + v_1, \ldots, x_m + v_m).$$



Slika 14. Afini koordinatni sistemi

Ako su nam data dva koordinatna repera $(O,\, e)$ i $(\bar{O},\, \bar{e})$ postavlja se pitanje nalaženja veza između koordinata tačke X u ta dva repera. Ovde možemo primeniti sve ono što smo izveli u tački **1.4** za vezu koordinata istog vektora u dve baze vektorskog prostora V, tako da se svi pojmovi i tehnike vrlo jednostavno prenose u afini prostor proizvoljne dimenzije.

Podsetimo se veza između koordinata nekog vektora x u dve baze e i $\bar{e}$. Prvo vektore jedne baze izrazimo preko vektora druge baze,

$$(42) \qquad \bar{e}_i = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ki}\, e_k, \quad i = 1, \dots, m, \quad \text{tj.} \quad e_i = \sum_{k=1}^{n} \bar{\gamma}_{ki}\, \bar{e}_k\,, \quad i = 1, \dots, m.$$

Relacije (42) mogu se zapisati preko matrica prelaska sa baze e u $\bar{e}$. $T_{e\,\bar{e}} = T$, i sa baze $\bar{e}$ u bazu e, $T_{\bar{e}\,e} = \bar{T}$. Primetimo da su matrice T i $\bar{T}$ reda $m \times m$, sa koeficijentima u polju $\mathbb{F}$. Budući da su transformacije stare u novu bazu i nove u staru bazu inverzne, i njihove matrice biće inverzne, tj. biće

$$(43) \qquad T_{e\,\bar{e}} = T = (\gamma_{ij}) \qquad \text{i} \qquad T^{-1} = [T_{e\,\bar{e}}]^{-1} = T_{\bar{e}\,e} = \bar{T} = (\bar{\gamma}_{ij}).$$

Tada se (42) svodi na

$$\begin{aligned} \bar{e} &= (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_m) = (e_1, e_2, \dots, e_m)\, T = e\, T \qquad \text{i} \\ e &= (e_1, e_2, \dots, e_m) = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_m)\, \bar{T} = \bar{e}\, \bar{T}. \end{aligned}$$

Koristeći veze date u tački **1.4**, znamo da su koordinate vektora x u staroj i novoj baz idate formulom

$$(44) \qquad x(e) = T_{e\,\bar{e}}\, x(\bar{e}) \qquad \text{ili} \qquad x(\bar{e}) = T_{\bar{e}\,e}\, x(e) = [T_{e\,\bar{e}}]^{-1}\, x(e).$$

Sada odredimo vezu između koordinata iste tačke u dva afina repera $(O,\, e)$ i $(\bar{O},\, \bar{e})$. Zadatak se prirodno razlaže na sledeća dva koraka:

(t) promena koordinata tačke ako se menja samo centar koordinatnog sistema, tj. pri prelasku sa koordinatnog (O, e) u koordinatni sistem $(\bar{O}, e)$;

(r) promena koordinata tačke ako se menja samo vektorski deo koordinatnog sistema, tj. pri prelasku sa koordinatnog sistema $(\bar{O}, e)$ u koordinanti sistem $(\bar{O}, \bar{e})$.

Rešimo prvo (t). Ako umesto O za koordinatni početak izaberemo tačku $\bar{O}$, vektor položaja tačke X će se promeniti. Neka je $\bar{x} = \overrightarrow{\bar{O}X}$ vektor položaja tačke X u odnosu na novi koordinatni početak i neka je $\bar{w} = \overrightarrow{O\bar{O}}$ vektor položaja tačke $\bar{O}$ u starom koordinatnom sistemu. Ako tačka $\bar{O}$ ima koordinate $(\bar{o}_1, \bar{o}_2, \ldots, \bar{o}_m)$ u koordinatnom sistemu (O, e) onda imamo,

$$(45) \qquad \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{\bar{O}X} + \overrightarrow{O\bar{O}} \qquad \text{ili ekvivalentno} \qquad x = \bar{x} + \bar{w}.$$

Kako su koordinate tačke X u prvom koordinatnom sistemu jednake koordinatama vektora x, a u drugom koordinatnom sistemu jednake koordinatama vektora $\bar{x}$, vidimo da je u (45) izražen vektor x na dva načina u istoj bazi e. Preciznije, vektor x ima koordinate $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ i $(\bar{x}_1 + \bar{o}_1, \bar{x}_2 + \bar{o}_2, \ldots, \bar{x}_m + \bar{o}_m)$ u bazi e, zbog toga mora biti, (za $i = 1, 2, \ldots, m$)

$$(46) \qquad x_i = \bar{x}_i + \bar{o}_i \quad \text{ili ekvivalentno} \quad \bar{x}_i = x_i - \bar{o}_i.$$

Formulom (46) određene su promene koordinata tačke X pri translaciji koordinatnog sistema.

Primetimo da smo drugi korak (r) rešili u prethodnom odeljku, jer u (45) na desnoj strani jednakosti nema vektora $\overrightarrow{O\bar{O}}$, tako da možemo primeniti formule transformacija (44). Kombinujući sada te rezultate (tj. promenu koordinata vektora, pri promeni baza) sa formulama transformacije prilikom translacije koordinatnog sistema (46), konačno dobijamo, za $i = 1, 2, \ldots, m$,

$$(47) \qquad \bar{x}_i = \sum_{j=1}^{m} \bar{\gamma}_{ij}\,(x_j - \bar{o}_j) \qquad \text{ili ekvivalentno} \qquad x_i = \bar{o}_i + \sum_{j=1}^{m} \gamma_{ij}\,\bar{x}_j,$$

pri tome su $T = (\gamma_{ij})$ i $\bar{T} = (\bar{\gamma}_{ij})$ matrice prelaska.

1.22. Orijentacija afinog prostora. Za afine prostore orijentacija se može uvesti slično kao i u vektorskim prostorima, vidi tačku **1.4**. Afini prostor se orijentiše time što se orijentiše pridruženi vektorski prostor. Pri tome se koriste matrice prelaska sa jedne baze na drugu i uvodi se sledeća relacija:

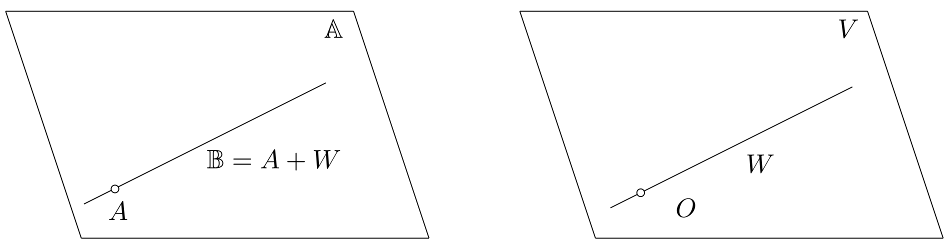
Definicija. Neka su $e = (e_1, \ldots, e_m)$ i $\bar{e} = (\bar{e}_1, \cdots, \bar{e}_m)$ dve baze afinog prostora $\mathbb{A}$. Kažemo da su one *orijentaciono su ekvivalentne* ako je determinanta matrice prelaska pozitivna, tj. ako je $\det T_{e\,\bar{e}} > 0$.

Koristeći osobine determinanti, direktno se proverava da je uvedena relacija relacije ekvivalencije koja ima dve klase ekvivalencije. Orijentacija prostora $\mathbb{A}^m$ definiše se kao klasa ekvivalencije u odnosu na ovu relaciju. Uobičajeno je da jednu od te dve orijentacije proglasimo za pozitivnu, a drugu za negativnu.

Primetimo da je pojam pozitivnog repera relativan tj. ono što smo zvali pozitivnim reperom mogli smo potpuno ravnopravno zvati negativnim. U suštini ovaj izbor bazira se na sledećoj činjenici: izaberemo neki koordinatni reper i njega proglasimo za pozitivan reper, time su pojmovi pozitivnosti i negativnosti bilo kojeg drugog repera potpuno određeni.

1.23. Afini potprostori. Ako posmatramo prostor $\mathbb{E}^3$ onda je svaka njegova ravan, prava i tačka i sama afini prostor s obzirom na istu afinu strukturu koja je uvedena preko relacije $\sim$ na skupu svih usmerenih duži prostora $\mathbb{E}^3$. Ovaj koncept afinog potprostora možemo proširiti na proizvoljni afini prostor. Preciznije imamo,

Definicija. Neka je dat afini prostor $(\mathbb{A}, V, \Theta)$ nad poljem $\mathbb{F}$. Neprazan podskup, $\mathbb{B}$, skupa $\mathbb{A}$ je afini potprostor afinog prostora $\mathbb{A}$ ako je i sam afini prostor s obzirom na istu afinu strukturu kao u $\mathbb{A}$. Ovo specijalno znači da je $\mathbb{B} = (\mathbb{B}, W, \Phi)$, pri čemu je W, vektorski potprostor od V i preslikavanje $\Phi : \mathbb{B} \times \mathbb{B} \longrightarrow W$, je restrikcija od Θ na $\mathbb{B} \times \mathbb{B}$, tj. $\Phi = \Theta \mid_{\mathbb{B}\times\mathbb{B}}$. Vektorski prostor W zove se pravac afinog prostora $\mathbb{B}$. Afini potprostori dimenzije k obično se zovu $k-$dimenzione ravni ili kraće $k-$**ravni**. Od posebnog su interesa ravni dimenzije $m - 1$ (ili kodimenzije 1) koje se zovu hiperravni, ravni dimenzije 0 koje zovemo tačkama i ravni dimenzije 1 koje zovemo pravama.



Slika 15. Afini potprostori

Kako je $\mathbb{B}$ afini prostor onda je $\mathbb{B} = \{B + w \mid w \in W\} = B + W$, za neku tačku $B \in \mathbb{B}$, ali važi i obrat.

Teorema 1. *Neka je $(\mathbb{A}, V, \Theta)$ afini prostor nad poljem $\mathbb{F}$. Za proizvoljno $B \in \mathbb{A}$ i W potprostor vektorskog prostora V, skup $\{B + w \mid w \in W\} = \mathbb{B}$ je afini potprostor od $\mathbb{A}$, koji sadrži tačku B i čiji je pravac W.*

Prema tome ova teorema pokazuje da se afini potprostori mogu posmatrati kao translirani vektorski potprostori. Navedimo sada nekoliko jednostavnih posledica upravo dokazane teoreme.

Posledica 1. *Neka je $(\mathbb{A}, V, \Theta)$ afini prostor nad poljem $\mathbb{F}$ i neka je $\mathbb{B} = A + W$ neki afini potprostor od $\mathbb{A}$.*

(i1) Tačka $B \in \mathbb{B}$ ako i samo ako je $\mathbb{B} = B + W$.

(i2) Tačka $B \in \mathbb{B}$ ako i samo ako je $\overrightarrow{AB} \in W$.

U sledećoj teoremi rešavamo problem međusobnog odnosa dva afina potprostora, $\mathbb{B}_1$ i $\mathbb{B}_2$, afinog prostora $\mathbb{A}$.

Teorema 2. *Neka je $(\mathbb{A}, V, \Theta)$ afini prostor i neka su $\mathbb{B}_1 = B_1 + W_1$ i $\mathbb{B}_2 = B_2 + W_2$ neka dva afina potprostora afinog prostora $\mathbb{A}$.*

(i1) *$\mathbb{B}_1 \cap \mathbb{B}_2 \neq \emptyset$ ako i samo ako je $\overrightarrow{B_1B_2} \in W_1 + W_2$.*

(i2) *Ako je $\mathbb{B}_1 \cap \mathbb{B}_2 \neq \emptyset$ onda je $\mathbb{B}_1 \cap \mathbb{B}_2 = B + (W_1 \cap W_2)$, za neko $B \in \mathbb{B}_1 \cap \mathbb{B}_2$.*

Primetimo da iz tvrđenja (i1) ove teoreme dobijamo sledeću jednostavnu posledicu:

Posledica 2. *Neka je $(\mathbb{A}, V, \Theta)$ afini prostor i neka su $\mathbb{B}_1 = B_1 + W_1$ i $\mathbb{B}_2 = B_2 + W_2$ neka dva afina potprostora od $\mathbb{A}$, takva da je $W_1 + W_2 = V$. Onda je $\mathbb{B}_1 \cap \mathbb{B}_2 \neq \emptyset$. Specijalno, presek bilo koje dve $2-$ravni afinog prostora $\mathbb{E}^3$ koje nemaju jednake pravce, nije prazan.*

1.24. Afini omotač skupa. Kada imamo neki afini prostor $\mathbb{A}$ i neki njegov podskup $\mathcal{C}$, postavlja se standardno pitanje kako odrediti najmanji afini potprostor koji sadrži skup $\mathcal{C}$.

Da bismo na ovo pitanje odgovorili prvo primetimo da ako je $(\mathbb{B}_i)_{i\in I}$ proizvoljna familija potprostora skupa $\mathbb{A}$, tada je ili $\mathbb{B} = \cap_i \mathbb{B}_i = \emptyset$ ili je $\mathbb{B} = \cap_i \mathbb{B}_i$ potprostor i tada je $W = \cap_i W_i$. Odavde odmah sledi da postoji najmanji afini prostor koji sadrži skup $\mathcal{C}$, i taj skup jednak je preseku svih onih afinih potprostora od $\mathbb{A}$ koji sadrže skup $\mathcal{C}$. Najmanji afini potprostor koji sadrži neprazan skup $\mathcal{C}$ zove se afini omotač skupa $\mathcal{C}$ i za njega koristimo oznaku $\langle \mathcal{C} \rangle$.

Primedba. Primetimo da iz same definicije afinog omotača direktno sledi:

(i1) ako je $\mathcal{C}$ afini potprostor onda je $\langle \mathcal{C} \rangle = \mathcal{C}$.

(i2) $\langle \langle \mathcal{C} \rangle \rangle = \langle \mathcal{C} \rangle$.

(i3) ako je $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$ onda je $\langle \mathcal{C} \rangle \subseteq \langle \mathcal{D} \rangle$.

Budući da je teorija afinih prostora u uskoj vezi sa teorijom vektorskih prostora za očekivati je da afini omotač skupa u teoriji afinih prostora igra sličnu ulogu kao lineal u teoriji vektorskih prostora. Da je to tako pokazuje sledeća teorema.

Teorema 1. *Neka je $\emptyset \neq \mathcal{C}$ podskup afinog prostora $\mathbb{A}$ onda je $\langle \mathcal{C} \rangle$ afini potprostor $C + \mathcal{L}(\{\overrightarrow{CX} \mid X \in \mathcal{C}\})$, pri čemu je C proizvoljna tačka skupa $\mathcal{C}$.*

Odredimo sada afini omotač dve ravni.

Teorema 2. *Neka su date dve ravni $\mathbb{B}_i = B_i + W_i$, $i = 1, 2$ afinog prostora $\mathbb{A} = A + V$. Tada je,*

$$\langle \mathbb{B}_1 \cup \mathbb{B}_2 \rangle = B_1 + \mathcal{L}(W_1 \cup W_2 \cup \{\overrightarrow{B_1B_2}\}) = B_1 + (W_1 + W_2 + \mathcal{L}(\{\overrightarrow{B_1B_2}\})).$$

Za afini potprostor $\langle \mathbb{B}_1 \cup \mathbb{B}_2 \rangle$ koristimo i oznaku $\mathbb{B}_1 + \mathbb{B}_2$.

Sada iz dokaza prethodne teoreme i Grasmanove [14] formule,

$$\dim(V+W) = \dim V + \dim W - \dim(V \cap W), \tag{48}$$

dobijamo,

Posledica. *Neka su date dve ravni $\mathbb{B}_i = B_i + W_i$, $i = 1, 2$ afinog prostora $\mathbb{A} = A + V$. Tada, ako je*

(i1) $\mathbb{B}_1 \cap \mathbb{B}_2 = \emptyset$, onda je $\dim(\mathbb{B}_1 + \mathbb{B}_2) = \dim \mathbb{B}_1 + \dim \mathbb{B}_2 - \dim(\mathbb{B}_1 \cap \mathbb{B}_2) + 1$.

(i2) $\mathbb{B}_1 \cap \mathbb{B}_2 \neq \emptyset$, onda je $\dim(\mathbb{B}_1 + \mathbb{B}_2) = \dim \mathbb{B}_1 + \dim \mathbb{B}_2 - \dim(\mathbb{B}_1 \cap \mathbb{B}_2)$.

1.25. Afina baza. Nastavljajući u istom duhu, vidimo da se i u afinim prostorima može definisati pojam afine baze. Zaista, ako je $\mathbb{A} = A_0 + V^m$ afini prostor nad poljem $\mathbb{F}$ i ako je $e = (e_1, \dots, e_m)$ neka baza vektorskog prostora V^m onda su dobro definisane tačke $A_i = A_0 + e_i$, $i = 1, \dots, m$, odakle vidimo da je i $e_i = \overrightarrow{A_0A_i}$, $i = 1, \dots, m$. Prema tome, svaku tačku afinog prostora možemo zapisati kao sumu tačke A_0 i linearne kombinacije vektora $\overrightarrow{A_0A_i}$, $i = 1, \dots, m$, što opravdava sledeću definiciju.

Definicija. Neka je $\mathbb{A} = A_0 + V^m$ $m-$dimenzioni afini prostor, afina baza ili afini reper u $\mathbb{A}$ je svaki skup od $m+1$ tačke $\{A_i\}_{0 \le i \le m}$, takve da je $e = (e_i = \overrightarrow{A_0A_i})_{1 \le i \le m}$ baza pridruženog vektorskog prostora V^m. Tada je (A_0, e) afini koordinatni sistem u smislu **1.21** Definicija.

Slika 16. Afini reperi

Primedba. Naravno, na analogan način može se definisati i pojam afine nezavisnosti. Konačan skup $\mathcal{B} = \{B_0, B_1, \dots, B_k\}$, je *afino nezavisan* ako je skup vektora $\{\overrightarrow{B_0B_j}, j = 1, \dots, k\}$ linearno nezavisan. Lako se proverava da izbor tačke B_0 nije bitan u ovoj definiciji.

(i1) Svaki podskup afino nezavisnog skupa i sam je afino nezavisan.

(i2) Ako je $|\mathcal{B}| = k$, onda je $\dim\langle\mathcal{B}\rangle \le k - 1$.

(i3) Svaki afino nezavisni skup $\mathcal{B} \subseteq \mathbb{A}$ može se dopuniti do afine baze od $\mathbb{A}$.

(i4) Svaki afini $k-$dimenzioni potprostor W ima afinu bazu koja se sastoji od $k+1$ afino nezavisne tačke. Svaki afino nezavisni podskup, $\mathcal{B} \subseteq W$, koji ima $k+1$ tačku je afina baza od W.

[14] Grassmann, Hermann Günther, 1809 – 1877, nemački matematičar.

1.26. Afini potprostori u koordinatama. Uvođenjem koordinatizacije, problem (operativnog) zapisivanja afinih potprostora sveden je na to opisivanje u afinom prostoru $\mathbb{F}^m_{aff}$.

Dakle, neka je dat afini reper $O\,e_1e_2\ldots e_m$, afinog prostora $\mathbb{A}^m$, onda su uz ovaj reper prirodno vezane 1−ravni, tj. ravni oblika $\langle e_i\rangle = O + \mathcal{L}(\{e_i\})$, $i = 1, 2, \ldots, m$ koje se tradicionalno nazivaju koordinatne ose , koordinatne 2−ravni, ... i koordinatne $(m-1)$−ravni $\mathcal{H}_i = O + \mathcal{L}(\{e_1, e_2, \ldots, e_{i-1}, e_{i+1}, \ldots, e_m\})$, $i = 1, 2, \ldots, m$, koje nazivamo koordinatnim hiperravnima.

Budući da se proizvoljna k−ravan, $\mathbb{B}^k$, afinog prostora $\mathbb{A}^m$ može predstaviti u obliku $B+W^k$ vidimo da se proizvoljna tačka $X(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathbb{B}^k$ može zapisati na sledeći način:

$$(49)\qquad X = B + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \cdots + \lambda_k f_k, \qquad \text{gde je } f = (f_1, \ldots, f_k) \text{ baza od } W^k.$$

Vektorsku jednačinu (49) možemo prelaskom na koordinate zapisati u skalarnom obliku. Neka je dato $X(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, $B(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ i $f_i = (f_{i1}, f_{i2}, \ldots, f_{im})$, $(i = 1, 2, \ldots, k)$ onda je

$$(50)\qquad x_j = b_j + \lambda_1 f_{1j} + \lambda_2 f_{2j} + \cdots + \lambda_k f_{kj}, \qquad j = 1, 2, \ldots, m.$$

Primetimo da u (49) i (50) svakoj tački X odgovaraju jedinstveno određeni skalari $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, tako da kada $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, shvatimo kao parametre zaključujemo da formule (49) i (50) predstavljaju jednačinu ravni $\mathbb{B}^k$, koju nazivamo parametarskom jednačinom ravni. Primetimo da parametre $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, nije uvek lako eliminisati (npr. kada je $m \geq 4$ i $k \geq 2$.) Jasno, kada je $k = 1$, tj. u slučaju prave eliminacija je ista kao u prostoru $\mathbb{E}^3$, tako da u ovom slučaju nalazimo kanonsku jednačinu prave

$$(51)\qquad \frac{x_1 - b_1}{f_{11}} = \frac{x_2 - b_2}{f_{12}} = \cdots = \frac{x_m - b_m}{f_{1m}}$$

Kada je $k > 1$ onda je problem eliminacije parametara $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ u uskoj vezi sa sistemima linearnih jednačina.

Teorema. *$\mathbb{B} \subseteq \mathbb{A}^m$ je potprostor afinog prostora $\mathbb{A}^m$ ako i samo ako je $\mathbb{B}$ skup svih rešenja nekog linearnog sistema jednačina nad poljem $\mathbb{F}$. Ako je $\dim \mathbb{B} = k$ onda je $\mathbb{B}$ rešenje nekog linearnog sistema koji se sastoji od $m - k$ jednačina.*

1.27. Afina preslikavanja. Preslikavanja koja poštuju strukturu afinog prostora, a zovu se afina preslikavanja. Neka su $(\mathbb{A}, V, \Theta)$ i $(\mathbb{B}, W, \Phi)$ afini prostori *nad istim poljem* i $f : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{B}$ preslikavanje. Neka je A iz $\mathbb{A}$ proizvoljna tačka. Preslikavanju f jednoznačno pridružujemo preslikavanje $\overrightarrow{f_A} : V \longrightarrow W$ definisano sa

$$\overrightarrow{f_A}(v) = \overrightarrow{f_A}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{f(A)f(B)} = \overrightarrow{f(A)f(B)},$$

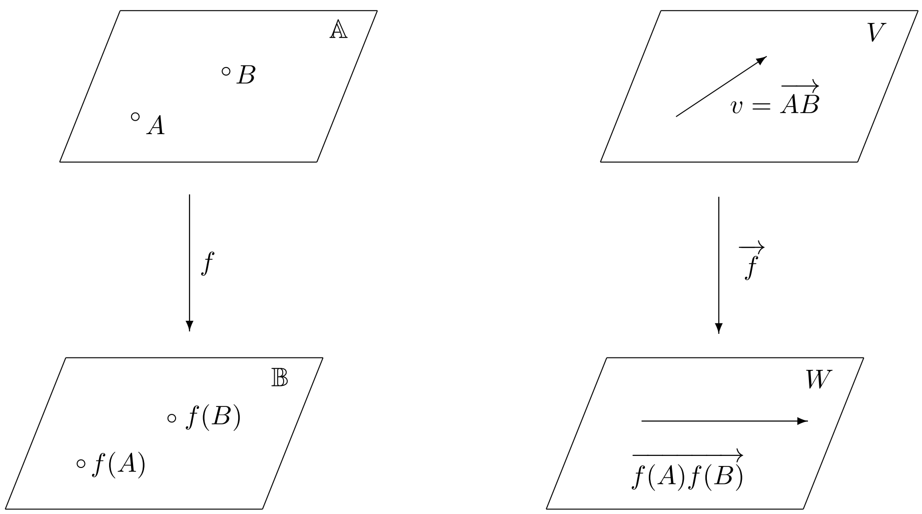
gde je $v = \Theta(A, B)$.

Direktno se proverava da je preslikavanje $\overrightarrow{f_A}$ linearno za svako $A \in \mathbb{A}$, ako je linearno bar za jednu tačku $A \in \mathbb{A}$. Tada preslikavanje $\overrightarrow{f_A}$ ne zavisi od izbora tačke A, te uvodimo oznaku $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{f_A}$. Preciznije imamo sledeću definiciju.

Definicija. Neka su $(\mathbb{A}, V, \Theta)$ i $(\mathbb{B}, W, \Phi)$ afini prostori *nad istim poljem* i $f : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{B}$ preslikavanje. Kažemo da je preslikavanje f **afino preslikavanje** ako je $\overrightarrow{f} : V \longrightarrow W$, *linearno preslikavanje.* Tada za svake dve tačke $A, B \in \mathbb{A}$ važi:

$$\overrightarrow{f}(\Theta(A,B)) = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{f(A)f(B)} = \overrightarrow{f(A)f(B)} = \Phi(f(A), f(B)).$$

Pri tome se $\overrightarrow{f}$ naziva **homogeni** (ili **linearni**) deo preslikavanja f. Skup svih afinih preslikavanja sa $\mathbb{A}$ u $\mathbb{B}$ označavamo sa $\mathsf{Aff}(\mathbb{A}, \mathbb{B})$. Kažemo da je f **izomorfizam afinih prostora** ako je f bijekcija, a ako je još $\mathbb{A} = \mathbb{B}$, f nazivamo **automorfizmom**.



Slika 17. Afino preslikavanje

Uslov da je preslikavanje f afino preslikavanje izražava se i pomoću komutativnosti dijagrama sa Slike 18.

Može se pokazati da su ta preslikavanja upravo afina preslikavanja. Bez obzira što ova karakterizacija jednostavno i elegantno opisuje afina preslikavanja, dokaz nije očigledan i zahteva detaljnu i finu analizu.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{A} \arrow[r, "\Theta^{-1}(A,\cdot)"] \arrow[d, "f"'] & V \arrow[d, "\overrightarrow{f}"] \\
\mathbb{B} \arrow[r, "\Theta^{-1}(f(X),\cdot)"] & W
\end{tikzcd}$$

Slika 18. Dijagram

Kako je $B = A + v$ ekvivalentno sa $\overrightarrow{AB} = v$, imamo $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{f}(v) = \overrightarrow{f(A)f(B)}$, odakle je

$$f(B) = f(A) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{AB}) = f(A) + \overrightarrow{f}(v), \tag{52}$$

što se može intuitivno tumačiti da se afino preslikavanje sastoji iz paralelnog premeštanja i jednog linearnog preslikavanja.

Relacijom (52) uspostavljena je veza između afinog preslikavanja f i njegovog linearnog dela $\overrightarrow{f}$. Iz ove veze lako sledi da afina preslikavanja preslikavaju afine potprostore u afine potprostore. Zaista, ako je $\mathbb{A}_1 = A_1 + V_1$ afina ravan afinog prostora $\mathbb{A}$, onda imamo:

$$f(A_1 + V_1) = f(A_1) + \overrightarrow{f}(V_1), \tag{53}$$

kako je $f(A_1) \in \mathbb{B}$ tačka i kako je $\overrightarrow{f}(V_1)$ vektorski potprostor od W (jer je $\overrightarrow{f}$ linearno preslikavanje) tvrđenje sledi.

Slično se vidi da ako je $f \in \mathsf{Aff}(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ i $\mathbb{B}_1$ potprostor od $\mathbb{B}$ onda je i $f^{-1}(\mathbb{B}_1)$ potprostor prostora $\mathbb{A}$ (ako je neprazan).

Primetimo da dimenzija ravni $\mathbb{B}_1 = f(A_1) + \overrightarrow{f}(V_1)$ nije veća od dimenzije polazne ravni $\mathbb{A}_1$.

1.28. Primeri afinih preslikavanja. Navedimo sada najjednostavnija afina preslikavanja koja ilustruju koliko je bogat ovaj skup.

(1) Za $\mathbb{A} = \mathbb{B} = \mathbb{R}$, *linearno preslikavanje* $f(x) = a\,x + b$, $a, b \in \mathbb{R}$ je afino preslikavanje. Homogeni deo, ovog preslikavanja je $\overrightarrow{f}(x) = a\,x$.

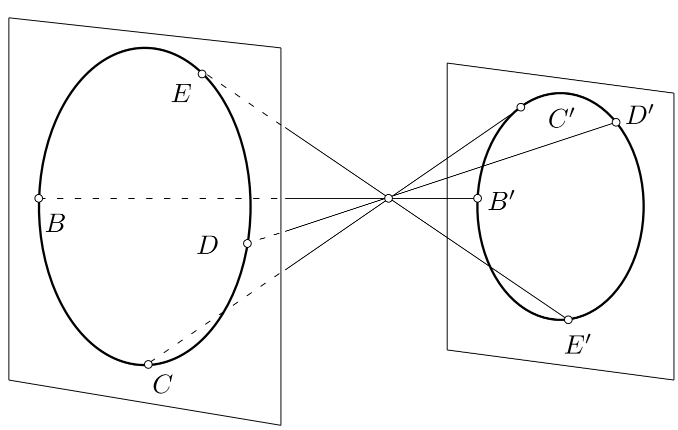
(2) Ako su $\mathbb{A}$ i $\mathbb{B}$ afini prostori, *konstantno preslikavanje* $f(A) = B, \forall A \in \mathbb{A}$, je afino preslikavanje čiji je homogeni deo $\overrightarrow{f} = 0_V$.

(3) Ako je $f = id_{\mathbb{A}}$ (*identičko preslikavanje*), f je afino, i $\overrightarrow{f} = id_V$.

(4) Neka je A tačka iz $\mathbb{A}$ i $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Sa $H_{A,\lambda}$ označava se homotetija s centrom A i koeficijentom λ

$$H_{A,\lambda}(X) = X', \qquad \text{gde je} \qquad AX' = \lambda\, AX.$$

Preslikavanje, $H_{A,\lambda}$, je afino i njegov homogeni deo je $\overrightarrow{H_{A,\lambda}} = \lambda\, \mathsf{id}_V$.



Slika 19. Homotetija

1.29. Svojstva afinih preslikavanja. S obzirom na vezu sa teorijom vektorskih prostora mnoge od ovih osobina su posledice onoga što važi za vektorske prostore. Primetimo da iz definicije afinog prostora odmah sledi da je svako afino preslikavanje, $f \in \mathsf{Aff}(\mathbb{A},\mathbb{B})$, jedinstveno određeno slikom jedne tačke i linearnim preslikavanjem $\overrightarrow{f} : V \longrightarrow W$. Ali važi i neka vrsta obrata ovog tvrđenja koja predstavlja jednu od osnovnih teorema o afinim prostorima.

Teorema. *Neka su $\mathbb{A}$ i $\mathbb{B}$ dva afina prostora nad istim poljem, a $A \in \mathbb{A}$ i $B \in \mathbb{B}$ dve tačke i neka je dato linearno preslikavanje $\overrightarrow{f} : V \longrightarrow W$. Tada je jedinstveno određeno afino preslikavanje $f \in \mathsf{Aff}(\mathbb{A},\mathbb{B})$ sa homogenim delom $\overrightarrow{f}$ i takvo da je $B = f(A)$.*

Posledica 1. *Neka je skup tačaka $\{A_0, A_1, \ldots, A_m\}$ baza afinog prostora $\mathbb{A}$ i neka su $B_0, B_1, \ldots, B_m$ proizvoljne tačke afinog prostora $\mathbb{B}$. Onda postoji jedinstveno afino preslikavanje $f \in \mathsf{Aff}(\mathbb{A},\mathbb{B})$ takvo da je $f(A_i) = B_i$, za $i = 0, 1, \ldots, m$.*

Posledica 2. *Neka je $\mathbb{A}^m$ afini $m-$dimenzioni prostor nad $\mathbb{F}$ i neka je $O\, e_1 \ldots e_m$ koordinatni sistem. Tada je koordinatno preslikavanje, $\kappa : \mathbb{A}^m \longrightarrow \mathbb{F}^m_{aff}$, izomorfizam afinih prostora.*

Primetimo da Posledica 2 tvrdi da su svi $m-$dimenzioni afini prostori nad poljem $\mathbb{F}$ izomorfni afinom prostoru $\mathbb{F}^m_{aff}$, odakle odmah sledi da su dva afina prostora $\mathbb{A}$ i $\mathbb{B}$ nad istim poljem izomorfni ako i samo ako imaju istu dimenziju.

Sledeća važna osobina afinih preslikavanja je da je kompozicija afinih preslikavanja afino preslikavanje.

Propozicija. *Ako je $f \in \mathsf{Aff}(\mathbb{A},\mathbb{B})$ i $g \in \mathsf{Aff}(\mathbb{B},\mathbb{D})$ onda je njihova kompozicija $g \circ f \in \mathsf{Aff}(\mathbb{A},\mathbb{D})$ afino preslikavanje sa homogenim delom $\overrightarrow{g \circ f} = \overrightarrow{g} \circ \overrightarrow{f}$.*

1.30. Afine transformacije. Budući da se afina preslikavanja "dobro" ponašaju pri kompoziciji funkcija, afina preslikavanja afinog prostora $\mathbb{A}$ na samog sebe od posebnog su interesa.

Definicija. Za $v \in V$ definišemo translaciju, t_v, afinog prostora $\mathbb{A}$ za vektor v, formulom:

$$t_v(A) = A + v.$$

Skup svih translacija afinog prostora $\mathbb{A}$ obeleževamo sa $\mathcal{T}(\mathbb{A})$.

Afina transformacija, f, afinog prostora $\mathbb{A}$ zove se centroafina transformacija ako postoji fiksna tačka preslikavanja f, tj. tačka $O \in \mathbb{A}$ takva da je $f(O) = O$. Za skup svih centroafinih preslikavanja sa fiksnom tačkom O koristimo oznaku $\mathcal{C}^{aff}_O(\mathbb{A})$.

Primetimo da ako je $v \neq 0$ onda translacija t_v nema fiksnih tačaka. Homogeni deo translacije $\overrightarrow{t_v}$ je identičko preslikavanje $\overrightarrow{\mathsf{id}}_V$, jer za proizvoljne tačke $A, B \in \mathbb{A}$ iz, $t_v(A) = A + v$ i $t_v(B) = B + v$, sledi da je: $\overrightarrow{t_v}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{t_v(A)t_v(B)} = \overrightarrow{AB}$.

Ako je $\{A_0, A_1, \ldots, A_m\}$ neka afina baza u $\mathbb{A}$ onda je $\{e_i = \overrightarrow{A_0A_i},\ i = 1, \ldots, m\}$ baza od V, pa iz upravo dokazane formule sledi da je $\overrightarrow{t_v}(e_i) = e_i$, $i = 1, \ldots, m$. Prema tome, $\overrightarrow{t_v}$ je identičko preslikavanje na V.

Osnovna svojsta translacija i centroafinih transformacija sadržana su u sledećoj teoremi.

Teorema 1. *Neka je $\mathbb{A} = (\mathbb{A}, V, \Theta)$ afini prostor.*

(i1) *Svaka afina transformacija prostora $\mathbb{A}$ čiji homogeni deo je identiteta ($\overrightarrow{\mathsf{id}}_V$), je translacija.*

(i2) *Skup svih translacija prostora $\mathbb{A}$, $\mathcal{T}(\mathbb{A})$, s obzirom na kompoziciju je grupa koja je izomorfna aditivnoj grupi vektorskog prostora V.*

(i3) *Za svaku afinu transformaciju f prostora $\mathbb{A}$ postoje jedinstvene $t_v \in \mathcal{T}(\mathbb{A})$ i $g \in \mathcal{C}_O^{aff}(\mathbb{A})$ takve da je $f = t_v \circ g$, za $O \in \mathbb{A}$.*

(i4) *Za svaku afinu transformaciju f prostora $\mathbb{A}$ postoje jedinstvene $t_v \in \mathcal{T}(\mathbb{A})$ i $g \in \mathcal{C}_O^{aff}(\mathbb{A})$ takve da je $f = g \circ t_v$, za $O \in f(\mathbb{A})$.*

Budući da skup svih centroafinih transformacija nije grupa, jer centroafine transformacije ne moraju imati inverz, skup $\mathsf{Aff}(\mathbb{A})$ nije grupa. Kako je skup translacija $\mathcal{T}(\mathbb{A}) \subseteq \mathsf{Aff}(\mathbb{A})$ grupa, postavlja se prirodno pitanje pronalaženja najveće grupe u $\mathsf{Aff}(\mathbb{A})$. Lako je videti da samo one afine transformacije koje su i bijekcije imaju inverze. Dakle, samo automorfizmi afinog prostora imaju inverze, tj. važi,

Teorema 2. *Skup svih automorfizama afinog prostora $\mathbb{A}$ je najveći podskup u $\mathsf{Aff}(\mathbb{A})$, koji je s obzirom na kompoziciju preslikavanja grupa.*

Grupa svih automorfizama prostora $\mathbb{A}$ zove se **afina grupa** prostora $\mathbb{A}$ i označava se sa $\mathsf{GAff}(\mathbb{A})$.

1.31. Afina preslikavanja u koordinatama. Znamo da je proizvoljno afino preslikavanje, $f \in \mathsf{Aff}(\mathbb{A}, \mathbb{B})$, potpuno određeno slikom jedne svoje tačke i homogenim delom $\overrightarrow{f}$. S druge strane homogeni deo $\overrightarrow{f}$, je linearno preslikavanje, koje je potpuno određeno svojim dejstvom na nekoj bazi.

Dakle, neka je $f \in \mathsf{Aff}(\mathbb{A}, \mathbb{B})$, a $O\, a_1 a_2 \ldots a_m$, $P\, b_1 b_2 \ldots b_n$ afini koordinatni sistemi redom u $\mathbb{A}$ i $\mathbb{B}$. Označimo sa $M(\overrightarrow{f})$ matricu preslikavanja $\overrightarrow{f}$ u paru baza $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ i $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$, tj. $M(\overrightarrow{f}) = [\alpha_{ij}]$ gde je $\overrightarrow{f}(a_i) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji}\, b_j$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Na osnovu (52), za proizvoljnu tačku $X(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ iz $\mathbb{A}$ važi

$$f(X) = f(O) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{OX}) = f(O) + \overrightarrow{f}\Big(\sum_{i=1}^{m} x_i\, a_i\Big).$$

Ako je $f(O) = P + p_1\, b_1 + p_2\, b_2 + \ldots + p_n\, b_n$ i $f(X) = (x_1', x_2', \ldots, x_n')$, onda je $x_i' = p_i + \sum_j \alpha_{ij}\, x_j$, za $1 \leq i \leq n$. Ovo možemo zapisati i u matričnom obliku:

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \qquad \text{ili}$$

(54)
$$\begin{bmatrix} 1 \\ x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ p_1 & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1m} \\ p_2 & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ p_n & \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}.$$

Iz formule (54) vidimo da je dimenzija prostora $\mathsf{Aff}(\mathbb{A},\mathbb{B})$ jednaka broju slobodnih parametara koji se pojavljuju u (54), a to su koordinate slike tačke O i elementi matrice $M(\overrightarrow{f})$. Dakle, važi sledeća formula

$$\dim \mathsf{Aff}(\mathbb{A},\mathbb{B}) = n + n\,m = \dim \mathbb{B}\ (\dim \mathbb{A} + 1).$$

Podsetimo se da ako su data afina preslikavanja $f \in \mathsf{Aff}(\mathbb{A},\mathbb{B})$ i $g \in \mathsf{Aff}(\mathbb{B},\mathbb{D})$ onda je $g \circ f \in \mathsf{Aff}(\mathbb{A},\mathbb{D})$ čiji je homogeni deo $g \circ f$ jednak $\overrightarrow{g} \circ \overrightarrow{f}$. Prema tome, ako je matrični zapis afinog preslikavanja f dat u paru koordinatnih sistema (O,a) u $\mathbb{A}$ i (P,b) u $\mathbb{B}$, a afinog preslikavanja g dat u paru koordinatnih sistema (P,b) u $\mathbb{B}$ i (Q,d) u $\mathbb{D}$, onda dobijamo matrični zapis afinog preslikavanja $g \circ f$ u paru koordinatnih sistema (O,a) u $\mathbb{A}$ i (Q,d) u $\mathbb{D}$. Pri tome je matrica preslikavanja $\overrightarrow{g \circ f}$ proizvod matrica homogenih preslikavanja g i f.

Euklidska geometrija

1.32. Skalarni proizvod i njegove osobine. Sledećom definicijom uvodimo rastojanje (metriku) na nekom skupu $\mathcal{M}$.

Definicija. Preslikavanje, $d : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$, naziva se rastojanje (metrika) ako su za proizvoljne tačke $A, B, C \in \mathcal{M}$ ispunjeni uslovi:

(i1) $\mathsf{d}(A,B) = \mathsf{d}(B,A)$ (simetričnost),

(i2) $\mathsf{d}(A,C) \le \mathsf{d}(A,B) + \mathsf{d}(B,C)$ (nejednakost trougla),

(i3) $\mathsf{d}(A,B) = 0$ ako i samo ako $A = B$.

Primer. Standardno rastojanje između tačaka u ravni je primer metrike.

Neka je V realan vektorski prostor takav da postoji funkcija, $\varphi : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$, za koju su ispunjeni sledeći uslovi za $x, y, z \in V$ i $\alpha \in \mathbb{R}$,

(E1) $\varphi(x+y, z) = \varphi(x, z) + \varphi(y, z)$,

(E2) $\varphi(\alpha\, x, z) = \alpha\, \varphi(x, z)$,

(E3) $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$.

(E4) $\varphi(x, x) \geq 0$ za sve $x \in V$,

(E5) $\varphi(x, x) = 0$ ako i samo je $x = 0$.

Tada kažemo da je (V, φ) euklidski vektorski prostor ili samo euklidski prostor. Preslikavanje φ naziva se skalarni proizvod. Za euklidske vektorske prostore koristimo oznaku V_e (analogno kao i u dimenzijama 1, 2 i 3), dok se za skalarni proizvod koristi oznaka $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (ili $(\cdot|\cdot)$), tj. $\varphi(x, y) = \langle x, y \rangle$.

Preslikavanje φ koje zadovoljava uslove (E1) – (E3) naziva se simetrično bilinearno preslikavanje, uslov (E4) znači da je ono pozitivno definitno , dok je nedegenerisanost skalarnog proizvoda (zbog (E4)) izražena uslovom (E5).

Po analogiji sa V_e^3, uvodi se norma, tj. dužina vektora $x \in V_e$ formulom:

$$\|x\| = \sqrt{\varphi(x, x)} = \sqrt{\langle x, x \rangle}\,. \tag{55}$$

Metriku uvodimo u euklidski prostor, formulom $\mathsf{d}(x, y) = \|x - y\|$, i posvetimo nekoliko reči važnim objektima i činjenicama koje važe u euklidskim vektorskim prostorima.

U tačkama **1.5** i **1.6** pokazano je da u euklidskom vektorskom prostoru uvek se mogu uvesti pojmovi:

(i1) ortogonalnost vektora i skupova,

(i2) ortogonalni sistem vektora i ortonormirana baza,

(i3) nejednakost Koši – Švarca – Bunjakovskog: $|\langle x, y \rangle \leq \|x\| \cdot \|y\|$, za sve $x, y \in V_e$, koja omogućuje definiciju ugla $\angle(x, y)$ između dva ne nula vektora $x, y \in V_e$, formulom:
$$\cos \angle(x, y) = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}$$

(i4) nejednakost trougla: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $x, y \in V_e$, koja pokazuje da je sa $\mathsf{d}(x, y) = \|x - y\|$ određena metrika na V_e.

(i5) Gram – Šmitova ortogonalizacija iz koje sledi da svaki konačnodimenzioni euklidski vektorski prostor ima ortonormiranu bazu,

(i6) za svaki potprostor W euklidskog prostora V postoji jedinstveni ortogonalni komplement , tj. prostor $W^{\perp}$ takav da je $W \oplus W^{\perp} = V$.

1.33. Izometrije. Posvetimo se sada izometrijama euklidskih vektorskih prostora (ortogonalnim transformacijama), tj. preslikavanjima koja čuvaju skalarni proizvod.

Definicija. Neka su V_e i V_e' euklidski vektorski prostori iste dimenzije. Linearno preslikavanje $A : V_e \longrightarrow V_e'$ je ortogonalno preslikavanje ili izometrija ako važi:

$$\langle A(x), A(y)\rangle = \langle x, y\rangle, \tag{56}$$

za sve vektore $x, y \in V_e$.

Ako su ovi uslovi ispunjeni, A je bijekcija. Uslov da je preslikavanje A linearno nije neophodan jer sledi iz preostalih uslova. Skup svih izometrija iz V_e u V_e' označava se sa $\mathcal{O}(V_e, V_e')$, odnosno sa $\mathcal{O}(V_e)$ za $V_e = V_e'$.

Ako posmatramo euklidski vektorski prostor V_e kao metrički prostor (V_e, d), u odnosu na metriku $\mathsf{d}(x, y) = \|x - y\|$, tada za ortogonalno preslikavanje, $A : V_e \longrightarrow V_e$, očigledno važi da je, $\mathsf{d}(x, y) = \mathsf{d}(Ax, Ay)$. Dakle, svaka ortogonalna transformacija čuva rastojanje d i kolateralno objašnjava upotrebu termina izometrija za ortogonalno preslikavanje.

Kako su svi euklidski vektorski prostori (nad $\mathbb{R}$) dimenzije m izometrični sa $\mathbb{R}^m$, od posebnog su interesa izometrički endomorfizmi euklidskog afinog prostora V_e^m, koje ćemo kraće nazivati izometrijama euklidskog vektorskog prostora V_e^m.

Karakterizaciju izometrija skupa V_e^m daje sledeća.

Teorema 1. *Linearno preslikavanje A je izometrija m – dimenzionog euklidskog vektorskog prostora, V_e^m, ako i samo ako je $\|A(x)\| = \|x\|$ za svaki vektor $x \in V$. Matrica $\mathcal{A}$, operatora A u proizvoljnoj ortonormiranoj bazi zadovoljava uslov $\mathcal{A}\mathcal{A}^\tau = \mathcal{A}^\tau\mathcal{A} = \mathcal{I}_m$.*

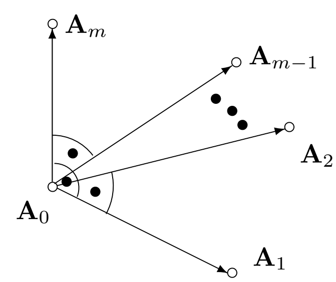
Interesantno je da je linearnost preslikavanja A posledica čuvanja rastojanja.

