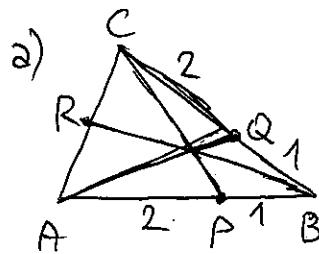


Решења задатака са писменог испита из Геометрије 1 у јулском испитном року

1. Нека је $\triangle ABC$ троугао и тачке P и Q такве да је $\vec{AP} = 2\vec{PB}$ и $2\vec{BQ} = \vec{QC}$.

а) Ако је R тачка преве AC таква да се AQ, BR, CP секу у једној тачки, одредити однос $\vec{AC} : \vec{AR}$.

б) Одредити координате тачке Q у реперу Ae уколико је $e = (\vec{e}_1 = \vec{AP}, \vec{e}_2 = \vec{AC})$.



На основу Чевине теореме важи

$$\frac{\vec{AP}}{\vec{PB}} \cdot \frac{\vec{BQ}}{\vec{QC}} \cdot \frac{\vec{CR}}{\vec{RA}} = 1.$$

Како је $\vec{AP} = 2\vec{PB}$ и $2\vec{BQ} = \vec{QC}$, следи да је $\frac{\vec{AP}}{\vec{PB}} = 2$ и $\frac{\vec{BQ}}{\vec{QC}} = \frac{1}{2}$,

па је $2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\vec{CR}}{\vec{RA}} = 1$, тј. $\frac{\vec{CR}}{\vec{RA}} = 1$. Дакле, $\vec{CR} = \vec{RA}$, тј. $-\vec{RC} = -\vec{AR}$, односно $\vec{AR} = \vec{RC}$.

Како је $\vec{AC} = \vec{AR} + \vec{RC} = \vec{AR} + \vec{AR} = 2\vec{AR}$, следи да је $\vec{AC} : \vec{AR} = 2$.

(б) Потребно је изразити вектор \vec{AQ} преко вектора $\vec{e}_1 = \vec{AP}$ и $\vec{e}_2 = \vec{AC}$. Како је $2\vec{BQ} = \vec{QC}$, следи да је $2 \cdot (-\vec{QB}) = -\vec{CQ}$, тј. $\vec{CQ} = 2\vec{QB}$, па на основу задатка 1.4. са

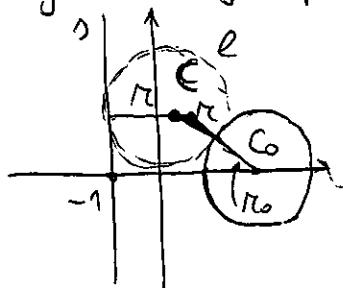
вежби следи да је $\vec{AQ} = \frac{1}{2+1}\vec{AC} + \frac{2}{2+1}\vec{AB} = \frac{1}{3}\vec{AC} + \frac{2}{3}\vec{AB}$. Како је $\vec{AP} = 2\vec{PB}$, следи да

је $\vec{PB} = \frac{1}{2}\vec{AP}$, па је $\vec{AB} = \vec{AP} + \vec{PB} = \vec{AP} + \frac{1}{2}\vec{AP} = \frac{3}{2}\vec{AP}$, односно $\vec{AP} = \frac{2}{3}\vec{AB}$. Према томе,

$\vec{AQ} = \frac{1}{3}\vec{AC} + \vec{AP} = \vec{AP} + \frac{1}{3}\vec{AC} = \vec{e}_1 + \frac{1}{3}\vec{e}_2$. То значи да у реперу Ae тачка Q има координате $Q(1, \frac{1}{3})$.

2. Дате су права $\Delta: x = -1$ и круг $k: (x-2)^2 + y^2 = 1$. Одредити геометријско место тачака које спољашњом страном додирују круг k и прву Δ .

Која крива је тражено геометријско место?



