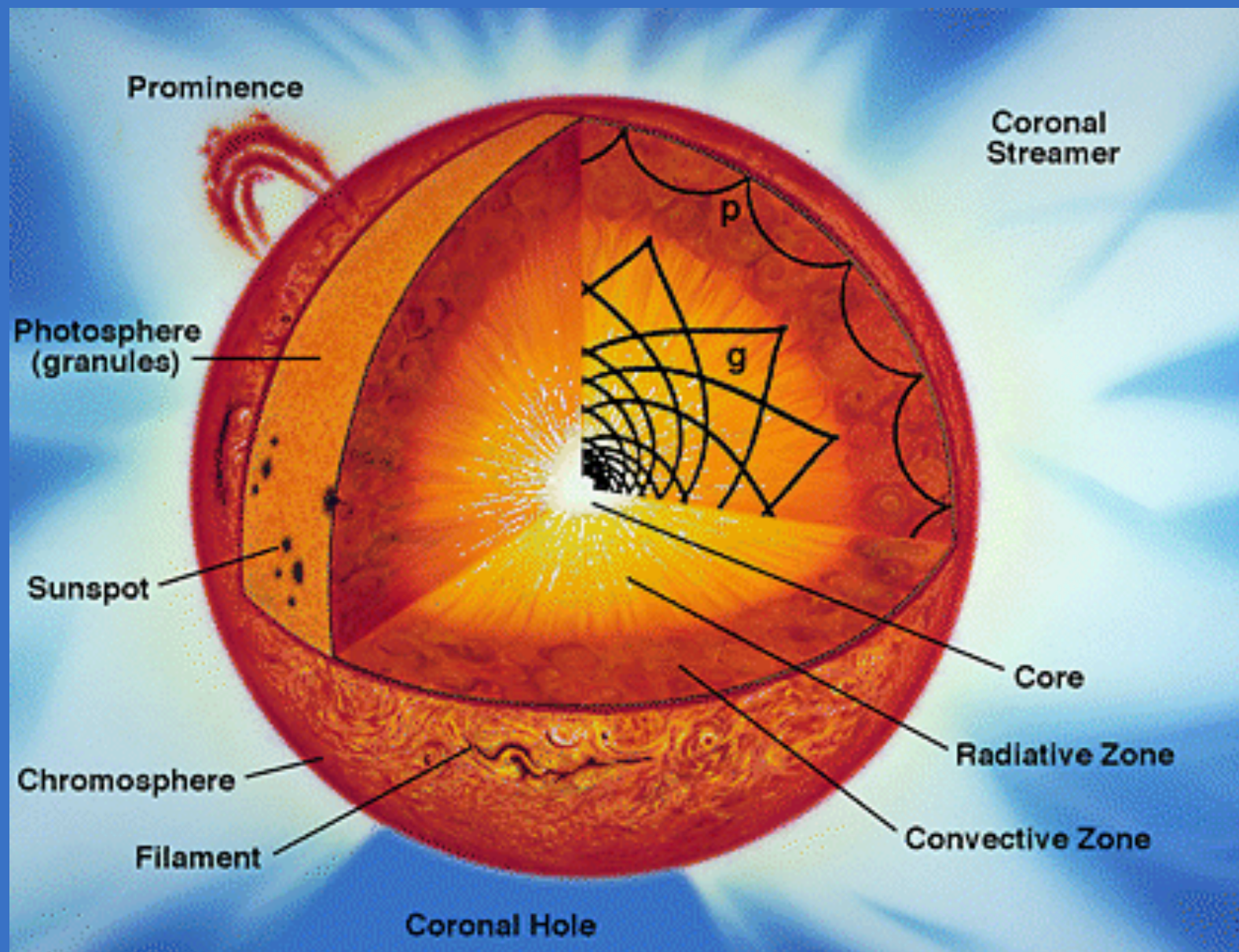
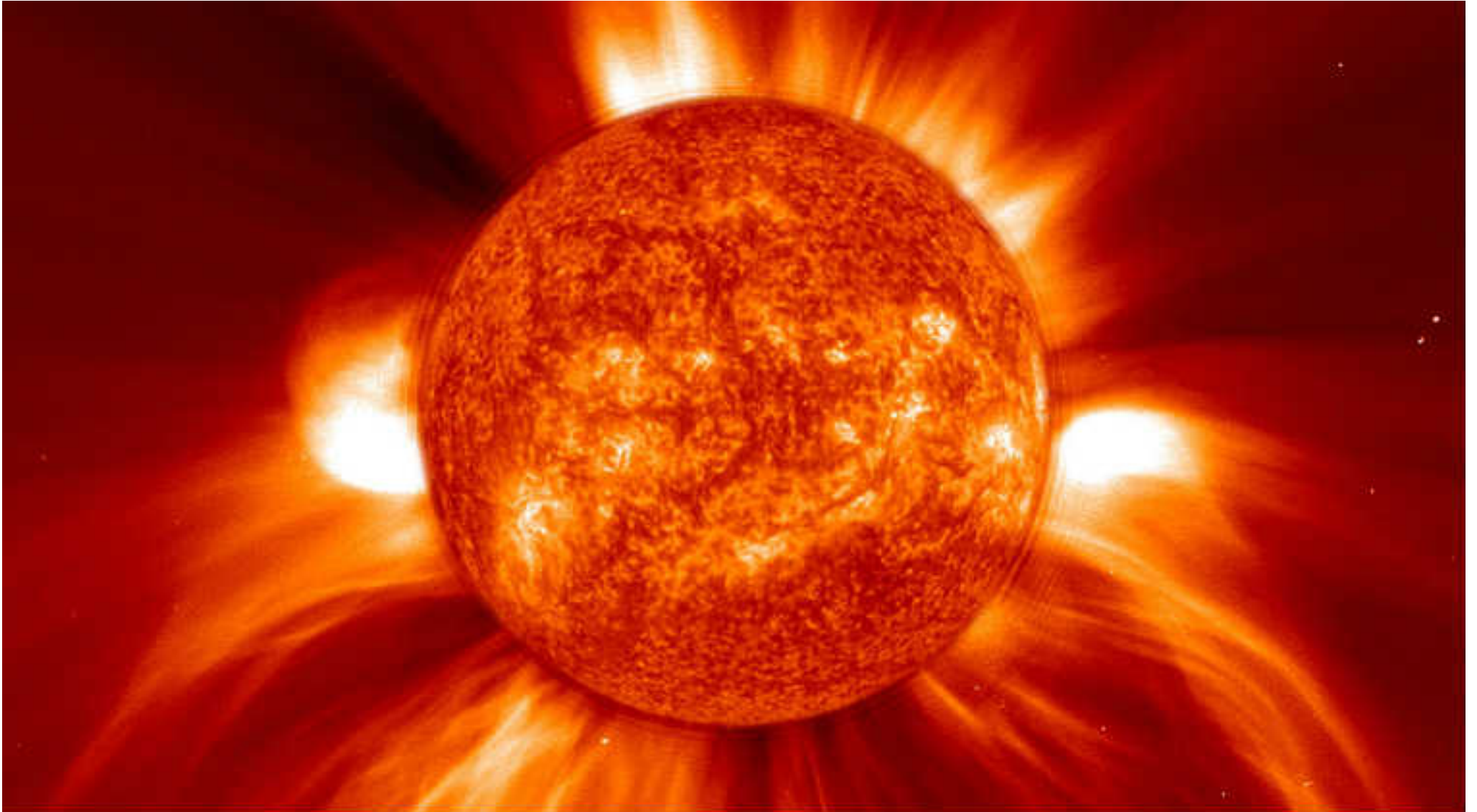




