(1) Ово је одломак из приче Сер А. К. Дојла *Самостанска школа*:

– Као што видите, овај траг је оставио за собом бицикл који је долазио од школе.

– А зар бицикл није могао да иде према школи?

– Не, не, драги мој Вотсоне. Зна се да задњи точак, на којем је тежиште читавог терета, оставља дубље трагове. Сигурно сте приметили да је задњи точак, прешавши на неколико места преко трага предњег точка, потпуно затро његове трагове који су плићи. То несумњиво доказује да је бициклиста долазио од школе.

(а) Има ли смисла ово што говори Шерлок Холмс?

(б) Нацртати пар линија које могу да буду траг бицикла (држећи једну оловку, која игра улогу предњег точка, између палца и кажипрста, а другу, која игра задњи точак, између кажипрста и средњег прста) и пар произвољних линија, дати цртеж другим студентима који раде овај домаћи задатак, и тражити да погоде које линије јесу, а које нису траг бицикла. Исто урадити са њиховим цртежима.

(в) Може ли да се одреди смер кретања бицикла на основу његовог трага?

[Опширније о бициклизму видети у *Геометрија и машта*, Конвеј, Дојл, Гилман, Трстон.]

(2) У ноћи без месечине ученик стоји на торњу високом y метара, а његов учитељ *кјудоа* (уметности руковања луком и стрелом) смирено стоји удаљен x метара од торња, са повезом преко очију. У тренутку кад ученик баца јабуку са торња, учитељ одапиње стрелу почетном брзином v_0 под углом $\alpha := \arctan(y/x)$ и погађа јабуку у лету. Да ли је ово последица:

(а) случајно добро изабране почетне брзине v_0

(б) учитељеве интуиције и вештине концентрације

(в) ничега од понуђених одговора?

(3) Пројектили се испаљују с површине земље истом почетном брзином $v_0 > 0$ под променљивим углом $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Доказати да максималне висине које они достижу леже на елипси $x^2 + 4(y - \frac{v_0^2}{4g})^2 = \frac{v_0^4}{4g^2}$.

(4) Испитати функцију $y = f(x)$ задату имплицитно са $y^3 = x^2$ и скицирати њен график. Да ли је тај график

(а) глатка крива?

(б) глатка многострукост?

(в) глатка подмногострукост многострукости $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$?

(5) Нека је M многострукост. Доказати да је отворен подскуп $V \subset M$ повезан ако и само ако је путно повезан.

(6) Нека је $\mathbb{R} \ni t \mapsto A(t) \in GL(n, \mathbb{R})$ пут у многострукости $GL(n, \mathbb{R})$ инвертибилних $n \times n$ реалних матрица. Доказати да је вектор брзине пута $t \mapsto A^{-1}(t)$

$$\frac{dA^{-1}}{dt} = -A^{-1}\frac{dA}{dt}A^{-1}$$

(некомутативно уопштење формуле $(1/x)' = -1/x^2$).

(7) Доказати да је свако пресликавање $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^2$ хомотопно константном пресликавању. Да ли је свако пресликавање $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^1$ хомотопно константном?

(8) Површина круга полупречника r је πr^2, а обим кружнице која га ограничава је $2r\pi$, што је $\frac{d}{dr}(\pi r^2)$. Запремина тродимензионе лопте полупречника r је $\frac{4}{3}r^3\pi$; извод овог израза је $4r^2\pi$, што је површина дводимензионе сфере истог полупречника.
   (а) Доказати да је, за свако n, извод запремине n–димензионе лопте полупречника r једнак површини сфере која је ограничава. Да ли се ово може интерпретирати као последица дуалности „оператора" d и ∂, установљене Стоксовом теоремом?
   (б) Нека је V_n запремина n–димензионе лопте полупречника 1: $V_1 = 1$, $V_2 = \pi$, $V_3 = 4\pi/3$ итд. Приметимо да је $V_1 < V_2 < V_3$. Да ли се ова запремина и даље повећава са димензијом (тј. да ли је низ V_n растући)?
   (в) Израчунати $\max\limits_{n\in\mathbb{N}} V_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} V_n$.
   (г) Нека је P_n мера n–димензионе јединичне сфере: $P_1 = 2\pi$, $P_2 = 4\pi$ итд. Израчунати $\max\limits_{n\in\mathbb{N}} P_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} P_n$.
   (д) Доказати да је, за велико n, скоро сва запремина n–димензионе лопте сконцентрисана у ε–околини њене границе (и успут прецизно формулисати овај исказ).