$C_0(2,0)$ - центар круга k

$r_0 = 1$ - полупречник круга k

$\ell(C_1, r)$ - један од кругова који спољашњом страном додирују круг k и прву Δ

$$\Rightarrow d(C_1, C_0) = r + r_0 \text{ и } d(C_1, \Delta) = r, \quad r > 0$$

$$\Delta: x = -1$$

$$\Delta: x + 1 = 0$$

Ако је $C(x,y)$, онда је $r+1 = d(C, C_0) = \sqrt{(x-2)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$ и $r = \frac{|x+1|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = |x+1|$.

Добијамо два случаја:



$$1^{\circ} x+1 > 0, \text{ tj. } x > -1$$

Тада је $r = x+1$, па је $r+1 = x+2$. Како је $r+1 = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$, следи да је $x+2 = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$. Квадрирањем добијамо

$$(x+2)^2 = (x-2)^2 + y^2, \text{ tj. } x^2 + 4x + 4 = x^2 - 4x + 4 + y^2. \text{ Дакле, } y^2 = 8x,$$

што значи да је $x \geq 0$ и да тачка (x, y) припада параболи $y^2 = 8x$.

$$2^{\circ} x+1 < 0, \text{ tj. } x < -1 \quad (\text{не може } x+1=0 \text{ јер је онда } r=|x+1|=|0|=0)$$

Тада је $r = -(x+1) = -x-1$, tj. $r+1 = -x$. Како је $r+1 = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$, следи да

$$\text{је } -x = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}. \text{ Квадрирањем добијамо } x^2 = (x-2)^2 + y^2 = x^2 - 4x + 4 + y^2, \text{ tj. }$$

$y^2 = 4x - 4 = 4(x-1)$. Међутим, тада је $x-1 \geq 0$, tj. $x \geq 1$, што је у супротности с условом $x < -1$. Дакле, у овом случају нема тачака C које задовољавају услове задатка.

Према томе, тражено геометријско место је парабола $y^2 = 8x$.

$$3. \text{ Дате су две праве } a: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-2} \text{ и } b: \frac{x+1}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-1} \text{ као}$$

и тачка $C(1, -1, 0)$. Одредити праву c која садржи тачку C , сече праву b и чији вектор правца је ортогоналан на вектор правца праве a .

Права c има једначину $\frac{x-1}{u} = \frac{y-(-1)}{v} = \frac{z-0}{w}$, tj. $\frac{x-1}{u} = \frac{y+1}{v} = \frac{z}{w}$, за неки вектор $(u, v, w) \neq (0, 0, 0)$. Услов да права c сече праву b , одређену тачком $B(-1, 1, 1)$ и вектором $(0, 1, -1)$, јесте да вектори (u, v, w) и $(0, 1, -1)$

нису истог правца (tj. нису колинеарни, односно $(u, v, w) \neq \lambda \cdot (0, 1, -1)$ за свако $\lambda \in \mathbb{R}$) и да је $[\vec{BC}, (0, 1, -1), (u, v, w)] = 0$. Како је $\vec{BC} = (1-(-1), -1-1, 0-1) = (2, -2, -1)$, добијамо услов

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ u & v & w \end{vmatrix} = 0.$$

$$\text{Бијамо } u \cdot \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - v \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + w \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \text{ tj. } u \cdot (2+1) - v \cdot (-2-0) + w \cdot (2-0) = 0.$$

Дакле, $3u + 2v + 2w = 0$. Такође, вектор правца прве c јесте ортогоналан на вектор правца прве a , па је $\langle (u, v, w), (1, 1, -2) \rangle = 0$, tj. $u + v - 2w = 0$. Дакле,

$$u + v - 2w = 0 \quad /-1$$

$$3u + 2v + 2w = 0 \quad \leftarrow$$

$$\underline{u + v - 2w = 0}$$

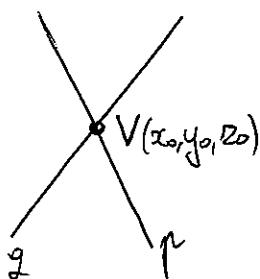
$$\underline{4u + 3v = 0}$$

$$\underline{u = \alpha \in \mathbb{R}, 3v = -4u \Rightarrow v = -\frac{4}{3}\alpha}$$

$$\underline{\alpha - \frac{4}{3}\alpha - 2w = 0 \Rightarrow 2w = \frac{3}{3}\alpha - \frac{4}{3}\alpha = -\frac{1}{3}\alpha \Rightarrow w = -\frac{1}{6}\alpha}$$