Unutrašnja struktura zvezda

Ogromne lopte jonizovanog gasa



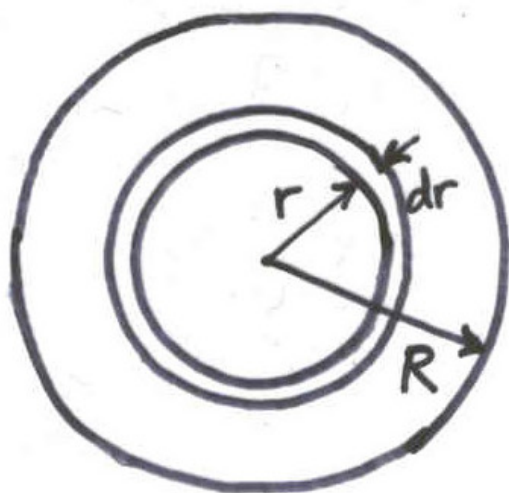
Unutrašnja struktura zvezda

- nije dostupna direktnim posmatranjima
- teorijsko modeliranje zvezdanih unutrašnjosti
A.S.Eddington: "The Internal Constitution of Stars" (1926)
(1882-1944)
- provera modela u drugoj polovini XX veka
 - merenja neutrinjskog fluxa
 - registrovanje oscilacija na Suncu i zvezdama

MODELI ZVEZDANE UNUTRAŠNJOSTI

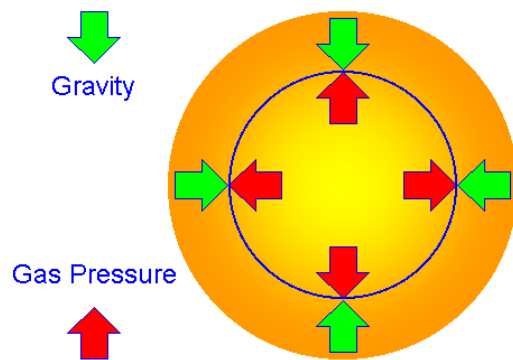
- treba da zadovolje osnovne fizičke zakone i posmatranja
- Aproksimacije:
 - sferno-simetrična zvezda
 - stacionarna ←
 - stabilna ←
 - nerotirajuća
 - bez magnetnog polja

1. Jednačina mase (raspodela mase)



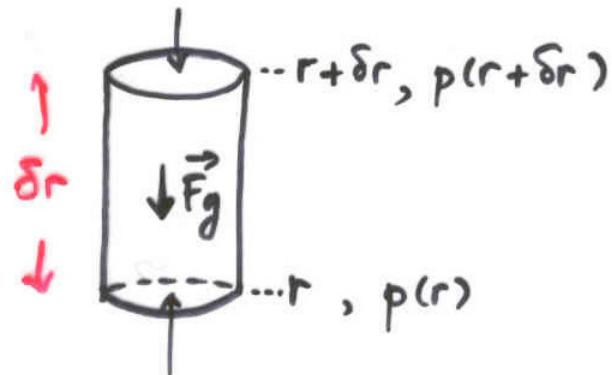
$$M(r) = \int_0^r \rho(r) dV(r) = \int_0^r \rho(r) 4\pi r^2 dr$$

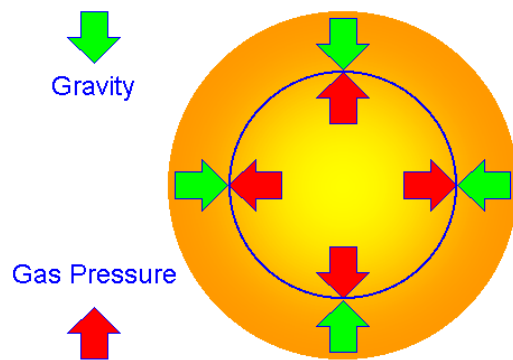
$$\frac{dM(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r)$$



2. Jednačina pritiska (uslov hidrostatičke ravnoteže)

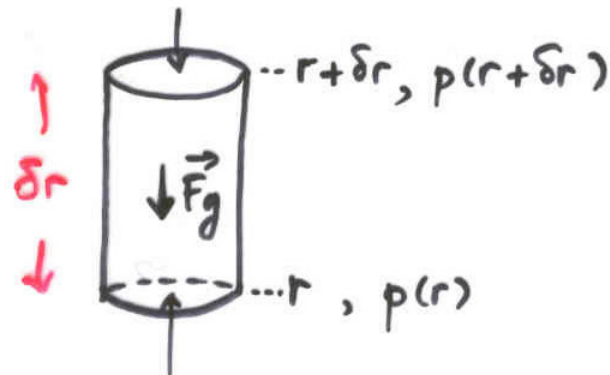
STACIONARNOST $\Rightarrow \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0$
(uslov mehaničke ravnoteže)





