Диференцијални рачун на тангентним и котангентним раслојењима са интерпретацијом у класичној механици

мастер рад

Студент:
Данијела Бранковић

Ментор:
др Јелена Катић

Београд, 2016.

Садржај

Предговор

Мотив за израду овог рада била је жеља да се знање из диференцијалне геометрије и анализе на многострукостима сагледа не само са математичког аспекта, већ делом и са физичког.

У овом раду, који се састоји од седам поглавља, биће приказан Лагранжев и Хамилтонов формализам на многострукостима, као и њихова међусобна повезаност путем Лежандрове трансформације.

У првом поглављу је разматран систем од n честица у тродимензионом реалном простору. Дефинисан је функционал дејства S, чије екстремале задовољавају једначине које називамо Ојлер-Лагранжевим једначинама. Формулисан је и доказан Хамилтонов принцип најмањег дејства. Такође је дефинисана и Лежандрова трансформација, а помоћу ње и Хамилтонијан, након чега је установљена еквивалентност система Ојлер-Лагранжевих једначина и Хамилтонових једначина, а затим су интерпретирана нека својства Хамилтонијана. Наведени су и Закон очувања енергије, као и Закон очувања импулса. У другом поглављу су наведени основни појмови из диференцијалне геометрије, неопходни за даље разумевање рада. Уведен је појам многострукости, тангентног и котангентног простора, векторских поља на многострукости, као и нека њихова својства. На крају другог поглавља су уведене и Лијеве заграде, које имају улогу комутатора векторских поља.

Треће поглавље има за циљ упознавање са диференцијалним формама на многострукостима. Уведен је простор диференцијалних форми, дефинисан је спољашњи и унутрашњи производ форми, спољашњи извод форми, Лијев извод диференцијалне форме, као и њихове особине.

Четврто, пето и шесто поглавље су централни, јер су у њима представљени неки од резултата првог поглавља, али на језику многострукости. Уводи се појам симплектичке форме, симплектичке многострукости, симлектоморфизама, као и Хамилтонових дифеоморфизама. Дефинише се векторско поље $X_{\mathcal{L}}$ у канонским координатама на TM које одговара диференцијалној форми $dh_{\mathcal{L}}$, где је $h_{\mathcal{L}}$ функција енергије, а $\mathcal{L}$ регуларан Лагранжијан. Показује се да интегралне криве тог векторског поља задовољавају Ојлер-Лагранжеве једначине. На сличан начин се дефинише Хамилтоново векторско поље X_H у канонским координатама на T^*M које одговара форми dH, са Хамилтонијаном H. Затим се покаже да интегралне криве Хамилтоновог векторског поља задовољавају Хамилтонове једначине. Посредством Лежандрове трансформације и пресликавањима индукованим из ње, можемо из Хамилтоновог посматрати Лагранжев формализам, и обрнуто, уз претпоставку о регуларности Лагранжијана. Такође је представљена веза између Хамилтонових и локално Хамилтонових векторских поља. Дефинишемо Пуасонове заграде и успостављамо везу између њих и Хамилтонових векторских поља.

У седмом поглављу је представљен Закон очувања енергије, као и Лиувилова теорема.

Овом приликом се захваљујем својој менторки, др Јелени Катић, као и члановима комисије, професорима др Дарку Милинковићу и др Жарку Мијајловићу, на сугестијама и саветима који су допринели коначној верзији овог рада.

Глава 1

Њутнова механика

Њутнов принцип детерминисаности каже да стање механичког система, које представља његов положај и брзину, у произвољном тренутку одређује стање тог система у било ком другом тренутку. Тај принцип се математички исказује Другим Њутновим законом, чија је формулација за механички систем од једне материјалне тачке управо

$$\frac{d^2q}{dt^2} = \frac{1}{m}F. \tag{1.1}$$

Једначина (1.1) је диференцијална једначина другог реда по q за задато векторско поље $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Она има јединствено решење ако су задата два услова, на пример почетни положај и почетна брзина. Дакле, сваки уређени пар вектора (почетни положај, почетна брзина) из простора $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ потпуно одређује трајекторију по којој се тело креће. Скуп положаја честица система зовемо конфигурационим простором, а његову димензију бројем степени слободе. Скуп стања система (положаја и брзина свих честица) се назива фазним простором. У нашем случају система у коме сила F делује на једно тело, конфигурациони простор је $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$.
Ако се систем састоји од n тела, конфигурациони простор је $\mathbb{R}^{3n} \times \mathbb{R}^{3n}$, а Други Њутнов закон за задато векторско поље $F : \mathbb{R}^{3n} \to \mathbb{R}^{3n}$ је једначина по $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{3n}$, која представља вектор положаја n тела у $\mathbb{R}^3$ у тренутку $t \in \mathbb{R}$.
Једначина (1.1) се увођењем смене $r = q + tv$ своди на $\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{1}{m}F$, па закључујемо да је Други Њутнов закон инваријантан у односу на пресликавања

$$\Gamma : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}, \;\; \Gamma(q,t) = (q + tv, t). \tag{1.2}$$

Такође, облик једначине (1.1) је инваријантан у односу на увођење смене

$$r = q + u, \ \ r = Rq, \tag{1.3}$$

при чему је u константан вектор из $\mathbb{R}^3$, а R матрица ротације. Трансформације (1.3) су трансформације простора које чувају растојање и оријентацију, такозване директне изометријске трансформације .
Из инваријантности једначине (1.1) у односу на једначине (1.2), (1.3) и њихове композиције, следи да се закони Њутнове механике не мењају у координатном систему који се налази на другом месту у простору, или се креће константном брзином у односу на почетни, под условом да је исто оријентисан.
Излагања у првој глави су заснована на [12], [10], [6], [11] и [2]. У целом мастер раду се одговарајуће референце налазе уз формулацију дефиниција, теорема, тврђења, лема и примера.

1.1 Варијациони рачун

Дефинишимо функционал

$$S(q) = \int_{t_0}^{t_1} L(q, \dot{q}, t)dt,$$

где је $L : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ глатко пресликавање које називамо Лагранжијаном, а $q : [t_0, t_1] \longrightarrow \mathbb{R}^m$ крива која спаја тачке $q(t_0) = a$ и $q(t_1) = b$. Варијациони рачун се бави налажењем екстремала функционала.

Дефиниција 1: *[12] Крива $q : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^m$ се назива екстремалом функционала $S(q) = \int_{t_0}^{t_1} L(q, \dot{q}, t)dt$ у простору кривих са фиксираним крајевима, ако за сваку фамилију кривих $q_s : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^m, -\epsilon < s < \epsilon$, $\epsilon > 0$ произвољно, такву да је $q_s(t_0) \equiv a, q_s(t_1) \equiv b, q_0(t) = q(t)$, важи*

$$\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} S(q_s(t)) = 0.$$

Теорема 1: *[2] Крива $q : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^m$ је екстремала функционала $S(q) = \int_{t_0}^{t_1} L(q, \dot{q}, t)dt$ у простору кривих са фиксираним крајевима ако и само ако важи*

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0. \tag{1.4}$$

Да бисмо доказали претходну теорему, треба да формулишемо и докажемо следећу лему.

Лема 1: *[2] Ако за непрекидну функцију* $f, t_0 \le t \le t_1$ *важи* $\int_{t_0}^{t_1} f(t)h(t)dt = 0$*, за сваку непрекидну функцију* $h(t)$ *такву да* $h(t_0) = h(t_1) = 0$*, онда је* $f(t) = 0$*, за свако* $t_0 \le t \le t_1$.

Доказ:

Нека је $f(t^*) > 0$ за неко $t^*, t_0 < t^* < t_1$. Како је f непрекидна, $f(t) > c > 0$ у некој околини Δ тачке $t^* : t_0 < t^* - d < t < t^* + d < t_1$. Нека је $h(t)$ таква да $h(t) = 0$ ван Δ, $h(t) > 0$ унутар Δ, а $h(t) = 1$ унутар $\Delta/2$ (на пример за t такво да $t^* - \dfrac{d}{2} < t < t^* + \dfrac{d}{2}$. Тада је $\int_{t_0}^{t_1} f(t)h(t)dt \ge dc > 0$. Контрадикција.

■

Сада докажимо претходно формулисану теорему.

Доказ:

$$0 = \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} S(q_s(t)) = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial q}\frac{dq_s}{ds} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{d\dot{q}_s}{ds}\right)dt$$
$$= \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial L}{\partial q}\frac{dq_s}{ds} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{dq_s}{ds}\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\frac{dq_s}{ds}\right]dt.$$

Због Њутн-Лајбницове формуле и јер је $q_s(t_0) \equiv a, q_s(t_1) \equiv b$, имамо

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{dq_s}{ds}\right) = 0.$$

Даље следи да је q екстремала функционала S ако и само ако је

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\frac{dq_s}{ds}dt = 0$$

за сваку варијацију q_s која фиксира крајеве. На основу Леме 2 знамо да је то могуће ако и само ако је $\dfrac{\partial L}{\partial q} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0$, што је и требало показати.

■

Дефиниција 2: *[2] Једначине (1.4) називамо Ојлер-Лагранжевим једначинама за функционал* $S(q) = \int_{t_0}^{t_1} L(q, \dot{q}, t)dt$.

Пример: [10]

Нека је $L(q,\dot{q},t) = \|\dot{q}\|$. Тада је $S(q) = \int_0^1 \|\dot{q}\|dt$, где је $\|\cdot\|$ ознака за дужину (интензитет) вектора, дужина криве $q(t)$. Докажимо да су екстремале овог функционала праве, коришћењем Ојлер-Лагранжеве једначине.

$$\frac{d}{ds}S(q_s(t)) = \frac{d}{ds}\int_0^1 \sqrt{\left\langle \frac{\partial q_s(t)}{\partial t}, \frac{\partial q_s(t)}{\partial t}\right\rangle}dt$$

$$= \int_0^1 \left\langle \frac{\partial^2 q_s(t)}{\partial s \partial t}, \frac{\partial q_s(t)}{\partial t}\right\rangle \left(\sqrt{\left\langle \frac{\partial q_s(t)}{\partial t}, \frac{\partial q_s(t)}{\partial t}\right\rangle}\right)^{-1} dt.$$

Парцијалном интеграцијом добијамо

$$0 = \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} S(q_s(t)) = -\int_0^1 \left\langle \frac{\partial q_0(t)}{\partial s}, \frac{d}{dt}\frac{dq(t)}{dt}\left(\sqrt{\left\langle \frac{dq}{dt}, \frac{dq}{dt}\right\rangle}\right)^{-1}\right\rangle dt$$

Тада важи

$$\frac{d}{dt}\frac{dq(t)}{dt}\left(\sqrt{\left\langle \frac{dq}{dt}, \frac{dq}{dt}\right\rangle}\right)^{-1} = 0 \Leftrightarrow \frac{dq}{dt} = const.$$

Дакле, решења су праве.

■

Размотримо случај када је $m = 3n$ и када је функција L дефинисана на фазном простору. Претпоставимо да је поље силе $F : D \to \mathbb{R}^{3n}$ дефинисано у некој области $D \subset \mathbb{R}^{3n}$.

Поље F је потенцијално ако постоји скаларна функција $V : D \to \mathbb{R}$ таква да важи $F(q) = -\nabla V(q)$ за све $q \in \mathbb{R}^{3n}$. Функцију V зовемо потенцијалном енергијом система.
Претпоставимо да се систем састоји од једног тела и посматрајмо функцију

$$L(q,\dot{q},t) = \frac{m\|\dot{q}\|^2}{2} - V(q),$$

при чему је $T = \dfrac{m\|\dot{q}\|^2}{2}$ кинетичка енергија.

Теорема 2: *[2] Трајекторије потенцијалног система су екстремале функционала*
$S(q) = \int_{t_0}^{t_1} L(q,\dot{q},t)dt$ *за функцију* $L = T - V$.

Доказ:

Како је
$$\frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{\partial V}{\partial q} = -\nabla V(q),$$
и
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q},$$
Ојлер-Лагранжеве једначине примењене на овакво L биће
$$0 = \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = -\nabla V(q) - m\ddot{q},$$
што је Други Њутнов закон, па су трајекторије потенцијалног система заиста екстремале функционала S.

■

Пример: [12]

Нека је $V \equiv 0$. Покажимо да су тада решења Ојлер-Лагранжевих једначина праве.

Како је $V \equiv 0$, тражимо екстремале функционала $S(q) = \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} \frac{m\|\dot{q}\|^2}{2} dt$.
$$\frac{d}{ds}S(q_s(t)) = \frac{d}{ds}\int_{t_0}^{t_1} \frac{m}{2}\left\langle \frac{\partial q_s(t)}{\partial t}, \frac{\partial q_s(t)}{\partial t}\right\rangle dt.$$
Парцијалном интеграцијом добијамо
$$\frac{d}{ds}S(q_s(t)) = -m\int_{t_0}^{t_1} \left\langle \frac{\partial q_s^2(t)}{\partial t^2}, \frac{\partial q_s(t)}{\partial s}\right\rangle dt,$$
а заменом $s = 0$ имамо
$$0 = \frac{d}{ds}S(q_s(t)) = -m\int_{t_0}^{t_1} \left\langle \frac{\partial q^2(t)}{\partial t^2}, \frac{\partial q_0(t)}{\partial s}\right\rangle dt,$$
одакле следи
$$\left\langle \frac{\partial q^2(t)}{\partial t^2}, \frac{\partial q_0(t)}{\partial s}\right\rangle = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial q^2(t)}{\partial t^2} = 0,$$
па су решења праве.

■

1.2 Лежандрова трансформација

Дефиниција 3: *[6] Нека је $F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ конвексна функција, тј. са позитивно дефинитном матрицом другог извода. Лежандровом трансформацијом функције F назива се функција*

$$G(p) = p \cdot x - F(x),$$

где је $p := \dfrac{\partial F}{\partial x}$.

