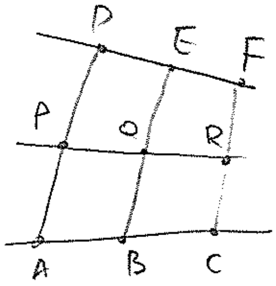
Решења задатака с писменог испита из Геометрије 1 у јунском року

1. Нека су A, B, C и D, E, F две тројке колинеарних тачака таквих да је B средиште AC и E средиште DF. Ако су P, Q, R редом средишта дужи AD, BE, CF, доказати да су P, Q, R колинеарне и да је Q средиште дужи PR.



B средиште $AC \Rightarrow \vec{AB} = \vec{BC}$

E средиште $DF \Rightarrow \vec{DE} = \vec{EF}$

$$\vec{PQ} = \vec{PA} + \vec{AB} + \vec{BQ}$$
$$\vec{PQ} = \vec{PD} + \vec{DE} + \vec{EQ}$$
$$2\vec{PQ} = \cancel{\vec{PA}} + \vec{AB} + \cancel{\vec{BQ}} + \cancel{\vec{PD}} + \vec{DE} + \cancel{\vec{EQ}}$$

P средиште $AD \Rightarrow \vec{AP} = \vec{PD} \Rightarrow -\vec{PA} = \vec{PD} \Rightarrow \vec{PA} + \vec{PD} = \vec{0}$

Q средиште $BE \Rightarrow \vec{BQ} = \vec{QE} \Rightarrow \vec{BQ} = -\vec{EQ} \Rightarrow \vec{BQ} + \vec{EQ} = \vec{0}$

$$\Rightarrow 2\vec{PQ} = \vec{AB} + \vec{DE} \Rightarrow \vec{PQ} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{DE})$$

$$\vec{QR} = \vec{QB} + \vec{BC} + \vec{CR}$$
$$\vec{QR} = \vec{QE} + \vec{EF} + \vec{FR}$$
$$2\vec{QR} = \cancel{\vec{QB}} + \vec{BC} + \cancel{\vec{CR}} + \cancel{\vec{QE}} + \vec{EF} + \cancel{\vec{FR}}$$

$\vec{QB} + \vec{QE} = -\vec{BQ} + \vec{QE} = \vec{0}$, јер је $\vec{BQ} = \vec{QE}$ (Q средиште BE)

R средиште $CF \Rightarrow \vec{CR} = \vec{RF} \Rightarrow \vec{CR} = -\vec{FR} \Rightarrow \vec{CR} + \vec{FR} = \vec{0}$

$$\Rightarrow 2\vec{QR} = \vec{BC} + \vec{EF} \Rightarrow \vec{QR} = \frac{1}{2}(\vec{BC} + \vec{EF})$$

Како је $\vec{AB} = \vec{BC}$ и $\vec{DE} = \vec{EF}$, следи да је $\vec{PQ} = \vec{QR}$, што значи да су P, Q, R колинеарне и да је Q средиште PR.

2. (а) Одредити једначину равни γ која полови угао између равни $\alpha: 2x - 2y + z - 3 = 0$ и $\beta: 8x + y - 4z - 1 = 0$ и садржи тачку $C(-4, 1, 1)$.

(б) Одредити једначину нормалне пројекције праве $p: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{0}$ на раван $\pi: x - 2y + 2z - 5 = 0$ и израчунати угао између праве p и равни π.

(а) Раван γ која полови угао између равни α и β има особину да је свака њена тачка M на истом растојању од равни α и β. Дакле, ако је $M(x, y, z)$ произвољна тачка равни γ, онда је $d(M, \alpha) = d(M, \beta)$, тј.

$$\frac{|2x-2y+z-3|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}=\frac{|8x+y-4z-1|}{\sqrt{8^2+1^2+(-4)^2}}$$

$$\frac{|2x-2y+z-3|}{\sqrt{4+4+1}}=\frac{|8x+y-4z-1|}{\sqrt{64+1+16}}$$

$$\frac{|2x-2y+z-3|}{\sqrt{9}}=\frac{|8x+y-4z-1|}{\sqrt{81}}$$

$$\frac{|2x-2y+z-3|}{\cancel{3}}=\frac{|8x+y-4z-1|}{\cancel{9}\,3}$$

$$3\cdot|2x-2y+z-3|=|8x+y-4z-1|$$

Постоје две могућности: да су изрази $2x-2y+z-3$ истог знака и да су супротних знакова. Према томе, добијамо