2. Jednačina pritiska (uslov hidrostatičke ravnoteže)

STACIONARNOST $\Rightarrow \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0$
(uslov mehaničke ravnoteže)



$$[p(r+\delta r) - p(r)] \delta S + g(r) d\mu = 0$$

$$d\mu = \rho(r) \delta S \delta r$$

$$p(r+\delta r) = p(r) + \left(\frac{dp}{dr}\right) \delta r$$

$\Downarrow$

$$\frac{dp(r)}{dr} = -g(r) \rho(r)$$

$$g(r) = G \frac{m(r)}{r^2}$$

$$\boxed{\frac{dp(r)}{dr} = -G \frac{m(r) \rho(r)}{r^2}}$$

$$\underline{p(r) = p_g(r) + p_{\text{ext}}(r)}$$

3. Jednačina stanja gasa

- PRITISAK IDEALNOG GASA

$$p_g(r) = n k T = \frac{\rho}{m} k T = \frac{\rho}{\mu m_H} k T$$

$k = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$ Boltzmann-ova konstanta
 $\mu = \text{srednja molekulska masa } (= \frac{\rho}{n \cdot m_H})$

- PRITISAK DEGENERISANOG GASA

za $\rho > \rho_{cr} = 2.4 \times 10^{-8} \mu T^{3/2}$

$$p_{deg.g} = k' \left(\frac{\rho}{\mu_e} \right)^{5/3} \quad (\text{za ne-relativističke } e^-)$$

$$p_{deg.g} = k'' \left(\frac{\rho}{\mu_e} \right)^{4/3} \quad (\text{za relativističke } e^-)$$

$$p_{deg.g.} \neq f(T) \quad !$$

- PRITISAK ZRAČENJA

$$p_{zr} = \frac{1}{3} a T^4 = \frac{4\sigma}{3c} T^4$$

4. Jednačina luminoznosti (uslov energetske ravnoteže)

$$r \leq R$$

Količina energije koja u jedinici vremena napusti sferu radijusa $r \leq R$ jednaka je količini energije koja se u jedinici vremena unutar te sfere proizvede.

$L(r)$ - luminoznost na rastojanju r od centra =
= ukupna količina energije koja u jed. t napusti sferu radij. r

$j(r)$ - količina energije koju u jed. t proizvede jedinica mase
(1g) zvezdane materije unutar sfere radijusa r

$$L(r) = \int_0^{M(r)} j(r) dM(r) = \int_0^{V(r)} j(r) \rho(r) dV(r) = \int_0^r j(r) \rho(r) 4\pi r^2 dr$$

$\Rightarrow$

$$\frac{dL(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) j(r)$$

5. Raspodela temperature (prenos energije)

2 glavna mehanizma prenosa energije u
zvezdi:

- Zračenje

- Konvekcija

5a. Prenos energije zračenjem

$$\frac{dp_{\text{zr}}(r)}{dr} = -g_{\text{zr}}(r)g(r)$$

$$g_{\text{zr}} = \frac{\kappa F(r)}{c} = \frac{\kappa L(r)}{c 4\pi r^2}$$

g_{zr} = ubrzanje gasa usled
apsorpcije zračenja =
impulsu koji fotoni
predaju svakom gramu gasa u 1s.

$$\frac{dp_{\text{zr}}}{dr} = \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{3} a T^4 \right) = \underbrace{\frac{4aT^3}{3} \frac{dT}{dr}}_{\Downarrow} = - \frac{\kappa g}{c} \frac{L}{4\pi r^2}$$

$$\boxed{\frac{dT(r)}{dr} = - \frac{3\kappa}{4ac} \frac{g(r)}{T^3(r)} \frac{L(r)}{4\pi r^2}}$$

5b. Prenos energije konvekcijom

$$2 \text{ --- } \text{---} \text{---} T_2 < T_1, p_2 < p_1, \rho_2 < \rho_1 \quad \boxed{p_2^* = p_2}$$

$$T_2^*, p_2^*, \rho_2^*$$

$$1 \text{ --- } \text{---} \text{---} T_1, p_1, \rho_1 \quad T_1^* = T_1, p_1^* = p_1, \rho_1^* = \rho_1$$

$$T_1^*, p_1^*, \rho_1^*$$

pretpostavke:

- kretanje sporo (uslov H.R.)
- kretanje adijabatsko (nema razmene energije sa okolinom)

$$\boxed{p_2^* = p_2} \Rightarrow \rho_2^* T_2^* = \rho_2 T_2$$

(a) ako je $T_2^* < T_2 \Rightarrow \rho_2^* > \rho_2$
element tone - vraća se

(b) ako je $T_2^* > T_2 \Rightarrow \rho_2^* < \rho_2$ element isplivava

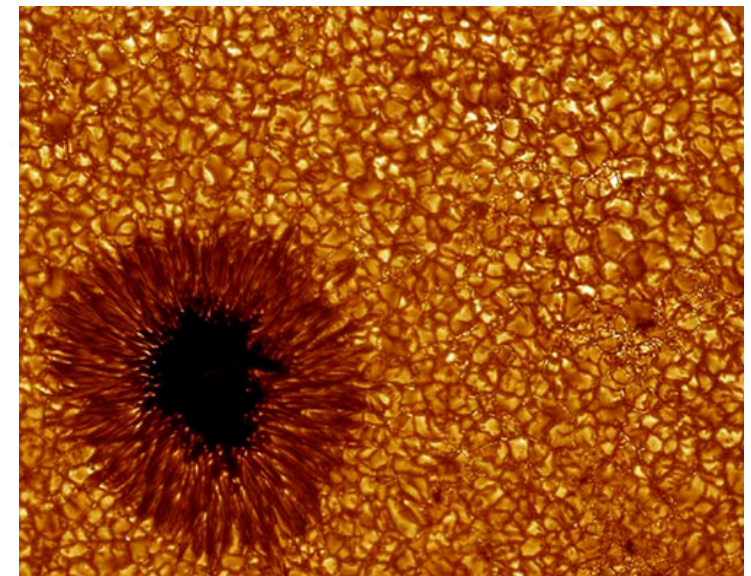
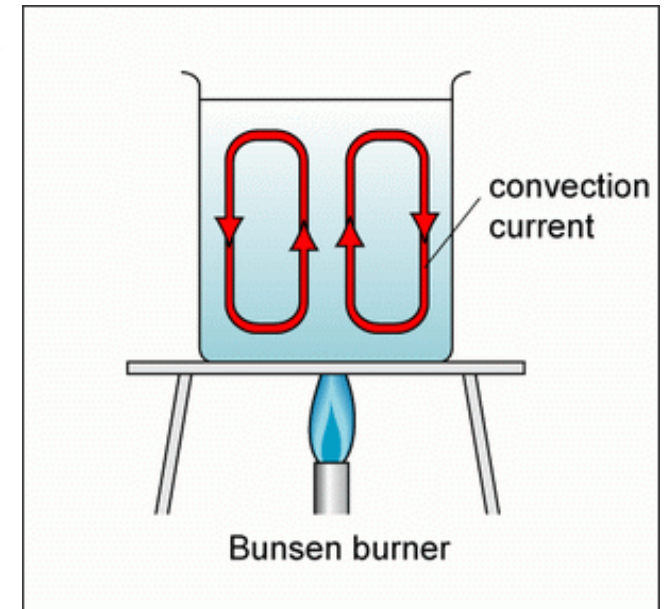
uslov za konvekciju: $|\text{grad } T|^* < |\text{grad } T|_{\text{okoline}}$