Теорема 3: *[6] Лежандрова трансформација је инволутивна, тј. њен квадрат је идентичко пресликавање.*

Доказ:

Нека је G Лежандрова трансформација функције F. Тада је

$$\frac{\partial G}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial p}(p \cdot x - F(x)) = x + p \cdot \frac{\partial x}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial p}$$

$$= x + p \cdot \frac{\partial x}{\partial p} - p \cdot \frac{\partial x}{\partial p} = x.$$

Лежандрова трансформација функције $p \mapsto G(p)$ је функција

$$x \mapsto x \cdot p - G(p) = x \cdot p - (p \cdot x - F(x)).$$

■

Последица 1: *[6] Инверз Лежандрове трансформације је Лежандрова трансформација.*

Дефиниција 4: *[6] Нека је систем задат Лагранжијаном $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, конвексним по другој промењљивој и нека је H Лежандрова трансформација функције L по тој промењљивој*

$$H(q, p, t) := p \cdot \dot{q} - L(q, \dot{q}, t), \;\; p := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}.$$

Функцију H зовемо Хамилтоновом функцијом, или Хамилтонијаном, који одговара Лагранжијану L.

Тврђење 1: *[6] Систем Ојлер-Лагранжевих једначина за Лагранжијан L еквивалентан је следећем систему једначина за Хамилтонијан H*

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}. \tag{1.5}$$

Доказ:

Потражимо диференцијал Хамилтонове функције:

$$dH = \frac{\partial H}{\partial q}dq + \frac{\partial H}{\partial p}dp + \frac{\partial H}{\partial t}dt = -\frac{\partial L}{\partial q}dq + \dot{q}dp - \frac{\partial L}{\partial t}dt.$$

Изједначавањем одговарајућих компоненти добијамо

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p},\ -\frac{\partial L}{\partial q} = \frac{\partial H}{\partial q},\ -\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}.$$

Из Ојлер-Лагранжевих једначина и дефиниције Лежандрове трансформације следи $\dot{p} = \frac{\partial L}{\partial q}$, па из претходне једначине добијамо једначине (1.5).
Покажимо и обрат.
На основу дефиниције 4, као и система (1.5) имамо

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \dot{q} + p \cdot \frac{\partial \dot{q}}{\partial p} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{\partial \dot{q}}{\partial p}.$$

Следи

$$p \cdot \frac{\partial \dot{q}}{\partial p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{\partial \dot{q}}{\partial p},$$

па закључујемо да је $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$.

Онда је

$$\dot{p} = \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}},$$

а из система (1.5) добијамо и

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -\left(p \cdot \frac{\partial \dot{q}}{\partial q} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{\partial \dot{q}}{\partial q} - \frac{\partial L}{\partial q}\right) = \frac{\partial L}{\partial q}.$$

Изједначавањем последње две једначине, добијамо Ојлер-Лагранжеве једначине.

■

Дефиниција 5: *[6] Нека је систем задат Лагранжијаном L. Променљиву $p := \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ називамо импулсом. Систем једначина (1.5) се назива Хамилтонов систем са Хамилтонијаном H.*

Задатак 1: *[6] Доказати израз $dH = -\dfrac{\partial L}{\partial q}dq + \dot{q}dp - \dfrac{\partial L}{\partial t}dt$.*

Доказ:

Диференцирајмо Хамилтонијан:

$$dH = \frac{\partial H}{\partial q}dq + \frac{\partial H}{\partial p}dp + \frac{\partial H}{\partial t}dt$$

$$= \left(p\frac{\partial \dot{q}}{\partial q} - \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{\partial \dot{q}}{\partial q}\right)dq + \left(\dot{q} + p \cdot \frac{\partial \dot{q}}{\partial p} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{\partial \dot{q}}{\partial p}\right)dp + \left(- \frac{\partial L}{\partial t}\right)dt.$$

Следи

$$dH = -\frac{\partial L}{\partial q}dq + \dot{q}dp - \frac{\partial L}{\partial t}dt,$$

што је и требало доказати.

■

Задатак 2: *Нека су q_k Декартове координате честица, а $p_k := \dot{q}_k$ координате импулса. Доказати да је систем диференцијалних једначина $\ddot{q} = F(q, \dot{q})$ еквивалентан систему (1.5) са Хамилтонијаном $H = T + V$, где је $V = V(q)$ потенцијална енергија, а $T = \dfrac{\dot{q}^2}{2}$ кинетичка енергија.*

Доказ:

Како је $p = \dot{q}$, онда

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \frac{\partial H}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial V}{\partial \dot{q}}.$$

$\dfrac{\partial V}{\partial \dot{q}} = 0$, јер је $V = V(q)$, па имамо $\dfrac{\partial H}{\partial p} = \dot{q}$, што је прва Хамилтонова једначина.

$$\frac{\partial H}{\partial q} = \frac{\partial V}{\partial q} = \nabla V = -F = -\ddot{q} = -\dot{p},$$

па смо добили и другу Хамилтонову једначину.
Покажимо сада да из Хамилтоновог система следи наведени систем диференцијалних једначина.

$$\ddot{q} = \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -\nabla V = F,$$

одакле следи $F = \ddot{q}$, чиме је показан и други смер.

■

Тврђење 2: *[2] Ако Хамилтонијан не зависи експлицитно од времена, онда је H очуван.*

Доказ:

Како H не зависи експлицитно од времена, то значи да важи $\dfrac{\partial H}{\partial t} = 0$. Потражимо $\dfrac{dH}{dt}$:

$$\frac{d}{dt}H(q,p,t) = \frac{\partial H}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial H}{\partial p}\dot{p} + \frac{\partial H}{\partial t} = -\dot{p}\dot{q} + \dot{p}\dot{q} + \frac{\partial H}{\partial t} = 0.$$

Следи $H = const.$

■

Тврђење 3: *[6] Ако H не зависи од координате q_k, онда је одговарајући моменат p_k очуван.*

Доказ:

$0 = \dfrac{\partial H}{\partial q_k} = -\dot{p_k}$, одакле имамо $\dot{p_k} = 0$. Следи $p_k = const.$

■

Тврђење 4: *Ако H не зависи од момента p_k, онда је одговарајућа координата q_k очувана.*

Доказ:

$\dot{q_k} = \dfrac{\partial H}{\partial p_k} = 0$, одакле следи $\dfrac{\partial q_k}{\partial t} = 0$, па имамо $q_k = const.$

■

Тврђења 2 и 3 се зову Закон очувања енергије и Закон очувања импулса.

Пример: (Линеарни хармонијски осцилатор) [15]

Нека је дат систем који се састоји од једне честице масе m која се креће дуж x- осе, тако што је везана за еластичну опругу чији је коефицијент еластичности k. Узмимо координатни почетак за равнотежни положај. Тада је сила којом опруга делује на честицу $F = -kx$. Потенцијална енергија система је $V = \frac{kx^2}{2}$, а кинетичка енергија је $T = \frac{m\dot{x}^2}{2}$. Лагранжијан је дат са

$$L = T - V = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2}.$$

На основу тога, Ојлер-Лагранжеве једначине ће бити

$$m\ddot{x} + kx = 0.$$

Како је генералисани моменат

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x},$$

следи

$$\dot{x} = \frac{p_x}{m}.$$

Хамилтонијан је дат са

$$H = p_x \cdot \dot{x} - L = \frac{{p_x}^2}{2m} + \frac{kx^2}{2},$$

а Хамилтонове једначине су

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m},$$

$$\dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = -kx.$$

■

Пример: (Математичко клатно) [15]

Дат је систем који се састоји од једне честице масе m која се у хомогеном гравитационом пољу креће по кружници полупречника R, која лежи у вертикалној равни. Одаберимо координатни систем такав да је координатни почетак у центру кружнице и да кружница лежи у равни $z = 0$. Изразимо картезијанске координате (x, y, z) преко генералисане координате φ, која представља угао који вектор положаја честице заклапа са x- осом:

$$x = R\cos\varphi,$$

$$y = R\sin\varphi,$$

$$z = 0.$$

Потенцијална енергија система је $V = -mgx = -mgR\cos\varphi$, где је g гравитациона константа.

Кинетичка енергија система је $T = \dfrac{m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)}{2} = \dfrac{mR^2\varphi^2}{2}$. Лагранжијан је дат са

$$L = T - V = \frac{mR^2\varphi^2}{2} + mgR\cos\varphi.$$

На основу тога, Ојлер-Лагранжеве једначине ће бити

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{R}\sin\varphi = 0.$$

Како је генералисани моменат

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = mR^2\dot{\varphi},$$

следи

$$\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mR^2}.$$

Хамилтонијан је дат са

$$H = p_\varphi \cdot \dot{\varphi} - L = \frac{{p_\varphi}^2}{2mR^2} - mgR\cos\varphi,$$

а Хамилтонове једначине су

$$\dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial\varphi} = -mgR\sin\varphi,$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{mR^2}.$$

■

Пример: (Сферно клатно) [7]

Узмимо у обзир клатно које се састоји од нерастегљивог канапа дужине l и куглице масе m која је причвршћена за један његов крај, док је други (фиксирани) крај канапа смештен у координатни почетак. Претпоставимо да куглица може да се креће у било ком правцу све док канап остаје затегнут. Можемо дефинисати картезијанске координате (x, y, z) тако да је z- оса усмерена вертикално наниже. Такође можемо да дефинишемо сферне координате (ρ, θ, ϕ) , $\rho = l$, док $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ и $\phi \in [0, 2\pi)$. Запишимо картезијанске координате преко сферних

$$x = l \sin\theta \cos\phi,$$

$$y = l \sin\theta \sin\phi,$$

$$z = -l \cos\theta.$$

Тада је потенцијална енергија система $V = mgz = -mgl\cos\theta$, при чему је g гравитациона константа. Како је брзина кретања куглице $\upsilon = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$, при чему је

$$\dot{x} = l\dot{\theta}\cos\theta\cos\phi - l\dot{\theta}\sin\theta\sin\phi,$$

$$\dot{y} = l\dot{\theta}\cos\theta\sin\phi + l\dot{\phi}\sin\theta\cos\phi,$$

$$\dot{z} = l\dot{\theta}\sin\theta,$$

кинетичка енергија ће бити

$$T = \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{ml^2}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2\sin^2\theta).$$

Лагранжијан је

$$L = T - V = \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{m\upsilon^2}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2\sin^2\theta) + mgl\cos\theta,$$

а Ојлер- Лагранжеве једначине за θ су

$$\ddot{\theta} - \dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta + \frac{g}{l}\sin\theta = 0,$$

а за ϕ су

$$\ddot{\phi}\sin^2\theta = 0.$$

Што се тиче Хамилтонијана, имамо

$$H = p_\theta \cdot \dot{\theta} + p_\phi \cdot \dot{\phi} - L.$$

Како је $p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}$ и $p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}$, добијамо да је $\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{ml^2}$ и $\dot{\phi} = \frac{p_\phi}{ml^2 \sin^2 \theta}$. Заменом у Хамилтонијан добијамо

$$H = \frac{{p_\theta}^2}{2ml^2} + \frac{{p_\phi}^2}{2ml^2 \sin^2 \theta} - mgl \cos \theta,$$

а одатле се може добити да је $H = \frac{ml^2}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) - mgl \cos \theta$, што је управо укупна енергија система, $H = T + V$. Имамо четири Хамилтонове једначине

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta},$$

$$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta},$$

$$\dot{\phi} = \frac{\partial H}{\partial p_\phi},$$

$$\dot{p}_\phi = -\frac{\partial H}{\partial \phi}.$$

Заменом познатих вредности добијамо

$$\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{ml^2},$$

$$\dot{p}_\theta = -\frac{{p_\phi}^2 \cos \theta}{ml^2 \sin^3 \theta} + mgl \sin \theta,$$

$$\dot{\phi} = \frac{p_\phi}{ml^2 \sin^2 \theta},$$

$$\dot{p}_\phi = 0.$$

Из $\dot{p}_\phi = 0$ следи да је $p_\phi = const.$, што значи да је угаони моменат за координату ϕ очуван.

Ако претпоставимо да је $\phi = \phi_0 = const.$, онда заменом у Ојлер-Лагранжеву једначину за θ добијамо

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0,$$

што је једначина клатна чије кретање је ограничено на вертикалну раван $\phi = \phi_0$.
Ако претпоставимо да је $\theta = \theta_0 = const.$, из Ојлер-Лагранжевих једначина за θ и ϕ следи да је $\dot{\phi}_0 = \sqrt{\dfrac{g}{l\cos\theta_0}} = const.$, па се клатно креће равномерно у хоризонталној равни. $l\cos\theta_0$ је вертикално растојање равни ротације од координатног почетка и овакав тип клатна зовемо конусним клатном, јер ротација канапа образује конус.

■

Приметимо да Ојлер-Лагранжеве једначине представљају систем од n диференцијалних једначина другог реда, а њима одговарајуће Хамилтонове једначине чине систем од $2n$ диференцијалних једначина првог реда.
Ако деловање неких сила у разматраном механичком систему ограничава кретање система на многострукост M, онда механику тог система можемо да формулишемо као механику у простору TM. С тим у вези, треба да се подсетимо појмова из диференцијалне геометрије које ћемо користити надаље.

Глава 2

Диференцијална геометрија

Да бисмо могли Ојлер-Лагранжеве једначине, као и Хамилтонове једначине кретања да пренесемо на језик многострукости, неопходно је да се подсетимо основних појмова из диференцијалне геометрије. Детаљније излагање читалац може пронаћи у [1].

Дефиниција 6: *Ако је M Хаусдорфов тополошки простор са пребројивом базом, такав да за сваку тачку $p \in M$ постоји отворен скуп $U \subset M$ који садржи тачку p и хомеоморфизам ϕ којим се U пресликава у неки отворени подскуп од $\mathbb{R}^n$, онда је M n-димензиона тополошка многострукост.*

Под локалном картом многострукости M подразумевамо уређен пар (U, ϕ), а пресликавање ϕ^{-1} називамо локалном параметризацијом. Атлас је скуп локалних карти (U_α, ϕ_α) таквих да је $\bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha = M$.
Нека су $\pi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, i = 1, 2, ..., n$ такве да $\pi_i(x_1, x_2, ..., x_n) = x_i$. Дефинишимо пресликавање

$$x_i = \pi_i|_{\phi(U)} \circ \phi : U \to \mathbb{R}.$$

Функције x_i називамо координатним функцијама, јер свакој тачки $p \in U$ додељују i-ту координату њене слике.