(9) Доказати да се у Френеовом координатном систему $(\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B})$ убрзање $\mathbf{a}$ може написати као

$$\mathbf{a} = a_T\mathbf{T} + a_N\mathbf{N}$$

за $a_T = \frac{d}{dt}\|\mathbf{v}\|$, $a_N = \kappa\|\mathbf{v}\|^2$, где је κ кривина трајекторије и извести следеће закључке:
   (а) Убрзање увек лежи у равни $(\mathbf{T}, \mathbf{N})$ и не садржи информацију о томе колико путања одступа те од равни.
   (б) Тангентна компонента убрзања мери промену интензитета брзине.
   (в) Нормална компонента убрзања мери промену правца кретања (промену правца вектора брзине).
   (г) Теже је остати у седлу мотоцикла у кривини ако је кривина оштра (велико κ) или брзина велика, јер величина та два параметра одређује величину центрипеталне силе.

(10) Нека је $\mathbf{e}_r = \cos\theta\mathbf{i} + \sin\theta\mathbf{j}$, $\quad \mathbf{e}_\theta = -\sin\theta\mathbf{i} + \cos\theta\mathbf{j}$ покретни поларни координатни систем и $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{k}$ покретни цилиндрични координатни систем. Доказати да се брзина и убрзање изражавају са

$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + \dot{z}\mathbf{k}, \quad \mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{e}_\theta + \ddot{z}\mathbf{k}.$$

(11) Планета масе m се креће око Сунца масе M. Уведимо координатни систем тако да је Сунце смештено у координатни почетак и да се планета у почетном положају налази у равни $x0y$. По Њутновом закону гравитације, кретање се одвија под дејством гравитационе силе

$$\mathbf{F} = -\frac{GmM}{\|\mathbf{r}\|^2}\frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|}.$$

(а) Доказати да је $\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{c}$ за неки константан вектор $\mathbf{c}$ и закључити да се кретање одвија у једној равни.
(б) Доказати да је $\mathbf{c} = r^2\dot{\theta}\mathbf{k}$, где је $\mathbf{c}$ вектор из (а) и закључити да је $r^2\dot{\theta}$ константно.
(в) Доказати да је површина захваћена векторима положаја планете у тренуцима t_0 и t_1 и орбитом планете једнака $\int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2} r^2\, d\theta$.
(г) Извести из (б) и (в) **Други Кеплеров закон**: *Радијус вектор од Сунца до планете захвата једнаке површине у једнаким временима.*
(д) Претпоставимо да меримо време тако да је планета најближа Сунцу кад је $t = 0$ (и тиме $\dot{r}(0) = 0$, као први извод функције у њеном минимуму) и да је координатни систем изабран тако да је $\theta = 0$ кад је $t = 0$. Извести из (б) да је тада $r^2\dot{\theta} \equiv r_0 v_0$, где су r_0 и v_0 почетно растојање од Сунца и почетна брзина планете.
(ђ) Извести из (д) и Другог Њутновог закона да важи

$$\ddot{r} = \frac{r_0^2 v_0^2}{r^3} - \frac{GM}{r^2}$$

и сменом $p = \frac{dr}{dt}$ свести ову једначину другог реда на једначину првог реда

$$p\frac{dp}{dr} = \frac{r_0^2 v_0^2}{r^3} - \frac{GM}{r^2},$$

а одатле, користећи почетне услове $r(0) = r_0$, $\dot{r}(0) = 0$ извести једначину

$$\dot{r}^2 = v_0^2\Big(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\Big) + 2GM\Big(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\Big).$$

(е) Користећи (д) и (ђ) доказати да је

$$\frac{1}{r^4}\Big(\frac{dr}{d\theta}\Big)^2 = \frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2} + 2h\Big(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\Big),$$

где је $h = \frac{GM}{r_0^2 v_0^2}$ и сменом $u = \frac{1}{r}$ свести ову једначину на

$$\frac{du}{d\theta} = \pm\sqrt{(u_0 - h)^2 - (u - h)^2}, \quad \text{где је } u_0 := \frac{1}{r_0}. \qquad (\clubsuit)$$

(ж) Доказати да је $\dot{r} \geq 0$ за довољно мало $t \geq 0$, и из тога закључити да је

$$0 \leq \frac{\dot{r}}{\dot{\theta}} = \frac{dr}{d\theta} = -r^2\frac{du}{d\theta},$$

због чега једначину ($\clubsuit$) треба разматрати са негативним знаком.
(з) Узимајући у обзир да из почетних услова следи да је $u = u_0$ за $\theta = 0$ и да је u добијено сменом $u = \frac{1}{r}$, доказати да је решење једначине ($\clubsuit$)

$$r = \frac{(1+e)r_0}{1 + e\cos\theta}, \quad \text{где је } e = \frac{1}{r_0 h} - 1 = \frac{r_0 v_0^2}{GM} - 1,$$

што је формулација **Првог Кеплеровог закона**: *Путања планете око Сунца је конусни пресек са једним фокусом у Сунцу и са ексцентритетом* $\frac{r_0 v_0^2}{GM} - 1$.

(и) Нека је T период револуције планете око Сунца. Извести из (в) и (д) израз за површину елипсе по којој се планета креће: $P = \frac{1}{2}Tr_0v_0$.