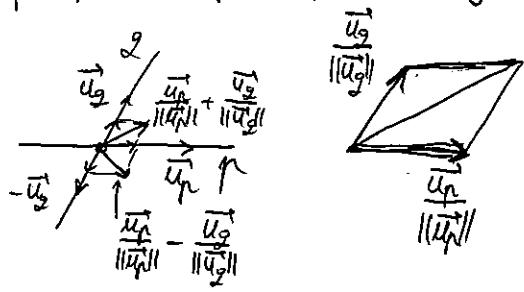
Према томе, $u=\alpha$, $v=-\frac{4}{3}\alpha$, $w=-\frac{1}{6}\alpha$, тј. $(u, v, w)=(\alpha, -\frac{4}{3}\alpha, -\frac{1}{6}\alpha)$. Када је $(u, v, w) \neq (0, 0, 0)$, не сме се узети $\alpha=0$. Такође, $(u, v, w)=\frac{\alpha}{6} \cdot (6, -8, -1)$, па следи да је $(u, v, w) \neq \lambda \cdot (0, 1, -1)$ за свако $\lambda \in \mathbb{R}$. Према томе, можемо узети вектор $(6, -8, -1)$ за вектор правца прве r , па је њена једначина $r: \frac{x-1}{6} = \frac{y+1}{-8} = \frac{z-1}{-1}$.

4. Нека су дате праве $p: \frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-3}{2}$ и $q: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{2}$. Одредити једначине свих кружних конуса који садрже праве p и q , а чија оса припада равни одређеној правама p и q .



Две различите изводнице конуса секу се у врху конуса. Ако је $V(x_0, y_0, z_0)$ врх конуса, онда важи $\frac{x_0-2}{1} = \frac{y_0-3}{2} = \frac{z_0-3}{2} = t_0$ и $\frac{x_0-1}{1} = \frac{y_0-1}{-2} = \frac{z_0-1}{2} = s_0$, па је $x_0 = t_0 + 2$, $y_0 = 2t_0 + 3$, $z_0 = 2t_0 + 3$ и $x_0 = s_0 + 1$, $y_0 = -s_0 + 1$, $z_0 = 2s_0 + 1$. Када је $y_0 = 2t_0 + 3 = 2s_0 + 1 = z_0$, следи да је $-s_0 + 1 = y_0 = z_0 = 2s_0 + 1$, па је $3s_0 = 0$, тј. $s_0 = 0$. Према томе, $x_0 = s_0 + 1 = 1$, $y_0 = -s_0 + 1 = 1$ и $z_0 = 2s_0 + 1 = 1$. Заменом у једначине $x_0 = t_0 + 2$, $y_0 = 2t_0 + 3$, $z_0 = 2t_0 + 3$ добијамо $t_0 + 2 = 1$, $2t_0 + 3 = 1$, $2t_0 + 3 = 1$, па је $t_0 = -1$, $2t_0 = -2$, $2t_0 = -2$, тј. $t_0 = -1$. Дакле, праве p и q се секу у тачки $V(1, 1, 1)$.

Пошто се тражи једначина кружног конуса, искористимо особину кружног конуса да све његове изводнице граде исти угао са његовом осом. Дакле, оса конуса је права која садржи тачку $V(1, 1, 1)$, припада равни одређеној правима p и q и гради једнаке углове са тима правима, па следи да је оса конуса симетрала угла одређеног са p и q . Ако са \vec{u}_p означимо вектор правца прве p , а са \vec{u}_q вектор правца прве q , онда на основу задатка са вежби имамо да су $\frac{\vec{u}_p}{\|\vec{u}_p\|} + \frac{\vec{u}_q}{\|\vec{u}_q\|}$ и $\frac{\vec{u}_p}{\|\vec{u}_p\|} - \frac{\vec{u}_q}{\|\vec{u}_q\|}$ вектори правца симетрала угла који граде праве p и q .