Дефиниција 7: *Нека је $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha) | \alpha \in A\}$ атлас n-димензионалне тополошке многострукости M такав да је за сваке две његове карте (U_α, ϕ_α) и (U_β, ϕ_β) пресликавање*

$$\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}|_{\phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)}$$

дифеоморфизам класе C^r. Тада је $\mathcal{A}$ диференцијабилни атлас класе r, а за карте (U_α, ϕ_α) и (U_β, ϕ_β) кажемо да су сагласне.

Пресликавање $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}|_{\phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)}$ представља промену координата.
Кажемо да су атласи $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ еквивалентни ако је њихова унија такође диференцијабилан атлас. Та релација је релација еквиваленције.

Дефиниција 8: *Тополошка многострукост заједно са класом еквиваленције диференцијабилних атласа је диференцијабилна многострукост.*

Дефиниција 9: *Нека су M и N диференцијабилне многострукости и $F : M \to N$ непрекидно пресликавање. Ако постоје диференцијабилни атласи $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)|\alpha \in A\}$ и $\{(V_\beta, \psi_\beta)|\beta \in B\}$ многострукости M и N такви да је пресликавање*

$$\psi_\beta \circ F \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_\alpha \cap F^{-1}(V_\beta)) \to \psi_\beta(V_\beta)$$

диференцијабилно за све $\alpha \in, \beta \in B$, онда је F диференцијабилно пресликавање.

Приметимо да је $\mathbb{R}$ једнодимензионална многострукост покривена картом $(\mathbb{R}, id)$, при чему је id идентичко пресликавање.
Означимо са $\mathcal{F}(M)$ скуп свих диференцијабилних пресликавања диференцијабилне многострукости M у $\mathbb{R}$.

2.1 Тангентни простор

Циљ нам је да представимо тангентне векторе на диференцијабилној многострукости као класе еквиваленције, изводе у правцу и као тангентне векторе на криве на многострукости.
Нека је $p \in M$ произвољно и нека је (U_α, ϕ_α) карта на M таква да $p \in U_\alpha$. Како је $\phi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$, онда тангентни простор у тачки p можемо идентификовати са векторским простором $\mathbb{R}^n$. Самим тим, тангентни вектор на M у p биће представљен неким тангентним вектором $X_\alpha \in \mathbb{R}^n$. Узмимо другу карту (U_β, ϕ_β) која је сагласна са (U_α, ϕ_α), односно $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$ је дифеоморфизам. Занима нас како изгледа вектор X_β из $\mathbb{R}^n$ који представља тангентни вектор у p у односу на карту (U_β, ϕ_β).

Дефиниција 10: *Нека је M n-димензионална многострукост са диференцијабилним атласом $\{(U_\alpha, \phi_\alpha) | \alpha \in A\}$. Нека су (U_α, ϕ_α) и (U_β, ϕ_β) две карте које покривају отворену околину тачке p. Два представника тангентног вектора у p, X_α и X_β, који одговарају овим картама су еквивалентни, у ознаци $X_\alpha \sim X_\beta$, ако*

$$X_\beta = dF(X_\alpha) = d(\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1})(X_\alpha).$$

Релација $\sim$ је релација еквиваленције.

Дефиниција 11: *Класа еквиваленције релације $\sim$ је тангентни вектор у тачки p на многострукости M.*
Тангентни простор у тачки p, у ознаци T_pM је скуп свих тангентних вектора у тачки p и репрезентован је са $\mathbb{R}^n$.

Дефиниција 12: *Нека је p тачка диференцијабилне многострукости M. Ако постоји околина $U \subset M$ тачке p у којој је дефинисана функција $f : U \to \mathbb{R}$ таква да $f \in \mathcal{F}(U)$, онда кажемо да је f диференцијабилна у p.*
Скуп свих функција диференцијабилних у тачки p означавамо са $\mathcal{F}(p)$.
Две функције које се поклапају на некој околини тачке p идентификујемо.

Дефиниција 13: *Нека је p тачка диференцијабилне многострукости M. Диференцирање у тачки p је пресликавање $X_p : \mathcal{F}(p) \to \mathbb{R}$ за које важи:*
1. $X_p(af + bg) = aX_p(f) + bX_p(g)$,
2. $X_p(fg) = X_p(f)g(p) + f(p)X_p(g)$,
где $f, g \in \mathcal{F}(p)$ и $a, b \in \mathbb{R}$.

Нека је $\mathcal{T}_pM$ скуп свих диференцирања у тачки p. Дефинишимо операције $+_\mathcal{T}$ и $\cdot_\mathcal{T}$ у $\mathcal{T}_pM$ са

$$(X_p +_\mathcal{T} Y_p)(f) = X_p(f) + Y_p(f),$$
$$(a \cdot_\mathcal{T} X_p)(f) = aX_p(f),$$

за $a \in \mathbb{R}, X_p, Y_p \in \mathcal{T}_pM$. Тада је $\mathcal{T}_pM$ са овако дефинисаним операцијама векторски простор над $\mathbb{R}$.

Нека је $f \in \mathcal{F}(U)$, где је (U, ϕ) карта на M и $p \in U$ са координатама $(x_1, x_2, ..., x_n)$. Посматрајмо пресликавање $\left(\dfrac{\partial}{\partial x_i}\right)_p : \mathcal{F}(p) \to \mathbb{R}$ дефинисано са

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p (f) = \partial_i (f \circ \phi^{-1})(\phi(p)),$$

где је ∂_i парцијални извод реалне функције по i-тој координати. $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$ додељује функцији f i-ти парцијални извод функције $f \circ \phi^{-1}$ израчунат у тачки $\phi(p)$. Самим тим, имамо да је $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p \in \mathcal{T}_pM$.

Важи

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p (x_j) = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases} .$$

Како је скуп диференцирања $\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)_p, ..., \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_p \right\}$ линеарно независан и генерише простор $\mathcal{T}_pM$, онда представља базу за $\mathcal{T}_pM$, па је $dim\mathcal{T}_pM = n$. T_pM је путем карте (U, ϕ) репрезентован са $\mathbb{R}^n$, па можемо рећи да је $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ база за $\mathbb{R}^n$ која одговара координатним функцијама $(x_1, x_2, ..., x_n)$. База простора $\mathcal{T}_pM$ је на природан начин индукована са $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$.

Нека је $v \in \mathbb{R}^n$ произвољан. Тада га можемо представити на јединствени начин са $v = v_1e_1 + v_2e_2 + ... + v_ne_n$, где су $(v_1, v_2, ..., v_n)$ координате вектора v у односу на базу $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$.

Пресликавање $I_\phi : \mathbb{R}^n \to \mathcal{T}_pM$, дефинисано са

$$v_1e_1 + v_2e_2 + ... + v_ne_n \longmapsto v_1\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p + v_2\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)_p + ... + v_n\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_p$$

је изоморфизам.

Узмимо другу карту (V, ψ) такву да је $p \in V$, (V, ψ) је сагласна са (U, ϕ) и $\{f_1, f_2, ..., f_n\}$ је база на $\mathbb{R}^n$ која одговара функцијама $(y_1, y_2, ...y_n)$ на V. Онда ће за сваки вектор $V = v_1e_1 + v_2e_2 + ... + v_ne_n$ бити

$$I_\phi(V) = I_\psi \circ \mathcal{I}(V),$$

где је $\mathcal{I} = d(\psi \circ \phi^{-1})|_{\phi(U \cap V)}$ линеарно, $\psi \circ \phi^{-1}$ промена координата, а $[\mathcal{I}]$ матрица преласка са базе $\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)_p, ..., \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_p \right\}$ на базу $\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial y_2}\right)_p, ..., \left(\frac{\partial}{\partial y_n}\right)_p \right\}$. Тада I_ϕ индукује изоморфизам простора T_pM и $\mathcal{T}_pM$, што значи да је $\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)_p, ..., \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_p \right\}$ база простора T_pM у односу на карту (U, ϕ), одакле закључујемо да тангентне векторе можемо посматрати као диференцирања.

Дефиниција 14: *Нека је $f : M \to N$ диференцијабилно пресликавање једне диференцијабилне многострукости на другу и нека је $p \in M$. Диференцијал пресликавања f у тачки p је пресликавање*

$$df_p : T_pM \to T_{f(p)}N.$$

Како су елементи тангентног простора диференцирања, за $X_p \in T_pM$ довољно је одредити како $df_p(X_p)$ слика произвољну функцију $g \in \mathcal{F}(f(p))$. Дефинишимо

$$df_p(X_p)(g) = X_p(g \circ f).$$

Лема 2: *За глатко пресликавање $f : M \to N$ и $p \in M$ диференцијал пресликавања $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ је линеарно пресликавање.*

Дефиниција 15: *Нека је $I \subset \mathbb{R}$ отворен интервал и M диференцијабилна многострукост. Диференцијабилно пресликавање $\gamma : I \to M$ зове се диференцијабилна крива у M.*

Један тангентни вектор на $\mathbb{R}$ у $t_0 \in I$ је $\dfrac{\partial}{\partial t}$. Тангентни вектор криве γ на многострукости у тачки $\gamma(t_0)$ је $d_{\gamma(t_0)}\left(\dfrac{\partial}{\partial t}\right)$, при чему је
$d_{\gamma(t_0)}\left(\dfrac{\partial}{\partial t}\right)(g) = \dfrac{\partial}{\partial t}(g \circ \gamma)|_{t_0}$, за $g \in \mathcal{F}(M)$.

Лема 3: *Нека је p тачка диференцијабилне многострукости M. За сваки вектор $X_p \in T_pM$ постоји глатка крива γ на M која садржи p таква да је X_p вектор тангентан на γ.*

Дакле, T_pM је скуп свих тангенти на криве од M које садрже p, у тачки p.

Дефиниција 16: *Нека је T_xM тангентни простор у произвољној тачки $x \in M$ диференцијабилне многостукости M. Дисјунктна унија тангентних простора $\bigsqcup_{x \in M} T_xM = \{(x,t) | x \in M, t \in T_xM\}$ назива се тангентно раслојење.*

На скупу TM можемо дефинисати структуру која ће га чинити диференцијабилном многострукошћу димензије $2n$. Више о координатама на TM биће у поглављу Хамилтонов принцип.

2.2 Котангентни простор

Линеарно пресликавање ω из реалног, коначно-димензионалног векторског простора V у $\mathbb{R}$ зовемо ковектором, или функционалом. Скуп свих ковектора простора V је векторски простор, у ознаци V^* и зовемо га дуални простор простора V.

Нека је M диференцијабилна многострукост, (U, ϕ) је карта са координатама $(x_1, x_2, ..., x_n)$ таква да је $p \in U$. Како су функције $x_i : U \to \mathbb{R}, i = 1, 2, ..., n$ диференцијабилне, постојаће диференцијали

$$(dx_i)_p : T_pM \to \mathbb{R}.$$

Тада је

$$(dx_i)_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p\right)(g) = \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p (g \circ x_i) = \left\{\begin{matrix} \frac{\partial}{\partial t} g, i = j \\ 0, i \neq j \end{matrix}\right\},$$

где је $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ произвољна глатка функција, а $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)_p, ..., \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_p$ базни вектори простора T_pM. Ако идентификујемо вектор који разапиње тангентни простор праве $\frac{\partial}{\partial t}$ са 1, имамо

$$(dx_i)_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p\right)(g) = \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p (g \circ x_i) = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}.$$

Следи да $(dx_1)_p, (dx_2)_p, ..., (dx_n)_p$ представљају базу од T_p^*M.

За произвољно $f : U \to \mathbb{R}$ важи $df_p = \alpha_1 dx_1 + \alpha_2 dx_2 + ... + \alpha_n dx_n$, а на основу претходног добијамо $df_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p\right) = \alpha_i \cdot 1 = \alpha_i$. Следи

$$df_p = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_p dx_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_p dx_2 + ... + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_p dx_n.$$

Дефиниција 17: *Котангентно раслојење многострукости M је дисјунктна унија*

$$T^*M = \bigsqcup_{x \in M} T_x^*M = \{(x, \lambda) | x \in M, \lambda \in T_x^*M\}.$$

На скупу T^*M можемо дефинисати структуру која ће га чинити диференцијабилном многострукошћу димензије $2n$. Више о координатама на T^*M биће у поглављу Котангентно раслојење многострукости.

2.3 Векторско поље диференцијабилне многострукости

Дефиниција 18: *Векторско поље X на диференцијабилној многострукости M је глатко пресликавање $X : M \to TM$. Скуп свих векторских поља многострукости M означавамо са $\chi(M)$.*

Приметимо да за $p \in M$ произвољно, $f \in \mathcal{F}(M)$ и $X_p \in T_pM$ је и $X_p(f) \in \mathbb{R}$. Онда, за фиксирано $f \in \mathcal{F}(M)$, имамо пресликавање

$$(Xf) : M \to \mathbb{R}, p \longmapsto (Xf)(p) = X_p(f).$$

Пресликавање X је глатко ако је пресликавање Xf диференцијабилно за произвољну функцију $f \in \mathcal{F}(M)$.
За векторско поље X важи $\pi \circ X = id_M$, где је $\pi : TM \to M$ природна пројекција, а id_M је идентичко пресликавање многострукости. Пресликавање које има такво својство зовемо сечењем тангентног раслојења, што чини да се скуп векторских поља и глатких сечења поклапа.

Како је T_pM векторски простор, можемо да дефинишемо на скупу $\chi(M)$ операције сабирања и множења скаларом са

$$(X+Y)_p = X_p + Y_p,$$

$$(kX)_p = kX_p,$$

које ће чинити $\chi(M)$ векторским простором бесконачне димензије.

Дефиниција 19: *Нека су $X, Y \in \chi(M)$. Лијеве заграде, или комутатор векторских поља X и Y, је векторско поље дато са*

$$[X,Y]f = X(Yf) - Y(Xf),$$

где је $f \in \mathcal{F}(M)$.

Лема 4: *Нека су $X, Y, Z \in \chi(M)$, $f \in \mathcal{F}(M)$. Тада је*
1. $[X,Y] = -[Y,X]$,
2. $[fX,Y] = f[Y,X] - Y(f)X$,
3. $[X+Y,Z] = [X,Z] + [Y,Z]$,
4. $[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0$.