Adijabatski proces:

$$T = C \cdot p^{(\gamma-1)/\gamma} \quad \left(\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \text{const} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{dT}{dr} = \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{T}{p} \frac{dp}{dr}$$

$$\boxed{\frac{dT(r)}{dr} = \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{T(r)}{p(r)} \frac{dp(r)}{dr}}$$



FILM

Jednačine unutrašnje zvezdane strukture

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r)$$

$$\frac{dp(r)}{dr} = -G \frac{m(r)\rho(r)}{r^2}$$

$$\frac{dL(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) j(r)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dT(r)}{dr} = -\frac{3\kappa}{4ac} \frac{\rho(r)}{T^3(r)} \frac{L(r)}{4\pi r^2} \quad (\text{slojevi u radijativnoj ravnoteži}) \\ \frac{dT(r)}{dr} = \frac{\gamma-1}{\gamma} \cdot \frac{T(r)}{p(r)} \frac{dp(r)}{dr} \quad (\text{slojevi u konvektivnoj ravnoteži}) \end{array} \right.$$

$$p(r) = p_g(r) + p_{\text{er}}(r) = f(\rho, T)$$

+

algebarske jednačine za $\mu, j, \kappa = f(\rho, T, \text{hem. sastav})$

• Eliminacija $\rho(r)$; Nepoznate : $p(r)$, $T(r)$, $L(r)$, $m(r)$

Zadati : hemijski sastav i masa zvezde (M)

+

granični uslovi

- na površini : $p(R) = p_{\text{fot}}$, $T(R) = T_{\text{fot}}$

- u centru : $L(0) = 0$, $m(0) = 0$

Rešavanje sistema j- $\rightarrow$ $p(r), T(r), L(r), m(r)$

redukovani model

Izvori zvezdane energije

- Gravitaciono sažimanje
- Termonuklearne (TN) reakcije

Gravitaciono sažimanje

- GRAVITACIONA POTENCIJALNA ENERGIJA ZVEZDE MASE M I RADIJUSA R :

$$E_G = - \int_0^M \frac{Gm(r)}{r} dm(r) = - 4\pi G \int_0^R m(r) \rho(r) r dr$$

- UKUPNA ENERGIJA ZVEZDE:

$$E = E_G + E_T + E_{\text{zr}} < 0 \quad \text{ZA STABILNU KONFIGURACIJU GASA I ZRAČENJA}$$

- TERMALNA ENERGIJA ZVEZDE:

$$\begin{aligned} E_T &= \frac{3}{2} \int_0^M \frac{kT}{m} dm(r) = \frac{3}{2} \int_0^M p dm(r) = 6\pi \int_0^R p(r) r^2 dr \\ &= 6\pi \left[\cancel{p(r) \frac{r^3}{3}} \Big|_0^R - \frac{1}{3} \int_0^R r^3 dp(r) \right] = 2\pi G \int_0^R m(r) \rho(r) r dr = -\frac{1}{2} E_G \end{aligned}$$

$p(R) = 0$

- PRI SPOROM SAŽIMANJU ZVEZDE (ZADOVOLJEN USLOV H.R.):

$$\Delta E_G < 0 \Rightarrow \Delta E_T = -\frac{1}{2} \Delta E_G > 0$$

- U XIXVEKU KELVIN I HELMHOLTZ SMATRALI GRAV. SAŽIMANJE IZVOROM S. ENERGIJE

$$E_G = G \frac{M^2}{R} = 4 \cdot 10^{41} \text{ J}$$

$$t_0 = \frac{4 \cdot 10^{41} \text{ J}}{4 \cdot 10^{26} \text{ W}} = 10^{15} \text{ s} = 3 \cdot 10^7 \text{ godina} = t_{\text{K-H}}$$

- GRAVITACIONO SAŽIMANJE NE MOŽE DA OBEZBEDI DOVOLJNU KOLIČINU ENERGIJE ZA CEO ŽIVOT ZVEZDE.

Šta napaja Sunce i zvezde?

$3.85 \times 10^{26} \text{ W}$ (W=energija/sekund)

Snaga prosečne hidroelektrane: 180 miliona W...



... Sunce = 2×10^{18} puta =
2 milijarde milijardi puta više!

- Tela se zagrevaju kad se sažimaju (gravitaciono)
- Sunce sjaji jer se skuplja??
 - treba da se sažima 20 metara godišnje
 - Sunce bi živelo max 100 miliona godina
 - Fosili dinosaurusu stariji od 200 miliona godina!
 - Stene na Zemlji i do 4,5 milijarde godina!



Teorija sažimanja ne valja!!

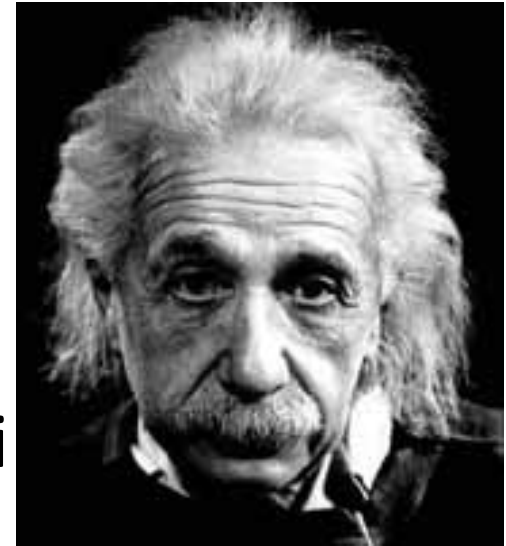
Ajnštajn u pomoć!