$\frac{\vec{u}_p}{\|\vec{u}_p\|}$ и $\frac{\vec{u}_q}{\|\vec{u}_q\|}$ су једнаких дужине (дужине су 1), па разапињу ромб, а њихов збир је дијагонала тог ромба која је симетрала угла одређеног тим векторима.

Дакле, $\vec{u}_p = (1, 2, 2)$ и $\vec{u}_q = (1, -2, 2)$, па је $\|\vec{u}_p\|^2 = 1^2 + 2^2 + 2^2 = 1 + 4 + 4 = 9$ и $\|\vec{u}_q\|^2 = 1^2 + (-2)^2 + 2^2 = 1 + 4 + 4 = 9$. (Следи да је $\|\vec{u}_p\| = \|\vec{u}_q\| = \sqrt{9} = 3$, па је $\frac{\vec{u}_p}{\|\vec{u}_p\|} = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ и $\frac{\vec{u}_q}{\|\vec{u}_q\|} = (\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$.)

Према томе, оса конуса има вектор правца $\frac{\vec{u}_p}{\|\vec{u}_p\|} + \frac{\vec{u}_q}{\|\vec{u}_q\|} = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}) + (\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}) = (\frac{2}{3}, 0, \frac{4}{3})$ или $\frac{\vec{u}_p}{\|\vec{u}_p\|} - \frac{\vec{u}_q}{\|\vec{u}_q\|} = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}) - (\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}) = (0, \frac{4}{3}, 0)$. То значи да имамо два конуса.



Оса првог конуса је права $\sigma_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-1}{\frac{4}{3}}$, тј. права

$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-1}{2}$. Ако је $i_1: \frac{x-1}{a_1} = \frac{y-1}{b_1} = \frac{z-1}{c_1}$ произвольна изводница тог конуса (свака изводница садржи врх конуса $V(1,1,1)$), онда је $\chi(i_1, \sigma_1) = \chi(\rho_1, \sigma_1)$. Када је $\cos \chi(\rho_1, \sigma_1) = \frac{|\langle \vec{u}_\rho, (1,0,2) \rangle|}{\|\vec{u}_\rho\| \cdot \|(1,0,2)\|} = \frac{|\langle (1,2,2), (1,0,2) \rangle|}{3 \cdot \sqrt{1^2 + 0^2 + 2^2}} =$

$$= \frac{|1+0+4|}{3 \cdot \sqrt{1+4}} = \frac{|5|}{3\sqrt{5}} = \frac{5}{3\sqrt{5}}, \text{ следи да је } \cos \chi(i_1, \sigma_1) = \frac{5}{3\sqrt{5}}.$$

$$\cos \chi(i_1, \sigma_1) = \frac{|\langle (a_1, b_1, c_1), (1,0,2) \rangle|}{\|(a_1, b_1, c_1)\| \cdot \|(1,0,2)\|} = \frac{|a_1+0+2c_1|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2} \cdot \sqrt{5}} = \frac{|a_1+2c_1|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2} \cdot \sqrt{5}}$$

$$\frac{x-1}{a_1} = \frac{y-1}{b_1} = \frac{z-1}{c_1} = t_1 \Rightarrow a_1 = \frac{x-1}{t_1}, \quad b_1 = \frac{y-1}{t_1}, \quad c_1 = \frac{z-1}{t_1}$$

$$\frac{5}{3\sqrt{5}} = \frac{\left| \frac{x-1}{t_1} + 2 \cdot \frac{z-1}{t_1} \right|}{\sqrt{\left(\frac{x-1}{t_1}\right)^2 + \left(\frac{y-1}{t_1}\right)^2 + \left(\frac{z-1}{t_1}\right)^2} \cdot \sqrt{5}}$$

$$5\sqrt{\frac{(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2}{t_1^2}} = 3 \cdot \frac{|x-1+2z-2|}{|t_1|} / ^2$$

$$25 \cdot \frac{(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2}{t_1^2} = 9 \cdot \frac{(x+2z-3)^2}{t_1^2}$$

$$25 \cdot [(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2] = 9(x+2z-3)^2$$