Лијева алгебра је векторски простор на коме је дефинисано билинеарно пресликавање које задовољава и услове 1. и 4. С обзиром на то, $\chi(M)$ је једна Лијева алгебра.

Глава 3

Диференцијалне форме на многострукостима

Нека је M n-димензионална диференцијабилна многострукост и нека је $f : M \to \mathbb{R}$ произвољна глатка функција и $p \in M$. Тада је $df(p) \in T_p^*M$, па пишемо
$$df : M \to T^*M.$$
Свако пресликавање $\alpha : M \to T^*M$ које задовољава $\alpha(p) \in T_p^*M$ зовемо сечењем котангентног раслојења. Како је $df(p)$ елемент котангентног простора T_p^*M, онда је
$$df(p) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(p) dx_k.$$
С обзиром на то, можемо да пишемо и
$$\alpha(p) = \sum_{k=1}^{n} a_k(p) dx_k,$$
и то за свако сечење котангентног раслојења, јер $dx_1, dx_2, ..., dx_n$ чине његову базу.

Сечења котангентног раслојења зовемо диференцијалним 1-формама.

Дефинишимо спољашњи производ 1-форми α и β на M као билинеарно пресликавање:
$$(\alpha \wedge \beta)(\xi_1, \xi_2) = \begin{vmatrix} \alpha(\xi_1) & \beta(\xi_1) \\ \alpha(\xi_2) & \beta(\xi_2) \end{vmatrix}.$$

Спољашње множење 1-форми задовољава

$$(\alpha \wedge \beta)(\xi_1, \xi_2) = -\alpha \wedge \beta(\xi_2, \xi_1),$$

као и $\alpha \wedge \beta = -\beta \wedge \alpha$.
Дефинишимо диференцијал 1-форме $\alpha(p) = \sum_{k=1}^{n} a_k(p) dx_k$ са

$$d\alpha(p) := \sum_{k=1}^{n} da_k(p) dx_k,$$

што можемо да запишемо и као

$$d\alpha(p) = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial a_k}{\partial x_j}(p) dx_j \wedge dx_k.$$

Заменом $d\alpha(p)$ са $\beta(p)$ и $\frac{\partial a_k}{\partial x_j}(p)$ са b_k^j добијамо

$$\beta(p) = \sum_{j,k=1}^{n} b_k^j dx_j \wedge dx_k,$$

што је управо диференцијална 2-форма.

Означимо са $\Lambda^k(T_p^* M)$ скуп свих антисиметричних, k-линеарних пресликавања из $\underbrace{T_pM \times T_pM \times ... \times T_pM}_{k}$ у $\mathbb{R}$.

Дефиниција 20: *[14] Котангентно k-раслојење котангентног раслојења диференцијабилне многострукости M је*

$$\Lambda^k(T^* M) = \bigcup_{p \in M} \Lambda^k(T_p^* M).$$

Дефиниција 21: *Диференцијална k-форма на диференцијабилној многострукости M је глатко пресликавање $\omega : M \to \Lambda^k(T^* M)$, које задовољава $\pi \circ \omega = id_M$, при чему је $\Lambda^k(T^* M)$ скуп свих антисиметричних, k-линеарних пресликавања из $\underbrace{TM \times TM \times ... \times TM}_{k}$ у $\mathbb{R}$, а*

$$\pi : \underbrace{TM \times TM \times ... \times TM}_{k} \to M.$$

Скуп свих диференцијалних k-форми на диференцијабилној многострукости M означавамо са $\Omega^k(M)$, а скуп свих диференцијалних форми на диференцијабилној многострукости M означавамо са $\Omega(M)$.

Приметимо да је димензија од $\Lambda^k(T^*M)$ управо $\binom{n}{k}$.
У складу са претходним разматрањима, имамо да је диференцијална k-форма на M сечење котангентног k-раслојења котангентног раслојења од M.

Приметимо да за $k=0$, имамо да је $\Lambda^0(T^*M) = M$, па је $\omega : M \to M$.
За $k=1$ добијамо $\Lambda^1(T^*M) = T^*M$, па је $\omega : M \to T^*M$, односно ω ће бити сечење котангентног раслојења.

Покажимо да имамо n линеарно независних 1-форми $dx_i,\ 1 \le i \le n$ на M.
На основу претходних разматрања знамо да 1-форму ω на M можемо да запишемо као $\omega = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i dx_i$, за глатке функције $a_i : M \to \mathrm{R}$. За 1-форму ω важи $\omega = 0$ ако и само ако за свако векторско поље $X_j \in \chi(M)$ важи $\omega(X_j) = 0,\ 1 \le j \le n$. Како је $\omega(X_j) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i dx_i(X_j) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \delta_i^j = a_i$, за $i=j$, онда ће $\omega(X_j) = 0$ ако и само ако су сви $a_i \equiv 0$, па су $dx_i,\ 1 \le i \le n$, линеарно независне.
Што се тиче линеарно независних 2-форми облика $dx_i \wedge dx_j, 1 \le i \le n, 1 \le j \le n$ на M, одабире можемо да правимо на n^2 начина. Међутим, приметимо да је $dx_i \wedge dx_i$, за $1 \le i \le n$ нула форма, као последица антикомутативности спољашњег производа 1-форми, па је за сад тражени број $n^2 - n$. Како је $dx_i \wedge dx = -dx_j \wedge dx_i$, сваку 2-форму смо рачунали два пута, па је коначни број линеарно независних 2-форми на M управо $(n^2-n)/2 = \binom{n}{2}$. Сличним резоновањем добијамо да имамо $\binom{n}{k}$ линеарно независних k-форми на M, $1 \le k \le n$. Доказ за линеарну независност к-форми, $2 \le k \le n$, се спроводи на исти начин као за $k=1$.

Како је број линеарно независних k-форми из простора $\Omega^k(M)$ управо димензија тог простора, следи $dim\ \Omega^k(M) = \binom{n}{k}, 1 \le k \le n$ и једна база простора $\Omega^k(M)$ је $dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge ... \wedge dx_{i_k}, 1 \le i_1 < i_2 < ... < i_k \le n$.

Приметимо да за $k = n$ важи $dim\ \Omega^n(M) = \binom{n}{n} = 1$, па имамо само једну линеарно независну n-форму. У питању је $dx_1 \wedge dx_2 \wedge ... \wedge dx_n \neq 0$

и представља једну базу за $\Omega^n(M)$. Како $(k+1)$-форме на M, $1 \leq k \leq n$, добијамо спољашњим производом k-форми на M са 1-формама на M, онда спољашњим производом 1-форми са n-формом $dx_1 \wedge dx_2 \wedge ... \wedge dx_n$ треба да добијемо $(n+1)$-форму на M. Међутим, $dx_i \wedge dx_1 \wedge dx_2 \wedge ... \wedge dx_n = 0$, за $1 \leq i \leq n$, јер је $dx_i \wedge dx_i = 0$. Закључујемо да за $k > n$ важи $\Omega^k(M) = 0$.

Теорема 4: *[8] Нека је U отворен подскуп од M. Тада постоји јединствено диференцирање*

$$d : \Omega^k(U) \to \Omega^{(k+1)}(U),$$

такво да важи
1. d је $\mathbb{R}$ линеарно и важи $d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge (d\beta)$,
за $\alpha \in \Omega^k(U), \beta \in \Omega^l(U)$,
2. за $f \in \Omega^0(U) = C^\infty(M)$, df је обичан диференцијал,
3. $d \circ d = 0$,
4. Ако су U, V отворени у M тако да је $U \subseteq V \subseteq M$, тада је $d(\alpha|_U) = d(\alpha)|_U$
за $\alpha \in \Omega^k(V)$.
d зовемо спољашњим изводом.

Доказ:

Довољно је показати да је d јединствено дефинисано у произвољној карти (U, ψ). Узмимо произвољну k-форму на U

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_k \leq n} \omega_{i_1 ... i_k} dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_k}.$$

Тада, коришћењем особина 1, 2 и 3, имамо:

$$\begin{aligned} d\omega = & \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_k \leq n} d(\omega_{i_1 ... i_k} dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_k}) \\ = & \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_k \leq n} d(\omega_{i_1 ... i_k}) \wedge dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_k} \\ + & \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_k \leq n} \omega_{i_1 ... i_k} d(dx^{i_1}) \wedge ... \wedge dx^{i_k} \\ + ... + & \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_k \leq n} \omega_{i_1 ... i_k} dx^{i_1} \wedge ... \wedge d(dx^{i_k}) \end{aligned}$$

$$= \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_k \leq n} d(\omega_{i_1 ... i_k}) dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_k},$$

јер је $d(dx^{i_1}) = 0$.

Покажимо да d, такво да је $d\omega = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_k \leq n} d(\omega_{i_1 ... i_k}) \wedge dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_k}$ на произвољној карти (U, ψ), задовољава особине 1.,2.,3. и 4.
d делује на форме, тако да пролази кроз суму и множење скаларом, па можемо посматрати $\alpha = f_0 df_1 \wedge .... \wedge df_k$ и $\beta = g_0 dg_1 \wedge ... \wedge dg_l$. За $X \in \chi(M)$ произвољно, важи

$$d(f_0 g_0)(X) = X(f_0 g_0) = X(f_0) g_0 + X(g_0) f_0$$

$$= (g_0 df_0 + f_0 dg_0)(X) = g_0 df_0 + f_0 dg_0.$$

Користећи то, имамо

$$d(\alpha \wedge \beta) = d(f_0 g_0 df_1 \wedge .... \wedge df_k \wedge dg_1 \wedge ... \wedge dg_l)$$

$$= d(f_0 g_0) \wedge df_1 \wedge .... \wedge df_k \wedge dg_1 \wedge ... \wedge dg_l$$

$$= g_0 df_0 \wedge df_1 \wedge ... \wedge dg_l + f_0 dg_0 \wedge df_1 \wedge ... \wedge dg_l = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta,$$

чиме је доказана формула из 1., коју зовемо Лајбницова формула.
2. Већ смо показали да је df обичан диференцијал за $f \in \Omega^0(U)$.
3. Доказ следи из $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$.
4. Следи из локалних координата.
Може се показати да је d глобално дефинисано на M.
■

Нека су M и N диференцијабилне многострукости димензија m и n редом и нека је $F : M \to N$ глатко. Узмимо $p \in M$ произвољно. Хоћемо да дефинишемо пресликавање на котангентном простору које је дуално диференцијалу $dF_p : T_pM \to T_{F(p)}N$, односно да дефинишемо пресликавање $F^*(p) : T^*_{F(p)}N \to T^*_pM$. Тада је $F^*(p)(\eta) : T_pM \to \mathbb{R}$, за $\eta \in T^*_{F(p)}N$, односно $\eta : T_{F(p)}N \to \mathbb{R}$. Да бисмо дефинисали F^*, довољно је да видимо како делује на $X \in TM$, па га дефинишемо као

$$F^*(\eta)(X) := \eta(dF(X)).$$

Ако је η k-линеарно пресликавање на $T_{F(p)}N$, онда можемо да дефинишемо

$$F^*(\eta)(X_1, X_2, ..., X_k) := \eta(dF(X_1), ..., dF(X_k)),$$

и $F^*(\eta)$ је k-линеарно пресликавање на T_pM.
Такође, $F^*h = f \circ F$ за $h \in C^\infty(N) = \Omega^0(N)$, а важи и

$$F^*(dh) = d(h \circ F) = d(F^*(h)).$$

Тврђење 5: *[8] Нека су функције $F : M \to N, dimM = m, dimN = n$ и $G : N \to P$ глатке. Тада је*

$$F^* : \Omega^k(N) \to \Omega^k(M)$$

и важи
1. F^* комутира са d,
2. $(G \circ F)^* = F^* \circ G^*$,
3. $id_M^* = id_{\Omega^k(M)}$.

Доказ:

Нека је $\omega \in \Omega^k(N)$ и $p \in M$. Нека је (U, ϕ) карта на N са координатним функцијама $x_1, ..., x_n$, таква да $F(p) \in U$. Нека је (V, ψ) карта на M таква да $p \in V$ и $F(V) \subset U$. Тада можемо да пишемо

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_k \leq n} a_{i_1...i_k} dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_k},$$

где су $a_{i_1...i_k}$ глатке функције на U.
Тада

$$F^*(\omega) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_k \leq n} a_{i_1...i_k} \circ F d(x^{i_1} \circ F) \wedge ... \wedge d(x^{i_k} \circ F),$$

је глатка форма на V и имамо

$$d(F^*(\omega)) = d(\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_k \leq n} a_{i_1...i_k} \circ F d(x^{i_1} \circ F) \wedge ... \wedge d(x^{i_k} \circ F))$$

$$= \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_k \leq n} d(a_{i_1...i_k} \circ F) \wedge d(x^{i_1} \circ F) \wedge ... \wedge d(x^{i_k} \circ F)$$

$$= F^*(\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_k \leq n} da_{i_1...i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_k}) = F^*(d\omega).$$

Нека су $X_1, X_2, ..., X_k \in T_pM$. Тада $G \circ F : M \to P$, па имамо $(G \circ F)(p)^* : T^*_{G \circ F(p)} \to T^*_pM$. Дакле

$$(G \circ F)^*(\omega) = \omega(d(G \circ F)X_1, d(G \circ F)X_2, ..., d(G \circ F)X_k)$$

$$= \omega((dG \circ dF)(X_1), (dG \circ dF)(X_2), ..., (dG \circ dF)(X_k))$$

$$= \omega(dG(dF(X_1)), dG(dF(X_2)), ..., dG(dF(X_k)))$$

$$= G^*(\omega(dF(X_1), dF(X_2), ..., dF(X_k))$$

$$= F^* \circ G^*(\omega(X_1, X_2, ..., X_k)),$$

што је и требало показати.
Што се тиче својства 3.:

$$id^*_M(\omega(X_1, X_2, ..., X_k)) = \omega(d(id)X_1, ..., d(id)X_k) = \omega(X_1, ..., X_k),$$

при чему смо користили $d(id_p) = id_{T_pM}$.