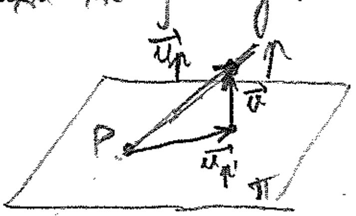
$$3\cdot(2x-2y+z-3)=8x+y-4z-1 \quad \text{или}$$
$$3\cdot(2x-2y+z-3)=-(8x+y-4z-1)$$

$$6x-6y+3z-9=8x+y-4z-1 \quad \text{или}$$
$$6x-6y+3z-9=-8x-y+4z+1$$

$$2x+7y-7z+8=0 \quad \text{или} \quad 14x-5y-z-10=0$$

Једна од ових двеју равни је тражена раван γ. Како γ садржи тачку $C(-4,1,1)$, а $2\cdot(-4)+7\cdot1-7\cdot1+8=0$ и $14\cdot(-4)-5\cdot1-1-10\neq0$, следи да је γ: $2x+7y-7z+8=0$.

(б)



Довољно је наћи продорну тачку праве p и равни π, као и нормалну пројекцију вектора правца $\vec{u_p}$ праве p на равни π.

$$p: \frac{x-1}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z-2}{0}=t$$

$$x=1+t$$
$$y=-t$$
$$z=2$$

$$\pi: x-2y+2z-5=0$$

$$1+t-2(-t)+2\cdot2-5=0$$

$$\cancel{1}+t+2t+\cancel{4}-\cancel{5}=0$$

$$3t=0 \Rightarrow \boxed{t=0} \Rightarrow P(1,0,2)$$ је продорна тачка

$\vec{u_p}=(1,-1,0)$ вектор правца

$\vec{u_{p'}}$ - вектор правца пројекције p'

$\vec{v}$ - ортогонална допуна

$\vec{u_p}=\vec{u_{p'}}+\vec{v}$, $\vec{v}$ - нормалан на равни π

$$\vec{v}=\lambda\cdot(1,-2,2)=(\lambda,-2\lambda,2\lambda)$$

$$\vec{u_{p'}}\perp\vec{v} \Rightarrow \langle \vec{u_{p'}},\vec{v}\rangle=0$$

$$\vec{u_{p'}}=\vec{u_p}-\vec{v}=(1,-1,0)-(\lambda,-2\lambda,2\lambda)=(1-\lambda,-1+2\lambda,-2\lambda)$$

$$\langle(1-\lambda,-1+2\lambda,-2\lambda),(\lambda,-2\lambda,2\lambda)\rangle=0$$

$$(1-\lambda)\lambda+(-1+2\lambda)(-2\lambda)-2\lambda(2\lambda)=0$$

$$\lambda-\lambda^2+2\lambda-4\lambda^2-4\lambda^2=0$$

$$3\lambda-9\lambda^2=0$$

$$3\lambda(1-3\lambda)=0$$

$\lambda=0$ или $\lambda=\frac{1}{3}$

не може, јер $\vec{v}=\vec{0}$ није решење

$$\Rightarrow \vec{u_{p'}}=\left(1-\frac{1}{3},-1+\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)$$

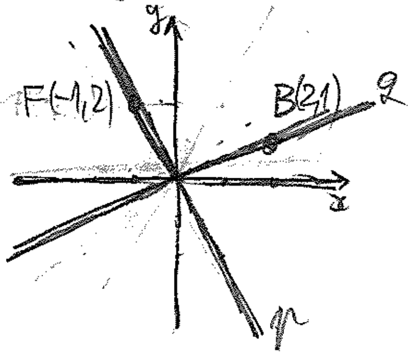
$$\Rightarrow p': \frac{x-1}{\frac{2}{\cancel{3}}}=\frac{y}{-\frac{1}{\cancel{3}}}=\frac{z-2}{-\frac{2}{\cancel{3}}} \;/\cdot 3). \quad p': \frac{x-1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-2}{-2}.$$

Угао између праве p и равни π једнак је углу између p и p'.

$$\cos\measuredangle(p,\pi)=\cos\measuredangle(p,p')=\frac{|\langle\vec{u_p},\vec{u_{p'}}\rangle|}{\|\vec{u_p}\|\cdot\|\vec{u_{p'}}\|}=\frac{|\langle(1,-1,0),(2,-1,-2)\rangle|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+0^2}\cdot\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}}=\frac{|2+1+0|}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{4+1+4}}=\frac{\cancel{|3|}}{\sqrt{2}\cdot\cancel{\sqrt{9}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \measuredangle(p,\pi)=\frac{\pi}{4}.$$

3. Одредити једначину криве другог реда чије су осе праве $p: 2x+y=0$ и $q: -x+2y=0$, једна од жижа је тачка $F(-1,2)$ и садржи тачку $B(2,1)$.