(j) Користећи (и) и познату формулу за површину елипсе $P = ab\pi$ доказати **Трећи Кеплеров закон**: *Однос квадрата периода револуције планете и куба велике полуосе елипсе је исти за сваку планету у систему и износи*
$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}.$$

(12) Нека је $U \subset \mathbb{R}^3$ отворен скуп, $\mathbf{F}$ векторско поље а f функција на U, $dV := dx \wedge dy \wedge dz$ стандардна форма запремине, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и $(\cdot, \cdot, \cdot)$ еуклидски скаларни и мешовити производ. Дефинишимо форме
$$\eta_f^0 := f, \quad \eta_{\mathbf{F}}^1 := \langle \mathbf{F}, \cdot \rangle, \quad \eta_{\mathbf{F}}^2 := (\mathbf{F}, \cdot, \cdot), \quad \eta_f^3 := f\, dV.$$

(а) Доказати $\eta_{\mathbf{F}}^1 \wedge \eta_{\mathbf{G}}^1 = \eta_{\mathbf{F}\times\mathbf{G}}^2$ и $\eta_{\mathbf{F}}^1 \wedge \eta_{\mathbf{G}}^2 = \eta_{\langle \mathbf{F}, \mathbf{G} \rangle}^3$.

(б) Доказати да су са
$$\eta_{\nabla f}^1 := d\eta_f^0, \quad \eta_{\nabla\times\mathbf{F}}^2 := d\eta_{\mathbf{F}}^1, \quad \eta_{\nabla\cdot\mathbf{F}}^3 := d\eta_{\mathbf{F}}^2$$
добро дефинисана векторска поља *градијент* ∇f и *ротор* $\nabla \times \mathbf{F}$ и скаларно поље *дивергенција* $\nabla \cdot \mathbf{F}$, и да се њихов запис у еуклидским координатама израчунава по правилу три множења вектора (скаларног и векторског производа вектора и множења вектора скаларом) вектором $\nabla := \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$.

(в) Доказати да је $\omega_{\nabla\cdot\mathbf{F}\times\mathbf{G}}^3 = \omega_{\mathbf{G}\cdot\nabla\times\mathbf{F}-\mathbf{F}\cdot\nabla\times\mathbf{G}}^3$ и извести закључак да је $\operatorname{div}\mathbf{F}\times\mathbf{G} = \mathbf{G}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{F} - \mathbf{F}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{G}$.

(г) По угледу на (в) доказати да важи $\operatorname{rot}(f\mathbf{F}) = \operatorname{grad} f \times \mathbf{F} + f \operatorname{rot}\mathbf{F}$ и $\operatorname{div}(f\mathbf{F}) = \mathbf{F}\cdot\operatorname{grad} f + f\operatorname{div}\mathbf{F}$.

(д) Доказати да је $\operatorname{rot}\operatorname{grad} f = \mathbf{0}$ и $\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{F} = 0$.

(ђ) Доказати да важи
$$\begin{array}{ll} \int_\Sigma \nabla\times\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \int_{\partial\Sigma}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}, & \int_\Sigma (d\mathbf{S}\times\nabla)\times\mathbf{F} = \int_{\partial\Sigma} d\mathbf{S}\times\mathbf{F}, \\ \int_\Sigma \nabla f\times d\mathbf{S} = -\int_{\partial\Sigma} f\, d\mathbf{S}, & \int_V \nabla\cdot\mathbf{F}\, dV = \int_{\partial V}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}, \\ \int_V \nabla\times\mathbf{F}\, dV = -\int_{\partial V}\mathbf{F}\times d\mathbf{S}, & \int_V \nabla f\, dV = \int_{\partial V} f\, d\mathrm{S}. \end{array}$$

(е) *Лапласијан* Δ дефинише се као $\Delta := \operatorname{div}\circ\operatorname{grad}$. Доказати **Гринову формулу**
$$\int_V (g\Delta f - f\Delta g)\, dV = \int_{\partial V} (g\nabla f - f\nabla g)\cdot d\mathbf{S}.$$

(13) Нека су X и Y нормирани векторски простори.

(а) Нека су $L_1 : X \to Y$ и $L_2 : X \to \mathbb{R}$ линеарни оператори за које важи $\operatorname{Ker} L_1 \subset \operatorname{Ker} L_2$. Доказати да постоји линеарни оператор $\lambda : Y \to \mathbb{R}$, такав да је $L_2 = \lambda L_1$.

(б) Нека су $f : X \to \mathbb{R}$ и $g : X \to Y$ глатке функције и нека је, за неко $y_0 \in Y$, $S := g^{-1}(y_0)$ глатка површ у X. Доказати следеће бесконачно–димензионо уопштење **Лагранжеве теореме о условним екстремумима**: *Ако је $x_0 \in S$ тачка екстремума рестрикције $f|_S$, онда постоји линеарни оператор $\lambda : Y \to \mathbb{R}$ такав да је $f'(x_0) = \lambda g'(x_0)$.* Извести као последицу класичан Лагранжев метод за условне екстремуме.