■

Дефиниција 22: *$F^*(\omega)$ се назива pull-back форме ω при пресликавању F.*

Нека је $X, Y_1, Y_2, ..., Y_{k-1} \in \chi(M), \omega \in \Omega^k(M), f \in C^\infty(M)$ и $\psi : M \to M$ дифеоморфизам.

Тврђење 6: *Унутрашње множење диференцијалне k-форме векторским пољем X је дефинисано са*

$$i_X : \Omega^k(M) \to \Omega^{(k-1)}M, \;\; i_X\omega(Y_1, Y_2, ..., Y_{k-1}) := \omega(X, Y_1, Y_2, ..., Y_{k-1})$$

и задовољава следеће особине:
1. i_X је антидиференцирање, односно линеарно је и важи

$$i_X(\omega \wedge \eta) = (i_X\omega) \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge i_X\eta,$$

2. $i_{fX}\omega = fi_X\omega$, $i_Xdf = Xf$, $\psi^*(i_X\omega) = i_{d\psi(X)}\psi^*\omega$.

Доказ:

Видети [6].

■

Уместо $i_X(\omega)$, користи се и ознака $i(X)(\omega)$, као и $X \lrcorner\, \omega$.

Тврђење 7: ***(Картанова формула)***

Нека је $X(\Phi_t(x)) = \dfrac{d}{dt}\Phi_t(x)$, *где је* $\Phi_t : M \to M$ *и* $\alpha \in \Omega^k(M)$. *Тада је*

$$\frac{d}{dt}\Phi_t^*\alpha = \Phi_t^*(d(i(X)\alpha) + i(X)d\alpha).$$

Доказ:

Видети [11].

■

Тврђење 8: *Нека је* $X \in \chi(M)$ *и* Φ_t *њиме генерисана једнопараметарска фамилија дифеоморфизама,* $\omega \in \Omega^k(M)$. *Тада је Лијев извод диференцијалне форме* ω *дуж векторског поља* X *дефинисан са*

$$L_X\omega := \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\Phi_t^*\omega$$

и за њега важи

1. $L_X f = X(f)$, *за сваку* $f \in C^\infty(M)$,

2. $L_X(\alpha + \beta) = L_X\alpha + L_X\beta$, *за* $\alpha, \beta \in \Omega^k(M)$,

3. Лајбницово правило: $L_X(\alpha \wedge \beta) = (L_X\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge (L_X\beta)$,
за $\alpha \in \Omega^k(M),\ \beta \in \Omega^l(M)$,

4. L_X *комутира са* d *и* i.

Доказ:

Видети [6].

■

Више информација о диференцијалним формама читалац може пронаћи у [6], [11], [8] и [14].

Глава 4

Лагранжева механика

У овом поглављу ћемо увести Ојлер-Лагранжеве једначине на многострукостима користећи материјал из [6], [13] и [4].

4.1 Хамилтонов принцип

Посматраћемо Лагранжијан као функцију $\mathcal{L} : TM \to \mathbb{R}$, такву да $\mathcal{L} \in C^\infty(TM), \mathcal{L} = T - V$. Сматраћемо да је M диференцијабилна многострукост која има улогу конфигурационог простора, док је фазни простор брзина управо тангентно раслојење TM.

Уочимо пресликавање $\pi : TM \to M$, које је дефинисано са $\pi(x, \vec{t}) = x$. Оно сваком уређеном пару из простора TM додељује његову прву координату која је тачка са многострукости M. На тај начин, π представља пројекцију тангентног раслојења многострукости M на саму многострукост M.
Под генералисаним координатама конфигурационог простора M подразумевамо локалне координате x^i, уз помоћ којих ћемо дефинисати стандардне координате (q^i, v^j) на TM. Функције q^i ће представљати генералисане координате, а функције v^j ће представљати генералисане брзине фазног простора TM.

Нека је U отворен подскуп диференцијабилне многострукости M и нека је $\hat{U} = \pi^{-1}(U) \subset TM$. Координатне функције (q^i, v^j) дефинишимо за свако $(x, \vec{t}) \in \hat{U} \subset TM$ на следећи начин:

$$q^i(x, \vec{t}) := x^i \circ \pi(x, \vec{t}) = x^i(x), \tag{4.1}$$

$$v^j(x,\vec{t}) =: dx^j(\vec{t}), \tag{4.2}$$

при чему смо добили да $q^i(x,\vec{t})$ означава i-ту координату тачке x, док $v^j(x,\vec{t})$ представља j-ту координату вектора $\vec{t}$.

За криву $\gamma : [t_1, t_2] \to M$ са фиксираним крајњим тачкама дефинишимо функционал $\mathcal{I}[\gamma]$ са

$$\mathcal{I}[\gamma] = \int\limits_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}\bigg(q^i, \frac{dq^i}{dt}\bigg)\mathrm{dt},$$

где је $\mathcal{L}\bigg(q^i, \dfrac{dq^i}{dt}\bigg)$ скраћено од $\mathcal{L}(q^i, v^i) \circ \tilde{\gamma} \equiv \tilde{\gamma}^*(\mathcal{L})$, при чему крива $t \to \tilde{\gamma}(t) \equiv (\gamma(t), \dot{\gamma}(t))$ представља "подизање" криве $t \to \gamma(t)$ са M на TM.

Хамилтонов принцип истиче да су динамичке трајекторије конзервативног система задатог Лагранжијаном $\mathcal{L} = T - V$ решења варијационе једначине

$$\frac{d}{ds}\mathcal{I}[\gamma_s]\bigg|_{s=0},$$

за сваку варијацију криве $\gamma : [t_1, t_2] \to M$ са фиксираним крајњим тачкама, односно за сваку фамилију кривих $\gamma_s : [t_1, t_2] \to M, -\epsilon < s < \epsilon, \epsilon > 0$ произвољно, такву да је $\gamma_s(t_1) = \gamma(t_1), \gamma_s(t_2) = \gamma(t_2)$.

Такође, на основу претходног поглавља, познато нам је да су варијационе једначине еквивалентне Ојлер-Лагранжевим једначинама

$$\frac{dq^i}{dt} = v^i \tag{4.3}$$

$$\frac{d}{dt}\bigg(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v^i}\bigg) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} = 0. \tag{4.4}$$

У складу са претходним поглављем, природно би било једначине (4.3) и (4.4) записати као $\dfrac{d}{dt}\bigg(\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i}\bigg) - \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} = 0$. Међутим, њихов облик представљен једначинама (4.3) и (4.4) је погоднији, јер је видљивије да радимо на тангентном раслојењу многострукости M. Динамичка трајекторија на M је облика $\pi \circ \gamma(t) = x^i(t)$, где је крива $\gamma(t)$ решење једначина (4.3) и (4.4).

Успели смо да Ојлер-Лагранжеве једначине преведемо на језик многострукости. Међутим, једначине (4.3) и (4.4) зависе од избора координата (q^i, v^j), па је наш циљ да пронађемо на TM инваријантно дефинисано векторско поље $X_{\mathcal{L}}$ такво да су диференцијалне једначине његових интегралних кривих управо Лагранжеве једначине (4.3) и (4.4) у локалним координатама.

4.2 Симплектичка геометрија на TM

Размотримо конзервативни систем са Лагранжијаном $\mathcal{L} : TM \to \mathbb{R}$. Нека су (q^i, v^j) генералисане координате дефинисане на скупу $\hat{U} \subset TM$.
У овом поглављу дефинисаћемо регуларан Лагранжијан на TM и показати да у том случају можемо локално да дефинишемо затворену, недегенерисану 2- форму $\omega_{\mathcal{L}}$ и функцију енергије $h_{\mathcal{L}}$. Те форме нам одређују јединствено векторско поље $X_{\mathcal{L}}$ на TM једначином

$$dh_{\mathcal{L}} = -X_{\mathcal{L}} \lrcorner\, \omega_{\mathcal{L}}.$$

Диференцијалне једначине за интегралне криве од $X_{\mathcal{L}}$ биће Лагранжеве једначине.
Дефинишимо локално 1-форму $\theta_{\mathcal{L}}$ на TM као

$$\theta_{\mathcal{L}} = p_i dq^i, \;\; p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v^i}. \tag{4.5}$$

$\theta_{\mathcal{L}}$ је елемент простора $\Omega^1(M) = T^*M$, што значи да $\theta_{\mathcal{L}}(p) : T_pM \to \mathbb{R}$, за неко $p \in M$, односно $\theta_{\mathcal{L}} : TM \to \mathbb{R}$. Применом оператора спољашњег диференцирања d на форму $\theta_{\mathcal{L}}$ добијамо 2-форму на TM у локалним координатама, коју ћемо означити са

$$\omega_{\mathcal{L}} = dp_i \wedge dq^i. \tag{4.6}$$

Функције (q^i, p_j) дефинисаће нови координатни систем на $\hat{U}$ ако је Јакобијан координатне трансформације $(q^i, v^j) \longrightarrow (q^i, p_j)$ несингуларан. Јакобијан дате трансформације рачунамо као

$$J = \frac{\partial(q^i, p_j)}{\partial(q^a, v^b)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial q^i}{\partial q^a} & \frac{\partial q^i}{\partial v^b} \\ \frac{\partial p_j}{\partial q^a} & \frac{\partial p_j}{\partial v^b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta^i_a & 0 \\ \frac{\partial p_j}{\partial q^a} & \frac{\partial p_j}{\partial v^b} \end{pmatrix}.$$

Како је $p_i = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial v^i}$, даље имамо

$$J = \begin{pmatrix} \delta_a^i & 0 \\ \dfrac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial q^a \partial v^j} & \dfrac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial v^b \partial v^j} \end{pmatrix}.$$

Добили смо да је Јакобијан J несингуларан ако и само ако је

$$\det \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial v^b \partial v^j} \right) \neq 0. \tag{4.7}$$

Дефиниција 23: *[13] Лагранжијан $\mathcal{L}$ је регуларан ако задовољава једначину (4.7).*

Дакле, ако је Лагранжијан регуларан, тада координатне функције (q^i, p_j) заиста дефинишу нови координатни систем на $\hat{U} \subset TM$. Покажимо да је тада форма $\omega_{\mathcal{L}}$ недегенерисана, односно да важи

$$X \lrcorner\, \omega_{\mathcal{L}} = 0 \Leftrightarrow X = 0,$$

при чему је X векторско поље на TM, а $\lrcorner$ оператор унутрашњег диференцирања форми који је на 2-форми ω дефинисан једначином

$$(X \lrcorner\, \omega)(Y) = \omega(X, Y),$$

за векторска поља X и Y.

Како је X векторско поље на TM, можемо га изразити као

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial q^i} + X_i \frac{\partial}{\partial p_i}, \tag{4.8}$$

где су функције X^i и X_i компоненте векторског поља које одговарају новом координатном систему (q^i, p_j).

Нека је Y произвољно векторско поље на TM. Из једначина (4.6) и (4.8) имамо

$$(X \lrcorner\, \omega_{\mathcal{L}})(Y) = \omega_{\mathcal{L}}(X, Y) = (dp_i \wedge dq^i)\left(X^i \frac{\partial}{\partial q^i} + X_i \frac{\partial}{\partial p_i}, Y \right)$$

$$= dp_i\left(X^i\frac{\partial}{\partial q^i}+X_i\frac{\partial}{\partial p_i}\right)dq^i(Y)-dp_i(Y)dq^i\left(X^i\frac{\partial}{\partial q^i}+X_i\frac{\partial}{\partial p_i}\right).$$

Знамо да важи

$$dp_i(\frac{\partial}{\partial p_i})=1,\ dq^i(\frac{\partial}{\partial q^i})=1,\ dp_i(\frac{\partial}{\partial q^i})=0,\ dq^i(\frac{\partial}{\partial p_i})=0,$$

па заменом у претходну једначину добијамо

$$(X\lrcorner\,\omega_{\mathcal{L}})(Y)=X_idq^i(Y)-dp_i(Y)X^i,$$

одакле следи $X\lrcorner\,\omega_{\mathcal{L}}=X_idq^i-X^idp_i$.

Ако је $X\lrcorner\,\omega_{\mathcal{L}}=0$, следи да је $X^i=X_i=0$ за све $i=1,2,...,n$, одакле следи да је $X=0$, чиме је показана недегенерисаност форме $\omega_{\mathcal{L}}$.

Недегенерисаност $\omega_{\mathcal{L}}$ нам даје 1-1 кореспонденцију између векторских поља и 1-форми на $\hat{U}\subset TM$. То значи да можемо да дефинишемо јединствену 1-форму $\tilde{X}$ која ће одговарати векторском пољу X једначином

$$\tilde{X}=-X\lrcorner\,\omega_{\mathcal{L}}.$$

Такође, важи и обрнуто, односно можемо да одредимо јединствено векторско поље $\tilde{\lambda}$ на TM које ће одговарати 1-форми λ једначином

$$\lambda=-\tilde{\lambda}\lrcorner\,\omega_{\mathcal{L}}.$$

Дефинишимо функцију енергије $h_{\mathcal{L}}$ са

$$h_{\mathcal{L}}=v^i\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v^i}-\mathcal{L}=v^ip_i-\mathcal{L}.$$

Тада је

$$dh_{\mathcal{L}}=v^idp_i-\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q^i}\right)dq^i$$

1-форма на TM.