Teorema 2. *Skup svih izometrija, $\mathcal{O}(V_e^m)$, euklidskog vektorskog prostora V_e^m je grupa s obzirom na kompoziciju kao grupovnu operaciju.*

1.34. Euklidski afini prostori. Afini prostor $(\mathbb{A}, V, \Theta)$, naziva se euklidski afini prostor ako je vektorski prostor V snabdeven strukturom skalarnog proizvoda, tj. ako je V euklidski vektorski prostor. Afini reper $\{A_i\}_{0\le i\le m}$ u prostoru $\mathbb{A}$ je ortonormiran ako vektori $(e_i = A_0A_i)_{1\le i\le m}$ čine ortonormiranu bazu vektorskog prostora V (Slika 20).

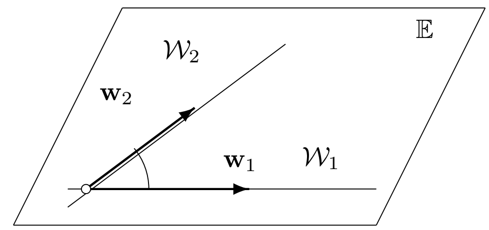
Standardni euklidski afini prostor dimenzije m je afini prostor, $\mathbb{R}^m_{aff}$, tj. $\mathbb{A} = \mathbb{R}^m$, a pridruženi vektorski prostor V je standardni vektorski prostor $\mathbb{R}^m$ sa standardnim skalarnim proizvodom datim u (p1). I ovde koristimo oznaku V_e da bismo naznačili da je pridruženi vektorski prostor V euklidski. Sada na afinom prostoru definišemo metriku formulom:

$$\mathsf{d}(A, B) = \|\Theta(A, B)\| = \|\overrightarrow{AB}\|. \tag{57}$$



Slika 20. Ortonormirani reper

Dakle, metrika je indukovana skalarnim proizvodom na pridruženom euklidskom prostoru V_e. Euklidske afine prostore obeležavamo slovom $\mathbb{E}$, pri tome podrazumevamo da je $\mathbb{E} = (\mathbb{E}, V_e, \Theta)$.



Slika 21. Ugao između potprostora

Već smo videli da se korišćenjem skalarnog proizvoda uvodi dužina vektora. I pojam ugla je vrlo važan u zasnivanju geometrije. Imajući u vidu geometriju ravni i prostora, definišimo sada ugao između jednodimenzionih potprostora W_1 i W_2.

Definicija. Neka je V_e euklidski vektorski prostor, W_1 i W_2 njegovi jednodimenzioni potprostori. Tada broj

$$\frac{|\langle w_1, w_2 \rangle|}{\|w_1\| \cdot \|w_2\|}$$

zavisi samo od izbora potprostora W_1 i W_2 i ne zavisi od izbora $w_1 \in W_1 \setminus \{0\}$ i $w_2 \in W_2 \setminus \{0\}$. Ugao $\alpha \in [\,0, \pi/2\,]$, određen formulom

$$\cos\alpha = \frac{|\langle w_1, w_2 \rangle|}{\|w_1\| \cdot \|w_2\|}$$

naziva se (neorijentisan) ugao između W_1 i W_2 i označava sa $\angle(w_1, w_2)$, tj.,

$$\cos\angle(w_1, w_2) = \frac{|\langle w_1, w_2 \rangle|}{\|w_1\| \cdot \|w_2\|}. \tag{58}$$

Korektnost ove definicije sledi iz Koši – Švarcove nejednakosti.

1.35. Grupa izometrija afinog euklidskog prostora. Neka je $\mathbb{E}^m = (\mathbb{E}^m, V^m, \Theta)$ $m-$dimenzioni euklidski afini prostor, tada je pridruženi vektorski prostor V^m snabdeven skalarnim proizvodom $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Time smo definisali i rastojanje na $\mathbb{E}^m$ formulom $\mathsf{d}(x, y) = \|\Theta(x, y)\| = \|\overrightarrow{xy}\|$ preko skalarnog proizvoda, tj. rastojanja na V^m, datog sa $\mathsf{d}(x, y) = \|\overrightarrow{xy}\| = \|x - y\|$.

U teoriji euklidskih afinih prostora veoma važnu ulogu igraju izometrije(one su prirodni morfizmi), koje uvodimo u sledećom definicijom.

Definicija. Izometrija euklidskih afinih prostora $\mathbb{E}$ i $\mathbb{E}'$ je afina bijekcija $f : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}'$ koja čuva rastojanje između tačaka, tj. važi

$$\mathsf{d}(f(A), f(B)) = \mathsf{d}(A, B), \qquad \forall\, A, B \in \mathbb{E}. \tag{59}$$

Skup svih izometrija sa $\mathbb{E}$ u $\mathbb{E}'$ obeležavamo sa $\mathsf{Is}\,(\mathbb{E}, \mathbb{E}')$, a ako je $\mathbb{E}' = \mathbb{E}$ onda sa $\mathsf{Is}\,(\mathbb{E})$. Može se pokazati da pretpostavka o afinosti preslikavanja f može da se izostavi, odnosno da je to posledica ostalih uslova.

Slično kao za euklidske vektorske prostore, svaki euklidski afini $m-$dimenzioni prostor izometričan je standardnom prostoru $\mathbb{R}_{aff}$. Zbog ove činjenice od posebnog su interesa izometričke afine transformacije, koje kraće nazivamo izometrijama euklidskog afinog prostora $\mathbb{E}$.

Pokažimo sada kako su povezane izometrije euklidskog vektorskog prostora i euklidskog afinog prostora.

Teorema 1. *Neka je $\mathbb{E}^m = (\mathbb{E}^m, V_e, \Theta)$ euklidski afini prostor i neka je $f : \mathbb{E}^m \longrightarrow \mathbb{E}^m$ afino preslikavanje zadato formulom $f(B) = f(A) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{AB})$, gde je $\overrightarrow{f} : V_e \longrightarrow V_e$ pridruženo linearno preslikavanje. Preslikavanje f je izometrija ako i samo ako je $\overrightarrow{f}$ ortogonalna transformacija.*

Upravo dokazana teorema omogućuje nam da izučavanje izometrija afinog euklidskog prostora $\mathbb{E}^m$ svedemo na izučavanje ortogonalnih transformacija euklidskog vektorskog prostora V_e^m.

Podsetimo se sada nekih rezultata tačaka posvećenih afinim preslikavanjima, koje možemo primeniti i u euklidskim afinim prostorima. Tako npr. preslikavanje $\overrightarrow{f}$ ne zavisi od izbora tačke A, kao i to da je f u potpunosti određeno slikom jedne tačke i homogenim delom afinog preslikavanja $\overrightarrow{f}$. Podsetimo se da proizvoljno afino preslikavanje, f, možemo na jedinstven način zapisati kao kompoziciju jedne translacije, τ_a, i jednog centroafinog preslikavanja g (vidi **1.30** Teorema (i3), (i4)), tj. $f = \tau_a \circ g$. Kako je homogeni deo translacije identičko preslikavanje zbog **1.29** Propozicija imamo $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{\tau_a} \circ \overrightarrow{g} = \overrightarrow{g}$. Prema tome afino preslikavanje, f, možemo identifikovati sa uređenom trojkom $f = (O, a, \overrightarrow{g})$, gde je O neka fiksna tačka centroafinog preslikavanja g, $a = \overrightarrow{Of(O)}$ vektor translacije i $\overrightarrow{g}$ je homogeni deo afinog preslikavanja f.

Dakle, ako je f izometrija onda je i homogeni deo centroafinog preslikavanja g isto izometrija, tj. ortogonalni operator A. Prema tome mi ćemo identifikovati izometriju, f, sa uređenom trojkom $f = (O, a, A)$.

Budući da ortogonalni operator $\overrightarrow{f}$ ne zavisi od izabrane tačke O možemo definisati determinantu, trag, karakteristični polinom, ..., izometrije afinog euklidskog prostora, f, kao determinantu, trag, karakteristični polinom, ..., pridruženog ortogonalnog operatora $\overrightarrow{f}$.

Kako za ortogonalni operator važi da je $\det A \in \{-1, 1\}$, od posebnog su interesa one izometrije koje čuvaju orijentaciju, odnosno čija je determinanta jednaka 1. Izometrije sa pomenutom osobinom zovu se kretanja afinog euklidskog prostora. Važnost izometrija i kretanja razotkriva sledeća teorema.

Teorema 2. *Skup svih izometrija, $\mathsf{Is}(\mathbb{E}^m)$, afinog euklidskog prostora $\mathbb{E}^m$ s obzirom na kompoziciju je grupa. Sva kretanja afinog euklidskog prostora obrazuju podgrupu grupe $\mathsf{Is}(\mathbb{E}^m)$, koju nazivamo grupom kretanja prostora $\mathbb{E}^m$ i za koju koristimo oznaku $\mathsf{Is}_0(\mathbb{E}^m)$.*

1.36. Translacije i rotacije. U ovom odeljku bavimo se osobinama dva najjednostavnija tipa izometrija euklidskog afinog prostora.

Podsetimo se, za dati vektor $a \in \mathbb{E}^m$ definisana je translacija, $\tau_a : \mathbb{E}^m \longrightarrow \mathbb{E}^m$, na sledeći način: za fiksnu tačku $O \in \mathbb{E}^m$ i proizvoljnu tačku $X \in \mathbb{E}^m$ stavimo:

$$\tau_a(X) = X', \qquad \text{gde je} \qquad \overrightarrow{OX'} = a + \overrightarrow{OX}. \tag{60}$$

Preslikavanje τ_a nazivamo translacijom prostora $\mathbb{E}^m$ za vektor a. Skup svih translacija prostora $\mathbb{E}^m$ obeležavali smo sa $\mathcal{T}(\mathbb{E}^m)$ i znamo da je ovaj skup grupa s obzirom na kompoziciju. Iz relacije $\tau_a \circ \tau_b = \tau_{a+b}$, zaključili smo da je grupa $\mathcal{T}(\mathbb{E}^m)$ izomorfna grupi $(V_e^m, +)$.
Još neke važne osobine translacija sadržane su u sledećoj teoremi.

Teorema 1. *Neka je dat euklidski afini prostor $\mathbb{E}^m$. Tada važi:*
- (i1) *Svaka translacija prostora $\mathbb{E}^m$ je izometrija.*
- (i2) *Proizvoljna translacija $\tau_a \in \mathcal{T}(\mathbb{E}^m)$ ima fiksnih tačaka ako i samo ako je $a = 0$.*
- (i3) *Neka je $O\, e_1 \dots e_m$ ortonormirani koordinatni sistem u $\mathbb{E}^m$ i neka su $(a_1, \dots, a_m)$ koordinate vektora a u bazi $e = (e_1, \dots, e_m)$. Tada je slika proizvoljne tačke $X(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{E}^m$ pri translaciji τ_a data sa*
$$X' = \tau_a(X) = (x_1 + a_1, \dots, x_m + a_m).$$

Posmatrajmo sada centroafinu transformaciju $c_0 : \mathbb{E}^m \longrightarrow \mathbb{E}^m$, koja je definisana na sledeći način: neka je $O \in \mathbb{E}^m$ fiksna tačka i $X \in \mathbb{E}^m$ onda je

$$c_O(X) = X', \qquad \text{gde je} \qquad \overrightarrow{OX'} = -\overrightarrow{OX}. \tag{61}$$

Lako se vidi da je preslikavanje c_O izometrija, koja se naziva centralna simetrija s obzirom na tačku O. Primetimo, da se centralna simetrija s obzirom na koordinatni početak smešten u tački O, može kraće zapisati kao $c_O = (O, \mathsf{0}, -\,\mathsf{id}_{V_e})$. Iz same definicije (61) odmah se vidi da je koordinatni početak jedina fiksna tačka centralne simetrije c_O, kao i to da centralna simetrija ne mora biti kretanje jer je $\mathsf{det}\, c_O = (-1)^m$. Kompozicija dve centralne simetrije sa različitim središtim simetrije nije centralna simetrija već je translacija kao što pokazuje sledeća teorema.

Teorema 2.
- (i1) *Kompozicija dveju centralnih simetrija sa središtima O_1 i O_2 je translacija za vektor $a = 2\,\overrightarrow{O_1O_2}$.*
- (i2) *Svaka translacija može se predstaviti kao kompozicija dve centralne simetrije.*

Primetimo da u slučaju jednodimenzionog afinog prostora jedine izometrije su translacije i centralne simetrije, jer ortogonalni operator A koji odgovara datoj izometriji f je ili id_{V_e} ili $-\,\mathsf{id}_{V_e}$. Ako je $A = \mathsf{id}_{V_e}$ onda je f translacija, a ako je $A = -\,\mathsf{id}_{V_e}$, onda je f centralna simetrija. Dakle, svako kretanje u ovom slučaju je translacija.

U dvodimenzionoj ravni, posmatrajmo rotaciju f oko tačke O za ugao φ. Neka je data standardna ortonormirana baza $e = (e_1, e_2)$ tako da je $O\, e_1 e_2$ standardni koordinatni sistem u ravni. Tada ortogonalni operator A koji odgovara rotaciji f deluje na bazi e poznatim formulama:

$$A\, e_1 = (\cos\varphi)\, e_1 + (\sin\varphi)\, e_2 \qquad \text{i} \qquad A\, e_2 = -\, (\sin\varphi)\, e_1 + (\cos\varphi)\, e_2.$$

Tako da je matrica ortogonalnog operatora u bazi e :

$$A(e) = \begin{bmatrix} \cos\,\varphi & -\,\sin\,\varphi \\ \sin\,\varphi & \cos\,\varphi \end{bmatrix} \tag{62}$$

i njena determinanta jednaka je 1. Grupa svih kretanja u dvodimenzionoj euklidskoj afinoj ravni opisana je u sledećoj teoremi.

Teorema 3. *U euklidskoj afinoj ravni* $\mathbb{E}^2$, *svako kretanje je ili rotacija ili translacija.*

Posmatrajmo sada izometriju f u trodimenzionoj afinoj euklidskoj ravni, čija je fiksna tačka koordinatni početak. Neka je njen ortogonalni operator A, i $\mathsf{det}\, A = 1$. Ortogonalni operator A ima sopstvenu vrednost 1, jer karakteristični polinom operatora A ima ili tri realne nule koje se po apsolutnoj vrednosti jednake 1 (pa je barem jedna od njih 1) ili jednu realnu nulu λ_1 i dve konjugovano kompleksne nule λ_2 i λ_3 modula 1, tako da je $\lambda_2 = e^{i\,\theta}$ i $\lambda_2 = e^{-\,i\,\theta}$, pa je $1 = \mathsf{det}\, A = \lambda_1\, \lambda_2\, \lambda_3 = \lambda_1$. Prema tome postoji jedinični sopstveni vektor e_1 tako da je $Ae_1 = e_1$. Ako sada izaberemo tačku O_1 tako da je $e_1 = \overrightarrow{OO_1}$, onda svaka tačka prave OO_1 je fiksna jer za svaku tačku X te prave važi: $\overrightarrow{OX} = \lambda\, \overrightarrow{OO_1}$, odakle je

$$A(\overrightarrow{OX}) = A(\lambda\, \overrightarrow{OO_1}) = \lambda\, A(\overrightarrow{OO_1}) = \lambda\, \overrightarrow{OO_1} = \overrightarrow{OX} \qquad \text{odakle je} \qquad f(X) = X.$$

Zbog toga se ova prava naziva **osa rotacije**. S druge strane (jer ortogonalni operator čuva ortogonalnost) potprostor $W = \mathcal{L}(\{e_1\})^{\perp}$ je invarijantan na dejstvo operatora A i važi da je A_W ortogonalan operator takav da je $\mathsf{det}\, A_W = 1$. Prema tome iz Teoreme 3 vidimo da je matrica operatora A_W u pozitivnoj ortonormiranoj bazi $e^2 = (e_2, e_3)$ data sa (62). Ako je tačka O presek prave OO_1 i ravni određene vektorima e_2 i e_3 ona je fiksna, pa je kretanje dvodimenzione ravni $\mathbb{E}^2$, određene sa O, e_2 i e_3, rotacija. Dakle, matrica operatora U u bazi $e = (e_1, e_2, e_3)$ je:

$$A(e) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\,\varphi & -\,\sin\,\varphi \\ 0 & \sin\,\varphi & \cos\,\varphi \end{bmatrix}. \tag{63}$$

1.37. Generalisane rotacije. Generališimo sada pojam rotacije iz trodimenzionog prostora. Kažemo da je kretanje afinog euklidskog prostora $\mathbb{E}^m$ uopštena rotacija ako ima bar jednu fiksnu tačku, koja se zove *središte generalisane rotacije.* Za generalisane rotacije (središte generalisane rotacije) koristimo termin rotacija (središte rotacije) bez bojazni da dođe do nesporazuma. Skup svih rotacija afinog euklidskog prostora $\mathbb{E}^m$ obeležavamo sa $\mathcal{R}(\mathbb{E}^m)$.

Neka je O fiksna tačka rotacije $f : \mathbb{E}^m \longrightarrow \mathbb{E}^m$, dakle takva da je $f(O) = O$. Tada zbog **1.30** Teoreme i definicije kretanja imamo da je $\overrightarrow{OX'} = A(\overrightarrow{OX})$, gde je $X' = f(X)$ i pri tome je A ortogonalni operator takav da je $\det A = 1$. Budući da se proizvoljno kretanje g opisuje formulom $g = (O, a, A)$, $\det A = 1$, vidimo da se svako kretanje može zapisati kao translacija za vektor a i rotacija sa središtem u tački O. Veza između kretanja i rotacija data je u sledećoj teoremi.

Teorema. *U afinom euklidskom prostoru* $\mathbb{E}^m$, $m \geq 3$, *važi:*

(i1) *Skup svih rotacija sa zajedničkim središtem rotacije obrazuje grupu s obzirom na kompoziciju.*

(i2) *Svako kretanje može se zapisati kao kompozicija dve rotacije.*

Sada imamo jednostavnu, ali važnu posledicu prethodne teoreme, pa je zbog toga i ističemo.

Posledica 1. *Grupa kretanja,* $\mathsf{Is}_0(\mathbb{E}^m)$, *afinog euklidskog prostora* $\mathbb{E}^m$ *generisana je skupom svih rotacija,* $\mathcal{R}(\mathbb{E}^m)$, *prostora* $\mathbb{E}^m$.

Nađimo sada kriterijum, koristeći prethodnu teoremu, kada je kompozicija rotacija $f_1, f_2 \in \mathcal{R}(\mathbb{E}^m)$ rotacija, a kada je translacija.

Posledica 2. *Neka su* $f_1, f_2 \in \mathcal{R}(\mathbb{E}^m)$ *čija su središta tačke* O_1 *i* O_2 *i čiji su ortogonalni operatori redom* A_1 *i* A_2. *Kretanje* $f = f_2 \circ f_1$, *je:*

(i1) *translacija ako i samo ako je* $A_2\, A_1 = \mathsf{id}_{V_e}$.

(i2) *ako* f *nije translacija onda je rotacija ako i samo ako je vektor* $(\mathsf{id}_{V_e} - A_2)(\overrightarrow{O_1O_2})$ *u slici operatora* $\mathsf{id}_{V_e} - A_2\, A_1$.

1.38. Simetrije. U prethodnoj tački videli smo da se svako kretanje može predstaviti kao kompozicija translacije i rotacije, a zatim smo pokazali da se svako kretanje može zapisati kao kompozicija dve rotacije. Dakle, time smo pokazali da su svi generatori grupe kretanja afinog euklidskog prostora rotacije. U ovom odeljku nalazimo skup $\mathcal{S}(\mathbb{E}^m)$, još jednostavnijih izometrija koje imaju osobinu da je svaka izometrija konačna kompozicija elemenata skupa $\mathcal{S}(\mathbb{E}^m)$.

Neka je $\mathbb{E}^m$ $m-$dimenzioni euklidski afini prostor i neka je $\mathcal{H}$ neka hiperravan u $\mathbb{E}^m$, tj. ravan dimenzije $m-1$. Hiperravan $\mathcal{H}$, kao što znamo možemo predstaviti u obliku: $\mathcal{H} = A_0 + W^{m-1}$, gde je $A_0 \in \mathcal{H}$ i $W^{m-1} = \{\overrightarrow{OX} \mid X \in \mathcal{H}\}$, za neku tačku O iz $\mathcal{H}$. *Izometrija,* f, *afinog euklidskog prostora* $\mathbb{E}^m$, *naziva se* simetrijom *s obzirom na hiperravan* $\mathcal{H}$ *(ili hiperravanskom simetrijom), ako je* $f(X) = X, \forall\, X \in \mathcal{H}$ *i ako* f *nije identiteta. Skup svih simetrija afinog euklidskog prostora obeležavamo sa* $\mathcal{S}(\mathbb{E}^m)$.

Matrični zapis proizvoljne simetrije dat je u sledećoj:

Propozicija. *Neka je $f \in \mathcal{S}(\mathbb{E}^m)$ simetrija u odnosu na hiperravan $\mathcal{H} \subseteq \mathbb{E}^m$, onda postoji pravougli Dekartov koordinatni sistem $O\, e_1 e_2 \dots e_m$ u $\mathbb{E}^m$ takav da je matrica ortogonalnog operatora A koji odgovara simetriji f u bazi $e = (e_1, e_2, \dots,\ e_{m-1}, e_m)$ jednaka:*

$$A(e) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ako je $X(x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{E}^m$ proizvoljna tačka i ako je $\overrightarrow{OX'} = A(\overrightarrow{OX})$ za $O \in \mathcal{H}$ i $X' = f(X)$, onda su koordinate tačke $X'(x_1', x_2', \dots, x_m')$ u istom koordinatnom sistemu date sa: $x_i' = x_i$, $i = 1, \dots, m-1$ i $x_m' = -\,x_m$.

Primetimo da je $\operatorname{\mathsf{det}} f = \operatorname{\mathsf{det}} A = -\,1$, pa simetrija nije kretanje, ali je jasno da je kompozicija konačnog broja simetrija izometrija kao i to da je kompozicija parnog broja simetrija kretanje. U nastavku dajemo teoremu koja u potpunosti razotkriva strukturu grupe izometrija afinog prostora $\mathsf{Is}\,(\mathbb{E}^m)$. Prvo navedimo u obliku leme jedan važan rezultat linearne algebre, koji se odnosi na strukturu skupa svih ortogonalnih operatora. Neka je

$$(64) \qquad A(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

matrica rotacije $A(\varphi)$ na nekom dvodimenzionom potprostoru W za ugao $\varphi \in (0, 2\,\pi)$ u odgovarajućoj ortonormiranoj bazi potprostora W. Tada važi:

Lema. *Za proizvoljni ortogonalni operator A na V_e^m postoji ortonormirana baza, $e = (e_1, e_2, \dots, e_m)$, prostora V_e^m takva da je matrica operatora A u toj bazi blok–dijagonalna matrica $A(e)$ gde su λ_i, $i = 1, \dots, p$ realni brojevi takvi da je $\lambda_i^2 = 1$ i gde su $A(\varphi_i)$, $i = 1, \dots, l$ matrice reda dva i oblika* (64), *koje odgovaraju dvodimenzionim rotacijama za ugao $\varphi_i \in (0, 2\,\pi)$.*

$$(65) \qquad A(e) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_p & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & A(\varphi_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & A(\varphi_l) \end{bmatrix}.$$

Primetimo da su realne sopstvene vrednosti operatora A, λ_i, $i = 1, \dots, p$, dok svakoj od rotacija $A(\varphi_i)$, $i = 1, \dots, l$ odgovara par konjugovano kompleksnih nula, karakterističnog polinoma operatora A, modula 1. Iz matrice (65) vidimo da je $m = p + 2\,l$, tako da maksimalan broj rotacija $A(\varphi_i)$, $i = 1, \dots, l$ koje učestvuju u zapisu matrice $A(e)$ nije veći od $m/2$. Preciznije ako je m paran broj onda l može biti najviše jednak $m/2$, a ako je m neparan onda l ne prelazi broj $(m-1)/2$.

Teorema 1. *Neka je $\mathbb{E}^m$ afini euklidski prostor dimenzije m. Tada važi:*

(i1) *Svaka izometrija prostora* $\mathbb{E}^m$ *je ili kretanje ili kompozicija simetrije i kretanja.*

(i2) *Svaka translacija je kompozicija dveju simetrija s obzirom na paralelne hiperravni. Kompozicija dveju simetrija s obzirom na paralelne hiperravni je translacija.*

(i3) *Svaka rotacija je kompozicija konačnog broja simetrija koje imaju zajedničku fiksnu tačku.*

Sada dobijamo kao posledicu svih dosadašnjih rezultata sledeću teoremu.

TEOREMA 2. *Grupa izometrija,* $\mathsf{Is}(\mathbb{E}^m)$, *prostora* $\mathbb{E}^m$ *generisana je skupom svih simetrija* $\mathcal{S}(\mathbb{E}^m)$.

Analiza

1.38. Vektorske funkcije. Posmatrajmo funkciju $f : \mathbb{R} \longrightarrow V$, pri čemu je V konačnodimenzioni realni vektorski prostor[15]. U problemima koje ćemo izučavati u ovom tekstu, n će obično biti 3. Ako je e neka baza od V tada je

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} f_i(t)\, e_i\,.$$

Ako su funkcije f_i diferencijabilne ili integrabilne, jasno, možemo diferencirati ili integraliti vektorsku funkciju $f(t)$ po koordinatama:

$$\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{df_i(t)}{dt}\, e_i, \qquad \int_a^b f(t)\, dt = \sum_{i=1}^{n} \left(\int_a^b f_i(t)\, dt \right) e_i\,.$$

Koristeći linearnosti operatora d/dt i $\int_a^b (\ )\, dt$, nije teško proveriti da ovako definisano diferenciranje i integralenje vektorske funkcije ne zavise od izbora baze.

Slično, ako je f vektorska funkcija nekoliko promenljivih (čije koordinatne funkcije su dovoljno puta diferencijabilne) na analogan način može se parcijalno diferencirati ili integraliti više puta.

Propozicija 1. *Neka su $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow V$, pri čemu je V euklidski vektorski prostor. Tada je*

$$\frac{d}{dt}\langle f, g\rangle = \left\langle \frac{df}{dt}, g \right\rangle + \left\langle f, \frac{dg}{dt} \right\rangle .$$

Propozicija 2. *Neka su $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, tada je*

$$\frac{d}{dt}(f \times g) = \frac{df}{dt} \times g + f \times \frac{dg}{dt}\,.$$

Dokazi ovih Propozicija su direktni i slede iz linearnosti diferenciranja i Lajbnicovog pravila.

1.39. Klase glatkosti i difeomorfizam. Za funkciju $f : \mathbb{R} \supseteq \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ kažemo da je klase $\mathcal{C}^k$ na $\mathcal{D}$, ako svi izvodi funkcije f na $\mathcal{D}$ do reda k postoje i neprekidni su. Oznaka koja se koristi za skup svih funkcija klase $\mathcal{C}^k$ na $\mathcal{D}$ je $\mathcal{C}^k(\mathcal{D})$.

Slično, za funkciju $f : \mathbb{R}^m \supseteq \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ kažemo da je klase $\mathcal{C}^k$ na $\mathcal{D}$, ako svi parcijalni izvodi funkcije f na $\mathcal{D}$ do reda k postoje i neprekidni su.

Vektorska funkcija $f : \mathbb{R}^m \supseteq \mathcal{D} \longrightarrow V$ je klase $\mathcal{C}^k$ na $\mathcal{D}$ ako sve njene komponente s obzirom na neku bazu su klase $\mathcal{C}^k$ na $\mathcal{D}$.

[15] Kako je svaki konačnodimenzioni realni vektorski prostor izomorfan nekom od vektorskih prostora $\mathbb{R}^n$, mogli smo pretpostaviti da je $V = \mathbb{R}^n$.

Primetimo da ako je neka funkcija f klase $\mathcal{C}^k$ na $\mathcal{D}$ da je onda ona i klase $\mathcal{C}^{k-1}$ na $\mathcal{D}$. Funkcije koje imaju izvode (parcijalne izvode) svih redova i oni su neprekidni nazivamo glatke funkcije. Za takve funkcije kažemo da su klase $\mathcal{C}^\infty$ na $\mathcal{D}$.

• Neka su $M \subseteq \mathbb{R}^m$ i $N \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoreni skupovi, za preslikavanje $f : M \longrightarrow N$ kažemo da je difeomorfizam klase $\mathcal{C}^k$ ako:

- f je bijekcija,
- f je klase $\mathcal{C}^k$,
- f^{-1} je klase $\mathcal{C}^k$.

U slučaju kada je $k = 0$, a M i N topološki prostori kažemo da je f homeomorfizam. Preslikavanje, $f : M \longrightarrow N$ je lokalni difeomorfizam klase $\mathcal{C}^k$ ako za svaku tačku $p \in M$ postoji otvorena okolina U_p tačke p takva da je $f(U_p)$ otvoren u N i restrikcija $f_{|U_p} : U_p \longrightarrow f(U_p)$ je difeomorfizam klase $\mathcal{C}^k$.

• Iz teoreme o inverznoj funkciji (vidi dole) sledi da je $m = n$.

Diferenciranje kompozicije funkcija. Pretpostavimo da je f funkcija više promenljivih $u_1, u_2, \ldots, u_m$ i da je svaka promenljiva u_i funkcija promenljivih $v_1, v_2, \ldots, v_l$. Tada je

$$\frac{\partial f}{\partial v_j} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial u_i} \frac{\partial u_i}{\partial v_j}, \qquad j = 1, 2, \ldots, l.$$

Specijalno, ako je $m = l = 2$ ili ako je $m = 2$, a $l = 1$ $(v_1 = t)$ imamo, redom

$$\frac{\partial f}{\partial v_j} = \frac{\partial f}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial v_j} + \frac{\partial f}{\partial u_2} \frac{\partial u_2}{\partial v_j}, \qquad j = 1, 2,$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial u_1} \frac{du_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial u_2} \frac{du_2}{dt}\,.$$

1.41. Jakobijan funkcije. Neka je $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ vektorska funkcija više promenljivih, koju možemo predstaviti u obliku

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = (f_1(x_1, x_2, \ldots, x_m), f_2(x_1, x_2, \ldots, x_m), \ldots, f_n(x_1, x_2, \ldots, x_m)),$$

gde su $f_i : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$. Svi parcijalni izvodi ovih funkcija, ako postoje, mogu se organizovati u $n \times m$ matricu, poznatu i kao Jakobijeva (Jacobi) matrica preslikavanja f, na sledeća način:

$$J = J_f(x_1, \ldots, x_m) = \frac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_m)} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{bmatrix} \tag{66}$$

Napomenimo da se ponekad Jakobijeva matrica definiše kao transponat matrice (66).

Jakobijeva determinanta, koja se često naziva i Jakobijan je determinanta Jakobijeve matrice u slučaju kada je $m = n$.

• Jakobijeva matrica predstavlja najbolju linearnu aproksimaciju diferencijabilne funkcije u okolini date tačke u sledećem smislu

$$f(x) = f(p) + J_f(p)(x - p) + o(\|x - p\|),$$

gde x pripada dovoljno maloj okolini tačke p.

1.42. Teoreme o inverznoj i implicitnoj funkciji. U ovom kursu ponekad ćemo koristiti i sledeće dve fundamentalne teoreme, koje leže u osnovima diferencijalne geometrije.

Teorema 1 (inverznoj funkciji). *Neka je* $f : \mathbb{R}^m \supseteq U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *funkcija klase* $\mathcal{C}^1$ *na otvorenom skupu* U *takva da je* $\det(J_f(p)) \neq 0$[16], *za neku tačku* $p \in U$. *Tada postoji otvorena okolina tačke* $p \in U_1 \subseteq U$ *takva da je funkcija* $f_{|U_1} : U_1 \longrightarrow f(U_1)$ *invertibilna. Inverzna funkcija* $f^{-1} : f(U_1) \longrightarrow U_1$ *je takođe klase* $\mathcal{C}^1$, *i važi:*

$$J_{f^{-1}}(f(p)) = [J_f(p)]^{-1}.$$

Teorema 2 (o implicitnoj funkciji). *Neka je* $f : U \times V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *glatka funkcija gde su* $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *i* $V \subseteq \mathbb{R}^k$ *otvoreni i povezani skupovi, čije koordinate obeležavamo sa* x *i* y *redom. Neka je* $f(x_0, y_0) = 0$, *za* $(x_0, y_0) \in U \times V$. *Ako je*

$$J = \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_l}\right)_{1 \le j, l \le n} (x_0, y_0) \tag{67}$$

invertibilna matrica tada postoji okolina $W \subset U \times V$ *tačke* (x_0, y_0) *i okolina* V_0 *tačke* $y_0 \in \mathbb{R}^k$ *tako da*

(1) *su na* V *definisane glatke funkcije* $\psi_1, \ldots, \psi_n$;

(2) $f(x, y) = 0$ *za* $(x, y) \in W$ *akko* $x_1 = \psi_1(y)$, $x_2 = \psi_2(y)$,$\ldots x_n = \psi_n(y)$.

Iz prethodne Teoreme 14., sledi da u okolini tačke (x_0, y_0) skup rešenja jednačine $f(x, y) = 0$, pod dosta opštim pretpostavkama, predstavlja grafik preslikavanja skupa $V_0 \subseteq \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^n$, tj. tačke tog skupa rešenja (glatko) su parametrizovane tačkama nekog otvorenog skupa $V_0 \subseteq \mathbb{R}^k$.

[16] Ovaj uslov je ekvivalentan uslovu da je Jakobijeva matrica $J_f(p)$ invertibilna.

Diferencijalne jednačine

1.43. Sistemi običnih diferencijalnih jednačina. U mnogim važnim konceptima diferencijalne geometrije, kao i u nekim fundamentalni teoremama, koristimo teoremu o postojanju i jedinstvenosti rešenja sistema običnih jednačina koje zadovoljavaju početni uslov. Zbog toga navodimo jednu od najopštiju verzija ove teoreme koju ćemo koristiti.
U iskazu ove teoreme pojavljuje se Lipšicov uslov koji funkcija treba da zadovoljava na nekom skupu $\mathcal{S}$. Ovaj uslov znači sledeće: postoji konstanta $\kappa \geq 0$, takva da za sve $y_1 = (x_1, t_1), y_2 = (x_2, t_2) \in \mathcal{S}$ važi $\|A(x_1, t_1) - A(x_2, t_2)\| \leq \kappa \|(x_1, t_1) - (x_2, t_2)\|$. S obzirom da mi radimo sa funkcijama koje su glatke, Lipšicov uslov je svakako zadovoljen.

TEOREMA (PICARD). *Neka je $A(x, t) : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ neprekidna na zatvorenom skupu $\mathcal{S} = \{y = (x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x - c\| \leq K \text{ i } |t - a| \leq T\}$, i neka na $\mathcal{S}$ zadovoljava Lipšicov (Lipschitz) uslov. Neka je $M = \sup \|A(x, t)\|$ na $\mathcal{S}$. Diferencijalna jednačina,*

$$\frac{d\alpha}{dt} = A(\alpha, t)$$

ima jedinstveno rešenje na intervalu $|t - a| \leq \min(T, K/M)$ koje zadovoljava početni uslov $\alpha(a) = c$.

GLAVA 2

Krive

2.1. Uvod i motivacija. U ovom kursu bavićemo se lokalnom teorijom krivih i površi, tj. svojstvima krivih i površi koja zavise o ponašanju krive ili površi u okolinama njihovih tačaka.

Metode koje ćemo koristiti su metode diferencijalnog računa, zbog toga ćemo pretpostavljati da su funkcije koje definišu krive ili površi klase $\mathcal{C}^k$, $k \in \mathbb{N}$. Da bismo pojednostavnili izlaganja pretpostavljamo da je $k = \infty$, tj. da su krive i površi koje proučavamo glatke (klase $\mathcal{C}^\infty$). Ograničavajući se na diferencijabilne krive i površi dobijamo jedan veoma bogat skup objekata na koji se odnosi izložena teorija, a sa druge strane ovakvi objekti formalizuju našu intuitivnu predstavu o krivima i površima.

2.2. Diferencijabilne parametrizovane krive. Kao što je uobičajeno u matematici ali i drugim naukama[1], polazimo od najjednostavnijih objekata u afinom prostoru $\mathbb{R}^n$[2], koji su u nekom smislu jednodimenzioni i njih nazivamo *krivama.* Intuitivna predstava o krivi potiče iz mehanike kao (neprekidna) putanja (trajektorija) neke materijalne tačke koja se kreće pod dejstvom neke sile. Preciznije, imamo sledeću definiciju.

Pod diferencijabilnom parametrizovanom krivom u euklidskom prostoru $\mathbb{R}^n$ podrazumevamo *diferencijabilno preslikavanje* $\alpha : (a, b) = \mathbb{I} \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$$\alpha(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)).$$

Ponekad se pod krivom podrazumeva skup $\alpha(\mathbb{I}) \subseteq \mathbb{R}$, kojeg ćemo u našoj terminologiji nazivati tragom parametrizovane krive α.

(g) parametrizovana kriva α je klase $k \geq 1$ ako je preslikavanje α klase $\mathcal{C}^k$. Ako je $k = +\infty$ onda kažemo da je parametrizovana kriva α glatka.

(r) glatka kriva α je regularna u tački $t_0 \in \mathbb{I}$ ako je

$$\frac{d\alpha}{dt}(t_0) = (x_1(t_0)', x_2(t_0)', \dots, x_n(t_0)') \neq (0, 0, \dots, 0).$$

Parametrizovana kriva α je regularna ako je regularna u svim tačkama skupa $\mathbb{I} = (a, b)$.

Mi ćemo se u ovom tekstu ograničiti na izučavanje parametrizovanih glatkih regularnih krivih u euklidskom prostoru (uglavnom u $\mathbb{R}^3$), tj. krivih koje nemaju singularnih tačaka (takvih tačaka za koje je $\frac{d\alpha}{dt}(t_0) = 0$, za neko $t_0 \in (a, b)$).

[1] Zapravo radi se o principu: od jednostavnijeg ka složenijem.

[2] Iako će u ovom tekstu n uglavnom biti 3, a ponekad 2, formulisaćemo neka tvrđenja koja važe za proizvoljno n.

Od sada pa nadalje kada kažemo kriva podrazumevamo da se radi o parametrizovanoj glatkoj regularnoj krivoj.

Još nekoliko konvencija. (1) Translacijom argumenta funkcije α uvek možemo postići da je 0 u domenu iste, npr. ako središte intervala $\mathbb{I} = (a, b)$ preslikamo u 0, tada je $\mathbb{I}' = (-\varepsilon, \varepsilon,)$, gde je $\varepsilon = (b-a)/2$. Dakle, bez umanjenja opštosti pretpostavljamo da domen krive α, tj. interval (a, b), sadrži 0, a samim tim i neki interval oblika $(-\varepsilon, \varepsilon)$, za neko $(b-a)/2 \geq \varepsilon > 0$.

Razlog za primenu ove konvencije leži u jednostavnijem zapisu nekih izraza.

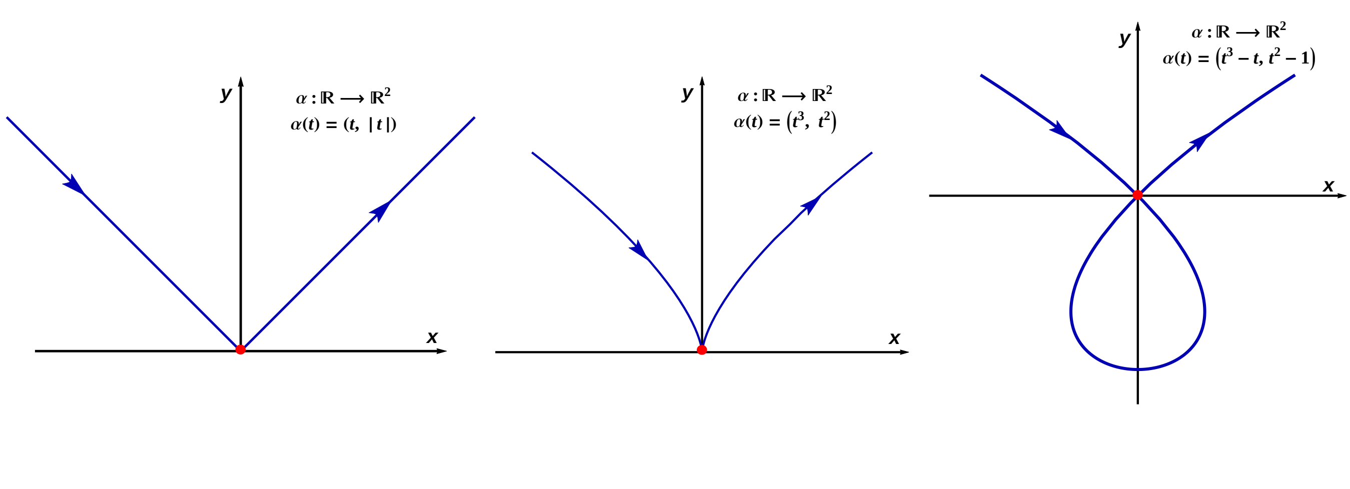
(2) Ponekada ćemo, zbog tehničkih razloga, pretpostavljati da je domen funkcije α segment $[a, b]$ ili da je funkcija α definisana na nekom intervalu (c, d), koji sadrži segment $[a, b]$.

2.3. Primeri krivih u ravni – I. (1) Preslikavanje $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dato sa $\alpha(t) = (t, |t|)$ nije parametrizovana diferencijabilna kriva jer funkcija $|t|$ nije diferencijabilna u 0, vidi Sliku 1.

(2) Preslikavanje $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dato sa $\alpha(t) = (t^3, t^2)$ nije regularna parametrizovana kriva jer je $\alpha'(0) = (0, 0)$, Slika 1.

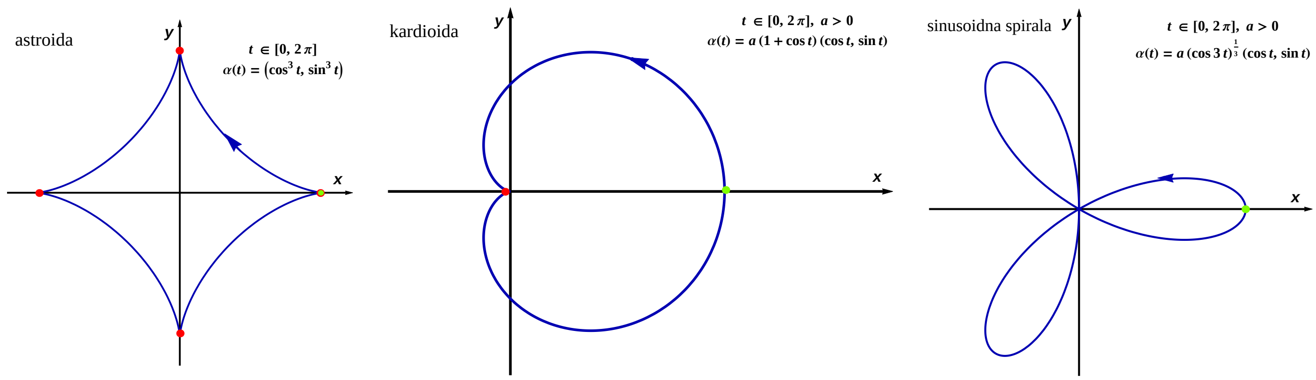
(3) Preslikavanje $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dato sa $\alpha(t) = (t^3 - t, t^2 - 1)$ je regularna parametrizovana diferencijabilna kriva. Primetiomo da kriva ima samopreseka jer je $\alpha(1) = \alpha(-1) = (0, 0)$, tj. funkcija α nije 1-1, vidi Sliku 1.

Krive koje nemaju samopreseka nazivaju se proste krive.

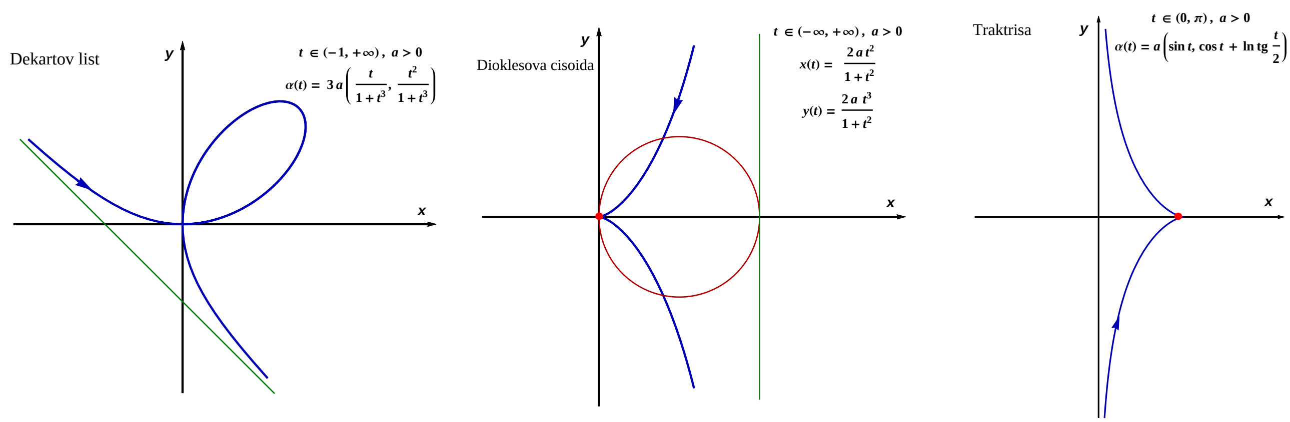


Slika 1. Neke krive u ravni

2.4. Primeri krivih u ravni – II. U nastavku dajemo primere nekoliko poznatih krivih: astroida, kardioida, sinusoidna spirala (vidi Slika 2). Na Slici 3 prikazane su redom sledeće krive: Dekartov list, Dioklesova cisoida i traktrisa. Parametrizacije samih krivih nalaze se na njihovim slikama. Svaka od ovih krivih ima interesantnu geometriju i istoriju, jer su se javljale kao geometrijska rešenja nekih problema



Slika 2.: astroida, kardioida i sinusoidna spirala



Slika 3.: Dekartov list, Dioklesova cisoida i traktrisa

2.5. Vektor brzine regularne krive. Vektor brzine regularne krive $\alpha(t)$ u tački $t = t_0$ je vektor

$$\alpha'(t_0) = \frac{d\alpha}{dt}(t_0) = (x_1(t_0)', x_2(t_0)', \ldots, x_n(t_0)').$$

Brzina krive $\alpha(t)$ u tački $t = t_0$ je dužina vektora $\alpha'(t_0)$, tj. broj $\mathbf{v}(t_0) = \|\alpha'(t_0)\|$.

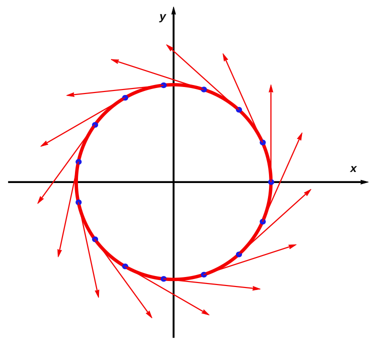
Za krivu $\alpha :\longrightarrow \mathbb{R}^n$ kažemo da je jedinične brzine ukoliko je $\|\alpha'(t)\| = 1$ za $a < t < b$.