Праве p и q се секу у тачки $C(x_0,y_0)$, која представља центар криве.

$$C\in p \Rightarrow 2x_0+y_0=0 \;/\cdot(-2)$$
$$C\in q \Rightarrow -x_0+2y_0=0$$
$$2x_0+y_0=0$$
$$-5x_0=0$$

$x_0=0$ $y_0=0$ $\rightarrow$ $C(0,0)$ је центар криве

Жижа $F(-1,2)$ припада правој p, јер је $2\cdot(-1)+2=0$, што значи да је згодно одабрати нови координатни систем $Cx'y'$ коме је центар криве координатни почетак и x'-оса је права p.

Вектор правца праве p добијамо из $2x+y=0$, тј. $2x=-y$, тј. $\frac{x}{-1}=\frac{y}{2}$, па је он $\vec{u_p}=(-1,2)$. Пошто желимо да и $Cx'y'$ буде ортонормиран репер, за вектор правца x'-осе узећемо нормиран вектор $\vec{u_p}$, тј. вектор $\vec{e_1}=\frac{\vec{u_p}}{\|\vec{u_p}\|}=\frac{(-1,2)}{\sqrt{(-1)^2+2^2}}=\frac{(-1,2)}{\sqrt{1+4}}=\frac{(-1,2)}{\sqrt{5}}=\left(-\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$. За y'-осу треба узети другу осу криве, тј. праву q. Њен вектор правца добијамо из $-x+2y=0$ тј. $x=2y$, тј. $\frac{x}{2}=\frac{y}{1}$, па је он $\vec{u_q}=(2,1)$. Слично као малопре, пошто желимо да $Cx'y'$ буде ортонормиран репер, за вектор правца y'-осе узећемо нормиран вектор $\vec{u_q}$, тј. $\vec{e_2}=\frac{\vec{u_q}}{\|\vec{u_q}\|}=\frac{(2,1)}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{(2,1)}{\sqrt{4+1}}=\frac{(2,1)}{\sqrt{5}}=\left(\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$. Приметимо да је $\langle\vec{e_1},\vec{e_2}\rangle=\left\langle\left(-\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right),\left(\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right\rangle=-\frac{2}{5}+\frac{2}{5}=0$, тј. $\vec{e_1}\perp\vec{e_2}$. Пошто је $C(0,0)$ исто што и координатни почетак координатног система Oxy, следи да је трансформација координата дата са

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}}\\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}.$$

Пошто је матрица M преласка из ортонормираног репера у ортонормирани репер ортогонална матрица, важи $M^{-1}=M^T$, па је формула инверзне трансформације $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}}\\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, тј.

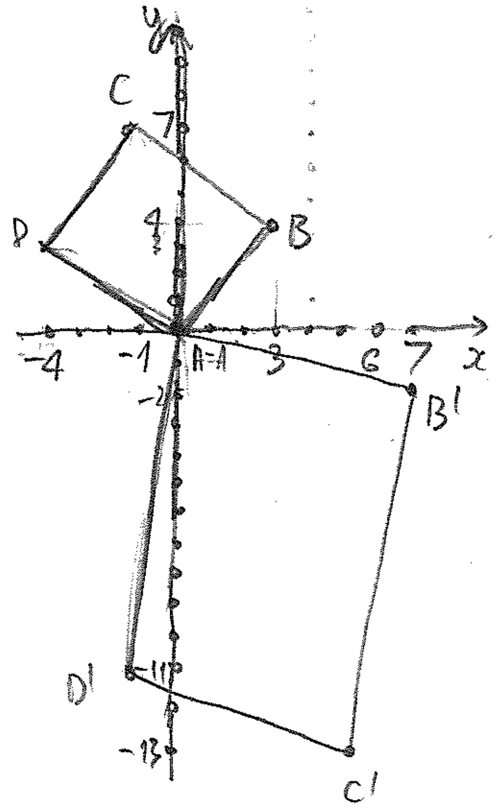
$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}}\\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}.$$

Следи да тачка $F(-1,2)$ у $Cx'y'$ систему има координате $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}}\\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{5}\\0\end{pmatrix}$, а тачка $B(2,1)$ има координате $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}}\\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\\sqrt{5}\end{pmatrix}$, тј. B припада y'-оси. То значи да тражена крива није хипербола (хипербола $\frac{x'^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2}=1$ нема тачака на y'-оси), па је крива елипса и важи $b=\sqrt{5}$. Пошто је жижа $F(\sqrt{5},0)$, следи да је $c=\sqrt{5}$, па је $a^2=b^2+c^2=5+5=10$, тј. $a=\sqrt{10}$. Према томе, једначина тражене елипсе је $\frac{x'^2}{10}+\frac{y'^2}{5}=1$.