У складу са претходним разматрањем, дефинишимо јединствено векторско поље $X_{\mathcal{L}}$ које ће одговарати 1-форми $dh_{\mathcal{L}}$ једначином

$$dh_{\mathcal{L}}=-X_{\mathcal{L}}\lrcorner\,\omega_{\mathcal{L}}. \tag{4.9}$$

Изразимо $X_{\mathcal{L}}$ у локалним координатама као

$$X_{\mathcal{L}} = X^i \frac{\partial}{\partial q^i} + X_i \frac{\partial}{\partial p_i}.$$

Да бисмо одредили векторско поље X, треба да одредимо компоненте X^i и X_i. Уочимо следеће

$$v^i dp_i - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i}\right) dq^i = dh_{\mathcal{L}} = -X_{\mathcal{L}} \lrcorner\, \omega_{\mathcal{L}} = -X_i dq^i + X^i dp_i,$$

односно

$$v^i dp_i - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i}\right) dq^i = -X_i dq^i + X^i dp_i.$$

Изједначавањем одговарајућих коефицијената, добијамо следећу везу

$$X^i = v^i,$$

$$X_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i}.$$

Заменом одговарајућих компонената векторског поља $X_{\mathcal{L}}$, добијамо да је $X_{\mathcal{L}}$ у координатном систему (q^i, p_j) одређено једначином

$$X_{\mathcal{L}} = v^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i}. \tag{4.10}$$

Још је преостало да размотримо интегралне криве векторског поља $X_{\mathcal{L}}$. Означимо интегралну криву векторског поља $X_{\mathcal{L}}$ са γ. Тада за t такво да $\gamma(t) \in U$, при чему је U отворен подскуп многострукости M на ком су дефинисане координатне функције (q^i, p_j), важи

$$X_{\mathcal{L}\gamma(t)} = \gamma_*(t) = d\gamma_t \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_t = \alpha^i(\gamma(t)) \left(\frac{\partial}{\partial q^i}\right)_{\gamma(t)} + \alpha_i(\gamma(t)) \left(\frac{\partial}{\partial p_i}\right)_{\gamma(t)}.$$

Да бисмо одредили интегралне криве, неопходно је одредити непознате функције α^i и α_i.

$$\alpha^i(\gamma(t)) = d\gamma_t \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_t (q^i) = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_t (q^i \circ \gamma),$$

одакле следи да је $\alpha^i = \dot{q}^i$. Слично,

$$\alpha_i(\gamma(t)) = d\gamma_t \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_t (p_i) = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_t (p_i \circ \gamma),$$

одакле следи да је $\alpha_i = \dot{p}_i$.

Заменом α^i и α_i у $\gamma_*(t)$, добијамо

$$\gamma_*(t) = \dot{q}^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \dot{p}^i \frac{\partial}{\partial p^i}.$$

Ако упоредимо претходну једначину са једначином (4.10) добићемо следеће диференцијалне једначине

$$\dot{q}^i = v^i$$

$$\dot{p}_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i},$$

а то су управо Ојлер-Лагранжеве једначине кретања (4.3) и (4.4), што смо и хтели да покажемо.

Приметимо да $\theta_{\mathcal{L}}, \omega_{\mathcal{L}}, h_{\mathcal{L}}, X_{\mathcal{L}}$ зависе експлицитно од координата (q^i, v^j). Међутим, структура TM дозвољава инваријантну дефиницију ових појмова. То значи да, уз претпоставку регуларности Лагранжијана, једначина (4.9) дефинише $X_{\mathcal{L}}$ глобално и инваријантно на TM. Приметимо да, прелазак из једног система са Лагранжијаном $\mathcal{L}_1$ у други систем са Лагранжијаном $\mathcal{L}_2$, нарушава једначину (4.9), јер ће Лагранжијани дефинисати различите 2-форме $\omega_{\mathcal{L}1}$ и $\omega_{\mathcal{L}2}$.
Наш циљ је да у наредних неколико поглавља покажемо да, ако коришћењем Лежандрове трансформације све преформулишемо на језик котангентног раслојења T^*M, сви регуларни Лагранжијани дефинишу исту фундаменталну 2-форму. Та форма биће канонска симплектичка 2-форма на T^*M.

4.3 Симплектичке форме на многострукостима

Увешћемо симплектичку структуру на многострукостима, јер нам омогућава инваријантну формулацију закона механике на многострукостима.

Дефиниција 24: *[4] Нека је M $2n$-димензионална многострукост на којој је дефинисана диференцијална 2-форма ω која је*
1. недегенерисана, што значи да $(\forall X \in TM)(\exists Y \in TM)\ \omega(X,Y) \neq 0$;
2. затворена, односно $d\omega = 0$.

Диференцијалну 2-форму ω називамо сиплектичком формом, а многострукост (M, ω) називамо симплектичком многострукошћу.

Симплектоморфизам, тј. симплектички дифеоморфизам f симплектичких многострукости (M_1, ω_1) и (M_2, ω_2) је дифеоморфизам $f : M_1 \to M_2$ за који важи $f^*(\omega_2) = \omega_1$.

Лема 5: *[6] Нека је (M, ω) симплектичка многострукост и $\phi_t : M \to M$ глатка фамилија дифеоморфизама. Нека је*

$$\frac{d}{dt}\phi_t(x) = X_t(\phi_t(x)), \phi_0(x) = x.$$

Тада је $\phi_t^*(\omega) \equiv \omega$ ако и само ако је $X_t \lrcorner\, \omega$ затворена форма.

Доказ:

Применимо Картанову формулу:

$$\frac{d}{dt}\phi_t^*(\omega) = \phi_t^*(X_t \lrcorner\, d\omega + d(X_t \lrcorner\, \omega)) = \phi_t^*(d(X_t \lrcorner\, \omega)).$$

Следи $\dfrac{d}{dt}\phi_t^*(\omega) = 0$ ако и само ако је $d(X_t \lrcorner\, \omega) = 0$, односно ако и само ако је $X_t \lrcorner\, \omega$ затворена форма.

■

Дефиниција 25: *[6] Ако је 1-форма $X \lrcorner\, \omega$ затворена, векторско поље X називамо симплектичким векторским пољем.*

На основу претходне леме знамо да ако је X симплектичко векторско поље, онда је дифеоморфизам дефинисан са

$$\frac{d}{dt}\phi_t(x) = X_t(\phi_t(x)),\ \phi_0(x) = x$$

симплектоморфизам. Такође, приметимо да симплектоморфизми чувају симплектичке форме.

Дефиниција 26: *[6] За $\omega \in \Omega^k(M)$ кажемо да је тачна ако постоји $\eta \in \Omega^{(k-1)}(M)$ таква да је $d\eta = \omega$.*

Дефиниција 27: *Ако је 1- форма $X \lrcorner \omega$ тачна, тј.*

$$dH = -X \lrcorner \omega$$

за неку глатку функцију $H : M \to \mathbb{R}$, онда X називамо Хамилтоновим векторским пољем и означавамо са X_H. Функцију H називамо Хамилтоновом функцијом, или Хамилтонијаном.

Дефиниција 28: *[6] Ако је X_t фамилија Хамилтонових векторских поља, дифеоморфизам*

$$\frac{d}{dt}\phi_t(x) = X_t(\phi_t(x)), \phi_0(x) = x$$

зовемо Хамилтоновим дифеоморфизмом и означавамо га са ϕ^H.

Како је свака тачна форма и затворена, следи да и Хамилтонови дифеоморфизми чувају симплектичку форму.

Теорема 5: ***(Дарбу)***

Нека је (M, ω) симплектичка многострукост и нека је $x \in M$ произвољно. Тада постоји карта $(U, q^1, ..., q^n, p_1, ..., p_n)$ таква да је $x \in U$ и важи

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq^i.$$

Такву карту зовемо Дарбуовом картом, а координате $(U, q^1, ..., q^n, p_1, ..., p_n)$ Дарбуовим координатама.

Доказ:
(Видети [5]).
■

На основу Дарбуове теореме закључујемо да симплектичке многострукости можемо да разликујемо само глобално, не и локално. Управо због тога су погодне за инваријантну формулацију закона механике.
Пример симплектичке многострукости који нам је од посебног значаја је котангентно раслојење многострукости.

4.4 Котангентно раслојење многострукости

У овом поглављу дефинишемо канонску 1-форму θ на T^*M и помоћу ње долазимо до канонске 2-форме ω на T^*M, која ће нам бити од значаја за даљи рад.

Нека је (U, x^i) карта на M, $i = 1, 2, ..., n$, а пресликавање $\pi : T^*M \to M$ пројекција дефинисана са $\pi(x, \lambda) = x$. Дефинишимо координате (q^i, p_j) на $\hat{U} = \pi^{-1}(U)$ са

$$q^i(x, \lambda) = x^i \circ \pi(x, \lambda) = x^i(x)$$

$$p_j(x, \lambda) = \lambda(\frac{\partial}{\partial x^j}). \tag{4.11}$$

Функције q^i на T^*M имају исту вредност као и функције q^i дефинисане на TM. Fункције p_j имају вредност j-те компоненте ковектора λ. Повезаност атласа за M и T^*M омогућава постојање глобално дефинисане канонске 1-форме θ на T^*M.
Дефинишимо θ

$$\theta(X) := \lambda(d\pi(X)), \tag{4.12}$$

где је $X \in T_{(x,\lambda)}(T^*M)$, а $d\pi : T(T^*M) \to TM$. Једначину (4.12) можемо да запишемо и као

$$X \lrcorner\, \theta = (d\pi X) \lrcorner\, \lambda.$$

Дефиниција 29: *[13] Вектор $X \in T_{(x,\lambda)}(T^*M)$ је вертикалан ако је $d\pi(X) = 0$.*

Дефиниција 30: *[13] 1-форма μ на T^*M је хоризонтална ако је $\mu(X) = 0$ кад год је X вертикално.*

Запишимо θ у локалним координатама дефинисаним у (4.11).

$$\theta = \theta_i dq^i + \theta^i dp_i. \tag{4.13}$$

Треба одредити компоненте θ_i и θ^i. Нека је $(x, \lambda) \in \hat{U} \subset T^*M$ произвољно. Тада имамо

$$\theta_i = \theta\left(\frac{\partial}{\partial q^i}\bigg|_{(x,\lambda)}\right) = \lambda\left(d\pi\left(\frac{\partial}{\partial q^i}\right)\right) = \lambda\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right).$$

Заменом $p_j(x,\lambda) = \lambda\left(\dfrac{\partial}{\partial x^j}\right)$ у претходну једначину добијамо да је $\theta_i = p_i(x,\lambda)$.

Приметимо да су базни вектори $\dfrac{\partial}{\partial p_j}$ вертикални, јер је

$$d\pi\left(\frac{\partial}{\partial p_j}\right)(x^i) = \frac{\partial}{\partial p_j}(x^i \circ \pi) = \frac{\partial}{\partial p_j}(q^i) = 0.$$

Стога, за θ^i, имамо

$$\theta^i = \theta\left(\frac{\partial}{\partial p_i}\bigg|_{(x,\lambda)}\right) = \lambda\left(d\pi\left(\frac{\partial}{\partial p_i}\right)\right) = 0.$$

Заменом добијених компоненти у (4.13) закључујемо да $\theta = p_i dq^i$. Приметимо да ова форма подсећа на форму $\theta_{\mathcal{L}} = p_i dq^i$ из претходног поглавља. Међутим, то су форме на различитим просторима, θ је на T^*M, док је $\theta_{\mathcal{L}}$ на TM, јер су домени функција (q^i, p_j) у овом и претходном поглављу различити.

Дефиниција 31: *[13] Канонска симплектичка 2-форма ω на T^*M, $\omega : T(T^*M) \times T(T^*M) \to \mathbb{R}$, је $\omega := d\theta$. У локалним координатама (4.11) је представљена као*

$$\omega = dp_i \wedge dq^i. \tag{4.14}$$

Из дефиниције је јасно да је ω затворена, а из ранијег разматрања да је и недегенерисана.

Дефиниција 32: *[13] Координате (u^i, w_j) су канонске координате на T^*M ако симплектичка 2-форма ω изражена у тим координатама има облик*

$$\omega = dw_i \wedge du^i. \tag{4.15}$$

Глава 5

Лежандрове трансформације

Изложимо разматрања из [13]. У овом поглављу конструисаћемо пресликавање $\Lambda_{\mathcal{L}} : TM \to T^*M$ које зовемо Лежандровом трансформацијом. Оно ће нам омогућити прелазак са Лагранжевог на Хамилтонов формализам.

Нека је $f : TM \to \mathbb{R}$ произвољна глатка функција. Дефинишимо пресликавање $\Lambda_f : TM \to T^*M$, такво да $\Lambda_f(T_xM) \subset T_x^*M$, са

$$\Lambda_f((x,X)) := (x, \beta_{(x,X)})$$

где је $\beta_{(x,X)}$ дефинисан са

$$\beta_{(x,X)}(Y) = \frac{d}{dt}(f(x, X+tY))|_{t=0}, \forall Y \in T_xM. \tag{5.1}$$

Приметимо да је Λ_f независно од избора координата, али да експлицитно зависи од избора функције f. Специјално, за $f = \mathcal{L}$ имамо

$$\Lambda_{\mathcal{L}}((x,X)) := (x, \beta_{(x,X)}),$$

где је

$$\beta_{(x,X)}(Y) = \frac{d}{dt}(\mathcal{L}(x, X+tY))|_{t=0}, \forall Y \in T_xM.$$

$\beta_{(x,X)}$ записан у локалним координатама (q^i, v^j) на TM је

$$\begin{aligned}\beta_{(x,X)}(Y) &= \frac{d}{dt}(\mathcal{L}(x, X+tY))|_{t=0}\\ &= \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v^i}(x, X+tY)\frac{d}{dt}(v^i(x, X+tY))\right]\Bigg|_{t=0}\end{aligned}$$

$$= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v^i}(x,X)Y^i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v^i}(x,X)dx^i(Y).$$

Следи $\beta_{(x,X)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v^i}(x,X)dx^i$, што можемо записати и као $\beta_{(x,X)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v^i}dx^i$, уз напомену да је функција $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v^i}$ израчуната у тачки $(x,X) \in T_xM$.

Покажимо да је $\Lambda_{\mathcal{L}}$ локални дифеоморфизам ако и само ако је $\mathcal{L}$ регуларан. Ако претпоставимо да је $\mathcal{L}$ регуларан, онда знамо да је

$$\det \frac{\partial(q^i, p_j)}{\partial(q^a, v_b)} = \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial v^b \partial v^j} \neq 0.$$

Међутим, $\det(d\Lambda_{\mathcal{L}}) = \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial v^b \partial v^j}$, па на основу теореме о инверзној функцији следи да је $\Lambda_{\mathcal{L}}$ локални дифеоморфизам.
Што се тиче другог смера, ако претпоставимо да је $\Lambda_{\mathcal{L}}$ локални дифеоморфизам и $U \subset TM$ отворен, онда имамо

$$d(\Lambda_{\mathcal{L}}|_U) \cdot d((\Lambda_{\mathcal{L}})^{-1}|_{\Lambda_{\mathcal{L}(U))}}) = d(id|_{\Lambda_{\mathcal{L}}(U)}) = id|_{d\Lambda_{\mathcal{L}}(U)},$$

$$d((\Lambda_{\mathcal{L}})^{-1}|_{\Lambda_{\mathcal{L}(U))}}) \cdot d(\Lambda_{\mathcal{L}}|_U) = d(id|_U).$$

На основу тога закључујемо да је $0 \neq \det(d(\Lambda_{\mathcal{L}}|_U)) = \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial v^b \partial v^j}$, одакле следи регуларност Лагранжијана.