2.6. Tangentno vektorsko polje. Neka je $\alpha : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ kriva. Vektorsko polje (polje vektora) duž krive α je funkcija $Y : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}^n$, koja svakom $t \in (a, b)$ dodeljuje vektor $Y(t) = (y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t))$ u tački $\alpha(t)$.

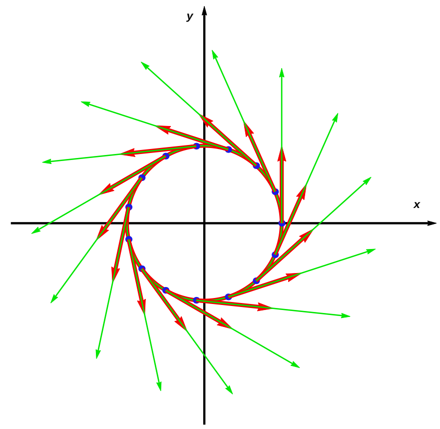
Tangentno vektorsko polje regularne krive $\alpha(t)$ je polje jediničnih vektora (vidi Sliku 4a)

$$v(t) = \frac{\frac{d\alpha}{dt}}{\|\frac{d\alpha}{dt}\|}.$$

Tangentna linija (tangenta) na regularnu krivu α u tački $t = t_0$ je prava:



Slika 4a: Tangentno vektorsko polje



Slika 4b: Parametrizacije i njihove brzine

$$p = \{w \in \mathbb{R}^n | w = \alpha(t_0) + s\, v(t_0), s \in \mathbb{R}\}.$$

2.7. Ekvivalentnost parametrizovanih krivih. Neka su date dve glatke regularne krive $\alpha : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ i $\beta : (c,d) \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Kažemo da su one ekvivalentne (i pišemo $\alpha \sim \beta$) ako postoji glatki difeomorizam $\phi : (c,d) \longrightarrow (a,b)$ takav da je $\beta = \alpha \circ \phi$. Za parametrizaciju β kažemo da je pozitivna reparametrizacija regularne krive α, ukoliko je $\phi(t)' > 0$, za svako $t \in (c,d)$. Analogno definišemo pojam negativna reparametrizacije krive α.

Lema 1. *Relacija $\sim$ je relacija ekvivalencije na skupu svih parametrizovanih krivih.*

Dokaz. Za refleksivnost potrebno je uzeti $\phi = \mathrm{id} : (a,b) \longrightarrow (a,b)$. Simetričnost: $\alpha \sim \beta$, uz ϕ kao difeomorfizam, tada je i $\beta \sim \alpha$ za $\psi = \phi^{-1}$. Ako je $\alpha \sim \beta$ i $\beta \sim \gamma$, gde su ϕ_1 i ϕ_2 odgovarajući difeomorfizmi. Tada je i $\psi = \phi_2 \circ \phi_1$ difeomorfizam, za koji važi $\gamma = \alpha \circ \psi$. □

Klasa ekvivalencije $[\alpha]$ relacije $\sim$ je regularna geometrijska (neparametrizovana) kriva, tj. regularna kriva, ili samo kriva.

Primedba. Termin kriva često se koristi i za skup slika (trag diferencijabilne parametrizovane krive), $\Gamma = \alpha(\mathbb{I})$. U tom slučaju za α kažemo da je parametrizacija krive Γ^3.

Lema 2. *Neka je $\beta = \alpha \circ \phi$ reparametrizacija krive α. Tada je*

$$\beta'(u) = \phi'(u)\, \alpha'(\phi(u)) \tag{68}$$

pri čemu je $\phi : (c,d) \longrightarrow (a,b)$ i $u \in (c,d)$.

Primedba. Na Slici 4b prikazane su dve parametrizacije jediničnog kruga, kao i vektori njihovih brzina u nekoliko tačaka i to: $\alpha(u) = (\cos u, \sin u)$, $u \in [0, 2\pi]$ (obojani crvenom bojom) i $\beta(u) = (\cos 2u, \sin 2u)$, $u \in [0, \pi]$ (obojani zelenom bojom).

[3] ili da je α parametarski oblik skupa Γ

Primetite da su vektori brzine parametrizacije β imaju dvostuko veći intenzitet od vektora parametrizacije α, tj. $\phi' \equiv 2$.

2.8. Primeri

(1) Da li su krive $\alpha(t) = (t, 0, 0)$, $\beta(t) = (t^3, 0, 0)$, i $\delta(t) = (t^3 + t, 0, 0)$, za $t \in \mathbb{R}$ regularne ? Koje su njihove slike (tragovi) ?
(2) Da li su krive $\alpha(t) = (\cos 2\,t, \sin 2\,t, 0)$, $0 \leq t \leq 2\,\pi$ i $\beta(t) = (\cos t, \sin t, 0), 0 \leq t \leq 4\,\pi$ ekvivalentne ? Da, $\phi(t) = 1/2\, t$.
(3) Neka je prava $p = \{w \in \mathbb{R}^3 \mid w = s\,\alpha'(t_0) + \alpha(t_0), s \in \mathbb{R}\}$ tangentna linija parametrizovane regularne krive α.
   (a) Da li tangenta linija zavisi od parametrizacije? Ne.
   (b) Da li vektor brzine zavisi od parametrizacije? Da.
   (c) Da li tangentni vektor zavisi od parametrizacije? Da, do na znak.

2.9. Drugi načini zadavanja krivih. Neka je $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ neka diferencijabilna funkcija. Tada skup njenih nula obeležavamo sa $F^{-1}(0) = \{p \in R^2 \mid F(p) = 0\}$. Implicitno definisana kriva u $\mathbb{R}^2$ je skup nula, diferencijabilne funkcije $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$. U opštem slučaju skup nula od F može da ima "vrhova", tj. ne mora da bude regularna kriva. Međutim, postoji važan slučaj kada je moguće naći parametrizaciju skupa nula od F.

Teorema. *Neka je $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ diferencijabilna funkcija i q tačka takva da je $F(q) = 0$. Ako je je $\nabla F(q) = (\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y})_{|q} \neq 0$, tada postoji okolina U od q u $\mathbb{R}^2$ i (parametrizovana) kriva $\alpha : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ takva da je $\alpha(a, b) = \{p \in U \mid F(p) = 0\}$.*

Dokaz. Specijalan slučaj teoreme o implicitnoj funkciji. $\square$

Prethodna teorema daje jednostavan način da se proveri da li su neki ravanski skupovi regularne krive.

Primer za primenu ove teoreme je npr. elipsa $\mathcal{E}$, čiju kanonsku jednačinu možemo zapisati u implicitnom obliku: $F(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$. Kako je $\nabla F(q) = (2\,\frac{x}{a^2}, 2\,\frac{y}{b^2})_q$ lako sledi da je za svaku tačku $q \in \mathcal{E}$, $\nabla F(q) \neq 0$. Drugim rečima, za svaku tačku $q \in \mathcal{E}$ postoji okolina U_q takva da je deo elipse koji se nalazi u okolini U_q regularna kriva.

Analogno rasuđivanje važi i za hiperbolu.

2.10. Krive u drugim koordinatnim sistemima. Krive možemo zadavati i u drugim koordinatnim sistemima. Koristeći vezu između polarnih i Dekartovih koordinatama ($x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$), ravansku krivu možemo zadati preslikavanjem $\alpha(\theta) = \rho_\alpha(\theta)(\cos\theta, \sin\theta)$, za $\rho_\alpha(\theta) \geq 0, a < \theta < b$. Tada kažemo da je $\alpha : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *polarna parametrizacija*, a funkciju ρ_α zovemo *radijus funkcija krive* α. Radijus funkcija potpuno određuje polarnu parametrizaciju krive, pa često krivu definišemo koristeći samo radijus funkciju.

2.11. Dužina luka krive. Neka je $\alpha : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ regularna kriva. Pretpostavimo da je α definisana na otvorenom intervalu $(c,d) \supsetneqq (a,b)$, tako da je α definisana i diferencijabilna u tačkama a i b. Dužina luka krive na intervalu $[a,b]$ je

$$L(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt \,. \tag{69}$$

Zadatak. (i1) Neka je kriva α zadana polarnom parametrizacijom $\rho = \rho(\theta)$. Dokazati da je dužina krive α na segmentu $[a,b]$ data formulom:

$$L(\alpha) = \int_a^b \sqrt{(\rho'(\theta))^2 + \rho(\theta)^2}\, d\theta \,. \tag{70}$$

Rešenje. Kako su veze između koordinata tačke u Dekartovom i polarnom sistemu date formulama,

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos t \\ y &= \rho \sin t \end{aligned} \quad \text{odakle je prvo,} \quad \alpha(t) = (x(t), y(t)) = (\rho\cos t, \rho \sin t) \quad \text{a zatim imamo}$$

$$\alpha'(t) = (x'(t), y'(t)) = (\rho'\cos t - \rho\sin t, \rho'\sin t + \rho\cos t) \qquad \text{tako da dobijamo:}$$

$$\begin{aligned} \|\alpha'(t)\| &= \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = \sqrt{(\rho'\cos t - \rho \sin t)^2 + (\rho'\sin t + \rho\cos t)^2} \\ &= \sqrt{\rho'^2\cos^2 t + \rho^2\sin^2 t - 2\,\rho'\rho\cos t \sin t + \rho'^2\sin^2 t + \rho^2\cos^2 t + 2\,\rho'\rho\cos t\sin t} \\ &= \sqrt{\rho'^2(\cos^2 t + \sin^2 t) + \rho^2(\cos^2 t + \sin^2 t)} = \sqrt{\rho'^2 + \rho^2} \,. \end{aligned}$$

(i2) Neka je kriva α zadana svojom implicitnom jednačinom $y = f(x)$. Tada je dužina krive α na segmentu $[a,b]$ data formulom:

$$L(\alpha) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx \,,$$

jer je $\alpha(x) = (x, f(x))$, pa je $\alpha'(x) = (1, f'(x))$.

2.12. Geometrijska svojstva krivih. Za neko svojstvo krive kažemo da je geometrijsko ako ono ne zavisi od parametrizacije, ili ako samo zavisi od izbora orijentacije. Prvo takvo svojstvo je dužina krive, kao što pokazuje sledeća teorema.

Teorema. Neka je β reparametrizacija regularne krive α. Tada je $L(\alpha) = L(\beta)$.

Dokaz. Pretpostavimo da je $\beta : (c,d) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ neka pozitivna reparametrizacija regularne krive $\alpha : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Tada je $\beta(u) = \alpha(\phi(u))$, pri čemu je $\phi : (c,d) \longrightarrow (a,b)$

difeomorfizam takav da je $\phi(u)' > 0$. Koristeći sada Lemu 2 iz **2.4**, imamo redom

$$L(\alpha) = \int_a^b \left\| \frac{d\alpha(t)}{dt} \right\| dt = \left\{ \begin{array}{l} t = \phi(u) \\ dt = \phi'(u)\, du \end{array} \right\} = \int_c^d \left\| \frac{d((\alpha \circ \phi)(u))}{\phi'(u)\, du} \right\| \phi'(u)\, du$$
$$= \int_c^d \left\| \frac{d\beta}{du} \right\| du = L(\beta).$$

Slučaj negativne reparametrizacije, tj. $\phi(u)' < 0$ tretira se analogno. □

2.13. Prirodni parametar. Ako fiksiramo broj $c \in (a, b)$, posmatrajmo funkciju dužine luka l_α, sa početkom u c, krive $\alpha : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ datu sa

$$l_\alpha(t) = \int_c^t \|\alpha'(u)\|\, du, \qquad \text{za } c \le t \le b. \tag{71}$$

Teorema. *Neka je $\alpha : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ regularna kriva. Tada postoji njena reparametrizacija, β, jedinične brzine.*

Digresija. Parametrizacija iz iskaza teoreme zove se prirodna parametrizacija krive α i kažemo da je kriva α parametrizovana dužinom luka. Prirodni parametar tradicionalno obeležavamo slovom l.

Dokaz. Neka je $\alpha : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ glatka parametrizovana kriva[4]. Posmatrajmo diferencijalnu jednačinu

$$\frac{dl}{dt} = \left\| \frac{d\alpha}{dt} \right\| = \sqrt{(x_1(t)')^2 + (x_2(t)')^2 + \cdots + (x_n(t)')^2}\,.$$

Kako je desna strana ove jednačine glatka funkcija postoji jedinstveno rešenje ove obične diferencijalne jednačine sa početnim uslovom $l(a) = 0$. Jasno, $l(b) = L(\alpha)$. Neka je t inverzna funkcija od l: $t = t(l) : [0, L(\alpha)] \longrightarrow [a, b]$ i definišemo l kao parametar formulom:

$$\beta(l) = \alpha(t(l)) \quad \text{tako da je} \quad \left\| \frac{d\beta}{dl} \right\| = \left\| \frac{d\alpha}{dt} \right\| \frac{dt}{dl} = 1.$$

Dakle, l je prirodni parametar na α. □

Posledica 1. *Dve proizvoljne prirodne parametrizacije date krive razlikuju se do na konstantu.*

Dokaz. Neka je $\alpha : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ regularna kriva i neka su l i l^* dve prirodne parametrizacije krive $\alpha(t)$, tada imamo $\alpha(l^*) = \alpha(l(l^*))$. Sada nalazimo,

$$\left\| \frac{d\alpha}{dl^*} \right\| = \left\| \frac{d\alpha}{dl} \frac{dl}{dl^*} \right\| = \left\| \frac{d\alpha}{dl} \right\| \cdot \left| \frac{dl}{dl^*} \right|, \quad \text{kako je } \left\|\tfrac{d\alpha}{dl^*}\right\| = \left\|\tfrac{d\alpha}{dl}\right\| = 1, \text{ sledi: } \left| \frac{dl}{dl^*} \right| = 1.$$

[4] Često ćemo pretpostavljati da se parametrizacija krive α može proširiti i na interval $[a, b]$.

S druge strane imamo: $dl/dt > 0$ i $dl^*/dt > 0$, jer su l i l^* prirodne parametrizacije (vidi dokaz prethodne teoreme). Prema tome iz $dl/dl^* = \pm 1$ i $(dl/dt)/(dl^*/dt) > 0$, sledi da je $l = l^* + c,\ c \in \mathbb{R}$. $\square$

Primetimo za krivu jedinične brzine, $l : (c, d) \longrightarrow \mathbb{R}^n$, važi

$$l = l(t) = \int_c^t \|l'(u)\|\, du = \int_c^t du = t - c.$$

Zbog toga se obično uzima da je donja granica jednaka levom kraju intervala a, tako da je $l : [0, L] \longrightarrow \mathbb{R}^2$.

Posledica 2. *Neka je $\alpha : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ regularna kriva i $l = l(t)$ dužina luka te krive. Tada je:*

(i1) $l = l(t) = \displaystyle\int_0^t \left\| \frac{d\alpha}{du} \right\| du\,,$ (i2) $\displaystyle\frac{dl}{dt} = \left\| \frac{d\alpha}{dt} \right\|,$

(i3) $\displaystyle\frac{d\alpha}{dt} = \frac{dl}{dt}\, v$, gde je v tangentni vektor, (i4) $v = \displaystyle\frac{d\alpha}{dl}\,.$

Primedba. Kako ćemo u razmatranjima raznih problemima vezanim za krive posmatrati istovremeno izvode po nekom parametru (obično ćemo ga obeležavati sa) t i po prirodnom parametru l, izvode po parametru koji nije prirodan obeležavamo sa tačkom iznad imena funkcije, npr. $\dot{\alpha}$. Izvode po prirodnom parametru obeležavaćemo na standardni način (sa primom), tj. npr. α'.

Primer. (i1) Neka je $\alpha(t) = u_0 + t\, w$ prava.
Tada je

$$d\alpha/dt = w, \text{ i } l = h(t) = \textstyle\int_0^t |w|\, du = t\,|w|, \text{ pa imamo } t = g(l) = l/|w|\ .$$

Sada vidimo da je prirodna parametrizacija prave: $\beta(l) = u_0 + l\, w/|w|$. Primetimo da je tangentno polje $v(l) = w/|w|$, tako da je $dv/dl = 0$.

(i2) Neka je $\alpha(t) = (r\cos t, r\sin t)$, uz $r > 0$ parametrizacija kruga. Sada nalazimo da je $\dot{\alpha}(t) = (-r\sin t, r\cos t)$ i jasno,

$$\left\|\frac{d\alpha}{dt}\right\| = \sqrt{(-r\sin t)^2 + (r\cos t)^2} = r, \qquad \text{tako da je } l = h(t) = \textstyle\int_0^t r\,du \text{ odakle je}$$

$t = g(l) = l/r$, i konačno prirodna parametrizacija kruga radijusa l je:

$$\beta(l) = \left(r\cos\left(\frac{l}{r}\right), r\sin\left(\frac{l}{r}\right)\right).$$

Tangentno vektorsko polje krive α je: $\quad v(l) = \left(-\sin\left(\frac{l}{r}\right), \cos\left(\frac{l}{r}\right)\right)$,

i njegov izvod je

$$\frac{dv}{dl} = \left(-\frac{1}{r}\cos\left(\frac{l}{r}\right), -\frac{1}{r}\sin\left(\frac{l}{r}\right)\right), \qquad \text{odakle je:} \qquad \left\|\frac{dv}{dl}\right\| = \frac{1}{r}.$$

(i3) Neka je $\alpha(t) = (a\sin t, b\cos t)$, uz $a > b > 0$ parametrizacija elipse. Sada nalazimo da je $\dot{\alpha}(t) = (a\cos t, -b\sin t)$ i jasno,

$$\left\|\frac{d\alpha}{dt}\right\| = \sqrt{(a\cos t)^2 + (-b\sin t)^2} = \sqrt{a^2(1-\sin^2 t) + b^2\sin^2 t}$$

$$= a\sqrt{1 - \frac{a^2-b^2}{a^2}\sin^2 t} = a\sqrt{1 - e^2\sin^2 t}$$

gde je e ekscentricitet elipse. Ali, funkcija $\sqrt{1-e^2\sin^2 t}$ nema elementarnu primitivnu funkciju i nemoguće je izračunati integral $l = h(t) = \int_0^t \|d\alpha/du\|\,du$ koristeći Njutn-Lajbnicovu formulu. Gornji integral zove se eliptički integral jer se može interpretirati kao dužina luka elipse.

Prethodni primer pokazuje da veoma često nije moguće ili je veoma teško izračunati eksplicitno prirodnu parametrizaciju.

Krive u ravni

2.15. Malo istorije. Neka je data kriva u ravni, $\alpha(l) = (x(l), y(l))$ parametrizovana prirodnim parametrom. Tada je $\alpha'(l) = v(l) = (x'(l), y'(l))$. Obeležimo sada sa θ ugao između jediničnog vektora ose x i vektora $v(l)$ [5], vidi Sliku 5.

[5] Primetimo da je ugao θ određen do na 2π.

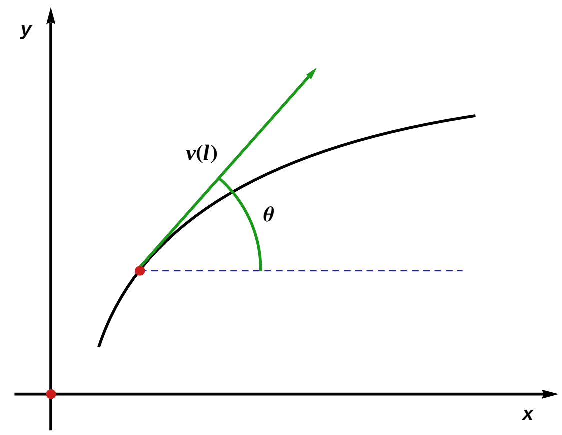
Sada iz definicije ugla θ nalazimo da je

$$x'(l) = \langle v(l), (1,0)\rangle = \cos\theta(l),$$

i $v(l) = (\cos\theta(l), \sin\theta(l))$. Tako da je

$$v(l)' = (-\sin\theta(l), \cos\theta(l))\left(\frac{d\theta}{dl}\right), \quad \text{i}$$

$$\kappa(l) = \|v'(l)\| = \left\|\frac{d\theta}{dl}\right\| .$$



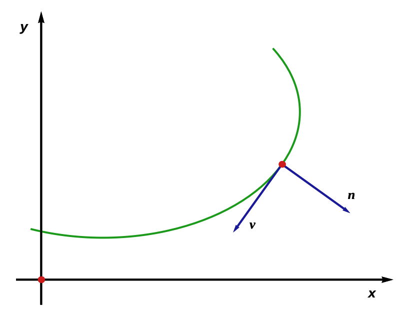
Slika 5. Geometrijski smisao krivine

Iz prethodne formule vidimo da funkcija $\kappa(l)$ koja se naziva krivina (do na znak) predstavlja meru promene ugla tangentnog vektorskog polja ravanske krive u odnosu na horizontalnu pravu. Ovaj pristup krivini ravanskih krivih dugujemo Ojleru (Euler, 1736).

2.16. Krivina. Neka je $\alpha : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ regularna kriva u ravni i neka je l njen prirodni parametar. Izaberimo u $\mathbb{R}^2$ ortonormiranu bazu (v,n) tako da je

(1) $v = d\alpha/dl$ gde je l prirodni parametar, tj. $\|v\| = 1$.

(2) vektor n je jedinični vektor ortogonalan na v, takav da je baza (v,n) pozitivna baza.



Slika 6. Freneov reper u tački

Pokretna baza $(v,n) = (v,n)(l) = (v(l), n(l))$ je jedinstveno određena i zove se Freneova baza (reper).

Istorijski gledano (vidi **2.15**), a i prirodno je zahtevati da je krivina pozitivna funkcija, kao intenzitet vektora ubrzanja krive. Tada vektor $n(l)$ Freneovog repera možemo definisati i iz relacije $\alpha''(l) = \kappa(l)\, n(l)$.
Primetimo, da je definicija koju koristimo nešto opštija jer za svaku regularnu krivu α uvek postoji Freneov reper, dok u slučaju pozitivnosti krivine krive, Freneov reper nije dobor definisan u tačkama krive u kojima se krivina poništava.

Teorema. *Neka je kriva α parametrizovana prirodnim parametarom l i neka je $(v(l), n(l))$ njen Freneov reper. Tada važi:*

$$\frac{d}{dl}\begin{pmatrix} v \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa \\ -\kappa & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v \\ n \end{pmatrix} . \tag{72}$$

Dokaz. Kako je $\langle v, v\rangle = \langle n, n\rangle = 1$, tada je

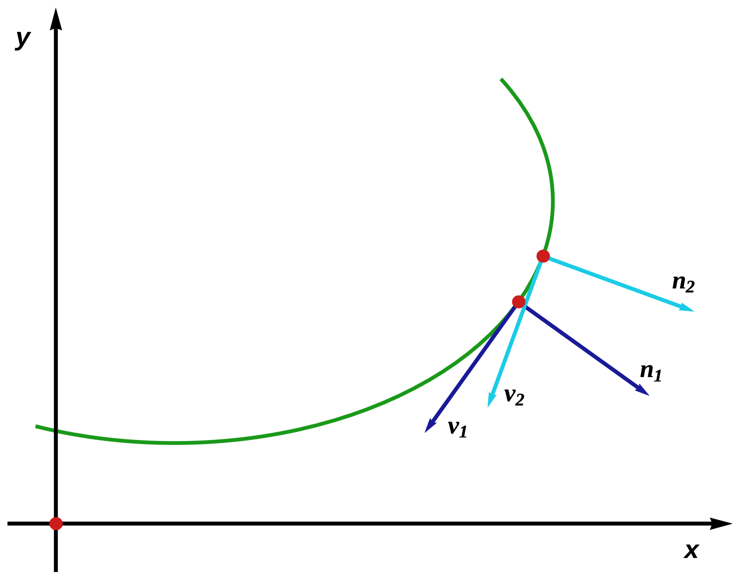
$$\frac{d\langle v, v\rangle}{dl} = 2\Big\langle \frac{dv}{dl}, v\Big\rangle = 0 = 2\Big\langle \frac{dn}{dl}, n\Big\rangle = \frac{d\langle n, n\rangle}{dl} .$$

Sledi da je $v \perp dv/dl$ i $n \perp dn/dl$, i kako je (v, n) ortonormirana baza, sledi da postoje funkcije (od l) a i b takve da je

$$\frac{dv}{dl} = a\,n\,, \qquad \frac{dn}{dl} = b\,v\,.$$

Iz $\langle v, n\rangle = 0$, imamo da je

$$0 = \frac{d\langle v, n\rangle}{dl} = \left\langle \frac{dv}{l}, n \right\rangle + \left\langle \frac{dn}{l}, v \right\rangle = a + b.$$



Slika 7. Promena Freneovog repera

Odakle je $\kappa = a = -b$. □

Primedba. Prethodna teorema omogućuje da definišemo pojmove:

- Jednačina(e) (72) nazivaju se Freneovim jednačinama ravanske krive.
- koeficijent κ koji se pojavljuje u Freneovim jednačinama zove se krivina (ravanske) krive. Primetimo da ako je α regularna kriva parametrizovana prirodnim parametrom onda je $\kappa(l) = \pm\|\alpha''(l)\|$.
- radijus krivine krive naziva se veličina $R = |\kappa|^{-1}$.

Primer. (i) Ako je krivina ravanske krive svuda jednaka 0 tada je ta kriva prava.

Rešenje. Kako je $\kappa(l) = \pm\|\alpha''(l)\| = 0$, prvo imamo da je $x''(l)^2 + y''(l)^2 = 0$, tako da je $x''(l) = y''(l) = 0$. Odavde dobijamo da je $x(l) = a_1\,l + c_1$ i $y(l) = a_2\,l + c_2$, tj. $\alpha(t) = (a_1\,l + c_1, a_2\,l + c_2) = l\,(a_1, a_2) + (c_1, c_2) = l\,w + c$, tj. α je prava.

(i2) Ako je radijus krivine ravanske krive jednaka konstanti $R > 0$, tada je ta kriva deo luka kruga poluprečnika R.

2.17. Određenost ravanske krive funkcijom krivine. Svaka kriva je do na izometriju euklidskog prostora određena svojom krivinom, što je posledica Pikarove (Picard) teoreme. Važi sledeća teorema.

TEOREMA. (1) *Neka je $\kappa : [0, L] \longrightarrow \mathbb{R}$ proizvoljna glatka funkcija. Tada postoji glatka kriva $\alpha : [0, L] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ čija je krivina κ.*

(2)*Neka su $\alpha_1 : [0, L] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ i $\alpha_2 : [0, L] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ glatke krive parametrizovane prirodnim parametrom takve da se njihove krivine podudaraju, tj. $\kappa_1(l) = \kappa_2(l)$ za sve $l \in [0, L]$. Tada postoji izometrija $\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ takva da je $\alpha_2(l) = \phi(\alpha_1(l))$, za sve $l \in [0, L]$.*

Dokaz. Izaberimo proizvoljnu ortonormiranu pozitivno orijentisanu bazu $\{v_0, n_0\}$ i posmatrajmo rešenje jednačine (72) sa početnim uslovima $v(0) = v_0$ i $n(0) = n_0$. Time smo dobili običnu diferencijalnu jednačinu u $\mathbb{R}^4$ sa glatkom desnom stranom jednačine, koja onda zadovoljava uslove Pikarove teoreme i ima jedinstveno rešenje.

Pokažimo da je za svako $l \in [0, L]$, $(v(l), n(l))$ pozitivno orijentisana ortonormirana baza. Neka $\Gamma = \Gamma(v, n) = (\gamma_{ij})$ Gramova matrica vektora $u_1 = v(l), u_2 = n(l)$ i neka je

$$(\xi_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & \kappa(l) \\ -\kappa(l) & 0 \end{pmatrix},$$ matrica iz Freneove jednačine (72). Tada je $\gamma_{ij} = \langle u_i, u_j \rangle$ i

$$\gamma'_{ij} = \langle u'_i, u_j \rangle + \langle u_i, u'_j \rangle = \sum_k \langle \xi_{ik} u_k, u_j \rangle + \sum_k \langle u_i, \xi_{jk} u_k \rangle = \sum_k \big(\xi_{ik}\gamma_{kj} + \xi_{jk}\gamma_{ik} \big).$$

Dakle, matrični elementi Gramove matrice γ_{ij} zadovoljavaju sledeći sistem diferencijalnih jednačina sa početnim uslovom:

$$(73) \quad \gamma'_{ij}(l) = \sum_k \big(\xi_{ik}(l)\gamma_{kj}(l) + \xi_{jk}(l)\gamma_{ik}(l) \big), \qquad \gamma_{ij}(0) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j. \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Prema Pikarovoj teoremi postoji jedinstveno rešenje sistema (73). Budući da je matrica (ξ_{ij}) kososimetrična[6], odmah vidimo da je

$$\gamma'_{ij}(l) = \sum_k \big(\xi_{ki}(l)\delta_{kj} + \xi_{kj}(l)\delta_{ik} \big) = \xi_{ji}(l) + \xi_{ij}(l) = 0 = \delta'_{ij}(l),$$

tj. $\gamma_{ij}(l) = \delta_{ij}$ je jedinstveno rešenje sistema (73). Dakle, za svako l vektori $v(l)$ i $n(l)$ čine pozitivnu ortonormiranu bazu u $\mathbb{R}^2$.

Sada definišemo krivu α formulom,

$$\alpha(l) = \int_0^l v(s)ds.$$

Lako se vidi da je l prirodni parametar krive α, v vektor brzine s obzirom na dati parametar i da je (v, n) ortonormirana baza takva da je $dv/dl = \kappa n$, gde je κ krivina krive α.

[6] Ponekad se koristi i termin antsimetrična.

(2) Grupa izometrija euklidskog prostora $\mathbb{R}^2$, koja čuva orijentaciju[7] generisana je translacijama $T_a : x \longrightarrow x + a$ i rotacijama $\Omega : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ oko nepokretne tačke, vidi **4.27** Teorema 3.

Freneove repere krivih α_1 i α_2 obeležimo sa (v_1, n_1) i (v_2, n_2), redom. Definišimo kretanje[8] ϕ kao kompoziciju translacije T_a i rotacije Ω oko tačke $\alpha_2(0)$:

$$\phi = \Omega \circ T_a : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad \text{gde je} \qquad a = \alpha_2(0) - \alpha_1(0), \quad \Omega v_1(0) = v_2(0).$$

Reper Frenea krive $\phi(\alpha_1(l))$ ima oblik $(\Omega\, v_1, \Omega\, n_1)$. Kako (v_1, n_1) i (v_2, n_2) zadovoljavaju jednačinu (72) imamo redom,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dl}\begin{pmatrix} \Omega\, v_1 \\ \Omega\, n_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \Omega & 0 \\ 0 & \Omega \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \kappa \\ -\kappa & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ n_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa \\ -\kappa & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Omega & 0 \\ 0 & \Omega \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ n_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \kappa \\ -\kappa & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Omega v_1 \\ \Omega n_1 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

tako da i $(\Omega v_1, \Omega n_1)$ zadovoljavaju istu jednačinu. Kako je još, $(\Omega v_1(0), \Omega n_1(0)) = (v_2(0), n_2(0))$, i kako je rešenje jednačine (72) sa početnim uslovima jedinstveno sledi

$$(\Omega v_1(l), \Omega n_1(l)) = (v_2(l), n_2(l)).$$

Iz izbora translacije T_a sledi da je

$$\alpha_2(l) = \alpha_2(0) + \int_0^l v_2(t)\, dt = \phi(\alpha_1(l)).$$

Time je teorema dokazana. $\square$

2.18. Obratni zadatak za ravanske krive. Obratni zadatak za ravanske krive ponekad nazivamo i rešavanje *prirodne jednačine* za ravansku krive, i on se sastoji u sledećem: *za datu pozitivnu funkcija $f : [0, L] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ odrediti regularnu krivu α čija je krivina κ, takva da je $\kappa(l) = f(l)$, l je prirodni parametar.*

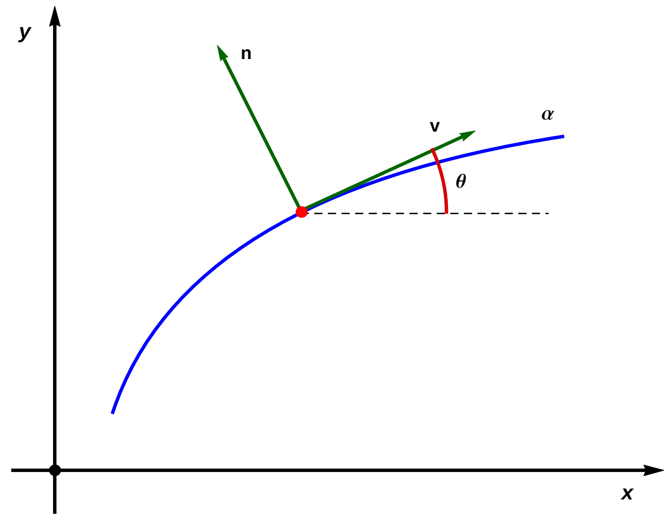
Jednačina $\kappa \equiv f$ zove se prirodna jednačina za ravansku krivu.

Rešimo sada prirodnu jednačinu.

[7] Takva preslikavanja u glavi 4 nazivamo *kretanjima*.

[8] Kretanje se ponekad zove i direktna izometrija.

Neka je α kriva orijentisana tako da se njen vektor brzine, duž krive, kreće suprotno od kazaljke na satu (vidi Sliku 8). Označimo sa $\theta(l)$ ugao između vektora brzine krive, $v(l)$, i vektora ose x. Kako tražimo krivu α koja je parametrizovana prirodnim parametrom, tj. $\|\alpha'(l)\| = 1$, sledi da je



Slika 8. Obratni zadatak za ravansku krivu

$$(74) \quad \alpha' = (\cos\theta(l), \sin\theta(l)), \quad \text{odakle je} \quad \alpha'' = \kappa(l)\, n(l) = \theta'(l)\,(-\sin\theta(l), \cos\theta(l)).$$

Zbog izbora krive α iz (74) prvo sledi (vidi Sliku 4) da je $\theta'(l) \geq 0$, jer je ortonormirani reper $\{v, n\}$ pozitivan, a zatim i da je $\kappa = \theta'$, i integracijom ove jednačine nalazimo

$$\theta(l) = \theta_0 + \int_0^l f(s)\, ds.$$

Budući da je $\alpha' = (x', y')$, integracijom jednačina (74) imamo

$$(75) \qquad x(l) = x_0 + \int_0^l \cos(\theta(s))\, ds \quad \text{i} \quad y(l) = y_0 + \int_0^l \sin(\theta(s))\, ds\,.$$

Sada na osnovu **2.17** Teorema sledi da je dobijeno rešenje jedinstveno do na izometriju prostora $\mathbb{R}^2$.

Primer. (1) Analitička rešenja obratnog zadatka za ravanske krive. Iz formula (75) jasno je da analitička rešenja možemo dobiti samo u relativno malom broju slučajeva. Tako imamo sledeće primere:

(a) ako je $f \equiv 0$, tada je α prava, vidi **2.14** Primer (i).

(b) ako je $f \equiv r \neq 0$, tada iz (28) redom nalazimo:

$$\theta(l) = \theta_0 + \int_0^l r\, ds = \theta_0 + l\, r,$$

$$x(l) = x_0 + \int_0^l \cos(\theta_0 + s\, r)\, ds = x_0 + \frac{1}{r}\sin\theta_0 - \frac{1}{r}\sin(\theta_0 + l\, r),$$

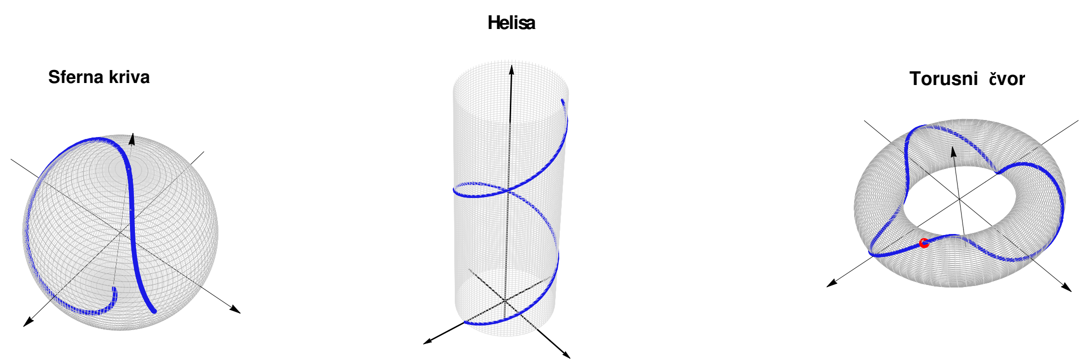
$$y(l) = y_0 + \int_0^l \sin(\theta_0 + s\, r)\, ds = y_0 - \frac{1}{r}\cos\theta_0 + \frac{1}{r}\cos(\theta_0 + l\, r).$$

Dakle, kriva α je deo kruga čiji je centar u tački $\left(x_0 + \frac{1}{r}\sin\theta_0, y_0 - \frac{1}{r}\cos\theta_0\right)$ i čiji je radijus $1/r$.

(2) Numerička rešenja obratnog zadatka za ravanske krive. S druge strane integrali u formulama (28) mogu se rešiti numerički, pogotovo korišćenjem računara.

Krive u prostoru

2.19. Krive u prostoru. Kako u prostoru imamo još jednu dodatnu koordinatu u odnosu na ravan, jasno i krive će imati bogatiju geometriju, kao što to pokazuju sledeći primeri, vidi Sliku 9.



Slika 9. Primeri prostornih krivih

2.20. Krivina i torzija. Neka je $\alpha : [0, L] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ regularna kriva parametrizovana prirodnim parametrom l.

Primetimo da:

- promenom orijentacije, tj. izborom negativne reparametrizacije β regularne krive α, tangentni vektor menja smer,

  tj. ako je $\beta(L-l) = \alpha(l)$ tada je: $\quad \dfrac{d\beta}{dl}(L-l) = -\dfrac{d\alpha}{dl}(l)$

  tako da $\alpha''(l)$ i krivina krive ostaju invarijantni na promenu orijentacije.
- u tačkama u kojima je $\kappa(l) \neq 0$, jedinični vektor $n(l)$ kolinearan sa $\alpha''(l)$ je dobro definisan

$$\alpha''(l) = \kappa(l)\, n(l), \quad \text{gde je} \quad \kappa(l) = \|\alpha''\| > 0.$$

- je $\langle \alpha''(l), \alpha'(l) \rangle = 0$, kao posledica relacije $\langle \alpha'(l), \alpha'(l) \rangle = 1$ (diferenciramo ovu relaciju po l). Tako dobijamo da je vektor $n(l) \perp \alpha'(l)$ i zbog toga ga nazivamo normalnim vektorom u tački $\alpha(l)$.

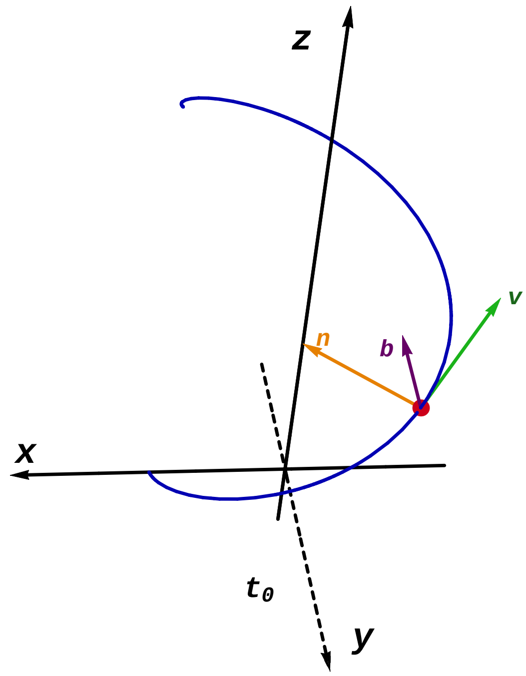
Ravan određena jediničnim i međusobno ortogonalnim vektorima $v(l) = \alpha'(l)$ i $n(l)$ naziva se oskulatorna ravan krive α u tački $\alpha(l)$.

Oskulatorna ravan nije dobro definisana u tačkama, $l \in \mathbb{I}$ u kojima je $\kappa(l) = 0$. Zbog toga kažemo da je $l \in \mathbb{I}$ singularna tačka reda 1 krive α ako je $\alpha''(l) = 0$.

Kako je za lokalnu analizu krivih potrebna oskulatorna ravan, u nastavku ovog teksta ograničavamo se na izučavanje krivih koje nemaju singularnih tačaka reda 1. Takve krive se ponekad nazivaju i biregularne krive. Dakle, regularna kriva α parametrizovana prirodnim parametrom je biregularna ako je $\alpha''(l) \neq 0$ za sve $l \in \mathbb{I}$. Sada za biregularnu krivu α možemo definisati i jedinični vektor binormale formulom

$$b(l) = v(l) \times n(l),$$

zatim možemo definisati redom pojmove normalne i rektifikacione ravni biregularne krive $\alpha(l)$ u tački $l \in \mathbb{I}$ kao ravni koje su ortogonalne na vektore $v(l)$ i $n(l)$, redom. Primetimo da smo na ovaj način za biregularnu krivu definisali pokretni prirodni reper (ortonormiranu bazu) koji se u svakoj tački krive $\alpha(l)$ sastoji od vektora $(v(l), n(l), b(l))$, vidi Sliku 4. Ovaj prirodni pokretni reper naziva se Frene (Frenet) - Serov (Serret) reper. Koordinatne ravni ovog repera su redom: oskulatorna, normalna i rektifikaciona ravan.

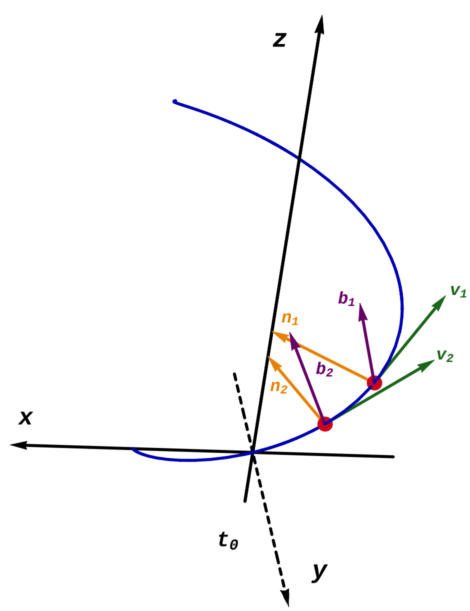


Slika 10. Frene-Serov reper

Sada imamo analogon teoreme iz tačke **2.10.**

Teorema. *Neka je (v, n, b) Frene-Serov reper biregularne krive $\alpha(l)$, gde je l prirodni parametar. Tada se on deformiše prema Frene-Serovim formulama:*

$$\frac{d}{dl}\begin{pmatrix} v \\ n \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \omega \\ 0 & -\omega & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v \\ n \\ b \end{pmatrix}. \tag{76}$$



Slika 11. Promena Frene-Serovog repera

Dokaz. Kako je $(v(l), n(l), b(l))$ ortonormirana baza za svaki $l \in \mathbb{I}$, dužina svakog od ta tri vektora je 1, te je izvod svakog od tih vektora ortogonalan na sam vektor, tako da odmah imamo:

$$\frac{d}{dl}\begin{pmatrix} v \\ n \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v \\ n \\ b \end{pmatrix}.$$

Ostalo je da primetimo da je,

$$\frac{d\langle v,n\rangle}{dl} = a_{12} + a_{21} = 0,$$
$$\frac{d\langle n,b\rangle}{dl} = a_{23} + a_{32} = 0,$$
$$\frac{d\langle v,b\rangle}{dl} = a_{13} + a_{31} = 0\,.$$

Iz definicije vektora n odmah sledi da je $a_{12} = \kappa$ i $a_{13} = 0$, tako da iz prve i treće jednakosti sledi da je $a_{21} = -\kappa$ i $a_{31} = 0$. Ako obeležimo sa $\omega = a_{32}$, iz druge jednakosti dobijamo da je $a_{23} = -\omega\,$. □

Primedba. Prethodna teorema omogućuje da definišemo pojam torzije krive. Koeficijent $\omega = -\langle db/dl, n\rangle$ koji se pojavljuje u Frene-Serovim jednačinama zove se torzija (ravanske) krive.

Primer. (i1) Neka su $\kappa > 0$ i ω konstante, i neka je helisa data svojom parametrizacijom $\alpha(l) = (r\cos(\lambda\, l), r\sin(\lambda\, l), \mu\, l)$.

- Za $\lambda = \sqrt{\kappa^2 + \omega^2}$, $\mu = \omega/\lambda$ i $r = \kappa/\lambda^2$, helisa je prirodno parametrizovana (sa l).
- Njena krivina je κ, a njena torzija je ω.

Proverimo da je kriva parametrizovana prirodnim parametrom. U tu svrhu računamo,

$$\alpha'(l) = (-\lambda\, r\sin(\lambda\, l), \lambda r\cos(\lambda\, l), \mu),$$

tako da redom sledi,

$$\|\alpha'(l)\|^2 = \lambda^2 r^2 + \mu^2 = \frac{\kappa^2}{\lambda^4}\,\lambda^2 + \frac{\omega^2}{\lambda^2} = \frac{\kappa^2 + \omega^2}{\lambda^2} = 1.$$

Sada odredimo krivinu krive α. Kako je

$$\alpha''(l) = (-\lambda^2\, r\cos(\lambda\, l), -\lambda^2 r\sin(\lambda\, l), 0) = \lambda^2\, r(-\cos(\lambda\, l), -\sin(\lambda\, l), 0),$$

odakle je

$$n(l) = (-\cos(\lambda\, l), -\sin(\lambda\, l), 0), \quad \text{i} \quad \kappa(l) = \lambda^2\, r = \kappa.$$

Da bismo našli torziju krive potrebno je odrediti i vektor binormale,

$$b(l) = v(l) \times n(l) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -\lambda\, r\sin(\lambda\, l) & \lambda r\cos(\lambda\, l) & \mu \\ -\cos(\lambda\, l) & -\sin(\lambda\, l) & 0 \end{vmatrix} = (\mu\sin(\lambda l), -\mu\cos(\lambda l), \lambda r).$$

I na kraju odredimo torziju krive $\alpha(l)$,

$$\omega(l) = -\langle \frac{db}{dl}, n\rangle = -\langle (\mu\lambda\cos(\lambda l), \mu\lambda\sin(\lambda l), 0), (-\cos(\lambda\, l), -\sin(\lambda\, l), 0)\rangle = \lambda\mu = \omega.$$

(i2) **Generalisana helisa** je regularna kriva α za koju postoji jedinični vektor u, takav da je $\langle u, v(l)\rangle = \cos\theta_0$ konstanta.