Једначина једног од тражених кружних конуса је $25 \cdot [(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2] = 9(x+2z-3)^2$

Оса другог конуса је права $\sigma_2: \frac{x-1}{0} = \frac{y-1}{\frac{4}{3}} = \frac{z-1}{0}$, тј. права $\frac{x-1}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{0}$

Ако је $i_2: \frac{x-1}{a_2} = \frac{y-1}{b_2} = \frac{z-1}{c_2}$ произвольна изводница тог конуса, онда је $\chi(i_2, \sigma_2) = \chi(\rho_1, \sigma_2)$.

$$\cos \chi(\rho_1, \sigma_2) = \frac{|\langle \vec{u}_\rho, (0,1,0) \rangle|}{\|\vec{u}_\rho\| \cdot \|(0,1,0)\|} = \frac{|\langle (1,2,2), (0,1,0) \rangle|}{3 \cdot 1} = \frac{|0+2+0|}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\cos \chi(i_2, \sigma_2) = \frac{|\langle (a_2, b_2, c_2), (0,1,0) \rangle|}{\|(a_2, b_2, c_2)\| \cdot \|(0,1,0)\|} = \frac{|0+b_2+0|}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2} \cdot 1} = \frac{|b_2|}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$

$$\frac{x-1}{a_2} = \frac{y-1}{b_2} = \frac{z-1}{c_2} = t_2 \Rightarrow a_2 = \frac{x-1}{t_2}, \quad b_2 = \frac{y-1}{t_2}, \quad c_2 = \frac{z-1}{t_2}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{\left| \frac{y-1}{t_2} \right|}{\sqrt{\left(\frac{x-1}{t_2}\right)^2 + \left(\frac{y-1}{t_2}\right)^2 + \left(\frac{z-1}{t_2}\right)^2}} = \frac{\frac{|y-1|}{|t_2|}}{\sqrt{\frac{(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2}{t_2^2}}}$$

$$2 \sqrt{\frac{(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2}{t_2^2}} = 3 \frac{|y-1|}{|t_2|} / ^2$$

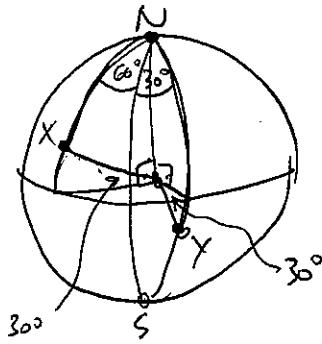
$$4 \frac{(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2}{t_2^2} = 9 \frac{(y-1)^2}{t_2^2}$$

$$4 \cdot [(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2] = 9 \cdot (y-1)^2$$

Једначина другог објекта који сада је $4 \cdot [(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2] = 9 \cdot (y-1)^2$.

5. На сфере полупречника 2 одредити растојање између тачака $X(30^\circ N, 60^\circ W)$ и $Y(30^\circ S, 30^\circ E)$.

Извршимо прво хомотетију с центром у центру сфере и коефицијентом $\frac{1}{2}$, како бисмо добили сферу полупречника 1.



На јединичној сferи уочимо сферни троугао чија су темена северни пол N и тачке X и Y . Тада је $\widehat{NX} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$, $\widehat{NY} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$ и $\widehat{XNY} = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$. На основу косинусне теореме је $\cos \widehat{XY} = \cos \widehat{NX} \cos \widehat{NY} + \sin \widehat{NX} \sin \widehat{NY} \cos \widehat{XNY}$, тј. $\cos \widehat{XY} = \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{2\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{2\pi}{3} \cos \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0 = -\frac{1}{4}$.

Дакле, на јединичној сferи је $\widehat{XY} = \arccos\left(-\frac{1}{4}\right)$. Ако бисмо се вратили на сферу полупречника 2, извршимо сада хомотетију с центром у центру сфере и коефицијентом 2. Тада се све дужине множе са 2, па је на сфери полупречника 2 $\widehat{XY} = 2 \arccos\left(-\frac{1}{4}\right)$.