Дефиниција 33: *Лагранжијан је хипер-регуларан ако је регуларан и Лежандрова трансформација $\Lambda_{\mathcal{L}} : TM \to T^*M$ одређена са $\mathcal{L}$ је дифеоморфизам.*

Дакле, само хипер-регуларан Лагранжијан $\mathcal{L}$ индукује Лежандрову трансформацију $\Lambda_{\mathcal{L}}$, која је у том случају дифеоморфизам. Изразимо $\Lambda_{\mathcal{L}}$ користећи локалне координате (q^i, v^j) на TM и (q^i, p_j) на T^*M:

$$\Lambda_{\mathcal{L}}((x,X)) = (x, \beta_{(x,X)}) = \left(x, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v^i}(x,X)dx^i\right),$$

$$q^i(\Lambda_{\mathcal{L}}((x,X)) = q^i(x, \beta_{(x,X)}) = x^i \circ \pi(x, \beta_{(x,X)}) = x^i(x),$$

$$p_j(\Lambda_{\mathcal{L}}((x,X))) = \beta_{(x,X)}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v^i}(x,X)dx^i\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v^j}(x,X). \quad (5.2)$$

Приметимо,

$$(q^i, p_j) \circ \Lambda_{\mathcal{L}} = \left(q^i, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v^j}\right),$$

чиме смо добили Лежандрове трансформације у класичним координатама.

Како је $\Lambda_{\mathcal{L}} : TM \to T^*M$ глатко, можемо индуковати следећа пресликавања

$$(\Lambda_{\mathcal{L}})_* : T(TM) \to T(T^*M)$$

и

$$(\Lambda_{\mathcal{L}})^* : T^*(T^*M) \to T^*(TM),$$

при чему $(\Lambda_{\mathcal{L}})_*$ називамо још и push-forward, јер њим "гурамо" векторе тангентне на TM до оних вектора тангентних на T^*M. Пресликавање $(\Lambda_{\mathcal{L}})^*$ називамо још и pull-back, јер нам служи да враћамо форме из T^*M до форми на TM.
Нека је ω из једначине (4.14). Израчунајмо њену слику при пресликавању $(\Lambda_{\mathcal{L}})^*$, користећи познате особине, као и једначине (5.2) и (4.6).

$$\begin{aligned}
(\Lambda_{\mathcal{L}})^*(\omega) &= (\Lambda_{\mathcal{L}})^*(dp_i \wedge dq^i) \\
&= (\Lambda_{\mathcal{L}})^*(dp_i) \wedge (\Lambda_{\mathcal{L}})^*(dq^i) \\
&= d((\Lambda_{\mathcal{L}})^*(p_i)) \wedge d((\Lambda_{\mathcal{L}})^*(q^i)) \\
&= d(p_i \circ \Lambda_{\mathcal{L}})) \wedge dq^i \\
&= d\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v^i}\right) \wedge dq^i \\
&= d\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v^i} dq^i\right) \\
&= d(\theta_{\mathcal{L}}) \\
&= \omega_{\mathcal{L}},
\end{aligned}$$

што је 2-форма на TM. Ако бисмо узели формулу

$$\omega_{\mathcal{L}} = (\Lambda_{\mathcal{L}})^*(\omega)$$

за дефиницију $\omega_{\mathcal{L}}$, онда је $dh_{\mathcal{L}} = -X_{\mathcal{L}} \lrcorner\, \omega_{\mathcal{L}}$ једначина 4.9, којом је инваријантно дефинисано $X_{\mathcal{L}}$ помоћу $h_{\mathcal{L}}$, коришћењем следеће две дефиниције.

Дефиниција 34: *Нека је* $f : TM \to \mathbb{R}$ *глатко пресликавање. Ојлерово векторско поље* ϵ *на* TM *је векторско поље дефинисано у тачки* (x, X) *са* $\epsilon(f)(x, X) = \dfrac{d}{dt}(f(x, X + tX))|_{t=0}$.

Дефиниција 35: *За сваку глатку функцију* $f : TM \to \mathbb{R}$ *дефинишимо придружену Хамилтонову функцију* h_f *са* $h_f := \epsilon(f) - f$.

Покажимо да је Ојлерово векторско поље ϵ у локалним координатама (q^i, v^j) на TM облика $\epsilon = v^i \dfrac{\partial}{\partial v^i}$.

Нека је $f : TM \to \mathbb{R}$ глатко пресликавање и $(x, X) \in TM$ произвољно. Тада имамо

$$\epsilon(f)(x, X) = \frac{d}{dt}(f(x, X + tX))|_{t=0}$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial v^i}(x, X + tX) \frac{d}{dt} dx^i(X + tX) \right)\Bigg|_{t=0} = \frac{\partial f}{\partial v^i}(x, X) X^i$$

$$= \frac{\partial f}{\partial v^i}(x, X + tX) dx^i(X) = \frac{\partial f}{\partial v^i}(x, X + tX) v^j(x, X),$$

одакле следи $\epsilon = v^i \dfrac{\partial}{\partial v^i}$.

5.1 Хамилтонова динамика на T^*M

Нека је M конфигурациони простор класичног система са регуларним Лагранжијаном $\mathcal{L}$, TM фазни простор брзине и T^*M фазни простор момента. У овом поглављу користићемо Лежандрову трансформацију $\Lambda_{\mathcal{L}} : TM \to T^*M$ да бисмо прешли са Лагранжевог на Хамилтонов формализам.

Уверили смо се да Лагранжеве једначине могу бити формулисане инваријантно на TM као диференцијалне једначине интегралних кривих на векторском пољу $X_{\mathcal{L}}$, које је дефинисано са

$$dh_{\mathcal{L}} = -X_{\mathcal{L}} \lrcorner \omega_{\mathcal{L}},$$

где је

$$\omega_{\mathcal{L}} = (\Lambda_{\mathcal{L}})^*(\omega)$$

и

$$h_{\mathcal{L}} = \epsilon_{\mathcal{L}} - \mathcal{L}.$$

Запишимо ове једначине на T^*M коришћењем Лежандрове трансформације. Знамо да ако су $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ регуларни Лагранжијани на TM и ако је ω канонска симплектичка форма на T^*M, онда је $\omega_{\mathcal{L}_1} = (\Lambda_{\mathcal{L}1})^*(\omega)$ и $\omega_{\mathcal{L}_2} = (\Lambda_{\mathcal{L}2})^*(\omega)$. То управо значи да свака симплектичка форма $\omega_{\mathcal{L}}$ на TM дефинисана регуларним Лагранжијаном представља слику канонске симплектичке 2-форме ω на T^*M при пресликавању $(\Lambda_{\mathcal{L}})^* : T^*(T^*M) \to T^*(TM)$.

Нека је $f : T^*M \to \mathbb{R}$ произвољна глатка функција на T^*M. Тада df представља 1-форму, а због 1-1 кореспонденције са векторским пољима можемо да јој придружимо јединствено векторско поље на T^*M.

Дефиниција 36: *Векторско поље X_f на T^*M дефинисано са*

$$df = -X_f \lrcorner\, \omega \tag{5.3}$$

је глобално дефинисано Хамилтоново векторско поље одређено са f.

Нека су (q^i, p_j) канонске координате на T^*M дефинисане као у једначини (4.11). Изразимо X_f дефинисаног као у једначини (5.3) у локалним координатама:

$$X_f = X^i \frac{\partial}{\partial q^i} + X_i \frac{\partial}{\partial p_i}.$$

Израчунајмо $X_f \lrcorner\, \omega_{\mathcal{L}}$. Нека је Y произвољно векторско поље на T^*M. Тада имамо

$$(X_f \lrcorner\, \omega_{\mathcal{L}})(Y) = \omega_{\mathcal{L}}(X_f, Y) = (dp_i \wedge dq^i)\left(X^i \frac{\partial}{\partial q^i} + X_i \frac{\partial}{\partial p_i}, Y\right)$$

$$= dp_i\left(X^i \frac{\partial}{\partial q^i} + X_i \frac{\partial}{\partial p_i}\right) dq^i(Y) - dp_i(Y) dq^i\left(X^i \frac{\partial}{\partial q^i} + X_i \frac{\partial}{\partial p_i}\right)$$

$$= X_i dq^i(Y) - dp_i(Y) X^i,$$

одакле следи $X_f \lrcorner\, \omega_{\mathcal{L}} = X_i dq^i - X^i dp_i$.

Како је тотални диференцијал функције f управо $df = \dfrac{\partial f}{\partial q^i} dq^i + \dfrac{\partial f}{\partial p_i} dp_i$, заменом леве и десне стране у једначину $df = -X_f \lrcorner\, \omega$, добијамо

$$X^i = \frac{\partial f}{\partial p_i},$$

$$X_i = -\frac{\partial f}{\partial q^i}.$$

Коначно, добијамо да је X_f у координатном систему (q^i, p_j) одређено једначином

$$X_f = \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p_i}.$$

Размотримо интегралне криве векторског поља X_f. Означимо интегралну криву векторског поља X_f са γ. Тада за t такво да $\gamma(t) \in U$, при чему је U отворен подскуп многострукости T^*M на ком су дефинисане координатне функције (q^i, p_j), важи

$$X_{f_{\gamma(t)}} = \gamma_*(t) = d\gamma_t\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_t = \gamma^i(\gamma(t))\left(\frac{\partial}{\partial q^i}\right)_{\gamma(t)} + \gamma_i(\gamma(t))\left(\frac{\partial}{\partial p_i}\right)_{\gamma(t)}.$$

Одредимо непознате функције γ^i и γ_i.

$$\gamma^i(\gamma(t)) = d\gamma_t\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_t(q^i) = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_t(q^i \circ \gamma),$$

одакле следи да је $\gamma^i = \dot{q}^i$. Слично

$$\gamma_i(\gamma(t)) = d\gamma_t\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_t(p_i) = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_t(p_i \circ \gamma),$$

одакле следи да је $\gamma_i = \dot{p}_i$.

Заменом γ^i и γ_i у $\gamma_*(t)$, добијамо

$$\gamma_*(t) = \dot{q}^i\frac{\partial}{\partial q^i} + \dot{p}^i\frac{\partial}{\partial p^i}.$$

Ако упоредимо претходну једначину са једначином $X_f = \dfrac{\partial f}{\partial p_i}\dfrac{\partial}{\partial q^i} - \dfrac{\partial f}{\partial q^i}\dfrac{\partial}{\partial p_i}$, добићемо следеће диференцијалне једначине

$$\dot{q}^i = \frac{\partial f}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial f}{\partial q^i}, \tag{5.4}$$

а то су управо Хамилтонове једначине кретања са функцијом f у улози Хамилтонове функције. То значи да Хамилтонове једначине, у зависности од одабира функције f, могу представљати једначине еластичности, једначине флуида, једначине електромагнетизма, дакле, имају богату примену.

На основу претходних разматрања можемо закључити да диференцијалне једначине интегралних кривих у канонским координатама имају форму Хамилтонових једначина, и то за за произвољну глатку функцију $f : T^*M \to \mathbb{R}$ као Хамилтонијаном.

Дефиниција 37: *Ако је $\mathcal{L} : TM \to \mathbb{R}$ хипер-регуларан, онда придружена Хамилтонова функција $H_{\mathcal{L}} : T^*M \to \mathbb{R}$ система је $H_{\mathcal{L}} = h_{\mathcal{L}} \circ \Lambda_{\mathcal{L}}^{-1}$. Ако је Лагранжијан регуларан, онда заменимо $\Lambda_{\mathcal{L}}^{-1}$ у горњој једначини са $(\Lambda_{\mathcal{L}}|_U)^{-1}$, где је U одговарајући подскуп који обезбеђује инверз.*

Надаље ћемо Хамилтонову функцију означавати симболом H, уместо $H_{\mathcal{L}}$. На основу претходног, имамо да диференцијалне једначине за интегралне криве Хамилтоновог векторског поља X_H, дефинисаног са $dH = -X_H \lrcorner\, \omega$, у канонским координатама на T^*M имају облик

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i},$$
$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i},$$

а то су стандардне Хамилтонове једначине. Нека је $\mathcal{L}$ регуларан и нека је $X_{\mathcal{L}}$ дефинисан са $dh_{\mathcal{L}} = -X_{\mathcal{L}} \lrcorner\, \omega_{\mathcal{L}}$.

Лема 6: *Ако је $\mathcal{L} : TM \to \mathbb{R}$ регуларан, онда је $(d\Lambda_{\mathcal{L}})(X_{\mathcal{L}}) = X_H$, где је $d\Lambda_{\mathcal{L}} : T(TM) \to T(T^*M)$.*

Доказ:

Нека је Y произвољно векторско поље на T^*M. Онда

$$\begin{aligned}
((d\Lambda_{\mathcal{L}}(X_{\mathcal{L}}))\lrcorner\, \omega)(Y) &= \omega(d\Lambda_{\mathcal{L}}(X_{\mathcal{L}}), Y) \\
&= \omega(d\Lambda_{\mathcal{L}}(X_{\mathcal{L}}), d\Lambda_{\mathcal{L}} \circ d\Lambda_{\mathcal{L}}{}^{-1}(Y)) \\
&= (\Lambda_{\mathcal{L}}{}^*(\omega))(X_{\mathcal{L}}, d\Lambda_{\mathcal{L}}{}^{-1}(Y)) \\
&= \omega_{\mathcal{L}}(X_{\mathcal{L}}, d\Lambda_{\mathcal{L}}{}^{-1}(Y)) \\
&= (X_{\mathcal{L}} \lrcorner\, \omega_{\mathcal{L}})(d\Lambda_{\mathcal{L}}{}^{-1}(Y))
\end{aligned}$$

$$= -dh_{\mathcal{L}}(d{\Lambda_{\mathcal{L}}}^{-1}(Y))$$
$$= -d(h_{\mathcal{L}} \circ {\Lambda_{\mathcal{L}}}^{-1})(Y)$$
$$= -(dH)(Y).$$

Y је произвољно, па имамо $dH = -(d\Lambda_{\mathcal{L}}(X_{\mathcal{L}})) \lrcorner\, \omega$, одакле следи $d\Lambda_{\mathcal{L}}(X_{\mathcal{L}}) = X_H$.