- **Masa je energija! $E = mc^2$**
- Masa se može pretvoriti u energiju i obrnuto!
- Malo mase daje ogromnu energiju!
- 1 gram materije pretvorimo u energiju i koliko računa za struju ne moramo da platimo? Ako prosečno mesečno trošimo struje 260 kWh.

$$E = 0.001kg \times (3 \times 10^8 m/s)^2 = 9 \times 10^{13} J$$

$$E_{struja} = 260kWh = 260 \times 10^3 \frac{J}{s} \times 60 \times 60s \approx 9 \times 10^8 J$$

$$N = \frac{E}{E_{struja}} = \frac{9 \times 10^{13} J}{9 \times 10^8 J} = 10^5 \quad \text{Oko 8000 god.}$$



Termonuklearne reakcije (osnovni izvor zvezdane energije)

- RAZVOJ NUKLEARNE FIZIKE → FUZIJA LAKIH ATOMSKIH JEZGARA U TEŽA DOVODI DO OSLOBAĐANJA NUKLEARNE ENERGIJE PREMA AJNŠTAJNOVOJ RELACIJI:

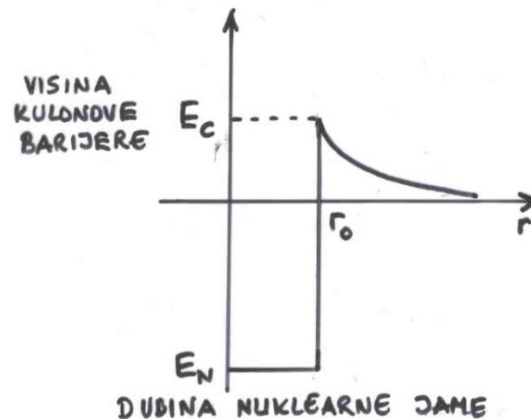
$$E = \Delta m \cdot c^2 \quad (\text{A. EINSTEIN, 1905})$$

- TEORIJSKU OSNOVU TN FUZIJE $H \rightarrow He$ DALI SU:
C. VON WEIZSÄCKER (1937) i H. BETHE (1938, 1939)

- ENERGIJA POTREBNA DA SE SAVLADA ODBOJNA KULONOVA SILA IZMEĐU 2 JEZGRA NAJELEKTRISANJA Z_1e i Z_2e :

$$E > \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r_0}$$

Z_1, Z_2 - REDNI BROJ ELEMENTA U PERIODNOM SISTEMU (BROJ PROTONA U JEZGRU)
 e - NAJELEKTRISANJE ELEKTRONA
 r_0 - RADIJUS JEZGRA



POTENCIJALNA ENERGIJA DVA JEZGRA KAO F-JA NJIHOVOG RASTOJANJA

$r \leq r_0 \approx 10^{-13} \text{ cm}$ DOMINIRA PRIVLAČNA NUKLEARNA SILA

$r > r_0$ DOMINIRA KULONOVA SILA ODBIJANJA

NEOPHODNA JE VELIKA E_{KN} JEZGARA, TJ. VISOKA TEMPERATURA!

Fuzija vodonika u helijum

4 jezgra vodonika stvaraju 1 jezgro helijuma

DEFEKT MASE $\Delta m = 4 m_{H^1} - m_{He^4}$

$$m_{He^4} = 4.00387 \text{ a.j.m.}$$

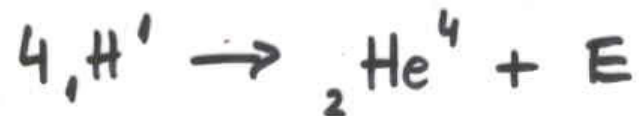
$$1 \text{ a.j.m.} = 1.66 \cdot 10^{-24} \text{ g}$$

$$m_{H^1} = 1.008145 \text{ a.j.m.}$$

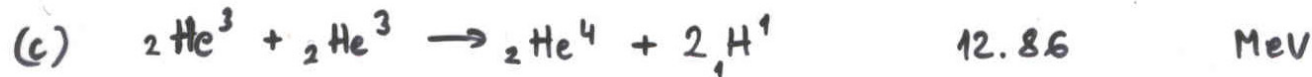
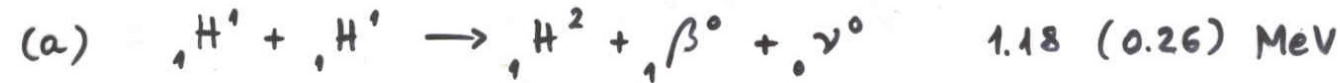
$$\Delta m = 0.02871 \text{ a.j.m.}$$