Važi sledeća karakterizacija generalisane helise (Lancret, 1802):

Posledica 1. *Prirodno parametrizovana biregularna krive α je generalisana helisa akko postoji konstanta c takva da je $w = c\,\kappa$.*

Dokaz. Pretpostavimo prvo da je α generalisana helisa, tada je $\langle u, v(l)\rangle = \cos\theta_0$, za neki fiksirani ugao θ_0. Primetimo da je $\theta_0 \notin \{0, \pi\}$, jer bi u suprotnom bilo $u = \pm v(l)$, tj. tada bi bilo $\kappa = 0$, a to je nemoguće. Sada računamo,

$$0 = \langle u, v(l)\rangle' = \langle u, v(l)'\rangle = \kappa(l)\,\langle u, n(l)\rangle,$$

dakle, vektor u je normalan na $n(l)$ za svako l, tako da je $u \in \mathcal{L}\{v(l), b(l)\}$, tj.

$$u = \xi(l)v(l) + \eta(l)b(l), \quad \text{pri čemu je } \xi(l) = \cos\theta_0, \text{ i } \eta(l) = \langle u, b(l)\rangle.$$

Budući da je vektor u jedinični sledi da je $\eta(l) = \sin\theta_0$, tako da je

$$0 = u' = \cos\theta_0\, v(l)' + \sin\theta_0\, b(l)' = \kappa(l)\cos\theta_0\, n(l) - w\sin\theta_0\, n(l), \tag{77}$$

odakle je $\kappa(l)\cos\theta_0 = w(l)\sin\theta_0$, i kako je $\sin\theta_0 \neq 0$, sledi da je $w = c\,\kappa$, za $c = \operatorname{ctg}\theta_0$.

Obratno, ako je $w = c\,\kappa$, definišemo (inspirisani prvim delom dokaza) $c = \operatorname{ctg}\theta_0$, za $0 < \theta_0 < \pi$, i neka je $u = \cos\theta_0\, v(l) + \sin\theta_0\, b(l)$. Primena Frene-Serovih formula, kao u (77), implicira da je $u' = 0$. Dakle, vektor u je konstantan, i sada lako nalazimo da je $\langle u, v(l)\rangle = \cos\theta_0$ konstanta, dakle α je generalisana helisa. □

Zadatak. Pokažite da ako su krivina i torzija neke biregularne krive α konstante da je tada α standardna kružna helisa.

Posledica 2. *Neka je $\alpha(l)$ biregularna kriva jedinične brzine. Tada je ekvivalentno:*

(i1) *α je ravanska kriva.*

(i2) *b je konstantan vektor.*

(i3) *$\omega(l) = 0$ za svako l.*

Dokaz. Ekvivalentnost iskaza (i2) i (i3) direktno sledi iz poslednje Frene-Serove jednačine, $b(l)' = -\omega\, n(l)$.

Ako je α ravanska kriva pogodnim izborom koordinata možemo pretpostaviti da α leži u ravni (x, y), tj. $\alpha(l) = (x(l), y(l), 0)$. Tako da je $v(l) = (x'(l), y'(l), 0)$, a zatim da i vektor $n(l)$ pripada ravni (x, y). Kako su $v(l)$ i $n(l)$ jedinični vektori sledi da je $b(l) = (0, 0, 1)$, za svako l, tj. $b(l)$ je konstanta. Time smo pokazali da iz (i1) sledi (i2). Obratno, neka je x_0 neka tačka krive α, recimo $x_0 = \alpha(t_0)$. Sada koristeći da je $b'(l) = 0$ računamo,

$$\langle \alpha(l) - x_0, b\rangle' = \langle \alpha'(l), b\rangle + \langle \alpha(l) - x_0, b'\rangle = \langle v(l), b(l)\rangle = 0.$$

Odavde sledi da je $\langle \alpha(l) - x_0, b\rangle$ konstanta, a kako je za $l = t_0$ $\langle \alpha(t_0) - x_0, b\rangle = 0$ sledi da je ta konstanta 0, pa kriva $\alpha(l)$ leži u ravni. □

2.21. Uopštene Frene-Serove formule. U ranijim tačkama odredili smo Frene-Serove formule, kao i osnovne parametre (torziju i krivinu) koji određuju krivu u potpunosti. Kako je ponekad nemoguće reparametrizovati datu krivu prirodnim parametrom, potrebno je naći Frene-Serove formule, kao i torziju i krivinu kada kriva nije parametrizovana prirodnim parametrom.

Neka je $\alpha : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ regularna kriva i neka je $l(t)$ funkcija dužine luka. Tada je $\alpha(t) = \beta(l(t))$, gde je $\beta(l)$ reparametrizovana kriva $\alpha(t)$ prirodnim parametrom. Primetimo da je

$$\left\|\frac{d\alpha}{dt}\right\| = \left\|\frac{d\beta}{dl}\frac{dl}{dt}\right\|, \quad \text{odakle sledi (jer je } \frac{dl}{dt} > 0 \text{ i } \left\|\frac{d\beta}{dl}\right\| = 1\text{)} \quad 0 < \frac{dl}{dt} = \left\|\frac{d\alpha}{dt}\right\|$$

Želimo da izračunamo Frene-Serovu bazu, kao i krivinu i torziju u terminima promenljive t. Obeležimo sa $v = v(l), n = n(l)$ i $b = b(l)$, vektore Frene-Serovog repera s obzirom na prirodnu parametrizaciju, a sa $\kappa(l)$ i $\omega(l)$ odgovarajuće funkcije krivine i torzije.

Lema. *Neka $\alpha(t)$ biregularna glatka kriva, tada je*

$$(1)\ \dot{\alpha} = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{dl}{dt}\, v \qquad\qquad (2)\ \ddot{\alpha} = \frac{d^2\alpha}{dt^2} = \frac{d^2 l}{dt^2}\, v + \kappa\left(\frac{dl}{dt}\right)^2 n$$

Dokaz. (1) Kako je $\alpha(t) = \beta(l(t))$, imamo

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\beta}{dl}\frac{dl}{dt} = \frac{dl}{dt}\, v.$$

(2) Sada iz (i1) imamo,

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dl}{dt}\, v\right) = \frac{d^2 l}{dt^2}\, v + \frac{dl}{dt}\frac{dv}{dl}\,\frac{dl}{dt} = \{\text{F-S for.}\} = \frac{d^2 l}{dt^2}\, v + \kappa\left(\frac{dl}{dt}\right)^2 n. \qquad \square$$

Teorema 1. *Neka je $\alpha(t)$ biregularna kriva, tada je*

$$(\text{i1})\ v = \frac{\dot{\alpha}(t)}{\|\dot{\alpha}(t)\|}, \qquad (\text{i2})\ b = \frac{\dot{\alpha}(t) \times \ddot{\alpha}(t)}{\|\dot{\alpha}(t) \times \ddot{\alpha}(t)\|}, \qquad (\text{i3})\ n = b \times v,$$

$$(\text{i4})\ \kappa = \frac{\|\dot{\alpha}(t) \times \ddot{\alpha}(t)\|}{\|\dot{\alpha}(t)\|^3}, \qquad (\text{i5})\ \omega = \frac{[\dot{\alpha}(t), \ddot{\alpha}(t), \dddot{\alpha}(t)]}{\|\dot{\alpha}(t) \times \ddot{\alpha}(t)\|^2}.$$

Dokaz. (i1) iz tvrdnje (1) prethodne leme, činjenice da je $dl/dt > 0$ i da je v jedinični vektor, prvo sledi da je $dl/dt = \|\dot\alpha(t)\|$, a zatim da je $v = \dot\alpha(t)/\|\dot\alpha(t)\|$.
(i4) koristeći tvrdnju (2) prethodne leme i (i1) imamo redom,

$$\dot\alpha(t) \times \ddot\alpha(t) = \left(\frac{dl}{dt}\, v\right) \times \left(\frac{d^2l}{dt^2}\, v + \kappa \left(\frac{dl}{dt}\right)^2 n\right) = \{F-S\} = \kappa \left(\frac{dl}{dt}\right)^3 b$$

Kako je b jedinični vektor zaključujemo da je $\|\dot\alpha(t) \times \ddot\alpha(t)\| = \kappa \|\dot\alpha(t)\|^3$, odakle sledi tražena formula za krivinu.

(i2) kako je $\kappa \neq 0$ iz (i4) dobijamo: $b = \dfrac{\dot\alpha(t) \times \ddot\alpha(t)}{\kappa\|\dot\alpha(t)\|^3} = \dfrac{\dot\alpha(t) \times \ddot\alpha(t)}{\|\dot\alpha(t) \times \ddot\alpha(t)\|}$.

(i3) sledi iz definicije vektora binormale i svojstava vektorskog proizvoda.
(i5) nađimo $\dddot\alpha(t)$ koristeći (2) iz prethodne leme:

$$\begin{aligned}
\dddot\alpha(t) &= \frac{d}{dt}\left(\frac{d^2l}{dt^2}\, v + \kappa \left(\frac{dl}{dt}\right)^2 n\right) = \frac{d^3l}{dt^3} v + \frac{d^2l}{dt^2}\frac{dv}{dt} + \frac{d}{dt}\left(\kappa\left(\frac{dl}{dt}\right)^2\right) n + \kappa\left(\frac{dl}{dt}\right)^2 \frac{dn}{dt} \\
&= \frac{d^3l}{dt^3} v + \frac{d^2l}{dt^2}\frac{dv}{dl}\frac{dl}{dt} + \frac{d}{dt}\left(\kappa\left(\frac{dl}{dt}\right)^2\right) n + \kappa\left(\frac{dl}{dt}\right)^3 \frac{dn}{dl} \\
&= \frac{d^3l}{dt^3} v + \kappa\frac{dl}{dt}\frac{d^2l}{dt^2} n + \frac{d}{dt}\left(\kappa\left(\frac{dl}{dt}\right)^2\right) n - \kappa^2\left(\frac{dl}{dt}\right)^3 v + \kappa\,\omega\left(\frac{dl}{dt}\right)^3 b \\
&= \left(\frac{d^3l}{dt^3} - \kappa^2\left(\frac{dl}{dt}\right)^3\right) v + \left(\kappa\frac{dl}{dt}\frac{d^2l}{dt^2} + \frac{d}{dt}\left(\kappa\left(\frac{dl}{dt}\right)^2\right)\right) n + \kappa\,\omega\left(\frac{dl}{dt}\right)^3 b.
\end{aligned}$$

I na kraju imamo,

$$\begin{aligned}
[\dot\alpha(t), \ddot\alpha(t), \dddot\alpha(t)] &= \langle \dot\alpha(t) \times \ddot\alpha(t), \dddot\alpha(t)\rangle = \left\langle \kappa\left(\frac{dl}{dt}\right)^3 b, \dddot\alpha(t)\right\rangle = \omega\left(\kappa\left(\frac{dl}{dt}\right)^3\right)^2 \\
&= \omega \|\dot\alpha(t) \times \ddot\alpha(t)\|^2.
\end{aligned}$$

Odavde, sledi tražena formula za torziju. □

Sada možemo naći i Frene-Serove formule u slučaju kada data kriva nije parametrizovana dužinom luka. Preciznije, važi sledeća teorema.

Teorema 2. *Neka $\alpha(t)$ biregularna glatka kriva, tada važe uopštene Frene-Serove formule:*

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} v \\ n \\ b \end{pmatrix} = \mathsf{v}(t)\begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \omega \\ 0 & -\omega & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v \\ n \\ b \end{pmatrix}, \tag{78}$$

gde je $\mathsf{v}(t) = \|\dot\alpha(t)\|$.

Dokaz. Sledi iz Frene-Serovih formula za prirodni parametar i činjenice da je

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dl}\frac{dl}{dt} = \kappa \mathsf{v}(t)\, n, \quad \text{analogno je} \quad \frac{dn}{dt} = -\kappa\, \mathsf{v}(t) v + \omega \mathsf{v}(t)\, b \;\; \text{i} \;\; \frac{db}{dt} = -\omega\, \mathsf{v}(t)\, n.$$

Time je dokaz završen. □

2.22. Određenost krive u $\mathbb{R}^3$ krivinom i torzijom. Svaka biregularna kriva je do na izometriju euklidskog prostora određena svojom krivinom i torzijom. Preciznije, važi sledeća teorema.

TEOREMA. (1) *Neka su $\kappa : [0, L] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ i $\omega : [0, L] \longrightarrow \mathbb{R}$ glatke funkcije. Tada postoji glatka (biregularna) kriva $\alpha : [0, L] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ čija je krivina κ i čija je torzija ω.*
(2) *Neka su $\alpha_1 : [0, L] \longrightarrow R^3$ i $\alpha_2 : [0, L] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ glatke biregularne krive parametrizovane prirodnim parametrom takve da se njihove krivine κ_1, κ_2 i torzije ω_1, ω_2 podudaraju na $[0, L]$. Tada postoji direktna izometrija (kretanje) $\phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ takva da je $\alpha_2(l) = \phi(\alpha_1(l))$, za sve $l \in [0, L]$.*

Dokaz. Analogan teoremi za krive u ravni. □

Prethodna teorema u potpunosti opisuje geometriju krive do na njeno smeštanje u prostoru. Ovo tvrđenje je zapravo analogno tvrđenju kada za trougao kažemo da je u potpunosti određen sa dva ugla i jednom stranicom, ili da je krug u potpunosti određen svojim radijusom. Istorijski, matematičari o funkcijama κ i ω kažu da pripadaju unutrašnjoj geometriji krive.

2.23. Obratni zadatak za prostorne krive. Sada se prirodno nameće obratni zadatak za krive: *koristeći Frene-Serovu teoremu karakterisati krivu na osnovu poznavanja njene krivine i torzije.*

Kao što je to obično u matematici obratni zadatak je teži od polaznog, tako da u opštem slučaju nije lako rekonstruisati krivu iz poznate krivine i torzije te krive. Obratni zadatak za krive ponekad nazivamo i rešavanje *prirodnih jednačina* za krive. Sledeća propozicija daje neke slučajeve kada je to moguće.

PROPOZICIJA. *Neka je $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^3$ neka prostorna biregularna kriva, i neka su date funkcije $\kappa : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ i $\omega : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}$.*

(i1) *Ako je $\kappa \equiv 0$ tada je Γ duž, poluprava ili prava.*
(i2) *Ako je $\kappa \neq 0$ i $\omega \equiv 0$, Γ je ravanska kriva.*
(i3) *Ako je $\kappa(l) = r > 0$ i $\omega \equiv 0$, Γ je luk kruga čiji je poluprečnik $1/r$.*
(i4) *Ako su κ i ω konstanta tada je Γ helisa.*
(i5) *Ako je $0 \neq c = \omega(l)/\kappa(l)$ konstanta tada je Γ generalisana helisa.*

Dokaz.(i1) Analogan dokazu za krivu u ravni čija je krivina 0, vidi **2.16** Primer (i).
(i2) je dokazano u **2.19** Posledica.

(i3) iz (i2) sledi da je kriva Γ ravanska, i tada pogodnim izborom koordinata možemo pretpostaviti da je $\Gamma = \alpha(\mathbb{I})$, gde je $\mathbb{I} = (a,b)$, $\alpha : \mathbb{I} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ i $\alpha(t) = (x_1(t), x_2(t), 0)$. Sada **2.18 Primer (1a)** implicira da je Γ luk kruga čiji je poluprečnik $1/r$.

(i4) Neka su $v = (v_1, v_2, v_3)$, $n = (n_1, n_2, n_3)$ i $b = (b_1, b_2, b_3)$. Tada Frene-Serove jednačine definišu sledeći sistem od *devet* diferencijalnih jednačina, koje možemo grupisati u *tri grupe po tri jednačine*:

$$v_i' = \kappa\, n_i, \quad n_i' = -\kappa\, v_i + \omega\, b_i, \quad b_i' = -\omega\, n_i, \quad i = 1,2,3. \tag{79}$$

Ako prvo saberemo prve jednačine sistema (79) pomnožene sa ω, i treće pomnožene sa κ, i iskoristimo još da su κ i ω konstante dobićemo $(i = 1,2,3)$:

$$0 = \omega\, v_i' + \kappa\, b_i' = (\omega\, v_i + \kappa\, b_i)' \quad \text{tj. } \omega\, v_i + \kappa\, b_i = c_i, \text{ gde su } c_i \text{ neke konstante.}$$

Diferenciranjem prve jednačine iz gornjeg sistema (79) prvo imamo, $n_i' = \dfrac{v_i''}{\kappa}$, a zatim kombinujući sa drugim jednačinama i koristeći da je $b_i = \dfrac{c_i - \omega\, v_i}{\kappa}$ imamo, redom

$$\frac{v_i''}{\kappa} = n_i = -\kappa v_i + \omega \frac{c_i - \omega\, v_i}{\kappa} = c_i\, \frac{\omega}{\kappa} - \big(\kappa + \frac{\omega^2}{\kappa}\big) v_i, \text{ i nakon množenja sa } \kappa \text{ sledi}$$

$$v_i'' + (\kappa^2 + \omega^2) v_i = c_i\, \omega. \tag{80}$$

Rešenje jednačine (80) je oblika

$$\begin{aligned} v_i(l) &= \xi_i \cos(\sqrt{\kappa^2 + \omega^2}\, l) + \eta_i \sin(\sqrt{\kappa^2 + \omega^2}\, l) + \frac{c_i\, \omega}{\kappa^2 + \omega^2}\,, \\ n_i(l) &= -\xi_i \frac{\sqrt{\kappa^2 + \omega^2}}{\kappa} \sin(\sqrt{\kappa^2 + \omega^2}\, l) + \eta_i \frac{\sqrt{\kappa^2 + \omega^2}}{\kappa} \cos(\sqrt{\kappa^2 + \omega^2}\, l), \\ b_i(l) &= -\frac{\omega\, \xi_i}{\kappa} \cos(\sqrt{\kappa^2 + \omega^2}\, l) - \frac{\omega\, \eta_i}{\kappa} \sin(\sqrt{\kappa^2 + \omega^2}\, l) + \frac{c_i\, \kappa}{\kappa^2 + \omega^2}, \end{aligned} \tag{81}$$

Primetimo da početni uslovi određuju položaj krive u prostoru i najjednostavnije je uzeti da su vektori Frene-Serovog repera za $t = 0 : v(0) = (1,0,0)$, $n(0) = (0,1,0)$, $b(0) = (0,0,1)$, kao i da kriva prolazi kroz koordinatni početak, tj. $\alpha(0) = (0,0,0)$.

U našem slučaju da bismo lakše prepoznali da se zaista radi o helisi, koristimo **2.20 Primer (i1)** u kojem je data prirodna parametrizacija helise u terminima njene krivine i torzije tako da prvo biramo početne uslove

$$v(0) = (0, \lambda\, r, \mu), \ n(0) = (-1,0,0), \ b(0) = (0, -\mu, \lambda\, r), \text{ gde je (vidi pomenuti primer),}$$

$$\lambda = \sqrt{\kappa^2 + \omega^2}\,, \quad r = \frac{\kappa}{\lambda^2} = \frac{\kappa}{\kappa^2 + \omega^2}\,, \quad \mu = \frac{\omega}{\lambda} = \frac{\omega}{\sqrt{\kappa^2 + \omega^2}}\,.$$

Zamenjujući ove vrednosti u opšte rešenje dobijamo:

$$v_1(0) = 0 = \xi_1 + \frac{c_1\,\mu}{\lambda}\,, \qquad v_2(0) = \lambda\, r = \frac{\kappa}{\lambda} = \xi_2 + \frac{c_2\,\mu}{\lambda}\,, \qquad v_3(0) = \mu = \frac{\omega}{\lambda} = \xi_3 + \frac{c_3\,\mu}{\lambda}\,,$$

$$n_1(0) = -1 = \eta_1\,\frac{\lambda}{\kappa}\,, \qquad n_2(0) = 0 = \eta_2\,\frac{\lambda}{\kappa}\,, \qquad n_3(0) = -1 = \eta_3\,\frac{\lambda}{\kappa}\,,$$

$$b_1(0) = 0 = -\frac{\omega\,\xi_1}{\kappa} + \frac{c_1\,\kappa}{\lambda^2}\,, \qquad b_2(0) = -\mu = -\frac{\omega}{\lambda} = -\frac{\omega\,\xi_2}{\kappa} + \frac{c_2\,\kappa}{\lambda^2}\,, \qquad v_3(0) = \lambda\, r = \frac{\kappa}{\lambda} = -\frac{\omega\,\xi_3}{\kappa} + \frac{c_3\,\kappa}{\lambda^2}\,.$$

Rešavajući ova tri istovetna i jednostavna sistema nalazimo da je:

$$\xi_1 = c_1 = 0,\ \eta_1 = -\lambda\, r, \quad \xi_2 = \lambda\, r,\ \eta_2 = c_2 = 0, \quad \xi_3 = \eta_3 = 0,\ c_3 = \lambda,$$

odakle, konačno nalazimo:

$$x'(l) = v_1(l) = -\lambda\, r\, \sin(\lambda\, l), \quad y'(l) = v_2(l) = \lambda\, r\, \cos(\lambda\, l), \quad z'(l) = v_3(l) = \mu\,. \tag{82}$$

Ako sada još uzmemo i početni uslov $\alpha(0) = (r, 0, 0)$, nakon integracije jednačina (82), konačno dobijamo:

$$x(l) = r\, \cos(\lambda\, l), \quad y(l) = r\, \sin(\lambda\, l), \quad z(l) = \mu\, l,$$

tj. tražena kriva je helisa (kružna) $\alpha(l) = (r\, \cos(\lambda\, l), r\, \sin(\lambda\, l), \mu\, l)$.

Napomenimo da na osnovu jedinstvenosti iz **2.22** Teorema i **2.20.** Primer (i1) sledi da je helisa jedinstveno rešenje sistema (79) do na izometriju prostora $\mathbb{R}^3$.

(i5) Potrebno je samo pokazati (vidi **2.21** Posledica 1 da postoji neki konstantni vektor u takav da je

$$\langle u, v(l)\rangle = c = \cos\theta_0.$$

Primetimo da ako u sistemu (79), nakon korišćenja uslova $\kappa = c\,\omega$, pomnožimo 3. jednačinu (za b_i') sa c i dodamo 1. jednačini (za v_i') dobićemo

$$0 = v_i' + c\, b_i' = (v_i + c\, b_i)', \quad \text{tj. } v_i + c\, b_i = d_i, \text{ gde su } d_i \text{ neke konstante.}$$

Kako je $c \neq 0$, postoji $\theta_0 \in (0, \pi)$ takav da je $c = \mathrm{ctg}\theta_0$, tako da prethodnu relaciju možemo prepisati u obliku $u_i = v_i \cos\theta_0 + b_i \sin\theta_0$, za $i = 1, 2, 3$ gde su brojevi u_i konstante. Posmatrajmo sada konstantni vektor $u = (u_1, u_2, u_3) = \cos\theta_0\, v + \sin\theta_0\, b$. Kako su vektori v i b jedinični i međusobno ortogonalni, sledi da je i vektor u jediničan i da je $\langle u, v(l)\rangle = \cos\theta_0$, što je i trebalo pokazati. $\square$

Dokaz svojstva (i4) iz prethodne propozicija pokazuje da nema isuviše mnogo analitičkih rešenja sistema (79) za proizvoljne funkcije krivine i torzije, ali je zato moguće rešiti isti numeričkim metodama.

2.24. Lokalna kanonska forma. Kako se jedna od najboljih metoda za rešavanje geometrijskih problema sastoji u pronalaženju koordinatnog sistema prilagođenog geometriji posmatranih objekata (prirodnog kordinatnog sistema), i kako smo videli u proučavanju lokalnih svojstava krivih postoji prirodni Frene-Serov koordinatni sistem, očekujemo da ćemo najlakše dobijati informacije o lokalnoj geometriji krivih posmatrajući probleme u tom koordinatnom sistemu. Dakle, neka je $\alpha : \mathbb{I} = (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ glatka biregularna kriva parametrizovana prirodnim parametrom. Napišimo jednačinu krive u okolini tačke $\alpha(l_0)$ koristeći prirodni triedar $\{v(l_0), n(l_0),\ b(l_0)\}$. Bez umanjenja opštosti možemo pretpostaviti da je $l_0 = 0$, i posmatrajmo Tejlorov razvoj,

$$\alpha(l) = \alpha(0) + l\,\alpha'(0) + \frac{l^2}{2!}\,\alpha''(0) + \frac{l^3}{3!}\,\alpha'''(0) + R, \qquad \text{gde je} \qquad \lim_{l \longrightarrow 0} \frac{R}{l^3} = 0.$$

Kako je $\alpha'(0) = v(0) = v$ i $\alpha''(0) = \kappa(0)\,n(0) = \kappa\,n$ imamo da je

$$\alpha'''(0) = (k\,n)'_{|l=0} = \kappa'\,n + \kappa\,n' = \kappa' n - \kappa^2 v + \kappa\,\omega\,b,$$

tako da dobijamo

$$\alpha(l) - \alpha(0) = \left(l - \frac{\kappa^2 l^3}{6}\right) v + \left(\frac{\kappa l^2}{2} + \frac{\kappa' l^3}{6}\right) n + \frac{l^3}{6}\,\kappa\,\omega\,b + R\,.$$

Primetimo da su u prethodnim formulama sve veličine računate za $l = 0$. Tako je npr. $\kappa = \kappa(0) = \kappa_0$ i $\omega = \omega(0) = \omega_0$. Izaberimo sada koordinatni sistem $Oxyz$ takav da je $\alpha(0) = O$, $v(0) = v = (1, 0, 0)$, $n(0) = n = (0, 1, 0)$ i $b(0) = b = (0, 0, 1)$. U tom sistemu, u okolini tačke O koordinate tačka krive $\alpha(l) = (x(l), y(l), z(l))$ su:

$$(83) \qquad x(l) = l - \frac{\kappa^2 l^3}{6} + R_x, \qquad y(l) = \frac{\kappa}{2}\,l^2 + \frac{\kappa'\,l^3}{6} + R_y, \qquad z(l) = \frac{\kappa\,\omega}{6}\,l^3 + R_z,$$

gde je $R = (R_x, R_y, R_z)$. Reprezentacija (83) zove se lokalna kanonska forma krive α u okolini tačke $l = 0$.

Neke primene lokalne kanonske forme.

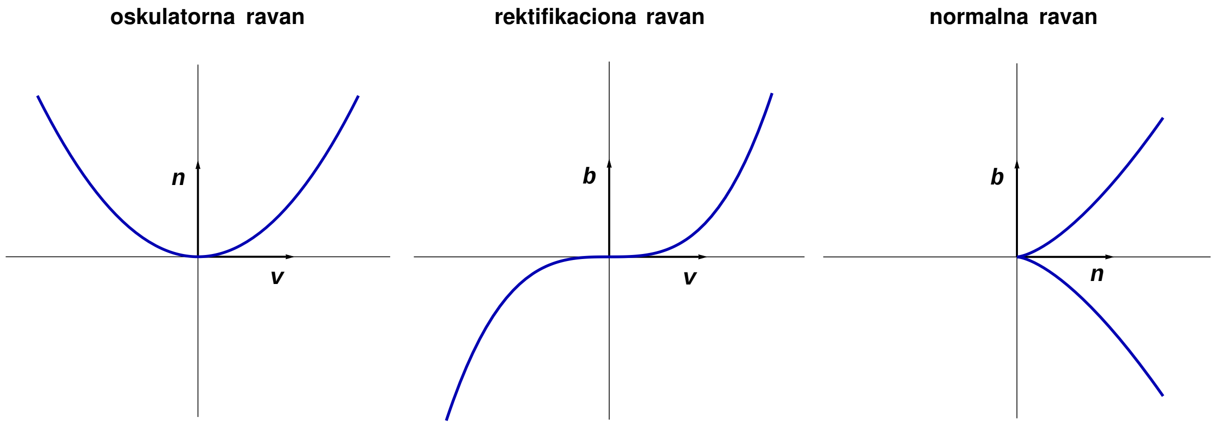
- koristeći Tejlorov razvoj možemo naći i ortogonalne projekcije krive α na oskulatornu, rektifikacionu i normalnu ravan u tački $P = \alpha(0)$, koje otkrivaju neke važne informacije o geometriji krive α u okolini tačke P. Iz izraza (83) vidimo da su pomenute projekcije, u generičkom slučaju $\kappa\omega \neq 0$, jednake:

  (o) $\left(t, \dfrac{\kappa}{2}\,t^2 + \dfrac{\kappa'}{6}\,t^3 + R'_y\right)$ projekcija na oskulatornu ravan,

  (r) $\left(t, \dfrac{\kappa\,\omega}{6}\,t^3 + R'_z\right)$ projekcija na rektifikacionu ravan,

  (n) $\left(t^2, \dfrac{\sqrt{2}\,\omega}{3\,\sqrt{\kappa}}\,t^3 + R''_z\right)$ projekcija na normalnu ravan,

  gde je $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{R_w}{t^3} = 0$ i $R_w \in \{R'_y, R'_z, R''_z\}$. Na Slici 12 prikazane su ove projekcije.



Slika 12. Projekcije

- za dovoljno malo l iz treće od formula u (83) sledi da za $\omega > 0$, $z(l)$ raste. Ako pod pozitivnom stranom oskulatorne ravni podrazumevamo onu koja je sa iste strane kao i vrh vektora b, i kako je $z(0) = 0$, prethodnu primedbu možemo formulisati i na sledeći način: ako je torzija pozitivna u tački $l = 0$ kriva će (ako prirodni parametar raste) se nalaziti sa pozitivne strane oskulatornu ravni. Slično se može interpretirati i slučaj kada je torzija negativna u tački $l = 0$.
- postoji okolina $\mathbb{J} \subseteq \mathbb{I}$ tačke $l = 0$ takva da je skup $\alpha(\mathbb{J})$ sadržan sa pozitivne strane rektifikacione ravni. Kako je $\kappa > 0$ za dovoljno malo l imamo $y(l) \geq 0$, i $y(l) = 0$ ako i samo ako je $l = 0$.

Krive u $\mathbb{R}^n$

2.25. Prirodna generalizacija. Neka je $\alpha(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) = (x_i(t))$ glatka regularna kriva sa neke otvorene okoline nule $\mathbb{I} = (a, b)$ u afinom prostoru $\mathbb{R}^n$. Ako je $\beta : \mathbb{I}' = (c, d)$ neka njena reparametrizacija (i kažemo da su regularne krive α i β ekvivalentne), tada postoji glatki difeomorizam $\phi : (c, d) \longrightarrow (a, b)$ takav da je $\beta = \alpha \circ \phi$. Relacija ekvivalentnosti krivih je relacija ekvivalencije na skupu svih parametrizovanih krivih u afinom prostoru $\mathbb{R}^n$.

Za krivu $\alpha(t) \subseteq \mathbb{R}^n$ u tački $P = \alpha(t_0)$, $t_0 \in \mathbb{I}$ definišemo $k-$oskulatorni prostor krive α u tački P kao linearni omotač prvih k izvoda funkcije α u tački P,

$$\mathsf{T}_{P,k} = \mathcal{L}(\alpha'(P), \alpha''(P), \dots, \alpha^k(P)). \tag{84}$$

Tačka P je $k-$ravna ako postoji $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ takav da je $\dim \mathsf{T}_{P,k} = k = \dim \mathsf{T}_{P,k+1}$. Primetimo da u svakoj tački $t \in \mathbb{I}$ dobro je definisan vektorski prostor $\mathsf{T}_{\alpha(t),k}$.

Jasno, prvi oskulatorni prostor krive je njen tangentni prostor $\mathsf{T}_P = \mathsf{T}_{P,1} = \mathcal{L}(\alpha'(P))$ u tački P. Takođe, važi niz očiglednih nejednakosti

$$\mathsf{T}_{\alpha(t)} = \mathsf{T}_{\alpha(t),1} \subseteq \mathsf{T}_{\alpha(t),2} \subseteq \cdots \subseteq \mathsf{T}_{\alpha(t),n} \subseteq \mathbb{R}^n. \tag{85}$$

Napomenimo da niz vektorskih potprostora $\{V_i\}_{i=1,2,\ldots,n}$ nekog vektorskog prostora V koji zadovoljavaju nejednakosti (orz) naziva zastava (fleg) od V.

Sada se postavlja prirodno pitanje, da li ekvivalentne krive imaju iste oskulatorne k-prostore ?

Odgovor na ovo pitanje daje sledeća teorema.

Teorema. *Neka su α i β ekvivalentne regularne glatke krive, takve da je $P = \alpha(t_0) = \beta s_0$. Tada je $\mathsf{T}_{\alpha(t_0),k} = \mathsf{T}_{\beta(s_0),k}$, za sve $k = 1, 2, \ldots, n$. Drugim rečima $k-$oskulatorne ravni krivih α i β se podudaraju u odgovarajućim tačkama.*

Ako je $f \in \mathsf{Aff}(\mathbb{R}^n)$ neka afina transformacija tada je $\mathsf{T}_{f(\alpha(t)),k} = \overrightarrow{f}(\mathsf{T}_{\alpha(t),k})$.

Dokaz. Kako je $\beta = \alpha \circ \phi$, gde je ϕ difeomorfizam sa (a, b) na (c, d), iz formule za izvod kompozicije, redom nalazimo

$$\frac{d\beta}{ds} = \frac{d\alpha}{dt} \cdot \frac{dt}{ds}$$

$$\frac{d^2\beta}{ds^2} = \frac{d}{ds}\left(\frac{d\alpha}{dt} \cdot \frac{dt}{ds}\right) = \frac{d^2\alpha}{dt^2} \cdot \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \frac{d\alpha}{dt} \cdot \frac{d^2t}{ds^2}$$

$$\frac{d^3\beta}{ds^3} = \frac{d}{ds}\left(\frac{d^2\alpha}{dt^2} \cdot \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \frac{d\alpha}{dt} \cdot \frac{d^2t}{ds^2}\right) = \frac{d^3\alpha}{dt^3} \cdot \left(\frac{dt}{ds}\right)^3 + 3\,\frac{d^2\alpha}{dt^2} \cdot \frac{dt}{ds} \cdot \frac{d^2t}{ds^2} + \frac{d\alpha}{dt} \cdot \frac{d^3t}{ds^3}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d^k\beta}{ds^k} = \frac{d^k\alpha}{dt^k} \cdot \left(\frac{dt}{ds}\right)^k + v$$

pri čemu je $v \in \mathsf{T}_{\alpha(t),\,k-1}$.

Druga tvrdnja sledi iz svojstava afine transformacije koja je u potpunosti određena matricom reda $(n + 1)$ sa konstantnim koeficijentima. $\square$

2.26. Frene-Serov reper. U prethodnim tačkama ove glave videli smo da centralno mesto u teoriji krivih u ravni i prostoru igraju Frene-Serov reper i Frene-Serove jednačine, koje u potpunosti opisuju krivu. Zbog toga se postavlja pitanje da li ove ideje možemo preneti i na izučavanje glatkih regularnih krivih u $\mathbb{R}^n$.

Ako analiziramo Frene-Serov pristup (formalizam) teoriji krivih u ravni i prostoru vidimo da tu važnu ulogu igraju sledeće činjenice:

(pp) postojanje parametrizacije krive α jedinične brzine,

(FSb) postojanje Frene-Serovog, pozitivnog ortonormiranog repera, $\mathfrak{B}(l)$, čija se evolucija duž krive α može opisati formulom

$$\mathfrak{B}(l) = \mathcal{A}(l)\,\mathfrak{B}(0),$$

gde je $\mathcal{A}(l)$ ortogonalna matrica determinante 1, za svako l, jer prevodi pozitivnu ortonormiranu bazu $\mathfrak{B}(0)$ u pozitivnu ortonormiranu bazu $\mathfrak{B}(l)$. Dakle, $\mathcal{A}$ je funkcija[9] sa $\mathbb{I} = (a, b)$ u $\mathsf{SO}(n)$, $n = 2, 3$. Budući da je reper $\mathfrak{B}(l)$ glatka funkcija parametra l (jer vektori u tom reperu glatko zavise od l), i funkcija $\mathcal{A}(l)$ biće glatka, tj. njeni matrični elementi, $a_{ij}(l)$, su glatke funkcije od l.

(FSj) Frene-Serova jednačina se može zapisati u obliku

$$\frac{d\mathfrak{B}}{dl}(l_0) = \Upsilon(l_0)\mathfrak{B}(l_0), \quad \text{gde je } l_0 \in \mathbb{I} \text{ i } \Upsilon(l_0) \text{ kososimetrična matrica.}$$

Upravo izdvojena svojstva Frene-Serovog pristupa napisana su u matričnom formalizmu, tj. ne zavise od dimenzije ambijentnog prostora. Prema tome, naš cilj je da vidimo da li možemo ispuniti upravo navedene zahteve (pp), (FSb) i (FSj) u $\mathbb{R}^n$.

Prvo, podsetimo se da je svojstvo (pp) dokazano u **2.13** Teorema.

Sada ćemo u nizu tvrđenja pokazati da i u $\mathbb{R}^n$ možemo konstruisati Frene-Serov reper. Ako se prisetimo konstrukcije Frene-Serovog repera u dimenziji 3 morali smo zahtevati da je kriva biregularna, tj. da je $\alpha''(l) \neq 0$, za svako l. Sada generališemo ovu situaciju u $\mathbb{R}^n$.

Pretpostavimo da su vektori $\alpha'(l), \alpha''(l), \dots \alpha^{(n)}(l)$ linearno nezavisni, za svako $l \in \mathbb{I}$, tada oni obrazuju glatki reper (koji ne mora biti ortogonalan). Specijalno, tada su i svi vektori $\alpha^{(j)}(l)$, $1 \leq j \leq n$, različiti od nule za svako l.

Ispitajmo prvo slučaj kada je skup $\mathfrak{B}_\alpha = (\alpha', \alpha'', \dots \alpha^{(n)})$ linearno zavisan. Tada postoji k $(1 \leq k < n)$ takav da je funkcija $\alpha^{(k)}$ linearna kombinacija funkcija $\alpha', \alpha'', \dots \alpha^{(k-1)}$ u svakoj tački intervala $\mathbb{I}$, i neka je $\alpha^{(k)}(l) \neq 0$ za svaki $l \in \mathbb{I}$, tada je i skup $\mathfrak{B}_\alpha^{(k-1)} = (\alpha', \alpha'', \dots \alpha^{(k-1)})$ je linearno nezavisan za svako $l \in \mathbb{I}$. Tada važi.

Propozicija. *Neka je $\alpha : \mathbb{I} = (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ prirodno parametrizovana regularna glatka kriva, takva da je $\mathfrak{B}_\alpha^{(k-1)} = (\alpha', \alpha'', \dots \alpha^{(k-1)})$ linearno nezavisan za svako $l \in \mathbb{I}$, neka je $\alpha^{(k)}(l) \neq 0$ i neka $\alpha^{(k)}(l) \in \mathcal{L}(\mathfrak{B}_\alpha^{(k-1)}(l))$ za svako $l \in \mathbb{I}$. Tada kriva α pripada nekoj $(k-1)$ dimenzionoj ravni σ prostora $\mathbb{R}^n$, koja je generisana (razapeta) vektorima iz $\mathfrak{B}_\alpha^{(k-1)}(l)$.*

Dokaz. Iz pretpostavki sledi da postoje glatke funkcije $\phi_i(l), 1 \leq i < k$ takve da je

$$\alpha^{(k)}(l) = \sum_{i=1}^{k-1} \phi_i(l)\, \alpha^{(i)}(l). \tag{86}$$

S druge strane zbog linearne nezavisnosti, skup $\mathfrak{B}_\alpha^{(k-1)}(l)$ je baza pravca $k-1$ dimenzione ravni $\sigma(l)$. Drugim rečima sve tačke krive α su $k-$ravne. Da bismo pokazali da kriva α pripada nekoj $k-1$ dimenzionoj ravni potrebno je pokazati da ravan $\sigma(l)$ ne zavisi od l. Kako je pravac ravni $\sigma(l)$ razapet sa $\mathfrak{B}_\alpha^{(k-1)}(l)$, tada iz (86) lako sledi da je

[9] Skup $\{\mathcal{A}(l), \in \mathbb{I}\}$ nazivamo jednoparametraska familija ortogonalnih matrica.

$d\mathfrak{B}_\alpha^{(k-1)}/dl = \mathfrak{B}_\alpha^{(k-1)}(l)$, i svaki vektor α^j za $j \geq k$ pripada $\mathfrak{B}_\alpha^{(k-1)} = (\alpha', \alpha'', \dots \alpha^{(k-1)})$. Odakle sledi da postoji baza f u $\mathbb{R}^n$ takva da je $\alpha(l) = (x_1(l), \dots, x_{k-1}(l), 0, \dots, 0)$, iz čega sledi da kriva $\alpha(l)$ pripada $(k-1)-$dimenzionoj ravni σ čiji je pravac jednak $\mathcal{L}(f_1, f_2, \dots, f_{k-1})$. Zbog linearne nezavisnosti funkcija $x_1(l), x_2(l), \dots, x_{k-1}(l)$ kriva $\alpha(l)$ ne leži niti u jednoj ravni manje dimenzije. □

Lema. *Neka je $\mathcal{A} : \mathbb{I} = (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow O(n)$ glatka funkcija, takva da je $\mathcal{A}(0) = I$, i neka je $\Upsilon = \dot{\mathcal{A}}(t)\big|_{t=0} = (\dot{a}_{ij}(0))$, gde su $a_{ij}(t)$ matrični elementi matrice $\mathcal{A}(t)$. Tada je Υ kososimetrična matrica.*

Dokaz. Kako je $\mathcal{A}(t)$ ortogonalna matrica za svako t, ona čuva skalarni proizvod, tako da za svaka dva vektora $v, w \in \mathbb{R}^n$, funkcija $f_{v,w}(t) = \big\langle \mathcal{A}(t)v, \mathcal{A}(t)w \big\rangle = \langle v, w\rangle$ je konstanta. Sada redom imamo

$$0 = \dot{f}_{v,w}(0) = \big\langle \dot{\mathcal{A}}(0)v, \mathcal{A}(0)w \big\rangle + \big\langle \mathcal{A}(0)v, \dot{\mathcal{A}}(0)w \big\rangle = \big\langle \Upsilon v, w \big\rangle + \big\langle v, \Upsilon w \big\rangle.$$

Drugim rečima matrica Υ je kososimetrična. □

Sada možemo formulisati i analogon Frene-Serove teoreme za regularnu krivu u $\mathbb{R}^n$.

Teorema 1. *Neka je $\alpha : \mathbb{I} = (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ regularna prirodno parametrizovana glatka kriva, takva da je $\mathfrak{B}_\alpha = (\alpha', \alpha'', \dots \alpha^{(n)})$ linearno nezavisan skup na $\mathbb{I}$. Tada postoje glatke funkcije $\kappa_2, \kappa_2, \dots, \kappa_n : \mathbb{I} \longrightarrow \mathbb{R}$, takve da važe Frene-Serove formule*

$$\frac{d}{dl}\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_{n-1} \\ \xi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -\kappa_2 & 0 & \kappa_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\kappa_{n-1} & 0 & \kappa_n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\kappa_n & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_{n-1} \\ \xi_n \end{bmatrix} \tag{87}$$

Dokaz. Kako je skup $\mathfrak{B}_\alpha = (\alpha', \alpha'', \dots \alpha^{(n)})$ linearno nezavisan za svako $l \in \mathbb{I}$, prethodna propozicija implicira da kriva α ne leži niti u jednoj fiksnoj $(n-1)-$dimenzionoj ravni. Sada, za proizvoljno $l \in \mathbb{I}$ definišimo ortonormiranu bazu na sledeći način: zbog prirodne parametrizacije krive α imamo $\xi_1(l) = \alpha'(l)$ i $\alpha''(l) = \kappa_2(l)\,\xi_2(l)$, gde je i vektor $\xi_2(l)$ jediničan, i normalan na $\xi_1(l)$, takav da je reper $(\xi_1(l), \xi_2(l))$ pozitivno orijentisan; zatim u trodimenzionom prostoru generisanom vektorima $\alpha'''(l), \xi_1(l)$ i $\xi_2(l)$ izaberemo jedinični vektor $\xi_3(l)$ (npr. Gram-Šmitovim algoritmom) koji je normalan na ravan generisanu sa $\xi_1(l)$ i $\xi_2(l)$ i takav da je reper $(\xi_1(l), \xi_2(l), \xi_3(l))$ pozitivan, i tako nastavimo dalje, i na kraju dolazimo do pozitivno orijentisanog ortonormiranog repera $\Phi(l) = (\xi_1(l), \xi_2(l), \ldots, \xi_n(l))$. Iz konstrukcije[10] je očigledno da je $\Phi(l)$ gladak reper.

Budući da je ξ_k element lineala $\mathcal{L}(\alpha', \alpha'', \ldots, \alpha^{(k)})$, njegov izvod biće element lineala $\mathcal{L}(\alpha', \alpha'', \ldots, \alpha^{(k)}, \alpha^{(k+1)})$, tj. postojaće glatke funkcije $a_{1k}, \ldots, a_{k+1k}$ takve da

$$\frac{d\xi_k}{dl}(l) = \sum_{i=1}^{k+1} a_{ik}(l)\, \xi_i(l). \tag{88}$$

Posmatrajmo sada $n \times n$ matricu $\Upsilon = (a_{ij}(t))$. Iz (88), jasno, matrica Υ je oblika

$$\Upsilon = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{32} & \cdots\cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & & \\ a_{n-11} & a_{n-12} & a_{n-13} & \cdots\cdots & a_{n-1n-2} & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots\cdots & a_{nn-2} & a_{nn-1} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

S druge strane, glatku promenu repera Φ možemo opisati jednačinom $\Phi(l) = \mathcal{A}(l)\,\Phi(0)$, pri čemu je $\mathcal{A}(l)$ element specijalne ortogonalne grupe $\mathsf{SO}(n)$ i $\mathcal{A}(0)$ je jedinična matrica. Diferencirajući ovu relaciju po l, i kombinujući je sa $d\Phi/dl(s) = \Upsilon(s)\Phi(s)$ dobijamo,

$$\frac{d\Phi}{dl}(s) = \Upsilon(s)\Phi(s) = \frac{d\mathcal{A}}{dl}(s)\Phi(0), \text{ odakle za } s = 0 \text{ sledi } \Upsilon = \Upsilon(0) = \frac{d\mathcal{A}}{dl}(0).$$

Dakle, svakako je $\Upsilon = \mathcal{A}'(0)$, i prema prethodnoj lemi matrica Υ je kososimetrična, tj.

$$\Upsilon = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_{12} & 0 & -a_{23} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{23} & 0 & -a_{34} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & & 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & a_{n-2n-1} & 0 & -a_{n-1n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{n-1n} & 0 \end{bmatrix}.$$

[10] Primetite da u konstrukciji vektora $\xi_i(l)$, $i > 2$, primenjujemo Gram-Šmitov algoritam (koji se zadaje gornje trougaonom matricom), koji je linearan i čiji su matrični elementi glatke funkcije od l.