■

Претходна лема нам је од изузетног значаја, јер нам поручује да је свеједно да ли посматрамо Лагранжеве, или Хамилтонове једначине, јер једне можемо добити од других применом пресликавања $d\Lambda_{\mathcal{L}}$, уз претпоставку о Лагранжијановој регуларности.

Глава 6

Пуасонова алгебра функција класе $C^{\infty}(T^*M)$

Пуасонове заграде заједно са Лијевом алгебарском структуром функција класе C^{∞} на T^*M су централна места Хамилтонове динамике.

Подсетимо се формула које ће нам бити значајне у овом поглављу јер повезују оператор спољашњег и унутрашњег диференцирања форми и оператора Лијевог диференцирања. Нека је μ диференцијална форма, а X и Y глатка векторска поља на T^*M. Тада имамо

$$L_X(\mu) = X \lrcorner\, d(\mu) + d(X \lrcorner\, \mu), \tag{6.1}$$

$$L_X(Y \lrcorner\, \mu) - Y \lrcorner\, (L_X\mu) = [X, Y] \lrcorner\, \mu. \tag{6.2}$$

Дефиниција 38: *[13] Векторско поље X на T^*M које задовољава $L_X\omega = 0$ је локално Хамилтоново векторско поље.*

У наставку рада, под Хамилтоновим векторским пољима подразумеваћемо глобална Хамилтонова векторска поља.
Нека је μ диференцијална форма, а X локално Хамилтоново векторско поље на T^*M. Узимајући то у обзир, као и затвореност форме ω, из једначине (6.1) примењене на ω имамо

$$d(X \lrcorner\, \omega) = 0.$$

Закључујемо да је $X \lrcorner\, \omega$ затворена 1-форма, па локално постоји функција f таква да је $df = -X \lrcorner\, \omega$.

Размотримо Хамилтоново векторско поље X_f на T^*M одређемо функцијом $f : T^*M \to \mathbb{R}$. На основу дефиниције 34 из претходног поглавља, знамо да важи $df = -X \lrcorner\, \omega$, па заменом у (6.1) и коришћењем затворености ω, имамо

$$L_{X_f}\omega = 0.$$

На основу претходног, јасно је да је свако глобално Хамилтоново векторско поље и локално, али да обрат не важи. Такође, лако се проверава да су скупови локалних Хамилтонових, као и Хамилтонових векторских поља бесконачно димензиони векторски простори.
Следеће тврђење представља везу између Хамилтонових и локално Хамилтонових векторских поља.

Тврђење 9: *[13] Ако су X и Y локална Хамилтонова векторска поља на T^*M, онда је $[X,Y]$ Хамилтоново векторско поље на T^*M. Специјално, $[X,Y] = X_f$, где је $f = \omega(X,Y)$.*

Доказ:

Треба показати да постоји функција $f : T^*M \to \mathbb{R}$ таква да важи $[X,Y] \lrcorner\, \omega = -df$. Изразимо $[X,Y] \lrcorner\, \omega$ из формуле (6.2), примењене на X, Y и ω из формулације тврђења. Онда добијамо

$$[X,Y] \lrcorner\, \omega = L_X(Y \lrcorner\, \omega) - Y \lrcorner\, (L_X\omega).$$

Коришћењем $L_X\omega = 0$, имамо $[X,Y] \lrcorner\, \omega = L_X(Y \lrcorner\, \omega)$. Помоћу једначине (6.1), претходно можемо записати као

$$[X,Y] \lrcorner\, \omega = X \lrcorner\, d(Y \lrcorner\, \omega) + d(X \lrcorner\, (Y \lrcorner\, \omega)),$$

а заменом $d(Y \lrcorner\, \omega) = 0$, добијамо

$$[X,Y] \lrcorner\, \omega = d(X \lrcorner\, (Y \lrcorner\, \omega)) = d(-\omega(X,Y)).$$

Дакле, $[X,Y]$ је Хамилтоново векторско поље на T^*M одређено функцијом $f = \omega(X,Y)$.

■

На основу претходног закључујемо да је скуп локалних Хамилтонових векторских поља на T^*M са Лијевим заградама једна бесконачно димензионална Лијева алгебра и то подалгебра скупа свих глатких векторских поља на T^*M. Како је свако Хамилтоново векторско поље и локално Хамилтоново, следи да је скуп свих Хамилтонових векторских поља на T^*M једна подалгебра алгебре скупа локалних Хамилтонових векторских поља на T^*M. Знамо да свако глатко векторско поље X одговара јединственој 1-форми λ_X са $\lambda_X = -X \lrcorner\, \omega$. Из тога следи да је λ_X затворена ако је X локално Хамилтоново. Ако је X Хамилтоново, онда је λ_X тачна, а λ_X није затворена ако X није локално Хамилтоново. Следи да локална Хамилтонова и Хамилтонова векторска поља на T^*M одговарају затвореним и тачним диференцијалним формама, редом.

6.1 Пуасонове многострукости

Дефиниција 39: *[9] Нека је P многострукост и нека $\mathcal{F}(P)$ означава скуп свих глатких реално вредносних функција на P. Уочимо операцију*

$$\{\cdot,\cdot\} : \mathcal{F}(P) \times \mathcal{F}(P) \to \mathcal{F}(P).$$

Пар $(P, \{\cdot,\cdot\})$ зовемо Пуасоновом многострукошћу ако $\{\cdot,\cdot\}$ задовољава
1. билинеарност $\{\cdot,\cdot\}$;
2. антисиметричност $\{f,g\} = -\{g,f\}$;
3. Јакобијев идентитет $\{\{f,g\},h\} + \{\{h,f\},g\} + \{\{g,h\},f\} = 0$;
4. Лајбницово правило $\{fg,h\} = f\{g,h\} + g\{f,h\}$.

Дакле, Пуасонова многострукост је многострукост P са структуром Пуасонове алгебре $\{\cdot,\cdot\}$ на $\mathcal{F}(P)$.

Дефиниција 40: *[9] Нека су $(P_1, \{,\}_1)$ и $(P_2, \{,\}_2)$ Пуасонове многострукости. Пресликавање $\varphi : P_1 \to P_2$ називамо Пуасоновим ако за све $f, h \in \mathcal{F}(P_2)$ имамо*

$$\{f,h\}_2 \circ \varphi = \{f \circ \varphi, h \circ \varphi\}_1.$$

Ако је (P,ω) симплектичка многострукост, дефинишимо Пуасонове заграде $\{,\} : \mathcal{F}(P) \times \mathcal{F}(P) \to \mathcal{F}(P)$ са

$$\{f,g\} = -\omega\,\{X_f, X_g\}, \tag{6.3}$$

где су X_f и X_g Хамилтонова векторска поља дефинисана Хамилтонијанима f и g.

Тврђење 10: *[3] Извод функције g дуж векторског поља са Хамилтонијаном f је једнак Пуасоновој загради $\{g, f\}$.*

Доказ:

$$\{g, f\} = \omega(X_f, X_g) = -\omega(X_g, X_f) = -(X_g \lrcorner\, \omega)(X_f) = -(-dg(X_f))$$

$$= dg(X_f) = X_f(g).$$

■

Тврђење 11: *[9] Свака симплектичка многострукост је Пуасонова.*

Доказ:

Треба доказати особине 1-4 наведене у дефиницији Пуасонове многострукости.

■

Подсетимо се да је једначина векторског поља X_f у координатама (q^i, p_j) на T^*M управо

$$X_f = \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p_i}.$$

Онда је

$$X_f(g) = \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q^i} - \frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial g}{\partial p_i},$$

што су Пуасонове заграде у координатама (q^i, p_j) на T^*M.

Дефиниција 41: *[13] Скуп свих локалних Хамилтонових векторских поља на T^*M означавамо са $LHV \equiv LHV(T^*M)$. Скуп свих Хамилтонових векторских поља на T^*M означавамо са $HV \equiv HV(T^*M)$.*

Дефиниција 42: *[13] Пуасонову алгебру функција класе $C^\infty(T^*M)$ са мултипликационим правилом $X_f(g) = \{g, f\}$ означавамо са $HF \equiv HF(T^*M)$*

Приметимо да имамо две Лијеве алгебре на T^*M дефинисане симплектичком 2-формом ω. Операција у HV је одређена Лијевим заградама векторских поља, док је операција у HF одређена Пуасоновим заградама функција. Имамо природно пресликавање $\Phi : HF \to HV$ које је дато са
$f \to \Phi(f) = X_f$, прецизније $\{f, g\} = -\omega(X_f, X_g)$.

Тврђење 12: *[13] Нека су* $f, g : T^*M$ *и* $X_f, X_g \in LHV(T^*M)$. *Тада важи*

$$[X_f, X_g] = -X_{\{f,g\}}.$$

Доказ:

Искористимо формулу (6.2):

$$[X_f, X_g] \lrcorner\, \omega = L_{X_f}(X_g \lrcorner\, \omega) - X_g \lrcorner\, (L_{X_f}\omega),$$

где је ω симплектичка 2-форма. Како је X_f локално Хамилтоново, важи $L_{X_f}\omega = 0$. Заменом у претходну једначину и коришћењем (6.1) добијамо

$$[X_f, X_g] \lrcorner\, \omega = L_{X_f}(X_g \lrcorner\, \omega) = X_f \lrcorner\, d(X_g \lrcorner\, \omega) + d(X_f \lrcorner\, (X_g \lrcorner\, \omega)),$$

при чему ће $(X_g \lrcorner\, \omega) = 0$, због тога што је X_g локално Хамилтоново. Заменом имамо

$$[X_f, X_g] \lrcorner\, \omega = d(X_f \lrcorner\, (X_g \lrcorner\, \omega)) = d(\omega(X_g, X_f)) = d(\{f, g\}).$$

Дакле, $[X_f, X_g] \lrcorner\, \omega = d(\{f, g\}) = d(-\{g, f\})$, чиме смо показали да је $[X_f, X_g]$ Хамилтоново и то за функцију $\{g, f\}$, што записујемо са $[X_f, X_g] = X_{\{g,f\}} = -X_{\{f,g\}}$.

■

Разматрања из седмог поглавља су базирана на [13], [3] и [9].

Глава 7

Закони очувања

Лема 7: ***(Закон очувања енергије)*** *[6]*

Ако Хамилтонијан H не зависи експлицитно од t, онда је H константно дуж трајекторија Хамилтоновог система

$$\frac{d}{dt}\phi_t(x) = X_H(\phi_t(x)), \phi_0(x) = x,$$

за свако фиксирано $x \in M$.

Доказ:

$$\frac{d}{dt}H(\phi_t(x)) = dH(\frac{d}{dt}\phi_t(x)) = dH(X_H) = \omega(X_H, X_H) = 0.$$

■

Теорема 6: ***(Лиувилова теорема)*** *[11]*
Симплектички дифеоморфизми чувају запремину дефинисану са ω^n.

Доказ:

$$\phi^*(\omega \wedge \omega \wedge ... \wedge \omega) = \phi^*(\omega) \wedge \phi^*(\omega) \wedge ... \wedge \phi^*(\omega) = \omega \wedge \omega \wedge ... \wedge \omega,$$

што је и требало показати.

■

Тврђење 13: *[6] Нека Хамилтонијан $H : M \to \mathbb{R}$ не зависи од времена. Тада је функција $F : M \to \mathbb{R}$ константна дуж Хамилтонових путева дефинисаних Хамилтонијаном H ако и само ако је $\{H, F\} = 0$.*

Доказ:

$$\frac{d}{dt}F(\phi_t(x)) = dF(\frac{d}{dt}\phi_t(x)) = dF(X_H) = \omega(X_H, X_F) = \{H, F\}.$$

Дакле, $\frac{d}{dt}F(\phi_t(x)) = 0$ ако и само ако је $\{H, F\} = 0$. ■

За више информација, упућујемо читаоца на [6] и [11].

Литература

[1] Антић М., *Диференцијална геометрија многострукости*, Математички факултет, Београд, 2015.

[2] Arnold V. I., *Mathematical methods of Classical Mechanics*, Second Edition, Springer, 1989.

[3] Arnold V. I., Givental A. B, *Symplectic Geometry*, Itoqi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Probl. Mat. Fund. Napr. Volume 4, 5-135, 1985.

[4] Burkard E., *From Classical Mechanics to Symplectic Geometry*, Graduate Student Seminar at University of Notre Dame, Notre Dame, 2013.

[5] Cannas da Silva A., *Lectures on Symplectic Geometry*, Lecture Notes in Mathematics 1764, Springer-Verlag, 2001. and 2008. (corrected printing)

[6] Драговић В., Милинковић Д., *Анализа на многострукостима*, Математички факултет, Београд, 2003.

[7] Fitzpatrick R., *Newtonian Dynamics*, Fourth Edition, The University of Texas, Austin, 2011.

[8] Максимовић-Тот Т., *Тензорска поља и диференцијалне форме на глатким многострукостима*, Мастер рад, Нови Сад, 2012.

[9] Marsden J. E., *Lectures on Mechanics*, 2009.

[10] Милинковић Д., *Коваријантно диференцирање*, Настава математике, Београд, 2004.

[11] Милинковић Д., *Мини курс о симплектичким многострукостима*, Скрипта-помоћни уџбеник, 2001.

[12] Милинковић Д., *Многострукости у физици (и обрнуто)*, Математички факултет, Београд, 2001.

[13] Norris K. L., *Symplectic Geometry on Tangent and Cotangent Bundles*, Department of Mathematics, North Carolina State University, 2006.

[14] Schulz A. E., Schulz W. C., *A practical Introduction to Differential Forms* , Transgalactic Publishing Company Flagstaff, Vienna, Cosmopolis, 2016.

[15] Елезовић-Хаџић С., *Предавања из Теоријске механике*, 2008/2009.