$$1 \text{ a.j.m.} = 931 \text{ MeV}$$

$$E = \Delta m c^2 = 26.72 \text{ MeV}$$

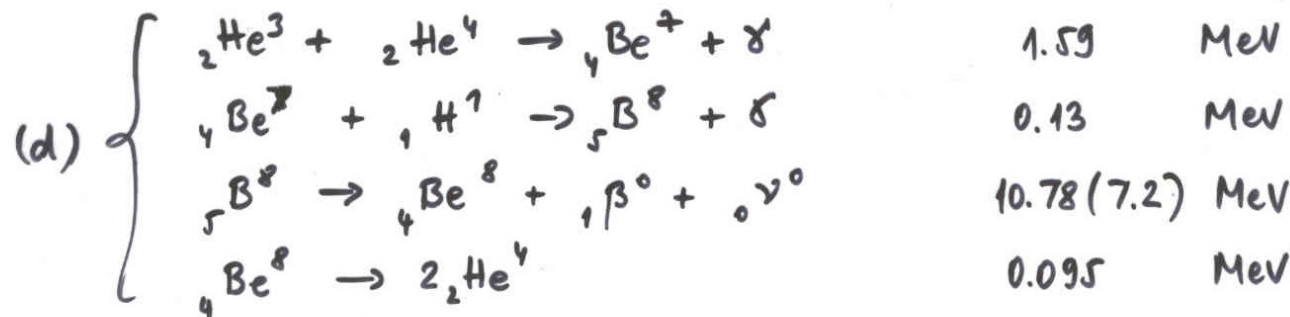


Proton-proton (p-p) lanac



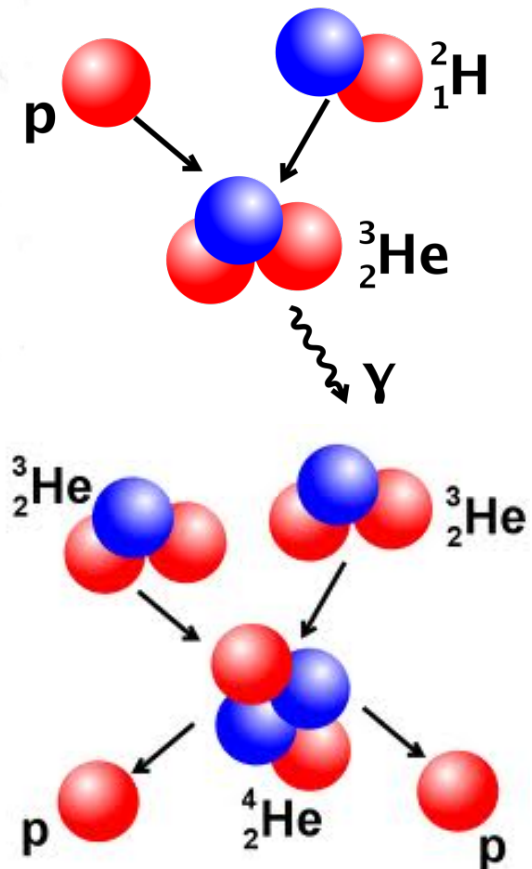
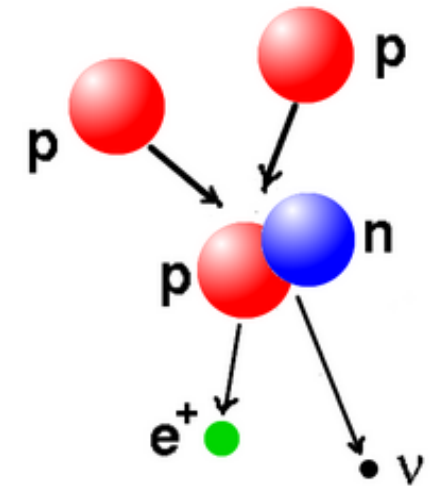
$$E = 2 \cdot E_{(a)} + 2 \cdot E_{(b)} + E_{(c)} = 2 \cdot (1.18 + 0.26 + 5.49) + 12.86 = 26.72 \text{ MeV}$$

Alternativni niz reakcija:

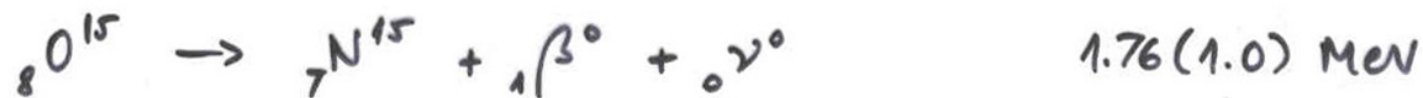
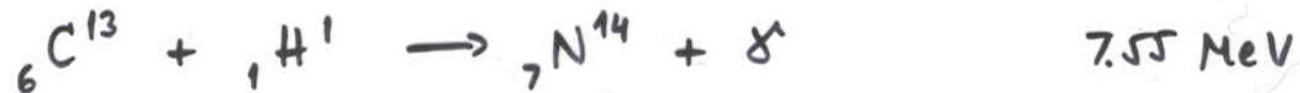
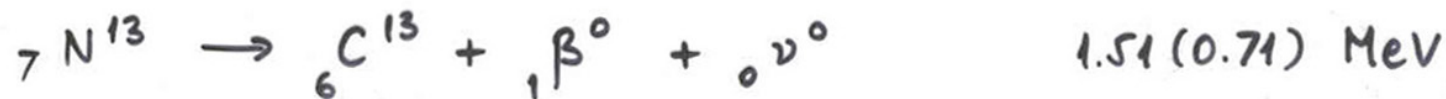
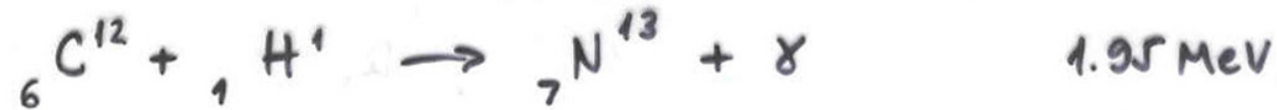


$$E = E_{(a)} + E_{(b)} + E_{(d)} = 26.72 \text{ MeV}$$

• p-p lanac najefikasniji na $T \sim 15 \cdot 10^6 \text{ K}$ i $\rho \sim 10^2 \text{ g/cm}^3$ ($\odot$)