Primetimo, da smo pokazali da za tačku $P = \alpha(0)$, matrica $\Upsilon(0) = \Upsilon(P)$ je kososimetrična. Sada za proizvoljnu tačku Q krive α nađemo, novu parametrizaciju (translacijom parametra) α_Q, tako da je $\alpha_Q(0) = Q$, i tada gornja konstrukcija implicira da je i $\Upsilon(Q)$ kososimetričma matrica, tj. $\Upsilon(l)$ je kososimetrična za svako $l \in \mathbb{I}$. I na kraju definišemo funkcije κ_i $(i = 2, \dots, n-1, n)$, formulom $\kappa_i = -\, a_{i-1\,i}$, i dokaz teoreme je gotov. $\square$

Primedba. 1. Primetimo da u dokazu prethodne teoreme jedinstvenost pozitivnog pokretnog repera $\Phi(l) = (\xi_1(l), \xi_2(l), \dots, \xi_n(l))$, dobijamo ako zahtevamo da su skalarni proizvodi $\langle \alpha^j(l), \xi_j(l)\rangle > 0$, za $j = 1, 2, \dots, n-1$. Iz **2.25** Teorema sledi da jedinstveni pokretni reper $\Phi(l)$ ne zavisi od reparametrizacije.

2. U dokazu Frene-Serove teoreme definisali smo funkcije κ_j $(j = 2, \dots, n-1, n)$, formulom

$$\kappa_j(l) = \left\langle \frac{d\xi_j}{dl}(l), \xi_{j+1}(l) \right\rangle, \qquad j = 2, \dots, n-1, n, \tag{89}$$

koje nazivamo $j.-$tim krivinama krive α u tački l. U slučaju krive u ravni postoji samo jedna krivina $\kappa_2(l) = \kappa(l)$, a u slučaju krive u prostoru postoje dve krivine $\kappa_2(l) = \kappa(l)$, i $\kappa_3(l) = w(l)$, koju smo nazivali torzija krive.

Sada, koristeći Pikarovu teoremu, kao u dokazu **2.17** Teorema, vidimo da važi sledeća teorema.

Teorema 2. (1) *Neka je $\kappa_j : [0, L] \longrightarrow \mathbb{R}^n_+$, $j = 2, \dots, n$ proizvoljne glatke funkcije. Tada postoji glatka kriva $\alpha : [0, L] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ takva da je $\mathfrak{B}_\alpha = (\alpha', \alpha'', \dots \alpha^{(n)})$ linearno nezavisan skup na $[0, L]$ i čije su $j.-$te krivine jednake κ_j za $j = 2, 3, \dots, n$.*

(2) *Neka su $\alpha_1 : [0, L] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ i $\alpha_2 : [0, L] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ glatke krive parametrizovane prirodnim parametrom takve da se sve njihove $j.-$te krivine podudaraju, $\kappa^1_j(l) = \kappa^2_j(l)$, za sve $j = 2, 3, \dots, n$ i svaki $l \in [0, L]$. Tada postoji direktna izometrija (kretanje) $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ takva da je $\alpha_2(l) = \phi(\alpha_1(l))$, za sve $l \in [0, L]$.*

GLAVA 3

Površi

3.1. Definicija regularne površi. Neka je U otvoren i povezan[1] podskup od $\mathbb{R}^2$. Parametrizovana regularna (elementarna) površ klase $\mathcal{C}^k$ $(k \geq 1)$ na U je $1-1$ preslikavanje $r : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ klase $\mathcal{C}^k$, takvo da su vektori $\partial r/\partial u(P)$ i $\partial r/\partial v(P)$ linearno nezavisni za sve $P = (u, v) \in U$. Ako je $k = \infty$ onda kažemo da je površ glatka.

Sliku, $r(U) \subseteq \mathbb{R}^3$ nazivamo trag regularne parametrizovane površi r. Često površ posmatramo kao skup tačaka $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$, a diferencijabilnu funkciju r nazivamo parametrizacijom skupa Σ.

Oznake koje koristimo:

$$r(u, v) = (r_1(u, v), r_2(u, v), r_3(u, v)), \quad \text{tj.} \quad r(u, v) = r_1(u, v)e_1 + r_2(u, v)e_2 + r_3(u, v)e_3,$$

parcijalne izvode po u i v označavamo skraćeno sa r_u, i r_v, pri čemu je

$$r_u = \frac{\partial r}{\partial u} = r_u(u, v) = \left(\frac{\partial r_1}{\partial u}(u, v), \frac{\partial r_2}{\partial u}(u, v), \frac{\partial r_3}{\partial u}(u, v)\right), \tag{90}$$

$$r_v = \frac{\partial r}{\partial v} = r_v(u, v) = \left(\frac{\partial r_1}{\partial v}(u, v), \frac{\partial r_2}{\partial v}(u, v), \frac{\partial r_3}{\partial v}(u, v)\right). \tag{91}$$

Jakobijeva matrica preslikavanja r je:

$$\mathcal{J}(r)(u, v) = \frac{\partial(r_1, r_2)}{\partial(u, v)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial u} & \frac{\partial r_1}{\partial v} \\ \frac{\partial r_2}{\partial u} & \frac{\partial r_2}{\partial v} \\ \frac{\partial r_3}{\partial u} & \frac{\partial r_3}{\partial v} \end{pmatrix}. \tag{92}$$

Primedba 1. Primetimo da parametrizovana elementarna površ r neće biti regularna u tački $P_0 = (u_0, v_0) \in U$, ako ispunjava jedan od ekvivalentnih uslova:

(1) vektori $r_u(u_0, v_0)$ i $r_v(u_0, v_0)$ su linearno zavisni,

(2) $r_u(u_0, v_0) \times r_v(u_0, v_0) = 0$,

(3) Jakobijeva matrica ima rang manji od 2 u (u_0, v_0).

Primedba 2: Geometrijski smisao regularnosti površi. Kako je svaka ravan u afinom prostoru $\mathbb{R}^3$, određena sa jednom svojom tačkom i dva linearno nezavisna vektora koji određuju njen pravac, vidimo da se geometrijski smisao pojma regularnosti površi $r(U)$, u tački $P = r(u, v) \in r(U)$, ogleda u *postojanju ravni $\mathcal{T}_P = \mathcal{T}_P(r)$ određene tačkom P i vektorima $\partial r/\partial u(P)$ i $\partial r/\partial v(P)$. Ravan $\mathcal{T}_P$ nazivamo* ***tangentna ravan*** *na površ r u tački P.*

[1] Napomenimo da u najopštijem slučaju, uslov povezanosti skupa U ispuštamo iz ove definicije.

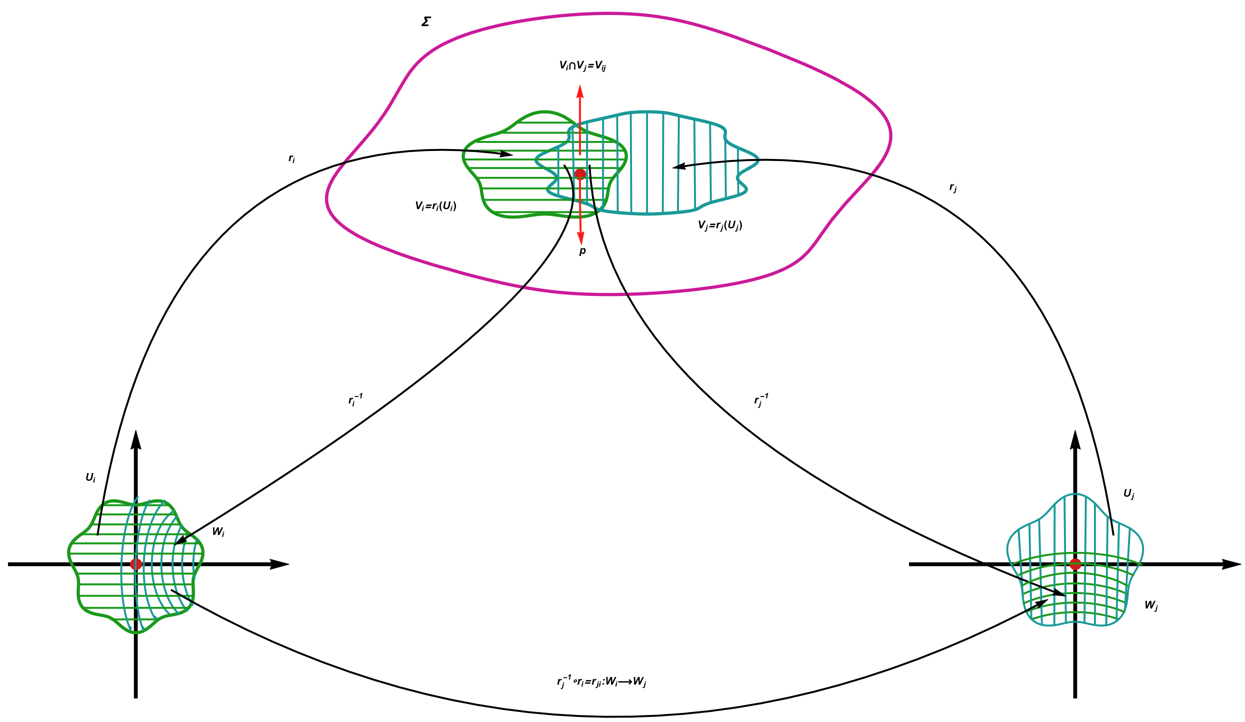
3.2. Mnogostrukost. Pojam regularne površi često se odnosi na neki skup $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$, a ne na funkciju. U tom (opštijem) slučaju, grubo govoreći elementarna regularna površ u $\mathbb{R}^3$ se dobija tako što uzmemo delove ravni koje deformišemo, a zatim polepimo tako da dobijena figura nema vrhova, krajeva, samopreseka i da je regularna (tj. pravilna) u smislu da u svakoj njenoj tački postoji tangentna ravan.

Kako je U otvoren skup, a r glatka (pa tako i neprekidna) funkcija, skup $r(U)$ je takođe otvoren, odakle odmah sledi da zatvoreni skupovi (kao što je npr. sfera) ne mogu biti elementarne glatke površi, ili preciznije potrebno nam je više od jedne glatke elementarne površi da bismo prekrili zatvoreni skup. Ova činjenica dovodi nas do ideje da površ Σ predstavimo kao uniju tragova elementarnih glatkih površi $r_i(U_i) = V_i$, kako bismo mogli primeniti standardan analitički aparat u izučavanju ovakvih objekata. Ovde postoji i jedan tehnički problem koji nastaje kada presek $V_i \cap V_j$ nije prazan, koji rešavamo uvođenjem funkcija prelaska, i tako dolazimo do jednog od fundamentalnih pojmova savremene matematike - pojma mnogostukosti.

Podskup $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ je glatka[2] regularna površ (mnogostrukost) ako je:

(1) $r_i : U_i \longrightarrow V_i = r_i(U_i) \subseteq \mathbb{R}^3$, *je parametrizovana elementarna glatka površ,*

(2) $\Sigma = \bigcup_i r_i(U_i)$,



Slika 1. Mnogostrukost

(3) Ako je $V_{ij} = V_i \cap V_j \neq \emptyset$, tada je i preslikavanje $r_{ij} = r_j^{-1} \circ r_i : W_i \longrightarrow W_j$ glatko, pri čemu je $W_i = r_i^{-1}(V_{ij})$ i $W_j = r_j^{-1}(V_{ij})$, vidi Sliku 1.

(4) Familija $\{(U_i, r_i)\}$ je maksimalna s obzirom na uslove (1)-(3).

[2] Analogno se definiše pojam regularne površi klase $\mathcal{C}^k$.

Uređeni par (U_i, r_i) za $p \in r_i(U_i)$ nazivamo parametrizacija (sistem koordinata ili karta) od Σ u p, a skup $r_i(U_i)$ se tada naziva koordinatna okolina tačke p. Familija $\{(U_i, r_i)\}$, koja zadovoljava aksiome (1)-(3) naziva se glatka (diferencijabilna) struktura (ili atlas) od Σ. Funkcije r_{ij} nazivaju se funkcijama prelaska sa karte (U_i, r_i) na kartu (U_j, r_j).

Uslov (i4) je tehničke prirode, jer ako imamo neku glatku strukturu na Σ maksimalnu dobijamo tako što uzmemo uniju svih parametrizacija koje zadovoljavaju uslov (i3).

Primenom teorema o inverznoj i implicitnoj funkciji, regularne površi možemo zadati i na sledeće načine:

(1) za proizvoljnu tačku $q \in \Sigma$ postoji okolina[3] U tačke q i diferencijabilna funkcija $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ takva da je $F(x) = 0$, za sve $x \in U$ za koje je $(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z})_{|U} \neq 0$.

(2) za proizvoljnu tačku $q \in \Sigma$ postoji okolina U tačke q takva je $\Sigma \cap U$ grafik (nakon eventualne prenumeracije koordinata) diferencijabilnog preslikavanja $z = \Psi(x, y)$.

U ovom tekstu bavimo se parametrizovanim elementarnim regularnim glatkim površima[4]. Dakle, kada kažemo površ mislimo na parametrizovanu elementarnu regularnu glatku površ[5]. Globalnim pitanjima koja proizlaze iz osobina funkcija prelaska, tj. načina kako su slepljene parametrizovane elementarne regularne glatke površi, nećemo se baviti u ovom tekstu.

Napomenimo da se prethodna definicija, glatke regularne površi $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ direktno generalizuje na podskup $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^n$ i tada se koristi termin mnogostrukost.

3.3. Primeri. (1) U uvodnom delu ovog teksta posvećenog Analitičkoj geometriji (vidi slike iz glave **Uvod**) date su neke jednostavnije površi svojim slikama i jednačinama kao što su: ravan, površi drugog reda (elipsoid, hiperboloidi, paraboloidi, cilindri, eliptički konus), torus, helikoid i sl. Proverite njihovu regularnost.

(2) Ako je površ data kao grafik neke funkcije dve promenljive, tj. $r(u, v) = (u, v, f(u, v))$, gde je $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$, klase $\mathcal{C}^k$ i $1-1$.

(3a) $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 < 1\}$, i $r^1(u, v) = (u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2})$.
Primetimo da je $r^1 : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizacija dela sfere $\mathbb{S}^2$, koji se nalazi iznad uv ravni, tj. u poluprostoru $w > 0$.
Kako je $u^2 + v^2 < 1$ funkcija $\sqrt{1 - u^2 - v^2}$ ima neprekidne izvode svih redova. S druge strane vektori $r^1_u = (1, 0, \partial\sqrt{1 - u^2 - v^2}/\partial u)$ i $r^1_v = (0, 1, \partial\sqrt{1 - u^2 - v^2}/\partial v)$ su linearno nezavisni, i zaključujemo da je r^1 parametrizovana glatka regularna površ.
Primetimo da isto važi i za parametrizaciju, $r^2 : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$, datu sličnom formulom $r^2(u, v) = (u, v, -\sqrt{1 - u^2 - v^2})$.

(3b) $V = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 < 1\}$, i $r^4(u, v) = (u, -\sqrt{1 - u^2 - v^2}, v)$.

---

[3] dovoljno mala

[4] tj. pojedinačnim kartama u smislu gornje definicije

[5] Osim ako ne naglasimo drugačije.

(3c) Ako analogno primerima (3a) i (3b) uvedemo parametrizacije r^3, r^5 i r^6, vidimo da je sfera $\mathbb{S}^2$ u potpunosti prekrivena tragovima parametrizacija $r^1, \dots, r^6$, tj. važi da je $\mathbb{S}^2 = \cup_{i=1}^6 r^i(U)$.

(3d) Neka je $\widetilde{U} = \{(u_1, v_1) \in U \mid v_1 < 0\}$, i neka $\widetilde{V} = \{(u_2, v_2) \in V \mid v_2 > 0\}$. Definišemo, $\phi : \widetilde{V} \longrightarrow \widetilde{U}$, formulom $\phi(u_2, v_2) = (u_2, -\sqrt{1-u_2^2-v_2^2})$, tada lako nalazimo inverzno preslikavanje,[6] $\phi^{-1}(u_1, v_1) = (u_1, -\sqrt{1-u_1^2-v_1^2})$. Sada nalazimo Jakobijan preslikavanja ϕ,

$$\mathsf{det}\,(\mathcal{J}(\phi)(u_2, v_2)) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{u_2}{\sqrt{1-u_2^2-v_2^2}} & \frac{v_2}{\sqrt{1-u_2^2-v_2^2}} \end{vmatrix} \neq 0$$

Vidimo da je $r^1(u_1, v_1) = (u_1, v_1, \sqrt{1-u_1^2-v_1^2})$, $r^4(u_2, v_2) = (u_2, -\sqrt{1-u_2^2-v_2^2}, v_2)$, i da je $r^4 = r^1 \circ \phi$.

(4) Primetimo da sferne koordinate definišu drugu parametrizaciju sfere, preciznije važi $V = \{(\theta, \phi) \mid 0 < \theta < \pi,\ 0 < \phi < 2\pi\}$ i neka je $r : V \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dato sa

$$r(\theta, \phi) = (\sin\theta\, \cos\phi, \sin\theta\, \sin\phi, \cos\theta).$$

Jasno, $r(V) \subseteq \mathbb{S}^2$, i kako su cos i sin glatke ispunjen je uslov o diferencijabilnosti parametrizacije.
S druge strane $r_\theta = (\cos\theta\, \cos\phi, \cos\theta \sin\phi, -\sin\theta)$ i $r_\phi = (-\sin\theta\, \sin\phi, \sin\theta\, \cos\phi, 0)$, tada je njihov vektorski proizvod

$$r_\theta \times r_\phi = \left\| \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \cos\theta\, \cos\phi & \cos\theta \sin\phi & -\sin\theta \\ -\sin\theta\, \sin\phi & \sin\theta \cos\phi & 0 \end{matrix} \right\| = (\cos\phi\, \sin^2\theta, \sin\phi\, \sin^2\theta, 1/2 \sin 2\theta).$$

Kako se treća koordinata vektora $r_\theta \times r_\phi$ poništava samo za $\theta = \pi/2$ (jer je $0 < \theta < \pi$), zaključujemo da je $r_\theta \times r_\phi \neq 0$, tj. r je glatka regularna parametrizacija, podskupa sfere $\mathbb{S}^2$.

(5) Koristeći karakterizaciju površi: *neka je diferencijabilna funkcija* $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ *takva da je da je* $(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial y}) \neq 0$, *za sve tačke skupa* $\Sigma = \{(x, y, z) | F(x, y, z) = 0\}$, *tada je* Σ *površ*, pokažimo da je sfera, $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ površ.

Primetimo da u ovom slučaju posmatramo funkciju $F(x, y, z) = x^2+y^2+z^2-1$. Kako je $(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial y}) = (2x, 2y, 2z) \neq 0$, za svaku tačku skupa $\mathbb{S}^2$, na osnovu ove karakterizacije sledi tvrdnja.

Na isti način može se pokazati da sledeći skupovi zadati svojim jednačinama su regularne površi (Slike ovih površi mogu se naći u **Uvodu**):

[6] $\phi^{-1} : \widetilde{U} \longrightarrow \widetilde{V}$.

- elipsoid, $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$,
- jednograni hiperbolioid, $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$,
- dvograni hiperbolioid, $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

3.4. O parametrizacijama površi. Imitirajući ideje o parametrizaciji krive, isto pokušavamo uraditi i u slučaju površi, tj. dati koncept ekvivalentnih površi.

Neka su U i V otvoreni podskupovi u $\mathbb{R}^2$, tada pod koordinatnom transformacijom klase $\mathcal{C}^k$, sa V na U, podrazumevamo $\mathcal{C}^k$-difeomorfizam $\phi : V \longrightarrow U$.

Tada važi sledeća lema.

Lema. *Neka je $r_1 : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizovana regularna elementarna površ klase $\mathcal{C}^k$ i $\phi : V \longrightarrow U$ koordinatna transformacija klase $\mathcal{C}^k$. Tada je $r_2 = r_1 \circ \phi : V \longrightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizovana regularna elementarna površ klase $\mathcal{C}^k$ i ima isti trag kao i površ r_1.*

Dokaz. Kako je kompozicija bijekcija bijekcija i kompozicija funkcija klase $\mathcal{C}^k$ funkcija klase $\mathcal{C}^k$ i kako je jasno da je $\operatorname{Im}(r_2(V)) = \operatorname{Im}(r_1(\phi(V))) = \operatorname{Im}(r_1(U))$, potrebno je proveriti uslov regularnosti preslikavanja r_2. Neka je $r_1 = r_1(u_1, v_1)$ i kako je po pretpostavci r_1 regularna

$$\text{sledi da je}\quad \frac{\partial r_1}{\partial u_1}\times\frac{\partial r_1}{\partial v_1}\neq 0 \quad \text{u svim tačkama skupa } U.$$

Sada računamo

$$r_2(u_2,v_2) = r_1(\phi(u_2,v_2)) = r_1(\phi_1(u_2,v_2),\phi_2(u_2,v_2))$$

$$\frac{\partial r_2}{\partial u_2} = \frac{\partial r_1}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial \phi_1}{\partial u_2} + \frac{\partial r_1}{\partial v_1}\cdot\frac{\partial \phi_2}{\partial u_2}, \qquad \frac{\partial r_2}{\partial v_2} = \frac{\partial r_1}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial \phi_1}{\partial v_2} + \frac{\partial r_1}{\partial v_1}\cdot\frac{\partial \phi_2}{\partial v_2}.$$

$$\mathcal{J}(\phi) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \phi_1}{\partial u_2} & \dfrac{\partial \phi_1}{\partial v_2} \\ \dfrac{\partial \phi_2}{\partial u_2} & \dfrac{\partial \phi_2}{\partial v_2} \end{vmatrix} \neq 0\,.$$

Tako da imamo redom

$$\begin{aligned}\frac{\partial r_2}{\partial u_2}\times\frac{\partial r_2}{\partial v_2} &= \frac{\partial \phi_1}{\partial u_2}\cdot\frac{\partial \phi_2}{\partial v_2}\left(\frac{\partial r_1}{\partial u_1}\times\frac{\partial r_1}{\partial v_1}\right) + \frac{\partial \phi_2}{\partial u_2}\cdot\frac{\partial \phi_1}{\partial v_2}\left(\frac{\partial r_1}{\partial v_1}\times\frac{\partial r_1}{\partial u_1}\right) \\ &= \mathcal{J}(\phi)\left(\frac{\partial r_1}{\partial u_1}\times\frac{\partial r_1}{\partial v_1}\right)\neq 0, \quad \text{tj. } r_2 \text{ je regularna.} \qquad \square\end{aligned}$$

Površi r_1 i r_2 su ekvivalentne ($r_1 \sim r_2$) ukoliko zadovoljavaju uslove prethodne Leme.

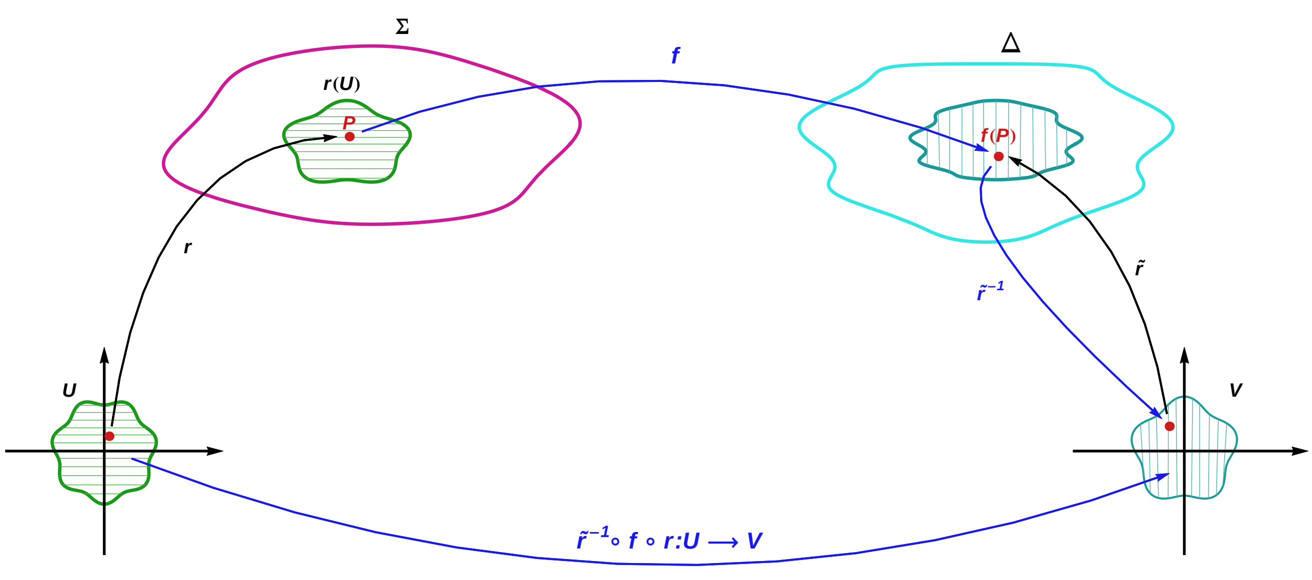
Jasno, relacija $\sim$ je relacija ekvivalencije. Klasa ekvivalencije relacije $\sim$ je regularna (neparametrizovana) elementarna površ. Može se pokazati da je klasa ekvivalencije parametrizovane regularne elementarne površi $r : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ suštinski određena skupom slika $r(U)$. Preciznije važi:

TEOREMA. *Neka su* $r_1 : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *i* $r_2 : V \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *parametrizovane elementarne površi, takve da je* $r_1(U) = r_2(V)$. *Tada za sve* $p \in U$ *i* $q \in V$ *takve da je* $r_1(p) = r_2(q)$ *postoje njihove okoline* $U_1 \subseteq U$ *i* $V_1 \subseteq V$ *takve da su* $r_{1|U_1}$ *i* $r_{2|V_1}$ *ekvivalentne povši, tj. postoji koordinatna transformacija* $\phi : V_1 \longrightarrow U_1$ *tako da je* $r_2 = r_1 \circ \phi$.

3.5. Glatka preslikavanja. Neka je $W \subseteq r(U) = \Sigma$ otvoren podskup regularne elementarne površi Σ, i neka je $\phi : W \longrightarrow \mathbb{R}$. Kažemo da je funkcija ϕ glatka u tački $P \in W$ ako je kompozicija $\phi \circ r : U' \subseteq U \longrightarrow \mathbb{R}$ glatka u tački $r^{-1}(P)$. Ako je ϕ glatka u svim tačkama skupa W kažemo da je ϕ glatka na W.

Primedba. U praksi ćemo ponekad identifikovati funkciju ϕ sa $\phi \circ r^{-1}$ tj. za $\phi(u, v)$ kažemo da je ϕ sistem koordinata od r. Ovo je ekvivalentno identifikaciji skupa $r(U)$ sa U, tj. na uređeni par $(u, v) \in U$ gledamo kao na tačku iz $r(U)$ sa istim koordinatama.

Sada nije teško pojam glatkog preslikavanja proširiti i na preslikavanja između regularnih površi Σ i Δ. Dakle, neka su Σ i Δ glatke regularne površi (u smislu definicije iz tačke **3.2**) i neka je $f : \Sigma \longrightarrow \Delta$ funkcija sa Σ u Δ. f je glatka ako za svaku $P \in \Sigma$ postoje elementarne regularne površi $r : U \longrightarrow \Sigma$ i $\tilde{r} : V \longrightarrow \Delta$, $P \subseteq r(U)$ i $f(P) \subseteq \tilde{r}(V)$ takve da je $\tilde{r}^{-1} \circ f \circ r : U \longrightarrow V$ glatka funkcija, vidi Sliku 2.



Slika 2. Preslikavanje između površi

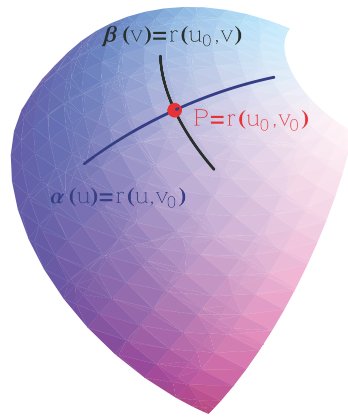
Ako uzmemo u obzir rečeno u prethodnoj primedbi, tada identifikujemo preslikavanje f sa preslikavanjem $\tilde{r}^{-1} \circ f \circ r$, tj. na f gledamo kao na funkciju sa U na V, datu sa $f(u,v) = (f_1(u,v), f_2(u,v))$. Prema tome, funkcija f je glatka ako funkcije f_1 i f_2 imaju neprekidne parcijalne izvode svih redova.

3.6. Krive na površi. Neka je $r : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ regularna elementarna površ i fiksirajmo $(u_0, v_0) \in U$. Krive $u \mapsto r(u, v_0)$, i $v \mapsto r(u_0, v)$ su u-parametarska kriva i v-parametarska kriva od r. Ove krive se ponekad zovu i koordinatne krive, koje sadrže tačku $P(u_0, v_0)$. Dakle, koordinatne krive su $\alpha(u) = r(u, v_0)$ i $\beta(v) = r(u_0, v)$. Odredimo vektore brzine ovih krivih.

$$\alpha(u) = r(u, v_0), \quad \text{odakle je:}$$

$$\dot{\alpha}(t) = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{dr}{du} \cdot \frac{dt}{dt} + \frac{dr}{dv} \cdot \frac{dv_0}{dt} = r_u$$

Analogno je i $\dot{\beta}(t) = \dfrac{d\beta}{dt} = r_v$.



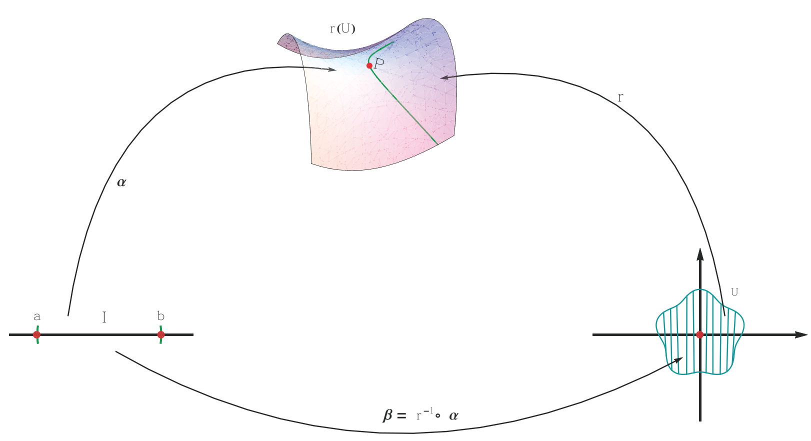
Slika 3. Koordinatne linije

3.7. Tangentni prostor. Ako je data regularna površ $r : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$, da bi trag krive $\alpha : \mathbb{I} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ pripadao tragu površi $r : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ potrebno je definisati diferencijabilno preslikavanje $\beta : \mathbb{I} \longrightarrow U$. To se može uraditi na prirodan način ako je trag te krive sadržan u tragu površi. Naime, važi sledeća lema.

Propozicija. *Neka je $\alpha : \mathbb{I} = (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ kriva čiji trag pripada tragu $r(U)$ regularne elementarne površi $r : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$, takve da je $r : U \longrightarrow r(U)$ homeomorfizam. Tada postoje jedinstvene diferencijabilne funkcije $\alpha_1, \alpha_2 : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ takve da*

$$\alpha(t) = r(\alpha_1(t), \alpha_2(t)), \quad a < t < b.$$

Dokaz. Definišimo preslikavanje $\beta = r^{-1} \circ \alpha : (a, b) \longrightarrow U \subseteq \mathbb{R}^2$, kao na Slici 4. Sada imamo, $\alpha(t) = (r \circ \beta)(t)$. Primetimo da ako je $\beta(t) = (u(t), v(t))$ onda je $\alpha(t) = (r \circ \beta)(t) = r(u(t), v(t))$, pri čemu su $u, v : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$. Time je dokaz gotov ako stavimo $\alpha_1 = u$ i $\alpha_2 = v$, i jasno je da su α_1 i α_2 diferencijabilne funkcije jer su kompozicije diferencijabilnih, a jedinstvenost sledi iz bijektivnosti funkcije r (sa U na $r(U)$). $\square$



Slika 4. Kriva na površi

Primer. (1) Kriva $\alpha(t) = (2\cos^2 t, \sin 2t, 2\sin t)$ pripada sferi $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

(2) Sferu poluprečnika 1, možemo parametrizovati na standardan način:
$r(\phi,\theta) = (\cos\phi\,\cos\theta, \cos\phi\,\sin\theta, \sin\phi)$, pri čemu je $\phi \in (-\pi/2, \pi/2)$ i $\theta \in (-\pi, \pi)$.
Posmatrajmo paralelu, za $\phi = \pi/4$. Imamo $\alpha : (-\pi, \pi) \longrightarrow r(U)$, tj.
$\alpha(t) = r(\pi/4, \theta) = (\frac{\sqrt{2}}{2}\,\cos\theta, \frac{\sqrt{2}}{2}\,\sin\theta, \frac{\sqrt{2}}{2})$.
Posmatrajmo merdijan, za $\theta = \pi/6$. Imamo $\beta : (-\pi/2, \pi/2) \longrightarrow r(U)$, tj.
$\beta(\phi) = r(\phi, \pi/6) = (\frac{\sqrt{3}}{2}\,\cos\phi, \frac{1}{2}\,\cos\phi, \sin\phi)$.
Odredimo vektore brzina krivih α i β u tački njihovog preseka $P = (\pi/4, \pi/6)$.

Vektor brzine krive α u P je

$$X = \dot{\alpha}(\pi/6) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\,\sin\theta, \frac{\sqrt{2}}{2}\,\cos\theta, 0\right)_{\theta=\pi/6} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{6}}{4}, 0\right)$$

Vektor brzine krive β u P je

$$Y = \dot{\beta}(\pi/4) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\,\sin\phi, -\frac{1}{2}\,\sin\phi, \cos\phi\right)_{\phi=\pi/4} = \left(-\frac{\sqrt{6}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

3.8. Tangentni prostor. Neka je $r : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ regularna elementarna površ, i neka je $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow r(U)$ regularna kriva koja pripada površi r (tada je $\alpha(t) = r(u(t), v(t))$, $\forall\, t \in (a, b)$ gde su $u(t)$ i $v(t)$ glatke funkcije) i $P \in \alpha(\mathbb{I})$.

Tangentni vektor na regularnu površ r u tački P je vektor $X \in \mathbb{R}^3$ za koji postoji kriva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow r(U)$ takva da je:
(1) $\alpha(0) = P$
(2) $\dot{\alpha}(0) = X$.

Iz **3.7.** Propozicija sledi da je X vektor brzine neke krive koja pripada površi.

Propozicija. *Skup svih tangentnih vektora na regularnu površ $r : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ u tački $P = r(u_0, v_0) \in r(U)$, zajedno sa nula vektorom*[7], *je realni vektorski prostor dimenzije 2, čija je jedna baza $(r_u(u_0, v_0), r_v(u_0, v_0))$.*

Skup svih tangentih vektora na r u P označavaćemo sa $T_P(r)$ i nazivaćemo ga tangentni prostor.

Dokaz. Pokažimo da je $T_P(r)$ potprostor od $\mathbb{R}^3$. Dakle, potrebno je pokazati da za
(1) $X, Y \in T_P(r)$ sledi i da je $X + Y \in T_P(r)$
(2) $\lambda \in \mathbb{R}$ i $X \in T_P(r)$, sledi i da je vektor $\lambda X \in T_P(r)$.

Kako su $X, Y \in T_P(r)$ sledi da postoje krive α i β takve da je

$$\alpha(t) = r(\alpha_1(t), \alpha_2(t)), \quad \text{tako da je} \quad \alpha(0) = P = r(u_0, v_0), \quad \dot{\alpha}(0) = X,$$

$$\beta(t) = r(\beta_1(t), \beta_2(t)), \quad \text{tako da je} \quad \beta(0) = P = r(u_0, v_0), \quad \dot{\beta}(0) = Y.$$

[7] Ovaj uslov možemo izbeći ako dozvolimo da krive nisu regularne.

Primetimo da je

$$(93)\quad X = \frac{\partial r}{\partial u}(P)\frac{d\alpha_1}{dt}(0) + \frac{\partial r}{\partial v}(P)\frac{d\alpha_2}{dt}(0), \qquad Y = \frac{\partial r}{\partial u}(P)\frac{d\beta_1}{dt}(0) + \frac{\partial r}{\partial v}(P)\frac{d\beta_2}{dt}(0).$$

Posmatrajmo krivu $\gamma(t) = r(\alpha_1(t) + \beta_1(t) - u_0, \alpha_2(t) + \beta_2(t) - v_0)$. Sada lako nalazimo da je $\gamma(0) = r(\alpha_1(0) + \beta_1(0) - u_0, \alpha_2(0) + \beta_2(0) - v_0) = r(u_0, v_0) = P$ i γ je dobro definisana i pripada $r(U)$, za dovoljno malo $|t|$. Pokažimo da je $\dot\gamma(0) = X + Y$.

$$\frac{d\gamma}{dt}(0) = \frac{\partial r}{\partial u}(P)\left(\frac{d\alpha_1}{dt} + \frac{d\beta_1}{dt}\right)(0) + \frac{\partial r}{\partial v}(P)\left(\frac{d\alpha_2}{dt} + \frac{d\beta_2}{dt}\right)(0)$$

$$= \left(\frac{\partial r}{\partial u}(P)\frac{d\alpha_1}{dt}(0) + \frac{\partial r}{\partial v}(P)\frac{d\alpha_2}{dt}(0)\right) + \left(\frac{\partial r}{\partial u}(P)\frac{d\beta_1}{dt}(0) + \frac{\partial r}{\partial v}(P)\frac{d\beta_2}{dt}(0)\right) = X + Y.$$

(2) posmatrajmo krivu $\gamma(t) = \alpha(\lambda t)$, za dovoljno malo t ta kriva pripada tragu regularne površi r. Sada lako nalazimo da je $\gamma(0) = \lambda(0) = P$ i da je $\dot\gamma(t) = \lambda\,\dot\alpha(t)$. Iz poslednje jednakosti sledi da je $\dot\gamma(0) = \lambda X$, time je pokazano da je $T_P(r)$ vektorski prostor. Pronađimo još i bazu vektorskog prostora $T_P(r)$.

Neka je sada data proizvoljna kriva $\alpha(t) = r(u(t), v(t))$, tako da je
$\alpha(0) = P = r(u(0), v(0)) = r(u_0, v_0)$ i $\dot\alpha(0) = X = (X_1, X_2)$. Sada imamo,

$$\dot\alpha(t)_{|t=0} = \frac{\partial r}{\partial u}(u_0, v_0)\cdot \frac{du}{dt}_{|t=0} + \frac{\partial r}{\partial v}(u_0, v_0)\cdot\frac{dv}{dt}_{|t=0}$$

$$= r_u(u_0, v_0)\cdot \dot u(0) + r_v(u_0, v_0)\cdot\dot v(0) = X_1\, r_u(u_0, v_0) + X_2\, r_v(u_0, v_0),$$

odakle sledi da su linearno nezavisni vektori $(r_u(u_0, v_0), r_v(u_0, v_0))$ baza tangentnog prostora $T_P(r)$. X_1 i X_2 su koordinate vektora X u toj bazi. $\square$

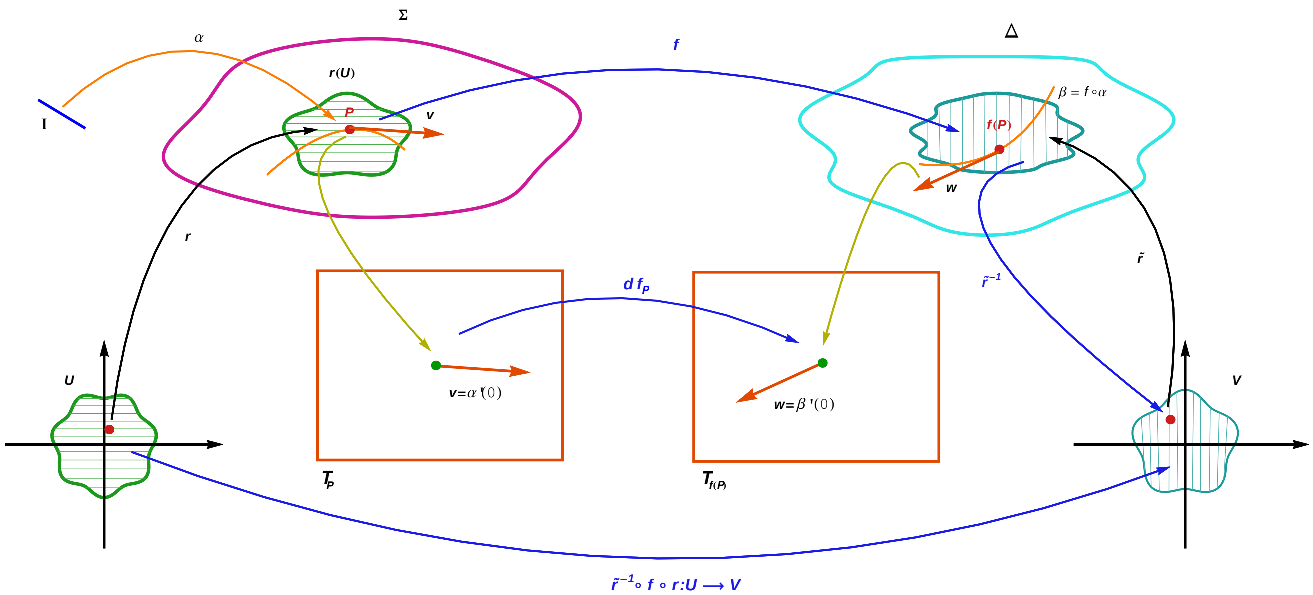
Posledica. *Neka je $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ kriva čiji trag pripada tragu $r(U)$ regularne elementarne površi $r : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$, takve da je $r : U \longrightarrow r(U)$ homeomorfizam. Tada postoje jedinstvene glatke funkcije $u, v : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}$ takve da*

$$(94)\qquad \dot\alpha = \dot u\, r_u + \dot v\, r_v\,.$$

Dokaz. Dovoljno je da na osnovu Propozicije 1 iz prethodne tačke, primetimo da možemo pisati $\alpha(t) = r(u(t), v(t))$, što smo već koristili u dokazu prethodne Propozicije 2, pa i sama formula sledi iz dokaza Propozicije 2. $\square$

Važna napomena. Ubuduće ćemo frazu: *kriva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ čiji trag pripada tragu regularne elementarne površi $r : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$*, zamenjivati sa kraćom frazom: *kriva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ pripada regularnoj elementarnoj površi $r : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$*, koja je kraća i više geometrijska, jer krive i tačke tretiramo kao skupove tačaka.

3.9. Tangentno preslikavanje. Neka su date, $\Sigma = r_1(U)$ i $\Delta = r_2(V)$, dve elementarne regularne površi i neka je $f : \Sigma \longrightarrow \Delta$ glatko preslikavanje. Za proizvoljnu tačku $P \in \Sigma$ znamo da je svaki tangentni vektor $v \in T_P(\Sigma)$, vektor brzine neke glatke krive $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \Sigma$, takve da je $\alpha(0) = P$. Sada za parametrizovanu krivu $\beta = f \circ \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \Delta$ važi da je $\beta(0) = f(P)$ i $w = \dot{\beta}(0)$ je tangentni vektor, element od $T_{f(P)}(\Delta)$, vidi Sliku 4.



Slika 4. Tangentno preslikavanje

Sledeći stav pokazuje važnost ove konstrukcije.

Propozicija. *Za tangentni vektor $\dot{\alpha}(0) = v \in T_P(\Sigma)$, vektor $w = \dot{\beta}(0)$ ne zavisi od izbora krive α. Preslikavanje $\mathrm{d}f_P : T_P(\Sigma) \longrightarrow T_{f(P)}(\Delta)$ definisano sa $\mathrm{d}f_P(v) = w$ je linearno.*

Dokaz. Nakon identifikacije f sa $f \circ r^{-1}$, kao i α sa $\alpha \circ r^{-1}$ biće $f(u,v) = (f_1(u,v), f_2(u,v))$ i $\alpha(t) = (u(t), v(t))$, $(t \in (-\varepsilon, \varepsilon))$, tada je prvo

$$\beta(t) = (f \circ \alpha)(t) = f(u(t), v(t)) = (f_1(u(t), v(t)), f_2(u(t), v(t))), \quad \text{a zatim je:}$$

$$w = \dot{\beta}(0) = \Big(\frac{\partial f_1}{\partial u}\,\dot{u}(0) + \frac{\partial f_1}{\partial v}\,\dot{v}(0), \frac{\partial f_2}{\partial u}\,\dot{u}(0) + \frac{\partial f_1}{\partial v}\,\dot{v}(0)\Big). \tag{95}$$

Relacija (95) pokazuje da vektor $\dot{\beta}(0)$ zavisi samo od preslikavanja f i koordinata vektora $v = \dot{\alpha}(0) = (\dot{u}(0), \dot{v}(0))$ u bazi $((r_1)_u, (r_1)_v)(P)$, dakle ne zavisi od krive α. Na kraju primetimo da relaciju (95) možemo prepisati u matričnom obliku

$$w = \dot{\beta}(0) = \mathrm{d}f_P(v) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial u} & \dfrac{\partial f_1}{\partial v} \\[2ex] \dfrac{\partial f_2}{\partial u} & \dfrac{\partial f_2}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u}(0) \\ \dot{v}(0) \end{pmatrix}, \tag{96}$$

tj. $\mathrm{d}f_P$ je linearno preslikavanje sa $T_P(\Sigma)$ u $T_{f(P)}(\Delta)$ čija je matrica u paru baza $((r_1)_u, (r_1)_v)$ (od $T_P(\Sigma)$) i $((r_1)_{\tilde{u}}, (r_1)_{\tilde{v}})$ (od $T_{f(P)}(\Delta)$) upravo data u (96). $\square$

Linearno preslikavanje $\mathrm{d}f_P$ definisano u prethodnoj propoziciji naziva se tangentno preslikavanje ili diferencijal funkcije f u tački P površi Σ.

Primetimo da se pojmovi tangentnog prostora, diferencijabilnog preslikavanja i tangentnog preslikavanja direktno generališe na mnogostrukosti proizvoljnih dimenzija.

3.10. Tangentna i normalna vektorska polja. Vektorsko polje V na regularnoj elementarnoj površi $r : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ je diferencijabilno preslikavanje koje svakoj tački $q \in U$ dodeljuje vektor $V(q) \in \mathbb{R}^3$. Kažemo da je V tangentno vektorsko polje na r ukoliko $V(q) \in T_{r(q)}(r)$. Za vektor $Z \in \mathbb{R}^3$ kažemo da je normalan na r u tački $P \in r(U)$ ukoliko je $\langle Z, X\rangle = 0$ za svaki tangentni vektor X na r u P.