Како је $x'=-\frac{1}{\sqrt{5}}x+\frac{2}{\sqrt{5}}y$ и $y'=\frac{2}{\sqrt{5}}x+\frac{1}{\sqrt{5}}y$, следи да је једначина криве

$$\frac{(-x+2y)^2}{5\cdot 10}+\frac{(2x+y)^2}{5\cdot 5}=1,\ \text{тј.}\ \frac{(-x+2y)^2}{50}+\frac{(2x+y)^2}{25}=1.$$

4. Одредити формуле бар једног афиног пресликавања које квадрат $ABCD$ с теменима $A(0,0)$, $B(3,4)$, $C(-1,7)$, $D(-4,3)$ слика на паралелограм $A'B'C'D'$ с теменима $A'(0,0)$, $B'(7,-2)$, $C'(6,-13)$ и $D'(-1,-11)$. Израчунати површину паралелограма користећи податак да је површина квадрата $ABCD$ једнака 25.



Најједноставније је узети афино пресликавање које пресликава A у A', B у B', C у C' и D у D'.

$$\mathcal{F}:\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}.$$ Тада је

$$A':\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}\overset{A}{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}}+\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$$

$$B':\begin{pmatrix}7\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}\overset{B}{\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}}+\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3a_{11}+4a_{12}+b_1\\3a_{21}+4a_{22}+b_2\end{pmatrix}$$

$$C':\begin{pmatrix}6\\-13\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}\overset{C}{\begin{pmatrix}-1\\7\end{pmatrix}}+\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-a_{11}+7a_{12}+b_1\\-a_{21}+7a_{22}+b_2\end{pmatrix}$$

$$D':\begin{pmatrix}-1\\-11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}\overset{D}{\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}}+\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4a_{11}+3a_{12}+b_1\\-4a_{21}+3a_{22}+b_2\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
b_1&=0\\
b_2&=0\\
3a_{11}+4a_{12}+b_1&=7\\
3a_{21}+4a_{22}+b_2&=-2\\
-a_{11}+7a_{12}+b_1&=6\\
-a_{21}+7a_{22}+b_2&=-13\\
-4a_{11}+3a_{12}+b_1&=-1\\
-4a_{21}+3a_{22}+b_2&=-11
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3a_{11}+4a_{12}&=7\\
-a_{11}+7a_{12}&=6\ /\cdot 3\ /\cdot(-4)\\
-4a_{11}+3a_{12}&=-1\\
\hline
-a_{11}+7a_{12}&=6\\
25a_{12}&=25\\
-25a_{12}&=-25\\
\hline
a_{12}&=1\\
-a_{11}+7&=6\\
a_{11}&=1
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
3a_{21}+4a_{22}&=-2\\
-a_{21}+7a_{22}&=-13\ /\cdot 3\ /\cdot(-4)\\
-4a_{21}+3a_{22}&=-11\\
\hline
-a_{21}+7a_{22}&=-13\\
25a_{22}&=-41\\
-25a_{22}&=41\\
\hline
a_{22}&=-\frac{41}{25}\\
-a_{21}-7\cdot\frac{41}{25}&=-13_{\ 325}\\
a_{21}&=-\frac{287}{25}+\frac{13\cdot 25}{25}=\frac{38}{25}
\end{aligned}$$

Дакле, једно такво пресликавање је

$$\mathcal{F}:\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}1&1\\\frac{38}{25}&-\frac{41}{25}\end{pmatrix}}_{M}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}.$$

Површина паралелограма $A'B'C'D'$ је $|\det M|\cdot 25=$

$$=\left|\begin{vmatrix}1&1\\\frac{38}{25}&-\frac{41}{25}\end{vmatrix}\right|\cdot 25=$$

$$=\left|-\frac{41}{25}-\frac{38}{25}\right|\cdot 25=$$

$$=\left|-\frac{79}{\cancel{25}}\right|\cdot\cancel{25}=79.$$

5. На сфери полупречника 1 израчунати површину сферног троугла чије су странице $a=b=c=\frac{\pi}{4}$.

Косинусна теорема: $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$

$$\cos\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4}\cos\alpha$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\cancel{\sqrt{2}}}{2}\cdot\frac{\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{2}} + \frac{\cancel{\sqrt{2}}}{2}\cdot\frac{\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{2}}\cdot\cos\alpha$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\alpha \,/\cdot 2$$

$$\sqrt{2} = 1 + \cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \sqrt{2} - 1$$

$$\alpha = \arccos(\sqrt{2}-1)$$

Наспрам једнаких страница су једнаки углови, па је $\beta = \gamma = \alpha = \arccos(\sqrt{2}-1)$, а површина троугла је

$$P = \alpha + \beta + \gamma - \pi = 3\arccos(\sqrt{2}-1) - \pi.$$