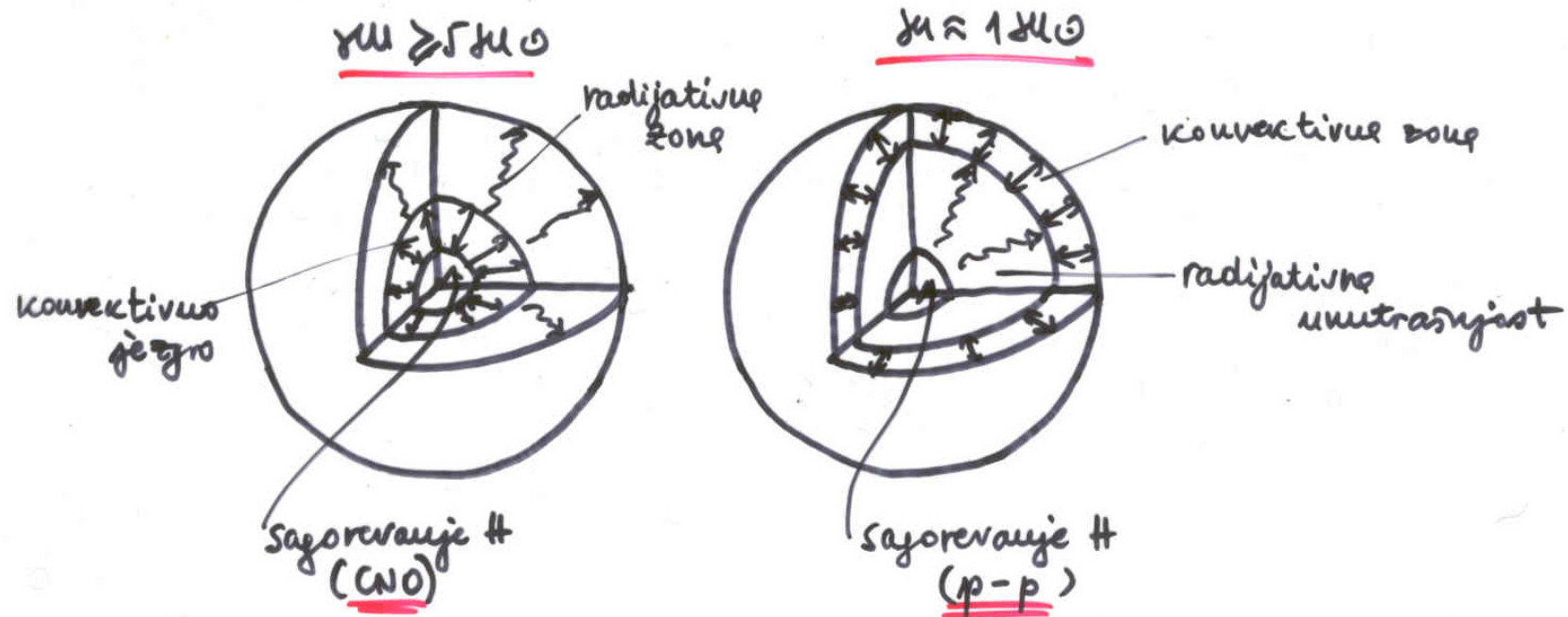


CNO (Bethe-ov) ciklus



- $p({}_1\text{H}^1)$ mora da savlada veću Kulonovu barijeru da bi bio zadržan težim elementom (C ili N) $\Rightarrow$ potrebne više T !

Modeli zvezdane unutrašnjosti



Količina energije oslobođene TN reakcijama po 1g materije u 1s

$$\dot{j} = j(\rho, T, \text{hem. sastav}) \quad [\text{J/kg} \cdot \text{s}]$$

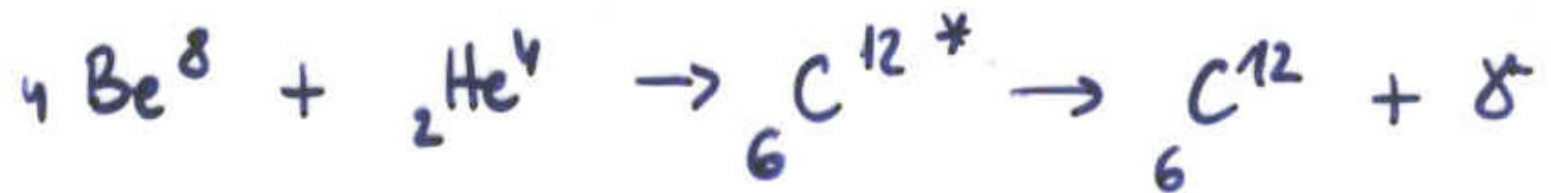
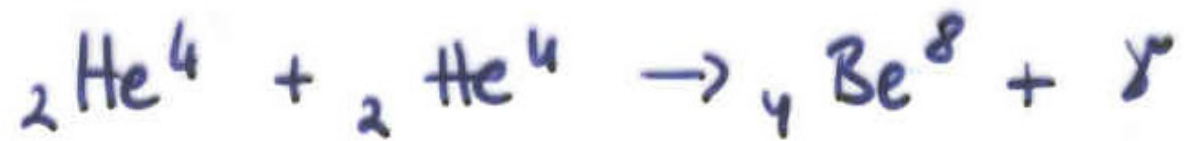
$$\dot{j} = j_0 \rho^a T^n$$

$$a = 1$$

$$n = \begin{cases} 4, & \text{p-p lanac} \\ 18, & \text{CNO ciklus} \end{cases}$$

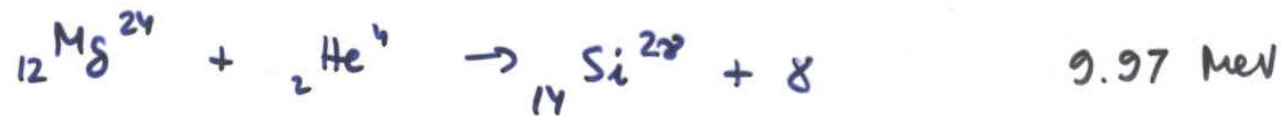
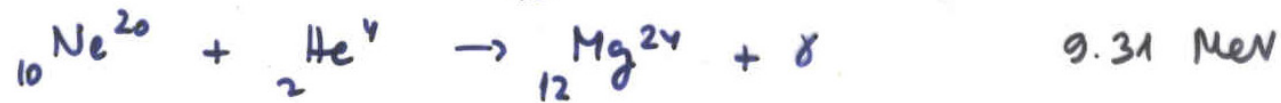
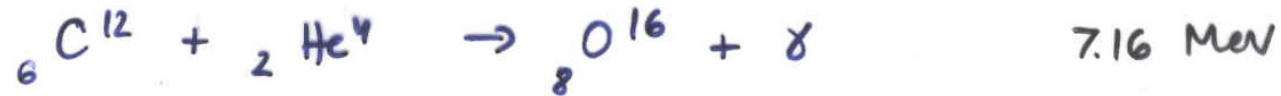
$$j_0 = j_0(\text{hem. sastav})$$

Sagorevanje helijuma



$$T \sim 10^8 \text{ K} \quad , \quad \rho \sim 10^4 \text{ g/cm}^3$$

Formiranje težih elemenata



=* =



... do $A \approx 56$ (Fe, Co, Ni)

Gorivo	T [K]
H	10^7
He	10^8
C	$(4-7) \cdot 10^8$
O	$(1.7-2) \cdot 10^9$
Si	$5 \cdot 10^9$

Favorizovano je stvaranje
jezgara sa "parnim"
rednim i masenim brojem.