Kažemo da je V normalno vektorsko polje na r ukoliko je $\langle V(q), X\rangle = 0$ za sve $X \in T_{r(q)}(r)$ i sve $q \in U$. Vektorska polja r_u i r_v nazivamo koordinatna vektorska polja.

Propozicija 1. *Svako tangentno vektorsko polje na regularnoj elementarnoj površi $r : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ može se predstaviti u obliku*

$$X(q) = X_1(q)r_u(q) + X_2(q)r_v(q), \qquad q \in U. \tag{97}$$

Funkcije X_1, X_2 su jedinstvene i diferencijabilne. Svaki par diferencijabilnih funkcija $X_1, X_2 : U \longrightarrow \mathbb{R}$ određuje jedinstveno tangentno vektorsko polje.

Dokaz. Iz definicije je jasno da formule (97) definišu tangentno vektorsko polje. Pokažimo da svaki par diferencijabilnih funkcija X_1 i X_2 definiše tačno jedno tangentno vektorsko polje. Kako je

$$X = X_1 r_u + X_2 r_v, \quad \text{pomnožimo tu jednačinu skalarno redom sa } r_u \text{ i } r_v.$$

Tako ćemo dobiti Kramerov sistem reda 2, koji ima jedinstveno rešenje, jer su vektori r_u i r_v linearno nezavisni. □

Tangentna ravan regularne elementarne površ $r : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ u tački $P = r(u_0, v_0)$ je ravan $\mathcal{T}_P = \mathcal{T}_P(r)$, koja sadrži tačku P i paralelna je vektorima $r_u(u_0, v_0)$ i $r_v(u_0, v_0)$. Jasno, jedinični vektor normale na površ r u tački P je

$$N = N(u_0, v_0) = \frac{r_u \times r_v}{\|r_u \times r_v\|}(u_0, v_0). \tag{98}$$

Normala na površ u tački P je prava određena tačkom P i vektorom N.

Propozicija 2. *Tangentna ravan i normala su geometrijski pojmovi, tj. ne zavise o parametrizaciji površi.*

Dokaz. Neka su $r_1 : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ i $r_2 : V \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dve regularne i glatke parametrizacije, tada postoji difeomorfizam $\phi : V \longrightarrow U$ takav da je: $r_2 = r_1 \circ \phi$ i $\det(\mathcal{J}(\phi)) \neq 0$. Posmatrajmo tačku $P = r_2(u_1, v_1) = r_1(\phi_1(u_1, v_1), \phi_2(u_1, v_1)) = r_1(u_0, v_0)$.

Kako smo ranije pokazali (vidi **3.4.** u dokazu Leme), važi formula:

$$((r_2)_u \times (r_2)_v)(u_1, v_1) = \mathsf{det}\,(\mathcal{J}(\phi)) \cdot ((r_1)_u \times (r_1)_v)(u_0, v_0),$$

odakle onda sledi da tangentna ravan i normala ne zavise od parametrizacije, jer su normalni vektori kolinearni. □

Orijentabilnost. Primetimo da je formulom (98) definisano jedinično normalno vektorsko polje na parametrizovanoj elementarnoj glatkoj površi $r(U)$. Ako zamenimo u parametrizaciji r redosled koordinata i za tu novu parametrizaciju $\tilde{r}$ izračunamo vektor normale $\tilde{N}$ koristeći formulu (98) dobićemo $\tilde{N}(P) = -N(P)$, tj. $\tilde{N}$ je takođe jedinično normalno vektorsko polje na $r(U)$.

Dakle, vidimo da na elementarnoj regularnoj površi uvek postoji jedinično [8] normalno vektorsko polje.

Ako je Σ regularna površ (mnogostrukost) i ako na njoj postoji jedinično normalno (diferencijabilno) vektorsko polje tada kažemo da je površ Σ orijentabilna.

Propozicija 3. *Ako je regularna površ Σ zadata jednačinom $F(x_1, x_2, x_3) = 0$, tada je vektorsko polje $N(q) = \mathrm{grad}\,F(q)/\|\mathrm{grad}\,F(q)\|$ normalno jedinično vektorsko polje na Σ.*

Dokaz. Znamo da na površi Σ, vektorsko polje $\mathrm{grad}\,F = (\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}, \frac{\partial F}{\partial x_3})$ je glatko i nigde se ne poništava (vidi **3.2** drugi načini zadavanja površi), tako daje potrebno pokazati da je $\langle \mathrm{grad}\,F(q), X\rangle = 0$, za svaki tangentni vektor $X \in T_q(r)$. Budući da je X tangentni vektor u tački q, postoji regularna kriva $\alpha \subseteq \Sigma$, takva da je $\alpha(0) = q$ i $\dot{\alpha}(0) = (\dot{\alpha_1}(0), \dot{\alpha_2}(0), \dot{\alpha_3}(0)) = X$. Kako α pripada Σ važi $0 = F(\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$, tako da za proizvoljno t imamo

$$0 = \frac{dF}{dt}(\alpha(t)) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial F}{\partial x_1}(\alpha(t)) \cdot \frac{d\alpha_i}{dt}(t). \tag{99}$$

Sada iz (99) za $t = 0$, odmah sledi da je $\langle \mathrm{grad}\,F(q), X\rangle = 0$. □

Primer. (i1) Prethodna propozicija omogućuje da zaključimo da su sve površi drugog reda: elipsoidi, hiperboloidi, paraboloidi, cilindri, kao i rotacione površi orijentabilne.

(i2) Mebijusova (Möbius) traka M je najjednostavnija površ koja nije orijentabilna. Mebijusova traka je površ koja nastaje tako što uzmemo traku papira, zatim jedan njen kraj uvrnemo za 180 stepeni i na kraju zalepimo njene krajeve. M je neorijentabilna jer na M ne postoji normalno vektorsko polje koje se nigde ne poništava. Da bismo se u to ubedili posmatrajmo zatvorenu krivu γ (krug) koja pripada M, dakle takvu da je $\gamma(0) = \gamma(1) = q$, i pretpostavimo da je Z normalno vektorsko polje koje se nigde ne poništava. Nije se teško ubediti, da nakon što obiđemo traku po površi da je $Z(\gamma(0)) = -Z(\gamma(1))$, a to je nemoguće jer je funkcija $t \longrightarrow Z(\gamma(t))$ diferencijabilna.

[8] Ovaj uslov o postojanju jediničnog normalnog vektorskog polja na nekoj mnogostrukosti ekvivalentan je uslovu postojanja normalnog vektorskog polja koje se nigde ne poništava.

3.11. Prva fundamentalna forma. Neka je $r : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ regularna elementarna površ. Kvadratnu formu

$$\mathfrak{I}_P(w) = \langle w, w\rangle_P = \|w\|^2 \geq 0, \qquad w \in T_P(r) \tag{100}$$

nazivamo prva osnovna (fundamentalna) forma površi r u tački $P \in r(U)$.

Kako je $w \in T_P(r)$ (po definiciji) tangetni vektor neke krive α koja pripada površi r biće: $\alpha(t) = r(u(t), v(t))$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $P = \alpha(0) = r(u_0, v_0)$, i $\dot\alpha(0) = w$. Sada računamo ($\langle\cdot,\cdot\rangle$ je standardni skalarni proizvod u $\mathbb{R}^3$),

$$\begin{aligned}\mathfrak{I}_P(\dot\alpha(0)) &= \langle \dot\alpha(0), \dot\alpha(0)\rangle_P = \langle \dot u r_u + \dot v r_v, \dot u r_u + \dot v r_v\rangle_P \\ &= (\dot u)^2\langle r_u, r_u\rangle_P + 2\,\dot u\dot v\langle r_u, r_v\rangle_P + (\dot v)^2\langle r_v, r_v\rangle_P = E\,(\dot u)^2 + 2\,F\,\dot u\dot v + G\,(\dot v)^2,\end{aligned}$$

pri čemu je

$$E = E(u_0, v_0) = \langle r_u, r_u\rangle_P,\ F = F(u_0, v_0) = \langle r_u, r_v\rangle_P,\ G = G(u_0, v_0) = \langle r_v, r_v\rangle_P.$$

Brojevi E, F i G zovu se koeficijenti prve osnovne forme i ne zavise od krive α, a $\dot u \equiv \dot u(0)$ i $\dot v \equiv \dot v(0)$. Kvadratna forma $\mathfrak{I}_P = \mathfrak{I}$ definiše polarnu bilinearnu simetričnu formu $\mathfrak{I}(u, v) = \mathfrak{I}_P(u, v) = \langle u, v\rangle_P$ u tangentnom prostoru $T_P \cong \mathbb{R}^2$, koju možemo zapisati kao

$$\mathfrak{I}(u, v) = \langle \mathcal{G}_{\mathfrak{I}} u, v\rangle = (u_1, u_2)\begin{pmatrix} E & F \\ F & G\end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2\end{pmatrix}, \qquad \text{gde je} \qquad \mathcal{G}_{\mathfrak{I}} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G\end{pmatrix}.$$

Bilinearna simetrična forma $\mathfrak{I}(u, v)$ je strogo pozitivno definitna, jer je $\mathcal{G}_{\mathfrak{I}}$ Gramova matrica linearno nezavisnih vektora r_u i r_v. Kao što znamo, njena determinanta je strogo pozitivna, kao i koeficijent E[9]. Sada zaključujemo (vidi uvod) da simetrična bilinearna forma $\mathfrak{I}(u, v)$ predstavlja skalarni proizvod (u tangentnom prostoru svake tačke regularne površi) i kao takva definiše ugao $\phi_{u,v} = \angle(u, v)$ i dužinu vektora u

$$\|u\| = \sqrt{\mathfrak{I}(u, u)}\,, \qquad \cos\phi_{u,v} = \frac{\mathfrak{I}(u, v)}{\sqrt{\mathfrak{I}(u, u)}\cdot\sqrt{\mathfrak{I}(v, v)}}\,.$$

Još o oznakama. Često se koriste i oznake $g_{ij}(u_0, v_0) = \langle r_u(u_0, v_0), r_v(u_0, v_0)\rangle$, tako da je $g_{11} = E, g_{12} = g_{21} = F$ i $g_{22} = G$. Kasnije ćemo koristiti i oznake $r_1 = r_u, r_2 = r_v$, koje su pogodne ako želimo neke formule zapisati u, kompaktnijem i pogodnijem za generalizacije, matričnom obliku.

Funkcije g_{ij} definišu simetričnu matricu $\mathcal{G}_{\mathfrak{I}} = (g_{ij})$ u svakoj tački $r(U)$ i nazivamo ih metričkim koeficijentima (koeficijenti metričkog tenzora, koeficijenti Riemann-ove metrike).

Primeri. (1) Neka je data ravan $\sigma \subseteq \mathbb{R}^3$, koja sadrži tačku $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ i razapeta je ortonormiranim vektorima $w_1 = (a_1, a_2, a_3)$ i $w_2 = (b_1, b_2, b_3)$. Tada je njena jednačina

$$r(u, v) = P_0 + u\,w_1 + v\,w_2, \qquad (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

[9] Sve glavne minore matrice $\mathcal{G}_{\mathfrak{I}}$ su pozitivne.

Odredimo njenu prvu fundamentalnu formu u proizvoljnoj tački $P \in \sigma$: kako je $r_u = w_1$ i $r_v = w_2$ i kako su vektori w_1 i w_2 ortogonalni, vidimo da su funkcije E, F i G konstantne: $E = 1, \quad F = 0, \quad G = 1$.

(2) Neka je dat cilindar $x^2 + y^2 = 1$, njegova parametrizacija (bez jedne izvodnice) je

$$r(u, v) = (\cos u, \sin u, v), \qquad (u, v) \in (0, 2\pi) \times \mathbb{R}.$$

Odredimo njegovu prvu fundamentalnu formu u proizvoljnoj tački $P = r(u, v)$: kako je $r_u = (-\sin u, \cos u, 0)$ i $r_v = (0, 0, 1)$ nalazimo:

$$E = \langle r_u, r_u \rangle = \sin^2 u + \cos^2 = 1, \quad F = \langle r_u, r_v \rangle = 0, \quad G = \langle r_v, r_v \rangle = 1.$$

(3) Neka je data parametrizacija helikoida $(a \neq 0)$:

$$r(u, v) = (v \cos u, v \sin u, a\, u), \qquad (u, v) \in (0, 2\pi) \times \mathbb{R}.$$

Kako je $r_u = (-v \sin u, v \cos u, a)$, $r_v = (\cos u, \sin u, 0)$ i kako je $a \neq 0$, odmah sledi da su vektori r_u i r_v linearno nezavisni za sve (u, v), tj. helikoid je regularna površ.

Odredimo njegovu prvu fundamentalnu formu u proizvoljnoj tački $P = r(u, v)$. Sada imamo:

$$E = \langle r_u, r_u \rangle = v^2 \sin^2 u + v^2 \cos^2 + a^2 = v^2 + a^2, \quad F = \langle r_u, r_v \rangle = 0, \quad G = \langle r_v, r_v \rangle = 1.$$

3.12. Važnost prve fundamentalne forme i njene primene. Neka je α kriva koja pripada površi r, tada je $\alpha(t) = r(u(t), v(t))$.

(i1) dužina luka krive α :

$$L(t) = \int_0^t \|\dot{\alpha}(s)\|\, ds = \int_0^t \|\mathfrak{I}_P(\dot{\alpha}(s))\|\, ds = \int_0^t \sqrt{E\, \dot{u}^2 + 2F\, \dot{u}\, \dot{v} + G\, \dot{v}^2}\, ds\ .$$

Zbog ovoga, govorimo o "elementu" dužine luka, ds, površi i kraće pišemo

$$ds^2 = E\, du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2, \quad \text{jer je} \quad \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\, \frac{du}{dt}\, \frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2.$$

Prethodna formula pokazuje važnost prve fundamentalne forme, jer ako znamo prvu fundamentalnu formu neke površi možemo tretirati sve metričke probleme na njoj bez obzira kako je ona smeštena u ambijentni prostor $\mathbb{R}^3$. Drugim rečima, metrika je unutrašnje svojstvo same površi, zbog čega će to biti i svi objekti i koncepti koji se izražavaju kao funkcije metričkih koeficijenata površi.

(i2) za ugao θ između dve krive α i β čije slike pripadaju $r(U)$ i koje se seku u tački $P = \alpha(t_0) = \beta(t_1)$ važiće

$$\cos\theta = \frac{\langle \alpha'(t_0), \beta'(t_1) \rangle}{\|\alpha'(t_0)\| \cdot \|\beta'(t_1)\|}\ .$$

Dakle, ugao θ između koordinatnih krivih koje se seku u P zadovoljava $\cos\theta = \dfrac{F}{\sqrt{E\, G}}$.

(i3) Površina. Neka je $r : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ regularna elementarna površ i neka je S kompaktan podskup od $r(U)$ i neka je $Q = r^{-1}(S)$. Funkcija $\|r_u \times r_v\|$ meri površinu paralelograma određenog vektorima r_u i r_v. Prvo pokažimo da integral

$$\int_Q \|r_u \times r_v\| \, du \, dv$$

ne zavisi od parametrizacije r. Ako je $\tilde{r} : \tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ neka druga parametrizacija od $S \subseteq \tilde{r}(\tilde{U})$ i neka je $\tilde{Q} = \tilde{r}^{-1}(S)$. Obeležimo sa $\partial(u,v)/\partial(\tilde{u},\tilde{v})$ Jakobijan promene koordinata $h = r^{-1} \circ \tilde{r}$. Tada imamo,

$$\int_{\tilde{Q}} \|\tilde{r}_{\tilde{u}} \times \tilde{r}_{\tilde{v}}\| \, d\tilde{u} \, d\tilde{v} = \int_{\tilde{Q}} \|r_u \times r_v\| \left| \frac{\partial(u,v)}{\partial(\tilde{u},\tilde{v})} \right| \, d\tilde{u} \, d\tilde{v} = \int_Q \|r_u \times r_v\| \, du \, dv \, .$$

Prethodni rezultat nam omogućuje da za kompaktan podskup $S \subseteq r(U)$ traga regularne površi $r : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$, pozitivan broj

$$\int_{r^{-1}(S)} \|r_u \times r_v\| \, du \, dv = P(S),$$

nazivamo površina od S. Da se zaista radi o površini možemo se ubediti tako što podelimo čitav skup $Q = r^{-1}(S)$ na male paralelograme. Površine slike $r(A) \subseteq S$ tako dobijenog malog paralelograma $A \subseteq Q$ ne razlikuje se mnogo od površine paralelograma $\|r_u \times r_v\| \triangle u \triangle v$, i onda pređemo na limes takvih podela kada dužine stranica tih malih paralelograma teže nuli, na koji možemo da pređemo (tj. limes postoji !) zbog dobrih osobina parametrizacije r.

Primetimo da je

$$\|r_u \times r_v\|^2 + \langle r_u, r_v \rangle^2 = \|r_u\|^2 \cdot \|r_v\|^2.$$

Tako da površinu od S možemo zapisati kao,

$$P(S) = \int_{r^{-1}(S)} \sqrt{E\,G - F^2} \, du \, dv. \tag{101}$$

Primer. Neka je regularna površ, $r : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$, data kao grafik neke funkcije, tj. $r(u,v) = (u, v, f(x,y))$, gde je f glatka, i neka je S kompaktan podskup traga površi r. Tada je $r_u = (1, 0, f_u)$, $r_v = (0, 1, f_v)$, i koeficijenti prve fundamentalne forme su

$$E = 1 + {f_u}^2, \quad F = f_u \, f_v, \quad G = 1 + {f_v}^2 \quad \text{tako da je površina od } S\text{:}$$

$$P(S) = \int_{r^{-1}(S)} \sqrt{E\,G - F^2} \, du \, dv = \int_{r^{-1}(S)} \sqrt{1 + (f_u)^2 + (f_v)^2} \, du \, dv.$$

3.13. Gausovo preslikavanje. Kao što znamo, za regularnu elementarnu glatku površ $r : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ i $P \in r(U)$ uvek možemo izabrati jedinični vektor normale $N(P)$, formulom

$$N(P) = \frac{r_1(P) \times r_2(P)}{\|r_1(P) \times r_2(P)\|}.$$

Prethodna formula definiše glatko preslikavanje, $N : r(U) \longrightarrow \mathbb{S}^2$, pri čemu je $\mathbb{S}^2$ jedinična sfera u $\mathbb{R}^3$. Preslikavanje N zove se Gausovo preslikavanje regularne elementarne površi r.

Podsetimo se da je preslikavanje $\mathrm{d}N_P$ definisano na sledeći način: za svaku regularnu parametrizovanu krivu α koja pripada površi r takvu da je $\alpha(0) = P$, posmatramo parametrizovanu krivu $(N \circ \alpha)(t) = N(\alpha(t)) = N(t)$ koja pripada sferi $\mathbb{S}^2$. Preslikavanje $\mathrm{d}N_P$ tangentnom vektoru $\dot{\alpha}(0) \in T_P(r)$ dodeli tangentni vektor $\dot{N}(0) \in T_{N(P)}\mathbb{S}^2$, krive $N(\alpha(t))$ u tački sfere $N(P)$. U tački **3.9** pokazano je da je (tangentno) preslikavanje $\mathrm{d}N_P$ linearno. Kako su tangentni prostori, $T_P(r)$ i $T_{N(P)}\mathbb{S}^2$, izomorfni $\mathbb{R}^2$ na $\mathrm{d}N_P$ možemo gledati kao na linearni operator na $T_P(r)$, tj. $\mathrm{d}N_P \in \mathsf{Hom}\,(T_P(r))$.

Budući da su svi tangentni vektori u $T_P(r)$, vektori brzina nekih krivih koje pripadaju površi r i prolaze kroz tačku P, diferencijal Gausovog preslikavanje $\mathrm{d}N_P$ meri deformacije jediničnog normalnog vektorskog polja N u pravcima svih tangentnih vektora i zbog toga o njemu zavisi oblik same regularne površi r.

Iz tehničkih razloga (da bismo izbegli pojavljivanje mnogih minusa u mnogim formulama) prirodnije je posmatrati linearni operator $\mathcal{S}_P = -\mathrm{d}N_P$, kojeg nazivamo operatorom oblika elementarne regularne površi r u tački P. Drugim rečima sve informacije o obliku regularne površi r kodirane su familijom njenih operatora oblika, tj. skupom $\{\mathcal{S}_P\,, P \in r(U)\}$.

Primetimo da je na orijentabilnoj regularnoj površi Σ operator oblika određen orijentacijom koju smo izabrali.

Primer. (1) Neka je Σ ravan data sa $a_1\,x_1 + a_2\,x_2 + a_3\,x_3\,z + b = 0$, tada je njen jedinični vektor normale $N = (a_1, a_2, a_3)/\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ konstantan, tako da je $\mathrm{d}N_P = \mathcal{S}_P = 0,\ \forall\, P \in \Sigma$.

(2) Posmatrajmo jediničnu sferu $\mathbb{S}^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$, i neka je $\alpha(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ glatka parametrizovana kriva čiji trag pripada sferi, tada je

$$1 = x_1(t)^2 + x_2(t)^2 + x_3(t)^2, \text{ odakle je } 0 = 2\,x_1(t)\,\dot{x_1}(t) + 2\,x_2(t)\,\dot{x_2}(t) + 2\,x_3(t)\,\dot{x_3}(t).$$

Dakle, vektor $(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ je normalan na tangentnu ravan $T_{P(t)}$ sfere $\mathbb{S}^2$ u tački $P(t) = \alpha(t)$.

U zavisnosti od parametrizacije sfere (vidi **3.17** Primer (3) i (4)), jedinični vektori normale sfere u tački $P = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{S}^2$ su $N(P) = (x_1, x_2, x_3)$ ili $\tilde{N}(P) = (-x_1, -x_2, -x_3)$. Ako izaberemo parametrizaciju sfere takvu da je vektor normale u tački P dat sa $N(P)$, i ako ga restringujemo na krivu $P(t) = \alpha(t)$ vidimo da je

$$\mathrm{d}N_P(\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), \dot{x}_3(t)) = \dot{N}_P(t) = (\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), \dot{x}_3(t)),$$

tj. $\mathrm{d}N_P = \mathrm{id}_{T_P(\mathbb{S}^2)} = -\mathcal{S}_P$. Ako izaberemo parametrizaciju sfere takvu da je vektor normale dat sa $\tilde{N}$, tada je $\mathrm{d}N_P = -\mathrm{id}_{T_P(\mathbb{S}^2)} = -\mathcal{S}_P$.

Propozicija. Operator oblika $\mathcal{S}_P : T_P(r) \longrightarrow T_P(r)$, je simetričan linearni operator, tj. za sve $v, w \in T_P(r)$ važi: $\big\langle \mathcal{S}_P(v), w \big\rangle = \big\langle v, \mathcal{S}_P(w) \big\rangle$.

Dokaz. Jasno, dovoljno je dokazati da je diferencijal Gausovog preslikavanja $\mathrm{d}N_P$ simetričan operator, jer je $\mathcal{S}_P = -\mathrm{d}N_P$. Kako je $\mathrm{d}N_P$ linearan operator (vidi **3.9** Propozicija), dovoljno je dokazati, zbog linearnosti od $\mathrm{d}N_P$ i bilinearnosti skalarnog proizvoda, da je njegovo dejstvo na nekoj bazi $\{w_1, w_2\}$ od $T_P(r)$ simetrično, tj. $\big\langle \mathrm{d}N_P(w_1), w_2 \big\rangle = \big\langle w_1, \mathrm{d}N_P(w_2) \big\rangle$. Neka je $\alpha(t) = r(u(t), v(t))$ parametrizovana kriva čiji trag pripada tragu regularne površi r, takva da je $\alpha(0) = P$. Sada redom imamo

$$\mathrm{d}N_P(\dot\alpha(0)) = \mathrm{d}N_P(r_u\dot u(0) + r_v \dot v(0)) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} N(u(t), v(t)) = N_u \dot u(0) + N_v \dot v(0). \tag{102}$$

Ako sada za α izaberemo redom koordinatne krive, vidimo da je $\mathrm{d}N_P(r_u) = N_u$ i $\mathrm{d}N_P(r_v) = N_v$. Jasno, skup $\{r_u, r_v\}$ je baza od $T_P(r)$, i da bismo završili dokaz proveravamo da je

$$\big\langle \mathrm{d}N_P(r_u), r_v \big\rangle = \big\langle N_u, r_v \big\rangle = \big\langle r_u, N_v \big\rangle = \big\langle r_u, \mathrm{d}N_P(r_v) \big\rangle.$$

Budući da je $\big\langle N, r_v \big\rangle = \big\langle N, r_u \big\rangle = 0$, diferencirajući ove relacije redom po v i u dobijamo

$$0 = \big\langle N_v, r_u \big\rangle + \big\langle N, r_{uv} \big\rangle, \qquad 0 = \big\langle N_u, r_v \big\rangle + \big\langle N, r_{vu} \big\rangle. \tag{103}$$

Kombinujući relacije (103) sledi

$$\big\langle N_u, r_v \big\rangle = -\big\langle N, r_{vu} \big\rangle = \big\langle r_u, N_v \big\rangle,$$

što je i trebalo pokazati. $\square$

3.14. Druga fundamentalna forma. U prethodnoj tački je pokazano da je linearni operator $\mathcal{S}_P$ simetričan. Ova činjenica nam omogućuje da definišemo kvadratnu formu i njenu polarnu (simetričnu bilinearnu) formu sa,

$$\mathfrak{D}_P(v) = \big\langle \mathcal{S}_P(v), v \big\rangle,\ v \in T_P(r), \quad \text{ili} \quad \mathfrak{D}_P(v, w) = \big\langle \mathcal{S}_P(v), w \big\rangle,\ v, w \in T_P(r).$$

Kvadratnu formu $\mathfrak{D}_P$ nazivamo drugom fundamentalnom kvadratnom formom regularne površi r u tački P.

Nađimo sada drugu fundamentalnu formu u bazi $\{r_u, r_v\}$. Neka je data parametrizovana kriva $\alpha(t) = r(u(t), v(t))$, koja pripada regularnoj površi r. Tada je (vidi dokaz **3.13** Propozicija)

$$\mathfrak{D}_P(\dot\alpha) = -\big\langle \mathrm{d}N_P(\dot\alpha), \dot\alpha \big\rangle = -\big\langle N_u\, \dot u + N_v\, \dot v, r_u\, \dot u + r_v\, \dot v \big\rangle = e\, \dot u^2 + f\, \dot u\, \dot v + g\, \dot v^2,$$

gde je (vodeći računa o relacijama (103))

$$\begin{aligned} &e = -\big\langle N_u, r_u \big\rangle = \big\langle N, r_{uu} \big\rangle, \qquad g = -\big\langle N_v, r_v \big\rangle = \big\langle N, r_{vv} \big\rangle, \\ &f = -\big\langle N_v, r_u \big\rangle = \big\langle N, r_{uv} \big\rangle = \big\langle N, r_{vu} \big\rangle = -\big\langle N_u, r_v \big\rangle. \end{aligned} \tag{104}$$

Geometrijska interpretacija 2. fundamentalne forme. Primetimo da prethodne formule (104) pokazuju da koeficijenti e, f, g redom predstavljaju skalar-projekcije vektora r_{uu}, r_{uv} i r_{vv} na vektor normale N.

Ako vektore r_{uu}, r_{uv} i r_{vv} predstavimo u pozitivnom reperu $\mathfrak{B}_p = (r_u, r_v, N)$, imamo

$$\begin{aligned} r_{uu} &= \Gamma^1_{11} r_u + \Gamma^2_{11} r_v + e\,N, \\ r_{uv} &= \Gamma^1_{12} r_u + \Gamma^2_{12} r_v + f\,N, \\ r_{vv} &= \Gamma^1_{22} r_u + \Gamma^2_{22} r_v + g\,N. \end{aligned} \tag{105}$$

Jednačine (105) nazivamo Gausovim jednačinama, a funkcije Γ^k_{ij} koje se u njima pojavljuju zovu se Kristofelovi (Christoffel) simboli druge vrste. Sada, drugu fundamentalnu formu (ili bolje reći njenu polarnu formu) možemo zapisati u obliku:

$$\mathfrak{D}(u,v) = \langle \mathcal{G}_{\mathfrak{D}} u, v \rangle = (u_1, u_2) \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \qquad \text{gde je} \qquad \mathcal{G}_{\mathfrak{D}} = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}.$$

3.15. Normalna i geodezijska krivina. Neka je α biregularna prirodno parametrizovana kriva koja pripada regularnoj elementarnoj površi r. Tada su na prirodan način definisani pojmovi:

- pozitivne ortonormirane Frene-Serove baze (v, n, b) krive α, i njene krivine κ,
- pozitivne baze (ne mora biti ortonormirana[10]) $\mathfrak{B}_p = (r_u, r_v, N)$, gde je N normala na regularnu površ u tački $P = r(u,v)$.

Primetimo da je tangentni vektor v, krive α u tački $P = r(u(l), v(l)) = \alpha(l)$, ortogonalan na vektore normale krive n i vektor normale N površi r. Kako su vektori N i v jedinični i međusobno ortogonalni, reper $\mathfrak{B}_N = (N, v, S = N \times v)$ je pozitivno orijentisan i ortonormiran. Vektor S nazivamo vektorom unutrašnje normale površi r u tački P. Primetimo da vektor S pripada tangentnom prostoru T_P, jer je po konstrukciji vektor N normalan na T_P, ali i na potprostor generisan vektorima v i S, tj. $T_P = \mathcal{L}\{v, S\}$.

Sada, koristeći definiciju krivine krive, u proizvoljnoj tački krive α imamo:

$$\alpha''(l) = \kappa(l)\,n(l) = \kappa_N(l) N(l) + \kappa_g(l)\,S(l). \tag{106}$$

Brojeve $\kappa_N(l) = \kappa_N(P)$ i $\kappa_g(l) = \kappa_g(P)$ iz (106) nazivamo normalna i geodezijska krivina(redom) regularne krive $\alpha \subseteq r(U)$ u tački P. Jasno, κ_N i κ_g su diferencijabilne funkcije sa $[0, L] \longrightarrow \mathbb{R}$.

Kako su vektori n, N i S jedinični i pri tome su N i S ortogonalni, množeći relaciju (106) skalarno samu sa sobom dobijamo.

Propozicija. *Neka je α kriva parametrizovana prirodnim parametrom koja pripada elementarnoj regularnoj površi r. Tada za krivinu κ krive α, njenu normalnu krivinu*

[10] jer vektori r_u i r_v ne moraju biti ortonormirani.

κ_N i geodezijsku krivinu κ_g važi jednakost,

$$\kappa^2 = {\kappa_N}^2 + {\kappa_g}^2 . \tag{107}$$

Primedba. Primetimo da u iskazu prethodne propozicije ne moramo zahtevati da je kriva biregularna, jer ako se krivina κ krive α u nekoj tački poništava, poništavaće se i njena normalna, κ_N, i geodezijska, κ_g, krivina (iako vektor n nije dobro definisan, vidi (106)).

3.16. Teorema Menijea. Neka je $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ kriva parametrizovana prirodnim parametrom koja pripada elementarnoj regularnoj površi $r : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Tada je $\alpha(l) = r(u(l), v(l))$, i

$$\alpha'' = \frac{d^2\alpha}{dl^2} = \kappa\, n, \tag{108}$$

gde je κ krivina a n normala na krivu α. Od ranije znamo da je

$$\frac{dl}{dt} = \left\| \frac{d\alpha}{dt} \right\| = \sqrt{\mathfrak{I}(\dot\alpha, \dot\alpha)} = \sqrt{\mathfrak{I}\left(\frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\alpha}{dt} \right)} .$$

Sledeća važna teorema pokazuje da je normalnu krivina regularne kriva α koja pripada regularnoj površi r funkcija prve i druge fundamentalne forme.

Teorema (Menije[11]). *Normalna krivina krive α koja pripada regularnoj elementarnoj površi $r : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ data je sa:*

$$\langle \alpha'', N \rangle = \kappa \langle n, N \rangle = \kappa \cos\theta = \kappa_N = \frac{\mathfrak{D}(\dot\alpha, \dot\alpha)}{\mathfrak{I}(\dot\alpha, \dot\alpha)}$$

gde je θ ugao između vektora normale n krive α i vektora normale površi N.

Dokaz. Pretpostavimo da je kriva α parametrizovana proizvoljnim parametrom t. Tada je parametar t funkcija prirodnog parametra l i kako kriva α pripada površi r biće $\alpha(l) = r(u(t(l))), (v(t(l)))$. Diferencirajući ovu relaciju po l i koristeći formulu (108) nalazimo,

$$\frac{d^2\alpha}{dl^2} = \kappa\, n = \frac{d}{dl}\left(\frac{dr}{dt}\frac{dt}{dl} \right) = \left(\frac{d^2 r}{dt^2}\left(\frac{dt}{dl}\right)^2 + \frac{dr}{dt}\frac{d^2 t}{dl^2} \right) = \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\right)\left(\frac{dt}{dl}\right)^2 + \frac{dr}{dt}\frac{d^2 t}{dl^2} \right)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial r}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial r}{\partial v}\frac{dv}{dt} \right)\left(\frac{dt}{dl}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial r}{\partial v}\frac{dv}{dt} \right)\frac{d^2 t}{dl^2}$$

$$= (r_{uu}\dot u^2 + 2r_{uv}\dot u\dot v + r_{vv}(\dot v)^2 + r_u\ddot u + r_v\ddot v)\left(\frac{dt}{dl}\right)^2 + (r_u\dot u + r_v\dot v)\left(\frac{d^2 t}{dl^2}\right) . \tag{109}$$

[11] Jean Baptiste Marie Charles Meusnier de la Place, 1754–1793, francuski matematičar, inženjer i general.

Ako jednakost (109) pomnožimo skalarno sa N, vodeći računa o jednačini (106), kao i poznatim činjenicama: N je normalan na vektore $\{r_u, r_v, S\}$, n i N su jedinični vektori, napokon dobijamo:

$$\kappa_N = \kappa\langle n, N\rangle = \kappa\,\cos\theta = \big(\langle r_{uu}, N\rangle(\dot u)^2 + 2\langle r_{uv}, N\rangle\dot u\dot v + \langle r_{vv}, N\rangle(\dot v)^2\big)\left(\frac{dt}{dl}\right)^2.$$

Ako sada još primetimo da je $(dl/dt)^{-2} = \mathfrak{I}(\dot\alpha, \dot\alpha)$ iz prethodne formule sledi tvrđenje teoreme. $\square$

Primedba 1. (1) Primetimo, prvo da se normalna krivina i krivina iz teoreme Menijea odnose na sve tačke neke krive α koja pripada površi r. Dakle, normalna krivina je funkcija tačke $P \in \alpha(\mathbb{I})$ i krive α (tj. njenog vektora brzine) tj. $\kappa_N(P) = \kappa_N^\alpha(P) = \kappa_N(\dot\alpha, P)$. Ako to imamo u vidu, tada vidimo da teorema Menijea zapravo tvrdi da *sve regularne krive koje pripadaju regularnoj površi i koje imaju u nekoj tački P iste tangentne linije, imaju u toj tački i istu normalnu krivinu.*

(2) Teorema Menijea pokazuje da je normalna krivina prostorne krive prirodna generalizacija krivine kod ravanskih krivih.

(3) Lokalni zapis prethodne teoreme. Dakle, ako je $\alpha(t) = r(u(t), v(t))$, $\alpha(0) = P$, $\dot\alpha(0) = X = \dot u(0)r_u(P) + \dot v(0)r_v(P)$, i ako stavimo $X_1 = \dot u(0)$, $X_2 = \dot v(0)$ tada je:

$$\kappa_N(P) = \kappa(P)\langle n(P), N(P)\rangle = \kappa(P)\,\cos\theta(P) = \frac{e(P)X_1^2 + 2f(P)X_1X_2 + g(P)X_2^2}{E(P)X_1^2 + 2F(P)X_1X_2 + G(P)X_2^2}.$$

Posledica 1. *Neka je α prirodno parametrizovana kriva koja pripada elementarnoj regularnoj površi r. Tada je*

(1) $\kappa_N = e(u')^2 + 2fu'v' + g(v')^2 = \mathfrak{D}(\alpha', \alpha')$,

(2) $\kappa_g S = \big(\Gamma^1_{11}(u')^2 + 2\Gamma^2_{11}u'v' + \Gamma^1_{22}(v')^2 + u''\big)r_u + \big(\Gamma^2_{11}(u')^2 + 2\Gamma^2_{12}u'v' + \Gamma^2_{22}(v')^2 + v''\big)r_v$.

(3) $\kappa_g = \langle\alpha'', S\rangle = [N, \alpha', \alpha'']$.

Dokaz. Iz dokaza teoreme Menijea i pretpostavke da je α parametrizovana prirodnim parametrom $(dl/dt = 1)$, odmah sledi formula (1), jer je tada $\mathfrak{I}(\alpha', \alpha') = 1$.

(2) Koristeći formule (109) i (105) u proizvoljnoj tački P krive α imamo,

$$\begin{aligned}
\alpha'' &= r_{uu}(u')^2 + 2\,r_{uv}u'v' + r_{vv}(v')^2 + r_u u'' + r_v v''\\
&= \big(\Gamma^1_{11}r_u + \Gamma^2_{11}r_v + e\,N\big)(u')^2 + 2\big(\Gamma^1_{12}r_u + \Gamma^2_{12}r_v + f\,N\big)u'v'\\
&\quad + \big(\Gamma^1_{22}r_u + \Gamma^2_{22}r_v + g\,N\big)(v')^2 + r_u u'' + r_v v''\\
&= \big(\Gamma^1_{11}(u')^2 + 2\,\Gamma^1_{12}u'v' + \Gamma^1_{22}(v')^2 + u''\big)r_u + \big(\Gamma^2_{11}(u')^2 + 2\,\Gamma^2_{12}u'v' + \Gamma^2_{22}(v')^2 + v''\big)r_v\\
&\quad + (e(u')^2 + 2fu'v' + g(v')^2)N = \kappa_N N + \kappa_g S.
\end{aligned}$$

Kako je vektor S linearna kombinacija vektora r_u i r_v i kako je N linearno nezavisan sa r_u i r_v iz poslednje jednakosti sledi (2).

(3) Ako je $\kappa(l) = 0$, onda su obe strane jednakosti jednake 0. Ako je $k(l) \neq 0$ onda tvrdnja sledi iz jednakosti (106). $\square$

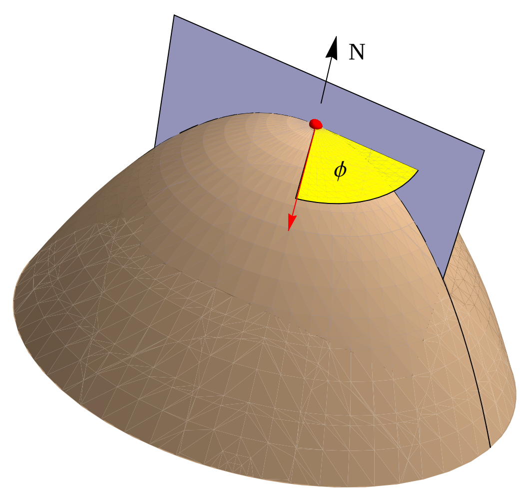
Primedba 1. (1) opravdava sledeću konstrukciju: ako je w tangentni vektor regularne površi r u tački $P = r(u, v)$ i N vektor normale na površ u istoj tački, tada možemo posmatrati ravan $\pi_{P,w}$ određenu tačkom $P = r(u, v)$ i vektorima w i N. Presek ravni $\pi_{P,w}$ i površi je kriva $\alpha_{P,w}$ koje se naziva **normalnim sečenjem** određenim tačkom P i vektorom w. Tada Teoreme Menijea primenjena na ravansku krivu $\alpha_{P,w}$ implicira:

Posledica 2. *Krivina normalnog sečenja $\alpha_{P,w}$ je*

$$\kappa(P) = \pm \frac{\mathfrak{D}(w, w)}{\mathfrak{I}(w, w)} \,.$$

Pri čemu + znak biramo ako se normala na površ, N i na normalno sečenje, n, podudaraju, a znak $-$ u suprotnom slučaju.

Primedba 2. Prethodna posledica zajedno sa teoremom Menijea pokazuju da je za dobijanje potpune informacije o normalnim krivinama u tački $P \in r(U)$ dovoljno znati sve informacije o normalnim krivinama svih normalnih sečenja površi $r(U)$ u tački P. Sada Primedba 1. (i1) omogućuje sledeći metod za dobijanje potpune informacije o funkciji normalne krivine u tački $P \in r(U)$: posmatrajmo jedinični krug u tangentnoj ravni $\mathcal{T}_P$ čiji je centar u tački P; tada proizvoljna tačka Q tog kruga definiše jedinični vektor $v = \overrightarrow{PQ} \in T_P$, koji sa nekom fiksiranom osom u $\mathcal{T}_P$ gradi ugao ϕ, Slika 6., pa je $v = v(\phi)$. Posmatramo sva normalna sečenja $\alpha_{P,v(\phi)}$, $\phi \in [0, \pi]$ i skup njihovih krivina $\mathsf{K} = \{\kappa(\phi)\,, \phi \in [0, \pi]\}$. Tada za proizvoljnu krivu α koja pripada površi r postoji neki ϕ_0 takav da je $\kappa_N^{\alpha}(P) = \kappa(\phi_0)$. Drugim rečima, na funkciju normalne krivine $\kappa_N(\alpha, P)$ u tački P površi r možemo gledati kao na funkciju $\kappa(\phi)$, tj. kodomenu tih funkcija se podudaraju.



Slika 6. Normalno sečenje

3.17. Primeri. (1) Neka je površ data kao grafik funkcije $r(u, v) = (u, v, f(u, v))$. Tada je njena prva kvadratna forma:

$$E = \langle r_u, r_u \rangle = 1 + f_u^2, \qquad F = \langle r_u, r_v \rangle = f_u f_v, \qquad G = \langle r_v, r_v \rangle = 1 + f_v^2.$$

Jasno, $r_{uu}=(0,0,f_{uu}), r_{uv}=(0,0,f_{uv})$ i $r_{vv}=(0,0,f_{vv})$. Sada redom imamo,

$$r_u\times r_v=\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3\\ 1 & 0 & f_u\\ 0 & 1 & f_v\end{vmatrix}=(-f_u,-f_v,1)\quad \text{i vektor normale na površ je,}$$

(110) $$N=\frac{1}{\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}}\,(-f_u,-f_v,1).\quad \text{Njena druga fundamentalna forma je:}$$

$$e=\langle r_{uu},N\rangle=\frac{f_{uu}}{\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}}\ ,\qquad f=\langle r_{uv},N\rangle=\frac{f_{uv}}{\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}}\ ,$$

$$g=\langle r_{vv},N\rangle=\frac{f_{vv}}{\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}}\ .$$

(2) Neka je $r(u,v)=(u,f(u)\cos v,f(u)\sin v)$ standardna parametrizacija rotacione površi. Da bismo odredili prvu i drugu osnovnu formu prvo nalazimo:

$$r_u(u,v)=(1,f'(u)\cos v,f'(u)\sin v),\qquad r_v(u,v)=(0,-f(u)\sin v,f(u)\cos v),$$

$$r_{uu}=(0,f''(u)\cos v,f''(u)\sin v),\qquad r_{uv}=(0,-f'(u)\sin v,f'(u)\cos v),$$

$$r_{vv}=(0,-f(u)\cos v,-f(u)\sin v).$$

Njena prva kvadratna forma je:

$$E=\langle r_u,r_u\rangle=1+f'^2,\qquad F=\langle r_u,r_v\rangle=0,\qquad G=\langle r_v,r_v\rangle=f^2.$$

Tada je

$$r_u\times r_v=\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3\\ 1 & f'(u)\cos v & f'(u)\sin v\\ 0 & -f(u)\sin v & f(u)\cos v\end{vmatrix},\quad \text{i vektor normale na površ je,}$$

$$N=\frac{1}{\sqrt{1+f'^2}}\,(f',-\cos v,-\sin v),\qquad \text{tako da je njena druga osnovna forma:}$$

$$e=\langle r_{uu},N\rangle=-\frac{f''}{\sqrt{1+f'^2}}\ ,\quad f=\langle r_{uv},N\rangle=0\ ,\quad g=\langle r_{vv},N\rangle=\frac{f}{\sqrt{1+f'^2}}\ .$$

(3) Neka je $r(u,v)=(\cos u\cos v,\cos u\sin v,\sin u)$ standardna parametrizacija sfere $\mathbb{S}^2$. Neka je $\alpha(v)=(\sqrt{2}/2\cos v,\sqrt{2}/2\sin v,\sqrt{2}/2)$ paralela sfere $\mathbb{S}^2$, za $u=\pi/4$. Odrediti ugao između normale n paralele α i vektora normale N sfere u tački $P=r(\pi/4,\pi/2)$.

Kako je, $\dot{\alpha}(v) = (-\sqrt{2}/2\sin v, \sqrt{2}/2\cos v, 0)$, imamo $\|\dot{\alpha}(v)\| = \sqrt{2}/2$, tako da ova kriva nije parametrizovana prirodnim parametrom. Iz,

$$l = \int_0^v \|\dot{\alpha}(t)\|\, dt = \frac{\sqrt{2}}{2}\, v \quad \text{odakle je} \quad v = \sqrt{2}\, l,$$

nalazimo njenu prirodnu parametrizaciju: $\alpha(l) = (\sqrt{2}/2\cos(\sqrt{2}\, l), \sqrt{2}/2\sin(\sqrt{2}\, l), \sqrt{2}/2)$. Sada računamo,

$$\alpha'(l) = (-\sin(\sqrt{2}\, l), \cos(\sqrt{2}\, l), 0), \qquad \alpha''(l) = (-\sqrt{2}\cos(\sqrt{2}\, l), -\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}\, l), 0),$$
$$n(l) = (-\cos(\sqrt{2}\, l), -\sin(\sqrt{2}\, l), 0), \qquad \kappa(l) = \sqrt{2}.$$

Primetimo da je $P = r(\pi/4, \pi/2) = \alpha(\pi/(2\sqrt{2})) = (0, \sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$. Dakle, odredimo sada vektor $N = N(P)$. Da bismo to uradili moramo izračunati vektore $r_u(P)$ i $r_v(P)$:

$$r_u = r_u(P) = (-\sin u\cos v, -\sin u \sin v, \cos u)(P) = \left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$r_v = r_v(P) = (-\cos u \sin v, \cos u \cos v, 0)(P) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0\right).$$

Kako je, $N = \dfrac{r_u \times r_v}{\|r_u \times r_v\|}$, računamo:

$$r_u \times r_v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \end{vmatrix} = \left(0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\,(0, -1, -1)\,.$$

Tako dobijamo da je $N = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, -1, -1)$. Kako je, $n = n(P) = (0, -1, 0)$, traženi ugao $\phi = \angle(n, N)$ možemo naći primenom Teoreme Menijea. Tako redom nalazimo,

$$\kappa\langle n, N\rangle = \sqrt{2}\,\frac{1}{\sqrt{2}} = 1 = \kappa_N = \kappa\cos\phi, \quad \text{odakle je} \quad \cos\phi = \frac{1}{\kappa} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \text{tj.} \quad \phi = \frac{\pi}{4}\,.$$

Dakle, $\phi = \angle(n, N) = \pi/4$. Koristeći jednakost (107) dobijamo da je $\kappa_g = \pm 1$.

(4) Posmatrajmo sada sferu poluprečnika R i pokažimo da sve krive koje pripadaju sferi imaju istu normalnu krivinu κ_N.

Neka je parametrizacija date sfere $r(u, v) = (R\cos u\cos v, R\cos u \sin v, R\sin u)$ i neka je α regularna kriva koja pripada sferi $\mathbb{S}^2(R)$. Tada je $\alpha(l) = r(u(l), v(l))$, gde je l

prirodni parametar. Kako kriva α pripada sferi, za svako l važi:

$\|\alpha(l)\|^2 = \langle \alpha(l), \alpha(l)\rangle = R^2$, i jer je l prirodni parametar imamo: $\langle \alpha'(l), \alpha(l)\rangle = 0$,

a zatim i

$$0 = \frac{d}{dl}\langle \alpha'(l), \alpha(l)\rangle = \langle \alpha''(l), \alpha(l)\rangle + \langle \alpha'(l), \alpha'(l)\rangle, \quad \text{tj.} \quad \langle \alpha''(l), \alpha(l)\rangle = -1.$$

Sada račune iz prethodnog primera daju:

$$r_u = (-R\sin u\cos v, -R\sin u\sin v, R\cos u), \quad r_v = (-R\cos u\sin v, R\cos u\cos v, 0)$$

$$r_u \times r_v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -R\sin u\cos v & -R\sin u\sin v & R\cos u \\ -R\cos u\sin v & R\cos u\cos v & 0 \end{vmatrix}$$

$$= R^2\left(-\cos^2 u\cos v, -\cos^2 u\sin v, -\cos u\sin u\right). \quad \text{Odakle je}$$

$$N(l) = N(u(l), v(l)) = (-\cos u(l)\cos v(l), -\cos u(l)\sin v(l), -\sin u(l)).$$

Dakle, vidimo da je $\alpha(l) = -R\,N(l)$. I sada na kraju nalazimo da je

$$\kappa_N(l) = \langle \alpha''(l), N(l)\rangle = \frac{-1}{R}\langle \alpha''(l), \alpha(l)\rangle = \frac{1}{R}\,. \tag{111}$$

Napomenimo da u prethodnoj formuli, (111), znak normalne krivine može biti i negativan, što je posledica izbora parametrizacije (npr. ako zamenimo redosled promenjivih u i v), tj. orijentacije sfere.

3.18. Geodezijske linije. Geodezijska linija na regularnoj elementarnoj površi je kriva jedinične brzine čija je geodezijska krivina svuda jednaka 0.

Teorema 1. *Neka je α kriva jedinične brzine koja pripada elementarnoj regularnoj površi $r : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$, tj. $\alpha(l) = r(u(l), v(l))$ za neke diferencijabilne funkcije u, v. Tada su ekvivalentni sledeći iskazi:*

(1) *kriva α je geodezijska.*

(2) $[N, v, n] = 0$.

(3) *α'' je svuda normalna na površ.*

(4) zadovoljene su jednačine:

$$\begin{aligned} u'' + \Gamma^1_{11}(u')^2 + 2\,\Gamma^1_{12}u'v' + \Gamma^1_{22}(v')^2 &= 0, \\ v'' + \Gamma^2_{11}(u')^2 + 2\,\Gamma^2_{12}u'v' + \Gamma^2_{22}(v')^2 &= 0. \end{aligned} \tag{112}$$

Dokaz. Ekvivalencija (1) $\Longleftrightarrow$ (3) sledi iz

$$\alpha''(l) = k(l)\,n(l) = \kappa_N(l)N(l) + \kappa_g(l)\,S(l),$$

i definicije geodezijske.

Ekvivalencija tvrdnji (1) i (2) sledi iz činjenice da vektor $S(l)$ pripada ortogonalnom komplementu $\mathcal{L}(N(l))^{\perp} = T_P(r)$, i

$$\langle \alpha''(l), S(l)\rangle = \langle \kappa_N(l)N(l) + \kappa_g(l)\, S(l), S(l)\rangle = \kappa_g(l) = k(l)\,[N(l), v(l), n(l)].$$

Ekvivalencija (1) i (4) direktno sledi iz (2) Posledica 1 iz tačke **3.13**, jer su vektori $r_u(l)$ i $r_v(l)$ linearno nezavisni vektori. □

Primer. Odredimo normalne krivine koordinatnih linija regularne površi r.

Neka su $\alpha(u) = r(u, v_0)$ i $\beta(v) = (u_0, v)$ koordinatne linije. Tada je

$$\dot\alpha(t) = r_u\,\dot u_\alpha + r_v\,\dot v_\alpha = r_u, \quad \text{jer je } \dot u_\alpha = 1,\ \dot v_\alpha = 0, \text{ pa je } \mathfrak{I}(\dot\alpha,\dot\alpha) = E \text{ i } \mathfrak{D}(\dot\alpha,\dot\alpha) = e.$$

$$\dot\beta(t) = r_u\,\dot u_\beta + r_v\,\dot v_\beta = r_v, \quad \text{jer je } \dot u_\beta = 0,\ \dot v_\beta = 1, \text{ pa je } \mathfrak{I}(\dot\beta,\dot\beta) = G \text{ i } \mathfrak{D}(\dot\beta,\dot\beta) = g.$$

Koristeći sada Teoremu Menijea nalazimo da je,

$$\kappa_N^{\alpha} = \frac{\mathfrak{D}(\dot\alpha,\dot\alpha)}{\mathfrak{I}(\dot\alpha,\dot\alpha)} = \frac{e}{E} \quad \text{i} \quad \kappa_N^{\beta} = \frac{\mathfrak{D}(\dot\beta,\dot\beta)}{\mathfrak{I}(\dot\beta,\dot\beta)} = \frac{g}{G}\,.$$

Propozicija 2. *Neka je α ravanska kriva tada je $\kappa_g = \kappa$.*

Dokaz. Ako je α ravanska kriva tada eventualnom prenumeracijom možemo postići da je njena jednačina $r(u,v) = (u, v, 0)$. Budući da je α ravanska kriva u ravni r, njena prirodna parametrizacija data je sa $\alpha(l) = (u(l), v(l), 0)$ i $\alpha'(l) = (u'(l), v'(l), 0)$, pri čemu je $u'(l)^2 + v'(l)^2 = 1$. Jasno, vektor normale od α jednak je $n(l) = (-v(l), u(l), 0)$. S druge strane nalazimo da je vektor normale $N(l) = (0,0,1)$. Sada, koristeći karakterizaciju geodezijske krivine iz Posledice 1 (3), tačka **3.11** nalazimo da je $\kappa_g = [N, \alpha', \alpha''] = [N, v, \kappa\, n] = \kappa\,[N, v, n] = \kappa$. □

Primer. O geodezijskim na sferi. Neka je $r(u,v) = (\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u)$, parametrizacija sfere $\mathbb{S}^2$. Paralela, $\alpha(v) = (\sqrt{2}/2\cos v, \sqrt{2}/2 \sin v, \sqrt{2}/2)$, sfere $\mathbb{S}^2$ za $u = \pi/4$ *nije geodezijska* jer smo u ranijem primeru (vidi detalje) pokazali da je: $\kappa_N = 1 = \|\kappa_g\|$. Veliki krug je paralela koja se dobija izborom $u = 0$, i jasno njegova parametrizacija je $\gamma(v) = (\cos v, \sin v, 0)$. Primetimo da je ova parametrizacija prirodna, i imamo

$$\gamma'(v) = (-\sin v, \cos v, 0), \qquad \gamma''(v) = (-\cos v, -\sin v, 0),$$

$$r_u(v) = (0,0,1), \qquad r_v(v) = (-\sin v, \cos v, 0), \qquad N(v) = (-\cos v, -\sin v, 0).$$

Odavde sledi da se vektori $\gamma''(v)$ i $N(v)$ podudaraju za svako v, odakle odmah sledi da su veliki krugovi sfere njene geodezijske i jasno $\kappa_N \equiv 1$ i $\kappa_g \equiv 0$.

Pokažite da paralela $\mathcal{P}(u_0)$, za $u_0 \in (-\pi/2, \pi/2) \setminus \{0\}$ nije geodezijska.

Navedimo sada dve osnovne teoreme o geodezijskima (za sada) bez dokaza.

Teorema 3. *Neka je $P \in r(U)$ tačka elementarne regularne površi $r : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ i neka je X jedinični vektor element od $T_P(r)$. Tada postoji jedinstvena geodezijska linija $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow r(U)$ takva da je $\alpha(0) = P$ i $\alpha'(0) = X$.*

Teorema 4. *Neka je $\alpha : [0, L] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ kriva parametrizovana dužinom luka koja pripada elementarnoj regularnoj površi r i neka je $P = \alpha(a)$ i $Q = \alpha(b)$. Ako je α najkraća kriva između tačaka P i Q, tada je α geodezijska linija.*

3.19. Gausova krivina. Kako je normalna krivina količnik simetričnih bilinearnih formi $\mathfrak{D}$ i $\mathfrak{I}$, koje deluju na istom prostoru, potrebno je znati nešto o njihovom ponašanju u istoj bazi. Da bismo odgovorili na ovo pitanje podsetimo se nekih činjenica o euklidskim prostorima navedenim u glavi 1 Uvod:

- Sve simetrične bilinearne forme na V su u '1-1' korespodenciji sa simetričnim operatorima[12] na V. Drugim rečima svaka simetrična bilinearna forma $B(x, y)$ može se predstaviti u vidu $B(x, y) = \langle \mathsf{B}\, x, y\rangle$ gde je B neki simetrični operator i obratno, svaki simetrični operator definiše jednu bilinearnu formu.
- Matrica simetričnog operatora u ortonormiranoj bazi je simetrična ($\mathcal{B} = \mathcal{B}^T$).
- Simetrični operator (simetrična forma) je dijagonalizibilan, tj. postoji ortonormirana baza u kojoj je matrica simetričnog operatora B dijagonalna.

Budući da je $\mathfrak{I}$ pozitivno definitna i nedegenerisana simetrična forma, tada primenom Gram-Šmitovog postupka možemo pronaći ortonormiranu bazu $\mathfrak{B}_e = (e_1, e_2)$ tangentnog prostora $T_P(r)$. Kako je forma $\mathfrak{D}$ simetrična i bilinearna s obzirom na skalarni proizvod $\mathfrak{I}$ postoji ortonormirana baza u kojoj je forma $\mathfrak{D}$ dijagonalizabilna. Time smo pokazali:

Teorema 1. *Neka su na vektorskom prostoru $\mathbb{R}^m$ date su dve simetrične bilinearne forme $\mathfrak{I}$ i $\mathfrak{D}$, pri čemu je forma $\mathfrak{I}$ skalarni proizvod. Tada u $\mathbb{R}^m$ postoji ortonormirana baza takva da za $v = (v_1, v_2, \ldots, v_m)$, $w = (w_1, w_2, \ldots, w_m)$ je*

$$\mathfrak{I}(v, w) = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \cdots + v_m w_m, \quad \mathfrak{D}(v, w) = \lambda_1 v_1 w_1 + \lambda_2 v_2 w_2 + \cdots + \lambda_m v_m w_m.$$

Primetimo da su matrice formi $\mathfrak{I}$ i $\mathfrak{D}$ u pomenutoj ortonormiranoj bazi: $\mathcal{I}_m$ (jedinična matrica reda m) i $\mathcal{D} = \operatorname{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m]$, redom.

Primenimo sada prethodnu Propoziciju na tangentni prostor $T_P(r)$ i na njegove fundamentalne forme $\mathfrak{I}$ i $\mathfrak{D}$.

Posledica 1. *U tangentnom prostoru $T_P(r)$ postoji ortonormirana baza $\mathfrak{B}_e = (e_1, e_2)$ u kojoj su forme $\mathfrak{I}$ i $\mathfrak{D}$ istovremeno dijagonalizabilne, tj.*

$$\mathfrak{I}(v, w) = v_1 w_1 + v_2 w_2 = v^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} w, \qquad \mathfrak{D}(v, w) = k_1 v_1 w_1 + k_2 v_2 w_2 = v^T \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} w.$$

[12] Linearni operator $\mathsf{B} : V \longrightarrow V$, je simetričan ako je $\langle \mathsf{B}\, x, y\rangle = \langle x, \mathsf{B}\, y\rangle$ za sve $x, y \in V$.

Ako je $k_1 \neq k_2$, pravci vektora e_1, e_2 su jedinstveni. Vektore e_1, e_2 nazivamo **glavnim vektorima**, a brojeve k_1 i k_2 **glavnim krivinama** površi r u tački P.

Glavne krivine predstavljaju ekstremne vrednosti normalne krivine u tački, tj. važi sledeća teorema.

Teorema 2 (Ojler[13]). *Neka je α prirodno parametrizovana kriva koja pripada regularnoj elementarnoj površi r, i neka je $P = \alpha(0)$ i $w = \alpha'(0)$. Tada važi*

$$\kappa_N(P) = \kappa_N(P, \phi) = \frac{\mathfrak{D}(w, w)}{\mathfrak{I}(w, w)} = k_1(P)\cos^2\phi + k_2(P)\sin^2\phi, \tag{113}$$

gde je ϕ ugao između jediničnih vektora e_1 (glavni vektor površi r u tački P) i w.

Dokaz. Kako je ϕ ugao između vektora w i e_1 sledi da su koordinate vektora w u ortonormiranoj bazi glavnih vektora (e_1, e_2) jednake $(\cos\phi, \sin\phi)$. Tada je $\mathfrak{I}(w, w) = 1$ i iz prethodne **posledice** lako sledi formula. $\square$

Posledica 2. *Neka tačka P pripada regularnoj elementarnoj površ r i neka $k_1(P)$ i $k_2(P)$ njenje glavne krivine u tački P. Tada su $k_1(P)$ i $k_2(P)$ ekstremne vrednosti funkcije normalne krivine u tački P.*

Dokaz. Prvo primetimo da za proizvoljni jedinični vektor $v \in T_P$ postoji kriva α jedinične brzine, i taj vektor gradi sa glavnim vektorom e_1 ugao ϕ. Ako je $k_1(P) = k_2(P) = k$, tada iz (113) sledi da je $\kappa_N(P, \phi) = k$, za svaki ugao ϕ (za svaki jedinični vektor iz T_P). Zato pretpostavimo da je npr. $k_1(P) > k_2(P)$, i tada jednakost (113) implicira, nakon eliminacije $\cos^2\phi$,

$$\begin{aligned}\kappa_N(P, \phi) &= k_1(P)\cos^2\phi + k_2(P)\sin^2\phi = k_1(P)(1 - \sin^2\phi) + k_2(P)\sin^2\phi \\ &= k_1(P) - \sin^2\phi\,(k_1(P) - k_2(P)) \leq k_1(P),\end{aligned}$$

jer je $k_1(P) - k_2(P) > 0$ i $\sin^2\phi \geq 0$. Analogno, eliminacijom $\sin^2\phi$ iz (113) dobijamo da je $\kappa_N(P, \phi) \geq k_2(P)$. $\square$

Glavne krivine ne zavisi od izbora baze u tangentnom prostoru jer su sopstvene vrednosti matrice druge fundamentalne forme $\mathfrak{D}$, i kao takve predstavljaju geometrijske veličine površi.

Teorema 3. *Neka su $\mathcal{I}$ i $\mathcal{D}$ simetrične 2×2 matrice koje odgovaraju osnovnim kvadratnim formama površi $\mathfrak{I}$ i $\mathfrak{D}$ (redom) u proizvoljnoj bazi $\mathfrak{B}$ tangentnog prostora $T_P(r)$. Tada su glavne krivine k_1 i k_2 koreni karakteristične jednačine*

$$p_{\mathfrak{B}}(\lambda) = \mathsf{det}\,(\mathcal{D} - \lambda\mathcal{I}) = 0.$$

Dokaz. Neka je u nekoj bazi $\mathfrak{B}_1$ kvadratna forma J zadata simetričnom matricom $\mathcal{J}$:

$$J(v, w) = v^T\,\mathcal{J}\,w = (v_1, v_2)\,\mathcal{J}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}.$$

[13] Euler, Leonhard, 1707 – 1783, čuveni švajcarski matematičar, fizičar, astronom i inženjer.

Kao što znamo pri promeni baze menja se i matrica kvadratne forme prema formuli

$$J(v,w) = \bar{v}^T \mathcal{A}^T \mathcal{J} \mathcal{A} \bar{w} = \bar{v}^T \bar{\mathcal{J}} \bar{w},$$

gde je $v = \mathcal{A}\bar{v}$. Dakle, u novoj bazi $\mathfrak{B}_2$ kvadratnoj formi J odgovara matrica $\mathcal{A}^T \mathcal{J} \mathcal{A}$, pri čemu je $\mathcal{A}$ matrica prelaska sa baze $\mathfrak{B}_1$ u bazu $\mathfrak{B}_2$.

Mi znamo iz Posledice 1, da su u ortonormiranoj bazi $\mathfrak{B}_e$ (glavnih vektora) glavne krivine k_1 i k_2 koreni karakteristične jednačine:

$$p_e(\lambda) = \mathsf{det}\left(\begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = (\lambda - k_1)(\lambda - k_2) = 0.$$

Potrebno je pokazati da za bilo koju drugu bazu $\mathfrak{B}$ tangentnog prostora $T_P(r)$ polinomi $p_{\mathfrak{B}}(\lambda)$ i $p_e(\lambda)$ imaju iste nule. Ako u prethodna razmatranja o vezi matrica simetrične bilinearne forme u različitim bazama, stavimo $\mathfrak{B}_1 := \mathfrak{B}_e$ i $\mathfrak{B}_2 := \mathfrak{B}$ dobijamo

$$\begin{aligned} 0 = p_{\mathfrak{B}}(\lambda) &= \mathsf{det}\,(\mathcal{D} - \lambda \mathcal{I}) = \mathsf{det}\,(\mathcal{A}^T \operatorname{diag}[k_1,k_2]\,\mathcal{A} - \lambda\,\mathcal{A}^T \mathcal{I}_2\,\mathcal{A}) \\ &= \mathsf{det}\,(\mathcal{A}^T(\operatorname{diag}[k_1,k_2] - \lambda \mathcal{I}_2)\mathcal{A}) = \mathsf{det}\,\mathcal{A}^T p_e(\lambda)\,\mathsf{det}\,\mathcal{A} = (\mathsf{det}\,\mathcal{A})^2\, p_e(\lambda), \end{aligned}$$

jer je $\mathsf{det}\,\mathcal{A}^T = \mathsf{det}\,\mathcal{A} \neq 0$. Vidimo da su glavne krivine k_1 i k_2 koreni i karakteristične jednačine $0 = p_{\mathfrak{B}}(\lambda)$, gde je $\mathfrak{B}$ proizvoljna baza tangentnog prostora $T_P(r)$. $\square$

TEOREMA 4. *Glavne krivine regularne površi $r(U)$ su sopstvene vrednosti njenog operatora oblika $\mathcal{S}$.*

Dokaz. Dokaz provodimo u nekoliko koraka.

1. korak: *Neka je α neka regularna kriva, koja pripada površi $r(U)$ i sadrži tačku P, tada je*

$$\langle \ddot{\alpha}(P), N(P)\rangle = \langle \mathcal{S}_P(\dot{\alpha}(P)), \dot{\alpha}(P)\rangle\,, \quad \textit{gde je } N(P) \textit{ jedinični vektor normale.}$$

Kako je $\alpha \subseteq r(U)$, njena brzina $\dot{\alpha}(t)$ je element tangentnog prostora $T_{\alpha(P)}(r)$, tako da je $\langle \dot{\alpha}(t), N(t)\rangle = 0$. Ako ovu relaciju diferenciramo po t, dobijamo da u tački $P = \alpha(0)$, važi

$$\langle \ddot{\alpha}(P), N(P)\rangle + \langle \dot{\alpha}(P), \dot{N}(P)\rangle = 0.$$

Iz formula (102) sledi da je $\mathcal{S}_P(\dot{\alpha}(P)) = -\dot{N}(P)$, odakle je onda

$$\langle \ddot{\alpha}(P), N(P)\rangle = -\langle \dot{\alpha}(P), \dot{N}(P)\rangle = \langle \mathcal{S}_P(\dot{\alpha}(P)), \dot{\alpha}(P)\rangle.$$

2. korak: *Za jedinični tangentni vektor $v \in T_P(r)$ važi $\langle \mathcal{S}_P(v), v\rangle = \kappa_N(v,P)$.*

Neka je v jedinični tangentni vektor u tački P, tj. vektor brzine prirodno parametrizovane krive $\alpha \subseteq r(U)$ koja sadrži tačku P. Obeležimo sa $\chi(v)$ funkciju $\langle \mathcal{S}_P(v), v\rangle$, tada uz korišćenje Freneove formule prvo imamo,

$$\chi(P) = \langle \mathcal{S}_P(v), v\rangle = \langle \alpha''(P), N(P)\rangle = \langle \kappa(P) n(P), N(P)\rangle = \kappa(P)\cos\theta,$$

a zatim teorema Menijea implicira da je $\chi(P) = \kappa_N^{\alpha}(P) = \kappa_N(\dot{\alpha}, P) = \kappa_N(v,P)$, što je i trebalo pokazati.

3. korak: *Glavne krivine regularne površi $r(U)$ u tački P su sopstvene vrednosti njenog operatora oblika $\mathcal{S}_P$.*

Iz Ojlerove teoreme znamo da su glavne krivine ekstremne vrednosti funkcije normalne krivine $\kappa_N(v, P)$. S druge strane operator $\mathcal{S}_P$ je simetričan i može se dijagonalizovati u bazi sopstvenih jediničnih vektora $e = \{e_1, e_2\}$. Tada se na dijagonali matrice operatora $\mathcal{S}_P$ u bazi e nalaze sopstvene vrednosti ξ_1, ξ_2 $(\xi_1 \geq \xi_2)$. Kako funkcija $\langle \mathcal{S}_P(v), v\rangle$, koja se prema koraku 2. podudara sa $\kappa_N(v, P)$, na skupu svih jediničnih vektora tangentnog prostora $T_P(r)$ dostiže svoje ekstremne vrednosti na sopstvenim vektorima, odmah sledi da su ξ_1 i ξ_2 glavne krivine površi $r(U)$ u tački P. $\square$

Primedba 1. Budući da bazu glavnih vektora nije lako naći iz parametrizacije date površi, najprirodnije je odrediti glavne krivine u standadnoj bazi $\mathfrak{B}_p = (r_u, r_v)$ u kojoj računamo koeficijente 1. i 2. fundamentalne forme. Sada lako nalazimo,

$$
\begin{aligned}
p_{\mathfrak{B}_r}(\lambda) = \det(\mathcal{G}_{\mathfrak{D}} - \lambda\mathcal{G}_{\mathfrak{I}}) &= \begin{vmatrix} e-\lambda E & f-\lambda F \\ f-\lambda f & g-\lambda G \end{vmatrix} = (e-\lambda E)(g-\lambda G) - (f-\lambda F)^2 \\
&= (E\,G - F^2)\lambda^2 - (e\,G + g\,E - 2\,f\,F)\lambda + (e\,g - f^2) \\
&= \det \mathcal{G}_{\mathfrak{I}}\lambda^2 - (e\,G + g\,E - 2\,f\,F)\lambda + \det \mathcal{G}_{\mathfrak{D}}
\end{aligned}
$$

(gk) Gausova krivina površi je proizvod glavnih krivina površi

$$K = k_1 \cdot k_2 = \frac{\det \mathcal{G}_{\mathfrak{D}}}{\det \mathcal{G}_{\mathfrak{I}}} = \frac{e\,g - f^2}{E\,G - F^2} \tag{114}$$

(sk) Srednja krivina je aritmetička sredina glavnih krivina, tj.

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2} = \frac{e\,G + g\,E - 2\,f\,F}{2\det \mathcal{G}_{\mathfrak{I}}} = \frac{e\,G + g\,E - 2\,f\,F}{2\,(E\,G - F^2)}\,. \tag{115}$$

Primetimo da formule za Gausovu i srednju krivinu, u standardnoj bazi, predstavljaju Vietove formule kvadratne jednačine $p_{\mathfrak{B}_r}(\lambda) = 0$.

Primedba 2. (1) Iz definicije koeficijenata druge fundamentalne forme, jasno je da glavne krivine zavise do na znak od orijentacije (parametrizacije) površi Σ koju smo izabrali. Isti je slučaj i sa srednjom krivinom (osim ako je srednja krivina jednaka 0), ali Gausova krivina ne zavisi od orijentacije površi Σ !

(2) Geometrijski smisao Gausove krivine. Prvo primetimo da je normalna krivina, biregularne krive α parametrizovane prirodnim parametrom koja pripada površi r u tački $P = \alpha(0)$, zapravo *skalar-projekcije* vektora $\alpha''(0)$ na vektor normale površi $N(P)$. Kako je Gausova krivina proizvod glavnih krivina površi, zaključujemo da ako je Gausova krivina, $K(P)$, u nekoj tački P površi r veća od nule, tada su obe glavne krivine ili pozitivne ili negativne, tako da postoji okolina $U_P \subset r$ tačke P tako da se sve tačke okoline U_P nalaze sa iste strane tangentne ravni $\mathcal{T}_P$ (vidi Sliku), a ako je $K(P) < 0$ tada su glavne krivine suprotnih znakova i za svaku okolinu $U_P \subset r$ tačke

P postoje tačke okoline U_P koje se nalaze sa različitih strana tangentne ravni $\mathcal{T}_P$ (vidi Sliku).

Zadatak. *Neka su e_1 i e_2 glavni vektori regularne površi u nekoj njenoj tački, koji odgovaraju glavnim krivinama, $k_1 \neq k_2$. Tada iz opšte teorije simetričnih operatora znamo da je $\mathfrak{I}(e_1, e_2) = \mathfrak{D}(e_1, e_2) = 0$.*
Pokažite ovu činjenicu koristeći samo da su k_1 i k_2 nule karakteristične jednačine.

Primer. (1) Neka je površ data kao grafik funkcije $r(u, v) = (u, v, f(u, v))$. Tada su njena prva i druga kvadratna forma:

$$E = \langle r_u, r_u \rangle = 1 + f_u^2, \qquad F = \langle r_u, r_v \rangle = f_u f_v, \qquad G = \langle r_v, r_v \rangle = 1 + f_v^2,$$

$$e = \langle r_{uu}, N \rangle = \frac{f_{uu}}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} \qquad f = \langle r_{uv}, N \rangle = \frac{f_{uv}}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} \,,$$

$$g = \langle r_{vv}, N \rangle = \frac{f_{vv}}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} \,.$$

Tako da je Gausova krivina ove površi,

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{f_{uu} f_{vv} - f_{uv}^2}{1 + f_u^2 + f_v^2} \cdot \frac{1}{(1 + f_u^2)(1 + f_v^2) - (f_u f_v)^2} = \frac{f_{uu} f_{vv} - f_{uv}^2}{(1 + f_u^2 + f_v^2)^2}$$

(i2) Neka je data rotaciona površ $r(u, v) = (u, f(u) \cos v, f(u) \sin v)$. Tada su prva i druga kvadratna forma:

$$E = \langle r_u, r_u \rangle = 1 + f'^2, \qquad F = \langle r_u, r_v \rangle = 0, \qquad G = \langle r_v, r_v \rangle = f^2,$$

$$e = \langle r_{uu}, N \rangle = -\frac{f''}{\sqrt{1 + f'^2}} \,, \quad f = \langle r_{uv}, N \rangle = 0 \,, \quad g = \langle r_{vv}, N \rangle = \frac{f}{\sqrt{1 + f'^2}} \,.$$

Kako su matrice $\mathfrak{I}$ i $\mathfrak{D}$ prve i druge fundamentalne forme površi u istoj bazi dijagonalne, nalazimo da je

$$k_1 = \frac{e}{E} = -\frac{f''}{(1 + f'^2)\sqrt{1 + f'^2}} = -\frac{f''}{(1 + f'^2)^{\frac{3}{2}}} \,, \qquad k_2 = \frac{g}{G} = \frac{1}{f\sqrt{1 + f'^2}} \,,$$

$$K = -\frac{f''}{f\,(1 + f'^2)^2} \,, \qquad H = \frac{1 + f'^2 - f \cdot f''}{2\, f (1 + f'^2)^{\frac{3}{2}}} \,.$$

3.20. Umbiličke tačke. Za tačku P elementarne površi $r(U)$ kažemo da je umbilička tačka ukoliko je $k_1(P) = k_2(P)$. Primetimo da je tada svaki nenula vektor glavni vektor. Ako su sve tačke neke površi umbiličke tada kažemo da je površ umbilička.

Propozicija 1. *Tačka P na regularnoj elementarnoj površi klase $\mathcal{C}^m$, $m \geq 2$ je umbilička, uz $k \neq 0$, akko*

$$\frac{e}{E} = \frac{f}{F} = \frac{g}{G}\,.$$

P je planarna ($k_1 = k_2 = 0$) ukoliko je $e = f = g = 0$.

Dokaz. Kako je tačka umbilička, sledi da su svi vektori glavni, pa i vektori $e_1 = (1,0)$ i $e_2 = (0,1)$. Sada iz

$$0 = (\mathcal{G}_{\mathfrak{D}} - k\mathcal{G}_{\mathfrak{I}})(e_1) = \begin{bmatrix} e - k\,E & f - k\,F \\ f - k\,F & g - k\,G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e - k\,E \\ f - k\,F \end{bmatrix}$$

sledi da je $e - k\,E = 0 = f - k\,F$. Analogno, za e_2 dobijamo da je $f - k\,F = 0 = g - k\,G$. Ako $k \neq 0$ iz prethodnih veza sledi tražena veza. Ako je $k = 0$, tada iz ovih jednakosti sledi da je $e = f = g = 0$, i dokaz je gotov. □

Teorema 2. *Ako su sve tačke povezane površi Σ umbiličke, tada je Σ podskup sfere ili ravni.*

3.21. Asimptotski pravci. Neka tačka P pripada regularnoj elementarnoj površi $\Sigma = r(U)$. Ako je $v \in T_P$ tangentni vektor regularne krive α koja pripada površi Σ, tada znamo, na osnovu relacije (106), da vektor normale $n(P)$ krive α pripada linealu $\mathcal{L}\{N(P), S(P)\}$. Kriva α je geodezijska linija površi Σ ako je vektor $n(P)$ proporcionalan vektoru normale površi $N(P)$ za svaku tačku $P \in \alpha(\mathbb{I})$ što je ekvivalentno uslovu da je $\kappa_g^\alpha \equiv 0$. Definišemo, asimptotski pravac i asimptotsku liniju kao analogon geodezijske tačke i geodezijske linije površi. Asimptotski pravac (vektor) od Σ u tački P je tangentni vektor neke regularne krive, γ, za kojeg je $\kappa_N^\gamma(P) = 0$. Asimptotska kriva γ je regularna povezana kriva koja pripada površi Σ takva da je $\kappa_N^\gamma \equiv 0$ (ekvivalentno: za sve $P \in \gamma(\mathbb{I})$, $\kappa_N^\gamma(P) = 0$).

Propozicija. *Neka je γ asimptotska kriva regularne površi r, koja je i biregularna. Tada se tangentna ravan $\mathcal{T}_P$ površi r podudaraju sa oskulatornom ravni krive γ u tački $P \in \gamma(\mathbb{I})$.*

Dokaz. Kako je γ asimptotska kriva površi sledi da je $\kappa_N^\gamma \equiv 0$. Tada iz formule (106) sledi da je vektor normale $n(P)$ krive γ proporcionalan vektoru unutrašnje normale $S(P)$ u tački $P \in \gamma(\mathbb{I})$. Kako vektor $S(P)$ pripada T_P sledi da i vektor $n(P)$ pripada tangentnom prostoru T_P. Dakle, kako oba vektora $v(P)$ i $n(P)$ pripadaju tangentom prostoru i kako su linearno nezavisni (zbog biregularnosti krive γ), tangentna ravan $\mathcal{T}_P$ podudara se sa oskulatornom ravni krive γ u tački P. □

3.22. Gausove (Gauss) i Vajngartenove (Weingarten) jednačine. Analogno jednačinama Frene-Sera, koje opisuju deformaciju Frene-Serove baze $\mathfrak{B}_{FS} = (v, n, b)$ duž krive, nalazimo deformacije vektora baze $\mathfrak{B}_p = (r_u, r_v, N)$ regularne površi u svakoj njenoj tački. Deformacije vektora r_u i r_v nazivamo Gausove jednačine:

$$
\begin{aligned}
r_{uu} &= \Gamma_{11}^1 r_u + \Gamma_{11}^2 r_v + b_{11}\, N,\\
r_{uv} &= \Gamma_{12}^1 r_u + \Gamma_{12}^2 r_v + b_{12}\, N,\\
r_{vv} &= \Gamma_{22}^1 r_u + \Gamma_{22}^2 r_v + b_{22}\, N.
\end{aligned} \tag{116}
$$

Simbole Γ_{ij}^k nazivamo se Kristofelovim [14] simbolima druge vrste, i lako zaključujemo da su b_{jk} koeficijenti druge fundamentalne kvadratne forme:

$$e = b_{11}, \qquad f = b_{12} = b_{21}, \qquad g = b_{22}.$$

Odredimo sada matrični zapis diferencijala Gausovog preslikavanja $\mathrm{d}N_P$ u standardnoj bazi tangentnog prostora $T_P(r)$. Kako je,

$$\langle N_u, N\rangle = 0, \qquad \langle N_v, N\rangle = 0,$$

odakle, sledi da su vektori N_u i N_v linearne kombinacije vektora r_u i r_v. Preciznije,

$$N_u = \beta_{11} r_u + \beta_{21} r_v, \quad N_v = \beta_{12} r_u + \beta_{22} r_v, \quad \text{ili matrično,} \quad \mathrm{d}N = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix} \tag{117}$$

Iz normalnosti vektora N, r_u i N, r_v, redom dobijamo,

$$0 = \frac{\partial \langle N, r_u\rangle}{\partial u} = \langle N_u, r_u\rangle + \langle N, r_{uu}\rangle, \qquad 0 = \frac{\partial \langle N, r_u\rangle}{\partial v} = \langle N_v, r_u\rangle + \langle N, r_{uv}\rangle, \tag{118}$$

$$0 = \frac{\partial \langle N, r_v\rangle}{\partial u} = \langle N_u, r_v\rangle + \langle N, r_{vu}\rangle, \qquad 0 = \frac{\partial \langle N, r_v\rangle}{\partial v} = \langle N_v, r_v\rangle + \langle N, r_{vv}\rangle. \tag{119}$$

Zamenjujući sada izraze za N_u i N_v iz (117) i r_{uu}, r_{uv} i r_{vv} iz (116) u (118) i (119) uz oznake $g_{11} = E = \langle r_u, r_u\rangle$, $g_{12} = g_{21} = F = \langle r_u, r_v\rangle$ i $g_{22} = G = \langle r_v, r_v\rangle$, dobijamo

$$\langle \beta_{11} r_u + \beta_{21} r_v, r_u\rangle + \langle N, \Gamma_{11}^1 r_u + \Gamma_{11}^2 r_v + b_{11}\, N\rangle = \beta_{11} g_{11} + \beta_{21} g_{12} + b_{11} = 0, \tag{120}$$

$$\langle \beta_{12} r_u + \beta_{22} r_v, r_u\rangle + \langle N, \Gamma_{12}^1 r_u + \Gamma_{12}^2 r_v + b_{12}\, N\rangle = \beta_{12} g_{11} + \beta_{22} g_{12} + b_{12} = 0, \tag{121}$$

$$\langle \beta_{11} r_u + \beta_{21} r_v, r_v\rangle + \langle N, \Gamma_{12}^1 r_u + \Gamma_{12}^2 r_v + g_{12}\, N\rangle = \beta_{11} g_{12} + \beta_{21} g_{22} + b_{12} = 0, \tag{122}$$

$$\langle \beta_{12} r_u + \beta_{22} r_v, r_v\rangle + \langle N, \Gamma_{22}^1 r_u + \Gamma_{22}^2 r_v + g_{22}\, N\rangle = \beta_{12} g_{12} + \beta_{22} g_{22} + b_{22} = 0. \tag{123}$$

Primetimo da jednačine (120), (122), (121) i (123) možemo prepisati u matričnoj formi kao

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix} \quad \text{ili kraće} \quad \mathcal{G}_{\mathfrak{I}}\, \mathrm{d}N = -\mathcal{G}_{\mathfrak{D}}\,. \tag{124}$$

---

[14] Christoffel, Elwin Bruno, 1829 – 1900, nemački matematičar i fizičar.

Kako je matrica metrike $\mathcal{G}_{\mathfrak{I}}$ regularna postoji njoj inverzna matrica $\mathcal{G}_{\mathfrak{I}}^{-1}$, tako da delujući na leve i desne strane jednačine (124) nalazimo i njeno rešenje koje zapisujemo koristeći operator oblika $\mathcal{S}$ kao

$$(125)\qquad \mathcal{S} = -\begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix} = \mathcal{G}_{\mathfrak{I}}^{-1}\mathcal{G}_{\mathfrak{D}} = \frac{1}{\det \mathcal{G}_{\mathfrak{I}}} \begin{pmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{12} & g_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Iz (125) uz korišćenje oznaka $\mathcal{G}_{\mathfrak{I}}^{-1} = (g^{ij})$ dobijamo da je

$$(126)\qquad \beta_{ij} = -\sum_{k=1}^{2} g^{ik} b_{kj}.$$

Kako su elementi matrice $\mathcal{G}_{\mathfrak{I}}$ koeficijenti prve fundamentalne forme, a matrice $\mathcal{G}_{\mathfrak{D}}$ druge iz (126) i (125) dobijamo,

$$(127)\quad \beta_{11} = \frac{f\,F - e\,G}{E\,G - F^2}\,,\ \ \beta_{12} = \frac{g\,F - f\,G}{E\,G - F^2}\,,\ \ \beta_{21} = \frac{e\,F - f\,E}{E\,G - F^2}\,,\ \ \beta_{22} = \frac{f\,F - g\,E}{E\,G - F^2}\,.$$

Time smo pokazali sledeću teoremu.

Teorema 1 (Jednačine Vajngartena[15]). *Neka je r regularna elementarna površ u $\mathbb{R}^3$. Tada važe deformacione formule*

$$(128)\quad N_u = \frac{f\,F - e\,G}{E\,G - F^2}\,r_u + \frac{e\,F - f\,E}{E\,G - F^2}\,r_v, \qquad N_v = \frac{g\,F - f\,G}{E\,G - F^2}\,r_u + \frac{f\,F - g\,E}{E\,G - F^2}\,r_v.$$

Primedba. Koristeći vezu (125) lako možemo dokazati **3.19** Teorema 4: *glavne krivine površi r nule su karakteristične jednačine*

$$0 = p_{\mathfrak{B}_r}(\lambda) = \det\left(\mathcal{G}_{\mathfrak{D}} - \lambda \mathcal{G}_{\mathfrak{I}}\right)$$

i kako je matrica 1. fundamentalne forme $\mathcal{G}_{\mathfrak{I}}$ regularna, biće i $\det \mathcal{G}_{\mathfrak{I}}^{-1} \neq 0$, tako da sada redom imamo

$$0 = \det \mathcal{G}_{\mathfrak{I}}^{-1} \det\left(\mathcal{G}_{\mathfrak{D}} - \lambda \mathcal{G}_{\mathfrak{I}}\right) = \det\left(\mathcal{G}_{\mathfrak{I}}^{-1}(\mathcal{G}_{\mathfrak{D}} - \lambda \mathcal{G}_{\mathfrak{I}})\right) = \det\left(\mathcal{G}_{\mathfrak{I}}^{-1}\mathcal{G}_{\mathfrak{D}} - \lambda \mathcal{I}_3\right) = \det\left(\mathcal{S} - \lambda \mathcal{I}_3\right),$$

tj. glavne krivine površi su sopstvene vrednosti operatora oblika $\mathcal{S}$.

Vajngartenove i Gausove jednačine možemo matrično zapisati na analogan način kao i jednačine Frene-Sera za krive. Preciznije, važi

[15] Weingarten, Julius, 1836 – 1910, nemački matematičar.

Teorema 2. *Neka je r regularna elementarna površ u $\mathbb{R}^3$. Tada važe jednačine:*

$$\frac{\partial}{\partial u}\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ N \end{pmatrix} = A_u \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma^1_{11} & \Gamma^2_{11} & b_{11} \\ \Gamma^1_{12} & \Gamma^2_{12} & b_{12} \\ -b_{1j}\, g^{j1} & -b_{1j}\, g^{j2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ N \end{pmatrix}, \tag{129}$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ N \end{pmatrix} = A_v \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma^1_{21} & \Gamma^2_{21} & b_{21} \\ \Gamma^1_{22} & \Gamma^2_{22} & b_{22} \\ -b_{2j}\, g^{j1} & -b_{2j}\, g^{j2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ N \end{pmatrix}. \tag{130}$$

Primedba. (i1) Znamo da su Kristofelovi simboli simetrični po donjim indeksima, tj. važi da je $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$.

(i2) Primetimo, da za površi imamo dve jednačine u prethodnoj teoremi, a da smo u slučaju krivih imali samo jednu Frene-Serovu jednačinu. Razlog za ovo leži u tome što je površ dvodimenzioni objekat, a kriva jednodimenzioni.

Jednačine iz prethodne teoreme (129) i (130) moraju zadovoljavati očigledan, ali netrivijalan, uslov kompatibilnosti

$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v}\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ N \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u}\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ N \end{pmatrix}. \tag{131}$$

Ako uvedemo oznaku $W = (r_u, r_v, N)^T$ imamo redom

$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v}W = \frac{\partial}{\partial u}(A_v W) = \left(\frac{\partial}{\partial u}A_v\right)W + A_v\left(\frac{\partial}{\partial u}W\right) = \left(\frac{\partial}{\partial u}A_v\right)W + A_v A_u W,$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u}W = \frac{\partial}{\partial v}(A_u W) = \left(\frac{\partial}{\partial v}A_u\right)W + A_u\left(\frac{\partial}{\partial v}W\right) = \left(\frac{\partial}{\partial v}A_u\right)W + A_u A_v W,$$

odakle dobijamo sistem jednačina

$$\frac{\partial}{\partial u}A_v - \frac{\partial}{\partial v}A_u = A_u A_v - A_v A_u, \tag{132}$$

kojeg nazivamo Gaus-Peterson[16]-Kodaci[17]-Majnardijevim[18] jednačinama. Time smo pokazali sledeću teoremu.

[16] Peterson, Karl Mikhailovich, 1828 – 1881, ruski matematičar.
[17] Codazzi, Delfino, 1824 – 1873, italijanski matematičar.
[18] Mainardi, Gaspare, 1800 – 1879, italijanski matematičar.

TEOREMA 3 (Gaus-Peterson-Kodaci-Majnardi). *Neka je r regularna elementarna površ u $\mathbb{R}^3$. Tada važe jednačine:*

$$\frac{\partial}{\partial u}A_v - \frac{\partial}{\partial v}A_u = A_u\, A_v - A_v\, A_u = [A_u, A_v].$$

Primedba. Napomenimo da izraz $[A_u, A_v]$, nazivamo *komutatorom* matrica[19] A_u i A_v. Komutator elemenata neke algebre meri odstupanje od njihove komutativnosti. Primetimo da komutator matrica zadovoljava svojstva:

(a) alterniranosti: $[A, A] = 0$ i

(ji) Jakobijevog identiteta: $[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$.

Ova dva svojstva zadovoljava i vektorski proizvod vektora u $\mathbb{R}^3$.

Kao jednu posledicu jednačina (116) dobijamo sledeću teoremu koja nam otkriva kako možemo izračunati Kristofelove simbole kao funkcije metrike, tj. prve fundamentalne forme.

TEOREMA 4. *Neka je r regularna elementarna površ u $\mathbb{R}^3$. Tada važi:*

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{2} g^{lk}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l}\right), \tag{133}$$

gde je $u^1 = u$ i $u^2 = v$.