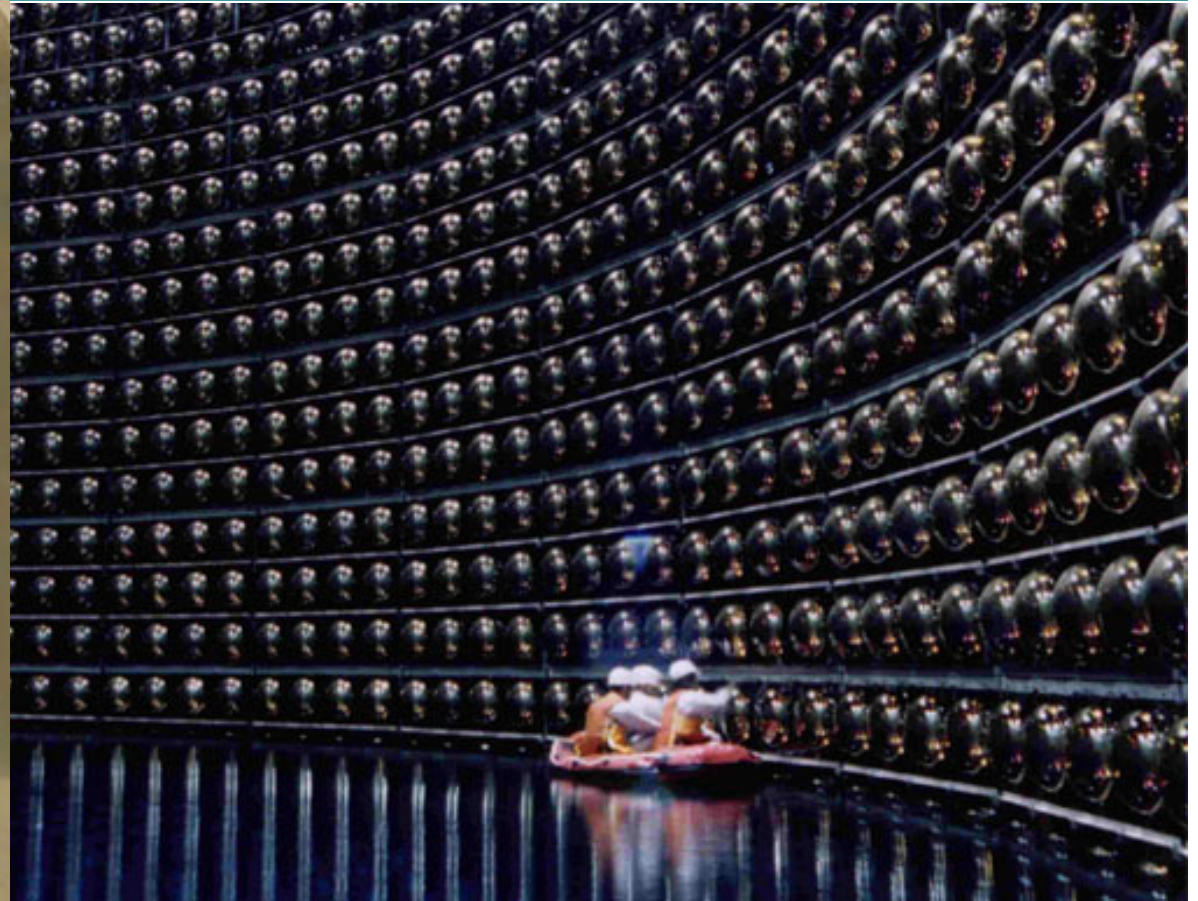
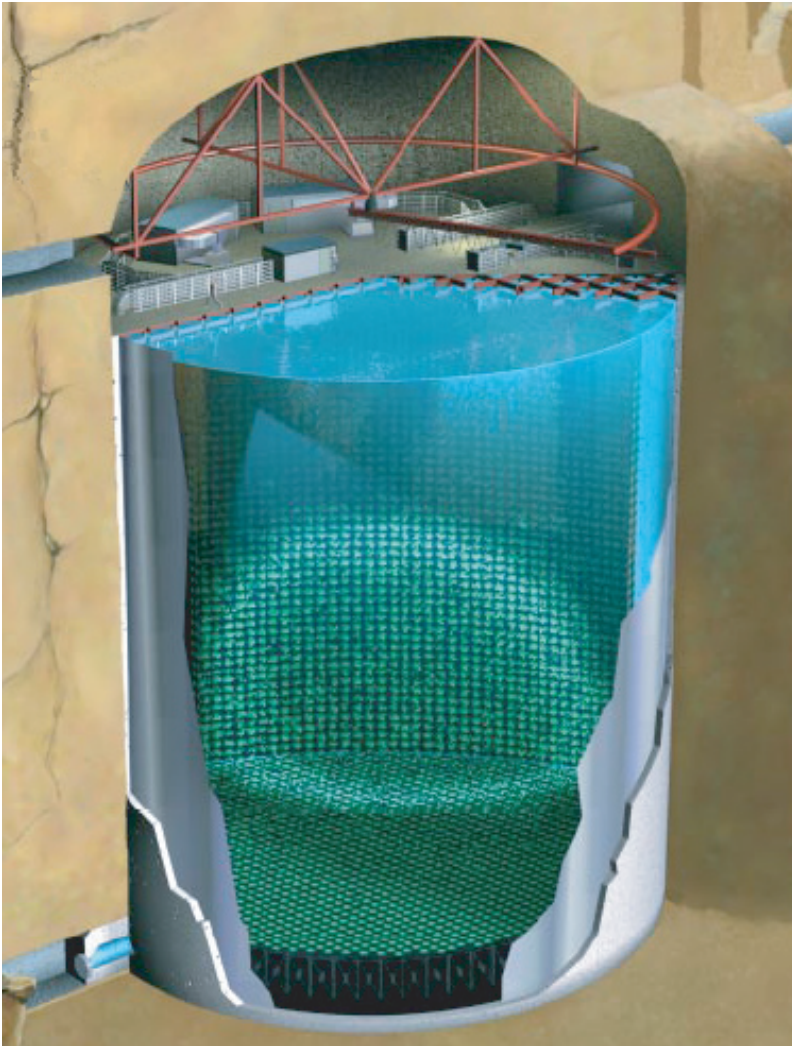
Problem neutrina

- **Detekcija:** detektovan 3 puta manji fluks od teorijski predviđenog (Raymond Davis, 1964)
- **Objašnjenja:**
 - smanjena proizvodnja energije (sadašnja količina proizvedene energije manja nego pre 10 miliona godina)
 - neodredjenosti u parametrima standardnog Sunčevog modela
 - “oscilacije” neutrina (3 vrste: elektronski, mionski i tau neutrino)

Rešenje problema – “oscilacije” neutrina (Masatoshi Koshiha, Superkamiokande, 1996)

Davis i Koshiha - Nobelova nagrada za fiziku za 2002.

Super-Kamiokande



Rešenje problema – “oscilacije” neutrina (Masatoshi Koshiha, Superkamiokande, 1996)

Davis i Koshiha - Nobelova nagrada za fiziku za 2002.