Dokaz. Jednačine (116) uz $u^1 = u$ i $u^2 = v$, možemo prepisati, za svako $i, j \in \{1, 2\}$, kao

$$r_{ij} = r_{u^i u^j} = \Gamma^1_{ij} r_{u^i} + \Gamma^2_{ij} r_{u^j} + b_{ij}\, N = \Gamma^1_{ij} r_1 + \Gamma^2_{ij} r_2 + b_{ij}\, N = \sum_{m=1}^{2} \Gamma^m_{ij} r_m + b_{ij}\, N. \tag{134}$$

Sada iz (134) nalazimo

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} = \frac{\partial \langle r_i, r_j\rangle}{\partial u^k} = \langle r_{ik}, r_j\rangle + \langle r_i, r_{jk}\rangle = \sum_{m=1}^{2} (\Gamma^m_{ik} g_{mj} + \Gamma^m_{jk} g_{mi})\,.$$

Odakle, koristeći simetriju, $r_{ij} = r_{ji}$, možemo izračunati i izraz

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_{il}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l} &= \langle r_{ij}, r_l\rangle + \langle r_i, r_{lj}\rangle + \langle r_{ji}, r_l\rangle + \langle r_j, r_{li}\rangle - \langle r_{il}, r_j\rangle - \langle r_i, r_{jl}\rangle \\ &= 2\,\langle r_{ij}, r_l\rangle = 2\sum_{m=1}^{2} \Gamma^m_{ij} g_{ml},\end{aligned}$$

[19] Komutator na analogan način definišemo i za elemeneta neke asocijativne algebre $\mathcal{A}$.

a zatim primenom inverzne matrice metrike (g^{ij}) na obe strane nakon deljenja sa 2 dobijamo:

$$\sum_{m=1}^{2}\left(\sum_{l=1}^{2} g^{lk} g_{ml}\right)\Gamma_{ij}^{m} = \sum_{m=1}^{2}\delta_m^k \Gamma_{ij}^{m} = \Gamma_{ij}^{k} = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{2} g^{lk}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l}\right),$$

i teorema je dokazana. □

Posledica. *Geodezijska krivina κ_g je unutrašnje svojstvo površi.*

Dokaz. Sledi iz Posledice 1 (2) **3.11**, jer prema toj formuli κ_g je funkcija Kristofelovih simbola, koji su na osnovu prethodne teoreme, funkcije koeficijenata prve fundamentalne forme i njihovih prvih parcijalnih izvoda, odakle sledi tvrđenje. □

Zadatak 1. Proverite da se Kristofelovi simboli izražavaju na sledeći način preko koeficijenata prve i druge fundamentalne forme:

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2\,(EG - F^2)}\,, \qquad \Gamma_{12}^1 = \frac{GE_v - FG_u}{2\,(EG - F^2)}\,, \qquad \Gamma_{22}^1 = \frac{2GF_v - GG_u - FG_v}{2\,(EG - F^2)}\,,$$

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{2EF_u - EE_v - FE_u}{2\,(EG - F^2)}\,, \qquad \Gamma_{12}^2 = \frac{EG_u - FE_v}{2\,(EG - F^2)}\,, \qquad \Gamma_{22}^2 = \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2\,(EG - F^2)}\,.$$

Zadatak 2. (1) Odredite Kristofelove simbole ako je prva kvadratna forma dijagonalna,

$$\text{tj.} \qquad g_{11} = \lambda(u,v)\,, \qquad g_{12} = 0\,, \qquad g_{22} = \mu(u,v).$$

Rešenje. Koristeći formulu (133) i prethodni zadatak, imamo:

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{G\,E_u - 2F\,F_u + F\,E_v}{2\,(E\,G - F^2)} = \frac{1}{2\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial u}\,, \qquad \Gamma_{12}^1 = \frac{G\,E_v - F\,G_u}{2\,(E\,G - F^2)} = \frac{1}{2\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial v}\,,$$

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{2G\,F_v - G\,G_u - F\,G_v}{2\,(E\,G - F^2)} = -\frac{1}{2\lambda}\frac{\partial\mu}{\partial u}\,, \qquad \Gamma_{11}^2 = \frac{2E\,F_u - E\,E_v - F\,E_u}{2\,(E\,G - F^2)} = -\frac{1}{2\mu}\frac{\partial\lambda}{\partial v}\,,$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{E\,G_u - F\,E_v}{2\,(E\,G - F^2)} = \frac{1}{2\mu}\frac{\partial\mu}{\partial u}\,, \qquad \Gamma_{22}^2 = \frac{E\,G_v - 2F\,F_v + F\,G_u}{2\,(E\,G - F^2)} = \frac{1}{2\mu}\frac{\partial\mu}{\partial v}\,.$$

(i2) Za rotacionu površ $r(u,v) = (u, f(u)\cos v, f(u)\sin v)$, odrediti Kristofelove simbole.

Tada je prva kvadratna forma:

$$E = \langle r_u, r_u\rangle = 1 + f'^2, \qquad F = \langle r_u, r_v\rangle = 0, \qquad G = \langle r_v, r_v\rangle = f^2,$$

Sada vidimo da je ovaj primer, specijalni slučaj prethodng primera za:

$\lambda(u,v)=\lambda(u)=1+f'^2$ i $\mu(u,v)=\mu(u)=f^2$. Koristeći formulu (133) nalazimo:

$$\Gamma^1_{11}=\frac{1}{2\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial u}=\frac{f'\,f''}{1+f'^2}\,,\quad \Gamma^1_{12}=\frac{1}{2\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial v}=0,\qquad \Gamma^1_{22}=-\frac{1}{2\lambda}\frac{\partial\mu}{\partial u}=-\frac{f\,f'}{1+f'^2}\,,$$
$$\Gamma^2_{11}=-\frac{1}{2\mu}\frac{\partial\lambda}{\partial v}=0,\qquad \Gamma^2_{12}=\frac{1}{2\mu}\frac{\partial\mu}{\partial u}=\frac{f'}{f}\,,\qquad \Gamma^2_{22}=\frac{1}{2\mu}\frac{\partial\mu}{\partial v}=0.$$

3.23. Boneova teorema. Znamo da su krive u ravni i prostoru do na izometriju ambijentnog prostora određene svojim funkcijom krivine, odnosno funkcijama krivine i torzije. Analogni rezultat za površi postoji i pokazuje da prva i druga fundamentalna forma, koje zadovoljavaju određeni uslov kompatibilnosti, do na izometriju prostora određuju elementarnu površ r. Preciznije važi sledeća teorema.

Teorema (Bone). *Neka su*

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12}\\ g_{12} & g_{22}\end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12}\\ b_{12} & b_{22}\end{pmatrix}, \tag{135}$$

glatke kvadratne forme na otvorenom i povezanom skupu U homeomorfnom unutrašnjosti diska $(\{(u,v)\in\mathbb{R}^2 \mid u^2+v^2<1\})$, pri čemu je prva skalarni proizvod, i koeficijenti tih formi zadovoljavaju Gaus-Peterson-Kodacijeve jednačine.

Tada postoji, do na izometriju prostora $\mathbb{R}^3$, jedinstvena elementarna površ u $\mathbb{R}^3$ čije su to prva i druga kvadratna forma.

Skica dokaza. Neka je $w_0=(u_0,v_0)\in U$ i neka su a_0,b_0,c_0 tri vektora takva da je

$$\langle a_0,a_0\rangle=g_{11}(w_0),\quad \langle a_0,b_0\rangle=g_{12}(w_0),\quad \langle b_0,b_0\rangle=g_{22}(w_0),$$
$$\langle a_0,c_0\rangle=\langle b_0,c_0\rangle=0,\quad \langle c_0,c_0\rangle=1,$$

kao početni uslovi za jednačine Gausa i Vajngartena

$$r_u(w_0)=a_0,\qquad r_v(w_0)=b_0,\qquad N(w_0)=c_0.$$

Kako koeficijenti ovih formi zadovoljavaju Gaus-Peterson-Kodacijeve (po pretpostavci) jednačine, tada Gaus-Vajngartenove jednačine (Pikarova teorema) imaju jedinstveno rešenje a,b,c sa datim početnim uslovima u tački w_0.

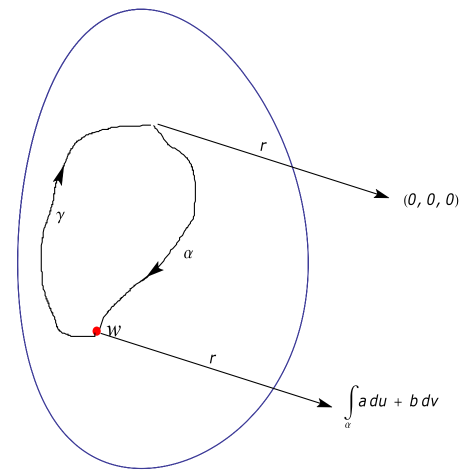
Kako je $\partial a/\partial v=\partial b/\partial u$ i kako je oblast U homeomorfna unutrašnjosti kruga, za svaku zatvorenu glatku krivu bez samopreseka α u U i svaki $j = 1, 2, 3$ važi jednakost,

$$\int_\alpha (a_j du + b_j dv) = 0, \tag{136}$$

gde je $a = (a_1, a_2, a_3)$ i $b = (b_1, b_2, b_3)$. Zaista, kontura α je granica oblasti $V \subseteq U$, i po Stoksovoj formuli važi:

$$\int_\alpha (a_j du + b_j dv) = \int_V \left(\frac{\partial b_j}{\partial u} - \frac{\partial a_j}{\partial v} \right) du\, dv = 0,$$

jer je $\partial a / \partial v = \partial b / \partial u$.



Slika 10.

Definišemo preslikavanje $r : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$, takvo da je

$$a = r_u, \qquad b = r_v, \qquad r(w_0) = (0, 0, 0).$$

Ako spojimo neku tačku $w \in U$ proizvoljnim glatkim putem $\alpha \subseteq U$ sa tačkom w_0, a zatim definišemo $r(w)$ formulom:

$$r(w) = \int_\alpha (a\, du + b\, dv) \,.$$

Iz jednakosti (136) sledi da $r(w)$ ne zavisi od izbora glatkog puta α, koji spaja tačke w i w_0.

Sada se proveri da se prva i druga kvadratna forma elementarne površi r poklapaju sa datim.

Jedinstvenost, do na izometriju prostora $\mathbb{R}^3$, pokazuje se na analogan način kao i za krive u ravni. □

Prethodna teorema je najpoznatiji rezultat francuskog matematičara Bonea [20].

3.23. Teorema Egregium. Gaus je koristeći eksplicitne izraze za Kristofelove simbole uspeo da pokaže da je Gausova krivina unutrašnja osobina površi, tj. da zavisi samo od koeficijenata prve fundamentalne forme, i njihovih prvih i drugih parcijalnih izvoda. Preciznije,

Teorema (Egregium (Gaus)). *Neka je r regularna elementarna površ u $\mathbb{R}^3$. Tada važi formula:*

$$K = \frac{1}{g_{11} g_{22} - g_{12}^2} \left(\sum_{k,l=1}^{2} \left(\Gamma_{12}^k \Gamma_{12}^l - \Gamma_{11}^k \Gamma_{22}^l \right) g_{kl} + \frac{\partial^2 g_{12}}{\partial u^1 \partial u^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{11}}{\partial u^2 \partial u^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial u^1 \partial u^1} \right),$$

gde je $u^1 = u$ i $u^2 = v$.

[20] Bonnet, Pierre Ossian, 1819 – 1892, francuski matematičar.

Dokaz. Kako je

$$K = \frac{\det \mathcal{G}_{\mathfrak{D}}}{\det \mathcal{G}_{\mathfrak{I}}} = \frac{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}\,,$$

iz Gausovih jednačina (116), nalazimo

$$(137) \qquad \langle r_{11}, r_{22}\rangle - \langle r_{12}, r_{12}\rangle = b_{11}b_{22} - b_{12}^2 - \sum_{k,l=1}^{2} \Gamma^k_{12}\Gamma^l_{12}g_{kl} + \sum_{k,l=1}^{2} \Gamma^k_{11}\Gamma^l_{22}g_{kl}.$$

S druge strane imamo

$$(138) \qquad \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial u^k \partial u^l} = \frac{\partial^2 \langle r_i, r_j\rangle}{\partial u^k \partial u_l} = \langle r_{ik}, r_{jl}\rangle + \langle r_{il}, r_{jk}\rangle + \langle r_i, r_{jkl}\rangle + \langle r_{ikl}, r_j\rangle.$$

Koristeći sada veze (138) nalazimo

$$(139) \qquad \langle r_{11}, r_{22}\rangle - \langle r_{12}, r_{12}\rangle = \frac{\partial^2 g_{12}}{\partial u^1 \partial u^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{11}}{\partial u^2\, \partial u^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{22}}{\partial u^1\, \partial u^1}.$$

Sada tražena formula sledi iz (137) i (139). □

3.24. Izometrije. Izometrija površi $f : \Sigma \longrightarrow \Delta$ je diferencijabilna bijekcija takva da se za svaku regularnu krivu $\alpha : [c, d] \longrightarrow \Sigma$ dužine krivih α i $f \circ \alpha$ podudaraju. Površi Σ i Δ su izometrične ako postoji barem jedna izometrija f sa Σ u Δ.

TEOREMA 1. *Neka je $f : \Sigma \longrightarrow \Delta$ izometrija i neka je $\alpha : [c, d] \longrightarrow \Sigma$ proizvoljna regularna kriva. Tada vektori $d\alpha/dt$ i $d(f \circ \alpha)/dt$ imaju jednake dužine za svako $t \in (c, d)$.*

Dokaz. Za svako $t^* \in (c, d)$ kriva $\alpha : [c, t^*] \longrightarrow \Sigma$ ima istu dužinu kao i kriva $f \circ \alpha : [c, t^*] \longrightarrow \Delta$, tj.

$$\int_c^{t^*} \left\| \frac{d\alpha}{dt} \right\| dt = \int_c^{t^*} \left\| \frac{d(f \circ \alpha)}{dt} \right\| dt.$$

Ako diferenciramo ovu jednakost s obzirom na t^* i izračunamo je u tački $t^* = t$ dobijamo tvrdnju. □

Primer. Neka su date površi:

(k) $\Sigma =$ katenoid[21], $r(u, v) = (\cosh v \cos u, \cosh v \sin u, v)$, gde je $0 < u < 2\pi$, i $\sinh^{-1}(1) < v < \sinh^{-1}(1)$

(h) $\Delta =$ helikoid, $\tilde{r}(u, v) = (v \cos u, v \sin u, u)$, za $0 < u < 2\pi$ i $-1 < v < 1$.

Funkcija $(\tilde{r}^{-1} \circ f \circ r)(u, v) = (u, \sinh v)$ je diferencijabilna i definiše diferencijabilnu funkciju $f : \Sigma \longrightarrow \Delta$ formulom, $f(r(u, v)) = \tilde{r}(u, \sinh v) = (\sinh v \cos u, \sinh v \sin u, u)$. Primetimo da je f bijekcija.

[21] Primetimo da je katenoid rotaciona površ.

Iz datih parametrizacija nalazimo da su prve fundamentalne forme katenoida i helikoida:

$$E_k = \cosh^2 v, \qquad F_k = 0, \qquad G_k = 1 + \sinh^2 v,$$
$$E_h = 1 + v^2, \qquad F_h = 0, \qquad G_h = 1,$$
$$E_{f\circ r} = 1 + \sinh^2 v, \qquad F_{f\circ r} = 0, \qquad G_{f\circ r} = \cosh^2 v.$$

Ako je $\alpha : [c,d] \longrightarrow \Sigma$ data sa $\alpha(t) = r(u(t), v(t))$, tada je dužina vektora $d\alpha/dt$ jednaka

$$\|d\alpha/dt\| = \sqrt{\mathfrak{I}(\dot\alpha, \dot\alpha)} = \sqrt{E\dot u^2 + 2\,F\dot u\dot v + G\dot v^2} = \cosh(v(t))\sqrt{\dot u^2 + \dot v^2}.$$

Kako je $(f \circ \alpha)(t) = \tilde r(u(t), \sinh(v(t)))$, nalazimo da je dužina vektora $d(f\circ\alpha)/dt$ takođe jednaka $\cosh(v(t))\sqrt{\dot u^2+\dot v^2}$. Dakle, kako je kriva α proizvoljna i kako su dužine vektora $d\alpha/dt$ i $d(f\circ\alpha)/dt$ jednake za svako t zaključujemo da je f izometrija.

Lokalna izometrija. Površi Σ i Δ su **lokalno izometrične** ako za svaku tačku $P \in \Sigma$ i $f(P) \in \Delta$ postoje redom otvorene okoline $\Sigma' \subseteq \Sigma$ i $\Delta' \subseteq \Delta$, i izometrija $f : \Sigma' \longrightarrow \Delta'$. Preslikavanje f zove se **lokalna izometrija**. Jasno, i preslikavanje $f^{-1} : \Delta' \longrightarrow \Sigma'$ je lokalna izometrija.

TEOREMA 2. *Površi Σ i Δ su lokalno izometrične akko za svaku tačku $P \in \Sigma$ postoji otvoren skup U i koordinatna preslikavanja $r : U \longrightarrow \Sigma$, $\bar r : U \longrightarrow \Delta$, gde je $P \in r(U)$ tako da se koeficijenti prve fundamentalne forme preslikavanja r i $\bar r$ podudaraju. Lokalno izometrične površi imaju istu unutrašnju geometriju u odgovarajućim tačkama.*

Dokaz. Kako su Σ i Δ lokalno izometrične, postoji izometrija $f : \Sigma' \longrightarrow \Delta'$ sa neke otvorene okoline Σ' proizvoljne tačke $P \in \Sigma$ na odgovarajuću otvorenu okolinu Δ' tačke $f(P) \in \Delta$. Tada je prvo, $r(U) = \Sigma'$ i $\tilde r(V) = \Delta'$, gde su $U, V \subseteq \mathbb{R}^2$, i $r, \tilde r$ elementarne regularne površi (Σ', Δ' možemo uzeti dovoljno male), a zatim možemo identifikovati U sa V koristeći bijekciju $\tilde r^{-1}\circ f\circ r$, jer je $(\tilde r^{-1}\circ f\circ r)(U) = V$. Drugim rečima možemo na preslikavanje $\tilde r^{-1}\circ f\circ r$ gledati kao na promenu koordinata na U, i onda je $\bar r = f \circ r$. Neka su $\mathcal{G} = (g_{ij})$ i $\mathcal{H} = (h_{ij})$ koeficijenti 1. fundamentalne forme površi r i $\bar r$ restringovani na U. Pokažimo da je $g_{ij}(u,v) = h_{ij}(u,v)$ za sve $(u,v) \in U$ i $i,j \in \{1,2\}$. Neka je prvo $\alpha(t) = r(u+t, v)$ tada je prema **Teorema 1**, $\|\dot\alpha(t)\| = \|(f \dot\circ \alpha)(t)\|$ za sve t. Kako je, $\|\dot\alpha(0)\| = r_1(u,v)$ i $\|(f \dot\circ \alpha)(0)\| = \bar r_1(u,v)$ sledi da je $\|r_1(u,v)\| = \|\bar r_1(u,v)\|$, tj. $g_{11}(u,v) = h_{11}(u,v)$. Analogno sledi da je i $g_{22}(u,v) = h_{22}(u,v)$. Da bismo pokazali da je i $g_{12}(u,v) = h_{12}(u,v)$, posmatrajmo krivu $\gamma(t) = r(u+t, v+t)$, za koju nalazimo da je $\dot\gamma(0) = r_1(u,v) + r_2(u,v)$ i $(f \dot\circ \gamma)(0) = \bar r_1(u,v) + \bar r_2(u,v)$. Iz **Teoreme 1**, znamo da je $\|\dot\gamma(0)\| = \|(f \dot\circ \gamma)(0)\|$, tako da imamo

$$
\begin{aligned}
&\langle r_1 + r_2, r_1 + r_2\rangle = \langle \bar r_1 + \bar r_2, \bar r_1 + \bar r_2\rangle && \Longleftrightarrow\\
(140)\qquad &\langle r_1, r_1\rangle + 2\langle r_1, r_2\rangle + \langle r_2, r_2\rangle = \langle \bar r_1, \bar r_1\rangle + 2\langle \bar r_1, \bar r_2\rangle + \langle \bar r_2, \bar r_2\rangle && \Longleftrightarrow\\
&g_{11} + 2\, g_{12} + g_{22} = h_{11} + 2\, h_{12} + h_{22}.
\end{aligned}
$$

Kako smo već ranije pokazali da je $g_{11} = h_{11}$ i $g_{22} = h_{22}$ iz (140) sledi i da je $g_{12} = h_{12}$.

Obratno, ako postoji otvoren skup U i koordinatna preslikavanja $r(U) = \Sigma' \subset \Sigma$ i $\bar r(U) = \Delta' \subset \Delta$, takva da imaju podudarne 1. fundamentalne forme, tada definišemo $f : \Sigma' \longrightarrow \Delta'$ formulom, $f \circ r = \bar r$. Kako su preslikavanja r i $\bar r$ diferencijabilne bijekcije, takvo je i preslikavanje $f = \bar r \circ r^{-1}$. Ako je $\alpha : [a, b] \longrightarrow \Sigma'$, $\alpha(t) = r(u(t), v(t))$ kriva i $(f \circ \alpha)(t) = \bar r(u(t), v(t))$, slika te kriva pri preslikavanju f, tada te krive imaju istu dužinu jer imaju jednake 1. fundamentalne forme. Dakle, f je lokalna simetrija.

Poslednja tvrdnja je jasna jer je unutrašnja geometrija površi određena njenom prvom fundamentalnom formom. □

Tako da dobijamo sledeću posledicu Teoreme Egregium.

POSLEDICA. *Ako su površi $r : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ i $\tilde r : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ lokalno izometrične njihove se Gausove krivine podudaraju u svakom paru tačaka $r(u^1, u^2)$ i $\tilde r(u^1, u^2)$.*

Dokaz. Na osnovu Teoreme Egregium, Gausova krivina je unutrašnje svojstvo površi, a na osnovu prethodne teoreme znamo da lokalno simetrične površi imaju istu unutrašnju geometriju, pa tako i Gausovu krivinu. □

3.25. Paralelno pomeranje. Kao što znamo od ranije, tangentno vektorsko polje duž krive $\alpha : [a, b] \longrightarrow r(U)$, koja pripada regularnoj elementarnoj površi r, je funkcija X koja svakom $t \in [a, b]$ dodeljuje tangentni vektor $X(t) \in T_{\alpha(t)}(r)$.

Ako uzmemo u obzir da posmatramo vektorsko polje $X(t)$ duž krive $\alpha(t)$ i onoga što znamo (vidi **3.10.** Propozicija 1), o tangentnim vektorskim poljima na regularnoj elementarnoj površi $r : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ (vidi **3.10.** Propozicija 1) vidimo da $X(t)$ dozvoljava predstavljanje u obliku ($X_1(t), X_2(t)$ su jedinstvene i diferencijabilne funkcije):

$$
(141)\qquad X(t) = X_1(t)\, r_1(t) + X_2(t)\, r_2(t), \qquad t \in [a, b].
$$

Tangentno vektorsko polje $X(t)$ duž krive $\alpha(t)$ je paralelno duž krive $\alpha(t)$ ukoliko je dX/dt normalno na površ.

Primeri.

(1) Da li je tangentno vektorsko polje, $X(t) = (0, 0, 1)$, sfere paralelno duž ekvatora $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, 0)$?

Rešenje. $X = (0, 0, 1)$, pa je vektorsko polje X paralelno duž ekvatora jer je vektor $dX/dt = (0, 0, 0)$ normalan na površ.

(2) Neka je $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), 0)$ kriva u ravni $r(u,v) = (u,v,0)$. Odrediti sva paralelna tangentna vektorska polja duž krive α.

Rešenje. Neka je $X(t) = (A(t), B(t), 0)$ vektorsko polje duž krive α. Jasno, biće $dX/dt = (dA/dt, dB/dt, 0)$ i normala na površ je $(0,0,1)$, tako da je vektorsko polje dX/dt normalno na ravan (površ) akko je $dA/dt = 0 = dB/dt$, tj. X je paralelno duž α akko su A i B konstante.

Primedba. Ovo je uobičajeni pojam paralelnog pomeranja vektora u ravni, i kao što vidimo ne zavisi od krive α, tako da je pojam paralelnog pomeranja duž krive prirodna generalizacija paralelnog pomeranja vektora iz euklidske geometrije.

(3) Neka je $\mathbb{S}^2$ jedinična sfera i neka je $X(t)$ jedinično vektorsko polje duž paralele $\pi/4$ usmereno ka severnom polu. Da li je X paralelno ?

Rešenje. Jednačina paralele je $\alpha(t) = \sqrt{2}/2\,(\cos t, \sin t, 1) = P(t)$. Kako severni pol ima koordinate $S = (0,0,1)$, vektorsko polje $X(t)$ imaće koordinate proporcionalne vektoru $\overrightarrow{P(t)S} = -\sqrt{2}/2\,(\cos t, \sin t, c)$. Iz uslova da je $X(t)$ jedinično polje, nalazimo da je $X(t) = -\sqrt{2}/2\,(\cos t, \sin t, -1)$. Sada je $dX/dt = \sqrt{2}/2\,(\sin t, -\cos t, 0)$, a od ranije znamo da vektor normale na ovu površ N ima do na znak iste koordinate kao i tačka $\alpha(t)$. Dakle, vektori N i dX/dt nisu proporcionalni, i vektorsko polje dX/dt nije paralelno duž krive α.

Teorema 1. *Neka je $\alpha(t) = r(u_1(t), u_2(t))$ regularna kriva koja pripada regularnoj površi $r : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ i $X(t)$ tangentno vektorsko polje duž krive α. Tada je vektorsko polje $X(t)$ paralelno duž krive α ako i samo ako je*

$$\frac{dX_k}{dt} + \sum_{i,j=1}^{2} \Gamma_{ij}^k X_i \frac{du_j}{dt} = 0, \qquad k = 1,2, \qquad \text{tj.}$$

$$\begin{aligned}\frac{dX_1}{dt} + \Gamma_{11}^1 X_1 \frac{du_1}{dt} + \Gamma_{12}^1 X_1 \frac{du_2}{dt} + \Gamma_{21}^1 X_2 \frac{du_1}{dt} + \Gamma_{22}^1 X_2 \frac{du_2}{dt} &= 0,\\ \frac{dX_2}{dt} + \Gamma_{11}^2 X_1 \frac{du_1}{dt} + \Gamma_{12}^2 X_1 \frac{du_2}{dt} + \Gamma_{21}^2 X_2 \frac{du_1}{dt} + \Gamma_{22}^2 X_2 \frac{du_2}{dt} &= 0.\end{aligned} \tag{142}$$

Primetimo da sistem (142) zavisi samo od koeficijenata prve osnovne forme, tj. paralelnost vektorskog polja je unutrašnja karakteristika.

Dokaz. Kako α pripada površi r i kako je X tangentno vektorsko polje, redom imamo:

$$\alpha(t) = r(u_1(t), u_2(t)) \qquad \text{i} \qquad X(t) = X_1(t)\, r_1 + X_2(t)\, r_2.$$

Koristeći Gausove jednačine za r_{11}, $r_{12} = r_{21}$ i r_{22}, imamo

$$\begin{aligned}
\frac{dX}{dt} &= \frac{dX_1}{dt} r_1 + X_1 \left(r_{11}\frac{du_1}{dt} + r_{12}\frac{du_2}{dt} \right) + \frac{dX_2}{dt} r_2 + X_2 \left(r_{21}\frac{du_1}{dt} + r_{22}\frac{du_2}{dt} \right) \\
&= \frac{dX_1}{dt} r_1 + X_1 \left((\Gamma^1_{11} r_1 + \Gamma^2_{11} r_2 + eN)\frac{du_1}{dt} + (\Gamma^1_{12} r_1 + \Gamma^2_{12} r_2 + fN)\frac{du_2}{dt} \right) \\
&\quad + \frac{dX_2}{dt} r_2 + X_2 \left((\Gamma^1_{12} r_1 + \Gamma^2_{12} r_2 + fN)\frac{du_1}{dt} + (\Gamma^1_{22} r_1 + \Gamma^2_{22} r_2 + gN)\frac{du_2}{dt} \right) \\
&= \left(\frac{dX_1}{dt} + \Gamma^1_{11} X_1 \frac{du_1}{dt} + \Gamma^1_{12} X_1 \frac{du_2}{dt} + \Gamma^1_{21} X_2 \frac{du_1}{dt} + \Gamma^1_{22} X_2 \frac{du_2}{dt} \right) r_1 \\
&\quad + \left(\frac{dX_2}{dt} + \Gamma^2_{11} X_1 \frac{du_1}{dt} + \Gamma^2_{12} X_1 \frac{du_2}{dt} + \Gamma^2_{21} X_2 \frac{du_1}{dt} + \Gamma^2_{22} X_2 \frac{du_2}{dt} \right) r_2 + \xi N. \qquad (143)
\end{aligned}$$

Vektorsko polje $X(t)$ biće paralelno duž krive α ako je normalno na tangentnu ravan, tj. akko se koeficijenti uz r_1 i r_2 poništavaju, tj. akko važe jednačine (142). $\square$

Teorema 2. *Neka su $X(t)$ i $Y(t)$ paralelna tangentna vektorska polja duž regularne krive $\alpha(t)$ koja pripada površi $r : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Tada se intenziteti ovih vektorskih polja, kao i ugao koji ona zaklapaju, ne menjaju duž krive α.*

Dokaz. Definišemo diferencijabilnu funkciju $f(t) = \langle X(t), Y(t) \rangle$, i računamo

$$\frac{df}{dt} = \frac{d}{dt}\Big\langle X(t), Y(t) \Big\rangle = \Big\langle \frac{dX}{dt}, Y \Big\rangle + \Big\langle X, \frac{dY}{dt} \Big\rangle. \qquad (144)$$

Kako su vektorska polja X i Y tangentna i paralelna, iz prethodne jednakosti (144) sledi da je $\langle \frac{dX}{dt}, Y \rangle = \langle X, \frac{dY}{dt} \rangle = 0$, pa je i $df/dt = 0$, tj. f je konstanta. Ako u izvođenju formule (144) stavimo $Y = X$, zaključujemo da se intenziteti paralelnih tangentnih vektorska polja ne menjaju duž krive α, a zatim iz činjenice da je f konstanta dobijamo da se ne menja niti ugao između dva paralelna tangentna polja duž krive α. $\square$

Jedna od važnih posledica teoreme o egzistenciji i jedinstvenosti rešenja običnih diferencijalnih jednačina je sledeća Teorema.

Teorema 3. *Neka je P_0 tačka regularne površi r i X_0 neki njen tangentni vektor u tački P_0 i α kriva koja prolazi kroz tačku P_0, tj. $\alpha(0) = P_0$. Tada*

(1) *postoji jedinstveno paralelno vektorsko polje $X(t)$ duž α takvo da je $X(0) = X_0$*

(2) *za svako dovoljno malo $\varepsilon > 0$ postoji jedinstvena geodezijska $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow r(U)$ takva da je: $\alpha(0) = P_0$ i $\dot\alpha(0) = X_0$.*

Dokaz. (1) Kako su jednačine (142) obične diferencijalne jednačina sa glatkim koeficijentima, za svaki početni uslov $X(0) = X_0$, postoji jedinstveno rešenje tog sistema.

(2) Jednačina geodezijskih (112) je obična diferencijalna jednačina na skupu parova (P, X) gde je $P \in r(U) = \Sigma$ i $X \in T_P(r)$. U okolini tačke P_0 ovi parovi su parametrizovani tačkama $(u_1, u_2, X_1, X_2) \in \mathbb{R}^4 : P = r(u_1, u_2)$, $V = X_1 r_1 + X_2 r_2$ i jednačine (112) možemo prepisati kao:

$$\dot{u}_i = X_i \qquad \dot{X}_i = -\sum_{j,k=1}^{2} \Gamma^i_{jk}(u_1, u_2) X_j X_k, \quad i = 1, 2.$$

Sada tvrdnja sledi iz teoreme o postojanju i jedinstvenosti rešenja običnih diferencijalnih jednačina (Pikarova teorema). □

Primedba. (i1) Jedinstveno tangentno vektorsko polje $X(t)$ paralelno duž krive $\alpha(t)$ takvo da je $X(t_0) = X_0$ naziva se paralelno pomeranje vektora X^0 duž krive α.

(i2) Tangentno raslojenje. U dokazu tvrdnje (2) prethodne Teoreme 3 posmatrali smo uređene parove oblika (P, X) pri čemu je $P \in \Sigma$ i $X \in T_P\Sigma$. Tako dolazimo do skupa

$$T\Sigma = \{(P, X) \mid P \in \Sigma, X \in T_P\Sigma\}\ , \tag{145}$$

kojeg nazivamo tangentnim raslojenjem površi (mnogostrukosti) Σ.

Primer. Na jediničnoj sferi $r(u, v) = (\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u)$ uočimo paralelu $u = \pi/4$, tj. krivu $\alpha(t) = \sqrt{2}/2\,(\cos t, \sin t, 1)$. Odrediti paralelno pomeranje vektora $X^0 = r_u(\pi/4, 0) = \sqrt{2}/2(-1, 0, 1)$ duž krive α.

Rešenje. Prvo nalazimo

$$r_u = (-\sin u \cos v, -\sin u \sin v, \cos u) \quad \text{i} \quad r_v = (-\cos u \sin v, \cos u \cos v, 0),$$

odakle dobijamo: $E = 1$, $F = 0$ i $G = \cos^2 u$. Koristeći formule za Kristofelove simbole, vidi npr. Zadatak u tački 3.16, dobijamo da su:

$$\Gamma^1_{22} = \sin u \cos u, \qquad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = -\mathsf{T}_{\alpha(t),n} u,$$

jedini Kristofelovi simboli različiti od 0. Ako ih zamenimo u sistem (142) i iskoristimo da je $u = \pi/4$, $\dot{u}_1 = 0$ i $\dot{u}_2 = 1$, za sve tačke krive α, dobijamo sistem:

$$0 = \frac{dX_1}{dt} + \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4} X_2 \frac{du_2}{dt} = \frac{dX_1}{dt} + \frac{1}{2}X_2, \qquad 0 = \frac{dX_2}{dt} - \mathsf{T}_{\alpha(t),n}\frac{\pi}{4} X_1 \frac{du_2}{dt} = \frac{dX_2}{dt} - X_1.$$

Rešenje ovog sistema potražimo u obliku:

$$X_1(t) = C_1\,\cos(a\,t) + C_2\,\sin(a\,t), \qquad X_2(t) = D_1\,\cos(a\,t) + D_2\,\sin(a\,t).$$

Ako sada iskoristimo početni uslov $X(0) = 1 \cdot r_u + 0 \cdot r_v$, dobijamo jedinstveno rešenje sistema: $D_1 = C_2 = 0$, $C_1 = 1$, $D_2 = 2\,a$ i $2\,a^2 = 1$, tj.

$$X_1(t) = \cos\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right), \quad X_2(t) = \sqrt{2}\sin\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) \quad \text{tako da je}$$

$$X(t) = \cos\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) r_u + \sqrt{2}\sin\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) r_v\,.$$

Primetimo da je

$$X(2\pi) = \frac{\sqrt{2}}{2}\ \cos(\sqrt{2}\pi)\,(-1,0,1) + \sin(\sqrt{2}\pi)\,(0,1,0) \neq \frac{\sqrt{2}}{2}(-1,0,1) = X(0).$$

Dakle, kada obiđemo čitavu paralelu (krug), tj. polazni vektor pomerimo paralelno duž ove paralele dobijamo vektor $X(2\pi)$ koji se ne podudara sa početnim vektorom $X(0)$.

3.26. Potpuno prave linije. Regularna kriva $\alpha(t)$ koja pripada površi $r : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ je potpuno prava ako je vektorsko polje $\dfrac{d\alpha}{dt}$ paralelno duž krive α.

Teorema. *Regularna kriva $\alpha(t)$ koja pripada površi $r : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ je potpuno prava ako i samo ako je dt/dl konstanta, i $\alpha(t(l))$ je prirodno parametrizovana geodezijska linija (l je dužina luka).*

Dokaz. Pretpostavimo da je $\alpha(t(l))$ geodezijska i da je $dt/dl = c$. Tada je

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\alpha}{dl}\frac{dl}{dt} = \frac{v(l)}{c}\ .$$

$\alpha(t)$ potpuno prava duž α ako je $d\alpha/dt$ paralelno duž α. Primetimo da je

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\alpha}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{v}{c}\right) = \frac{dv}{dl}\left(\frac{dl}{dt}\right)^2 = \frac{dv}{dl}\cdot\frac{1}{c^2} = \frac{n(l)}{c^2}\ ,$$

i kako je $\alpha(t(l))$ geodezijska, vektor $n(l) = \alpha''$ je normalan na površ. Dakle, vektorsko polje $d\alpha/dt$ je paralelno i kriva $\alpha(t)$ je potpuno prava.

Pretpostavimo da je $\alpha(t)$ potpuno prava. Tada je vektor $d^2\alpha/dt^2$ normalan na površ i potrebno je još pokazati da je: dt/dl konstanta i da je dv/dl normalno na površ $r(U)$. Budući da je vektorsko polje $d\alpha/dt = (d\alpha/dl)(dl/dt) = v(dl/dt)$ paralelno, na osnovu Teoreme 2, iz tačke **3.25**, njegova norma $\|d\alpha/dt\|$ je konstanta. Kako je dl/dt neprekidna funkcija dl/dt je konstanta različita od 0, tako da je i dt/dl konstanta. Sada imamo

$$\frac{dv}{dl} = \frac{d^2\alpha}{dl^2} = \left(\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right)\left(\frac{dt}{dl}\right)^2 + \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)\left(\frac{d^2t}{dl^2}\right).$$

Budući da je dt/dl konstanta, sledi da je $d^2t/dl^2 = 0$ i vektorsko polje dv/dl je normalno na površ, jer je normalno i vektorsko polje $d^2\alpha/dt^2$. □

Primedba. Dakle, potpuno prava linija se od geodezijske linije može razlikovati samo za afinu promenu parametra.

Posledica. *Ako je regularna kriva α, koja pripada površi $r : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$, parametrizovana dužinom luka, tada je ona potpuno prava akko je geodezijska, tj. vektorsko polje tangentnih vektora prirodno parametrizovane krive je paralelno duž α akko je α geodezijska linija.*

3.27. Kovarijantni izvod. Neka je $r : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ regularna površ, $\alpha : [a,b] \longrightarrow r(U)$ regularna kriva koja pripada površi r i neka je X glatko tangentno vektorsko polje duž krive α, tj.

- za svako $t \in [a,b]$ vektor $X(t)$ pripada tangentnom prostoru $T_{\alpha(t)}r$,
- vektorsko polje glatko zavisi od t.

Tada, vidi tačku **3.10**, $X(t)$ možemo predstaviti u obliku (uz oznake $r_1 = r_u,\ \ r_2 = r_v$)

$$X(t) = X_1(t)\, r_1(t) + X_1(t)\, r_2(t) = X_i(t)\, r_i(t), \tag{146}$$

i izvod ovog polja duž krive α je

$$\frac{dX}{dt} = \dot{X} = \sum_{i=1}^{2} \left(\frac{dX_i}{dt}\, r_i + X_i \dot{r}_i \right) = \sum_{i=1}^{2} \frac{dX_i}{dt}\, r_i + \sum_{i,j=1}^{2} X_i \dot{u}_j r_{ij} = \frac{dX_i}{dt}\, r_i + X_i \dot{u}_j r_{ij}\,,$$

pri čemu je $\dot{\alpha} = \dot{u}_1\, r_1 + \dot{u}_2\, r_2\,.$

Sada desnu stranu gornjeg izraza, koristeći Gausove formule (116), možemo napisati kao zbir dva člana od kojih prvi pripada tangentnoj ravni, a drugi je ortogonalan na nju:

$$\dot{X} = \sum_i \left(\frac{dX_i}{dt} + \sum_{j,k} \Gamma^i_{jk} X_j \dot{u}_k \right) r_i + \sum_{j,k} X_j \dot{u}_k b_{jk} N\,. \tag{147}$$

Kovarijantni izvod, $\nabla_{\dot{\alpha}} X$, vektorskog polja X duž regularne krive α koja pripada regularnoj površi u $\mathbb{R}^3$, je ortogonalna projekcija izvoda polja X, duž krive α, na tangentnu ravan, tj.:

$$\nabla_{\dot{\alpha}} X = \frac{DX}{\partial t} = \sum_i \left(\frac{dX_i}{dt} + \sum_{j,k} \Gamma^i_{jk} X_j \dot{u}_k \right) r_i\,. \tag{148}$$

Ovu konstrukciju možemo i proširiti na bilo koje tangentno vektorsko polje X koje je zadato ne samo na nekoj krivoj koja pripada površi već na celoj površi i za proizvoljan tangenti vektor $W = W_1\, r_1 + W_2\, r_2$. Potrebno je da u prethodnoj formuli (148) uzmemo u obzir da su X_i funkcije promenljivih u_1 i u_2 i da koordinate vektora $\dot{\alpha}$ u bazi (r_1, r_2) zamenimo koordinatama tangentnog vektora W u istoj bazi. Tako dobijamo,

$$\nabla_W X = \sum_{i,k} \left(\frac{\partial X_i}{\partial u_k} + \sum_j \Gamma^i_{jk} X_j \right) W_k\, r_i. \tag{149}$$

Operacija kovarijantnog diferenciranja ima niz važnih svojstava koja navodimo u sledećoj propoziciji.

Propozicija. *Neka je data regularna površ r u $\mathbb{R}^3$, tada ona ima sledeća svojstva.*

(1) *Preslikavanje* $(W, X) \mapsto \nabla_W X$ *je linearno po* W *i* X,

$$\nabla_{\lambda W + \mu V} X = \lambda \nabla_W X + \mu \nabla_V X, \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R},$$

$$\nabla_W(\lambda X + \mu Z) = \lambda \nabla_W X + \mu \nabla_W Z, \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

(2) Ako je $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ glatka funkcija tada je

$$\nabla_{fW} X = f \nabla_W X, \qquad \nabla_W(f\,X) = f \nabla_W X + (D_W f) X,$$

pri čemu je $D_W f$ izvod funkcije f u smeru vektora W: $D_W f = \sum_j (\partial f / \partial u_j) W_j$.

(3) $\nabla_{r_i} r_j = \sum\limits_k \Gamma^k_{ij}\, r_k$.

(4) $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$.

(5) $D_W \langle X, Z \rangle = \langle \nabla_W X, Z \rangle + \langle X, \nabla_W Z \rangle$.

Dokaz. Tvrđenja (1) – (3) lako slede iz definicija. (4) sledi iz definicije Kristofelovih simbola i **3.22** Teorema 5. Zato dokažimo (5). Sada redom imamo,

$$
\begin{aligned}
D_W(\langle X, Z \rangle) &= D_W(\langle r_i, r_j \rangle X_i Z_j) = W_k \frac{\partial}{\partial u_k} (\langle r_i, r_j \rangle X_i Z_j) = W_k(\langle r_{ik}, r_j \rangle + \langle r_i, r_{jk} \rangle) X_i Z_j \\
&\quad + W_k \langle r_i, r_j \rangle \left(\frac{\partial X_i}{\partial u_k} Z_j + X_i \frac{\partial Z_j}{\partial u_k} \right) = W_k(\Gamma^m_{ik} \langle r_m, r_j \rangle + \Gamma^m_{jk} \langle r_i, r_m \rangle) X_i Z_j \\
&\quad + W_k \langle r_i, r_j \rangle \left(\frac{\partial X_i}{\partial u_k} Z_j + X_i \frac{\partial Z_j}{\partial u_k} \right) \\
&= W_k \left(\frac{\partial X_i}{\partial u_k} + \Gamma^i_{mk} X_m \right) \langle r_i, r_j \rangle Z_j + W_k \left(\frac{\partial Z_j}{\partial u_k} + \Gamma^j_{mk} Z_m \right) \langle r_i, r_j \rangle X_i \\
&= \langle \nabla_W X, Z \rangle + \langle X, \nabla_W Z \rangle
\end{aligned}
$$

Time je završen dokaz propozicije. $\square$

Primetimo da kovarijantni izvod tangentnog vektorskog polja X duž regularne krive α koja pripada regularnoj površi Σ pripada unutrašnjoj geometriji te površi, jer se izražava preko koeficijenata prve fundamentalne forme.

Inspirisani gornjim rezultatima možemo definisati pojam afine povezanosti na podmnogostukostima euklidskog prostora kao operaciju koja je zadana na vektorskim poljima za koju su ispunjeni uslovi (1) i (2) iz prethodne Propozicije. Vidimo da je povezanost jedinstveno određena Kristofelovim simbolima Γ^k_{ij}. Kažemo da je:

(s) povezanost simetrična ako je ispunjen uslov (4) iz prethodne Propozicije,

(k) povezanost saglasna sa metrikom ako je ispunjen uslov (5) iz prethodne Propozicije.

Formulišimo i sledeću teoremu bez dokaza.

TEOREMA. *Simetrična i saglasna sa metrikom afina povezanost je jedinstvena i potpuno određena sa prvom kvadratnom formom (g_{ij}) formulama (133).*

3.28. Kovarijantni izvod i operator oblika. U prethodnoj tački videli smo da iako je $X(t)$ tangentno vektorsko polje $\dot{X}(t)$ ne mora biti tangentno vektorsko polje, (148). Tako da ima smisla proširiti kovarijantni izvod duž bilo koje regularne krive α koja pripada površi r na sva vektorska polja. U tom smislu prirodno je da odredimo $\nabla_v N$, gde je v proizvoljni tangentni vektor (zatim možemo generalisati konstrukciju na proizvoljno tangentno vektorsko polje W), a N jedinično normalno vektorsko polje.

Neka je $\alpha(t) = r(u(t), v(t))$ regularna kriva koja pripada regularnoj površi $r(U)$, i neka je $N(t) = (u(t), v(t))$ sada imamo,

$$\frac{dN(t)}{dt} = N_u\,\dot{u} + N_v\,\dot{v} = \nabla_{\dot{\alpha}} N, \quad \text{jer su } N_u \text{ i } N_v \text{ tangentni vektori.}$$

Ako se sada prisetimo definicije operatora oblika i dokaza propozicije iz **3.13**, i uporedimo sa gornjom formulom vidimo da je

$$\nabla_v N = -\mathcal{S}(v). \tag{150}$$

Prethodna definicija operatora oblika preko kovarijantnog diferenciranja pogodna je za generalizacije u teoriji podmnogostrukosti.

3.29. Kovarijantni izvod i geodezijske linije. Pojam kovarijantnog diferenciranja je u uskoj vezi sa pojmom paralelnog prenosa: vektorsko polje $X(t)$ duž krive α je paralelno ako je kovarijantni izvod od X duž krive α jednak nuli, tj.

$$\frac{DX}{\partial t} = \sum_i \left(\frac{dXi}{dt} + \sum_{j,k} \Gamma^i_{jk} X_j \dot{u}_k \right) r_i = 0\,. \tag{151}$$

Pojam geodezijske linije na površi možemo definisati i na sledeći način: kriva α, koja pripada površi Σ, je njena geodezijska linija ako je njen vektor brzine paralelan duž te krive, tj.

$$\frac{D\dot{\alpha}}{\partial t} = 0. \tag{152}$$

Ova definicija geodezijske linije podudara sa onom koju smo uveli u tački **3.18**, ali je opštija od nje i koristi se u daljnjim generalizacijama geodezijskih linija na mnogostrukostima proizvoljnih dimenzija. Važi sledeća Propozicija.

Propozicija. (1) *Geodezijske linije zadovoljavaju sledeće jednačine,*

$$\ddot{u}_i + \sum_{j,k} \Gamma^i_{jk} \dot{u}_j \dot{u}_k = 0 \qquad i = 1, 2. \tag{153}$$

(2) *Ako je $\alpha(t)$ geodezijska linija površi r, i $\lambda \in \mathbb{R}$, tada je i kriva $\alpha_\lambda(t) = \alpha(\lambda t)$ geodezijska linija.*

(3) *Glatka kriva α koja pripada površi $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ je geodezijska ako i samo ako u svakoj njenoj tački vektor normale krive je ortogonalan na površ.*

(4) *Ako je $\alpha(t)$ geodezijska linija površi r tada je*

$$\frac{d}{dt} \left\langle \dot{\alpha}, \dot{\alpha} \right\rangle = 0. \tag{154}$$

Dokaz. (1) sledi iz (151) i (152), ako primetimo da je $X_i = \dot{u}_i$. (2) lako sledi iz invarijantnosti jednačine (153) na zamenu $u_i \mapsto \lambda u_i$.

(3) je samo preformulacija definicije.

Primetimo da formula (5) iz Propozicije 1 u **3.29**, implicira

$$\frac{d}{dt} \left\langle \dot{\alpha}, \dot{\alpha} \right\rangle = 2\left\langle \frac{D}{\partial t} \dot{\alpha}, \dot{\alpha} \right\rangle = 0, \qquad \text{jer je } D\dot{\alpha}/\partial t = 0.$$

Time je pokazano i tvrđenje (4). $\square$